Ekonomske teme 1 (1990), 75–82

# TRAČNE KOMPOZICIJE DETERMINISANE SISTEMIMA MONOMORFIZAMA

Stojan Bogdanović i Miroslav Ćirić

U ovom radu razmatramo tračne kompozicije determinisane pomoću dva tranzitivna sistema monomorfizama , koje nazivamo čvrstim trakama polugrupa .

A.H.Clifford , [3], je uveo pojam polumreža grupa i odredio njihovu strukturu u terminima koje mi danas nazivamo *jakim polumrežama* (*strong semilattices*) *grupa* . Jake polumreže polugrupa , tj. polumrežne kompozicije determinisane tranzitivnim sistemom homomorfizama , su razmatrane od strane mnogih autora . U [1] i [2] autori su dali konstrukcije traka monoida i inflacija traka monoida pomoću dva sistema homomorfizama , koji ne moraju biti tranzitivni . U ovom radu mi razmatramo tračne kompozicije polugrupa odredjene sistemima homomorfizama , koje , koristeći postojeću terminologiju iz polumrežnih kompozicija , nazivamo *jakim trakama ( strong bands ) polugrupa* . Jake trake monoida i grupa su razmatrane od strane B.M.Scheina , [8] . Na primer , B.M.Schein je u [8] dokazao da polugrupa S jeste jaka traka grupa ako i samo ako S jeste ortodoksna i traka grupa (nazvana takodje ortokriptogrupa ). Za druge karakterizacije ortokriptogrupa videti [5], [6] ili [9] .

Propozicijom 1. i Teoremom 1. mi dajemo generalizacije rezultata M.Petricha ( [7,p.87-88] ili [4,p.98] ) . Za informacije u vezi nekih srodnih rezultata upućujemo na [6] i [5] .

Za nedefinisane pojmove i notacije upućujemo na [4] ili [7] .

Neka $I$ jeste traka . Svakom $i \in I$ pridružimo polugrupu $S_i$ takvu da je $S_i \cap S_j = \emptyset$ ako je $i \neq j$ . Neka $\leq_1$ i $\leq_2$ jesu kvaziuredjenja ( tj. refleksivne i tranzitivne binarne relacije ) na $I$ definisane na sledeći način :

$$i \leq_1 j \Leftrightarrow ji = i \quad , \quad i \leq_2 j \Leftrightarrow ij = i \; .$$

Neka $\varphi_{ij}$ i $\psi_{ij}$ jesu homomorfizmi od $S_j$ u $S_i$ nad $\leq_1$ i $\leq_2$ respektivno , za koje važe sledeći uslovi :

(1) za svaki $i \in I$ $\varphi_{ii}$ i $\psi_{ii}$ jesu identički automorfizmi of $S_i$ ;

(2) $$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik} \quad , \quad i \leq_1 j \leq_1 k \; ;$$

(3) $$\psi_{ij} \circ \psi_{jk} = \psi_{ik} \quad , \quad i \leq_2 j \leq_2 k \; ;$$

(4) $$\varphi_{kj,k} \circ \psi_{ki} = \psi_{kj,j} \circ \varphi_{ji} \quad , \quad j \leq_1 i \quad , \quad k \leq_2 i \; .$$

Definišimo operaciju $*$ na $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ sa :

$$s_i * s_j = \varphi_{ij,i}(s_i)\psi_{ij,j}(s_j) \quad , \quad s_i \in S_i \; , \; s_j \in S_j \; .$$

Tada $(S,*)$ jeste polugrupa i traka $I$ polugrupa $S_i$, $i \in I$, [8].

**DEFINICIJA 1.** Polugrupa $S$ jeste *jaka traka polugrupa* ako ona može biti konstruisana na prethodni način , i u tom slučaju je obeležavamo sa $S = [I;S_i,\varphi_{ij},\psi_{ij}]$ . Ako svi $\varphi_{ij}$ i $\psi_{ij}$ jesu jedan-jedan , tada kažemo da $S$ jeste *čvrsta traka (sturdy band) polugrupa* $S_i$, $i \in I$ , i obeležavamo je sa $S = \langle I;S_i,\varphi_{ij},\psi_{ij}\rangle$ .

Ako $S = [I;S_i,\varphi_{ij},\psi_{ij}]$ jeste jaka matrica polugrupa , tada , kao u [8] , mi dobijamo da su svi $\varphi_{ij}$ i $\psi_{ij}$ jedan-jedan . U opštem slučaju ,kada $I$ jeste proizvoljna traka , to ne mora da važi . Sada ćemo razmatrati jake trake polugrupa za koje svi $\varphi_{ij}$ i $\psi_{ij}$ jesu jedan-jedan , tj. čvrste trake polugrupa .

PROPOZICIJA 1. *Na* $S = \langle I; S_i, \varphi_{ij}, \psi_{ij}\rangle$ *definišimo relaciju* $\rho$ *sa :*

$$a\ \rho\ b \ \Leftrightarrow\ \varphi_{ij,i}(a) = \psi_{ij,j}(b) \ \wedge\ \psi_{ji,i}(a) = \varphi_{ji,j}(b) \ ,$$

$a \in S_i$ , $b \in S_j$ . *Tada* $\rho$ *jeste kongruencija i* $S$ *jeste poddirektan proizvod od* $I$ *i* $S/\rho$ .

*Obrnuto , neka* $S \subseteq I \times T$ *jeste poddirektan proizvod trake* $I$ *i polugrupe* $T$ *tako da važi sledeći uslov :*

$$(5)\qquad \begin{cases} (\ i \le_1 j \ \wedge\ (j,u) \in S\ ) \ \Rightarrow\ (i,u) \in S \\ (\ i \le_2 j \ \wedge\ (j,u) \in S\ ) \ \Rightarrow\ (i,u) \in S \end{cases} ,$$

*za sve* $i,j \in I$ , $u \in T$ . *Tada* $S$ *jeste čvrsta traka polugrupa* $S_i = (\{i\} \times T) \cap S$ , $i \in I$ .

**Dokaz.** Neka je $S = \langle I; S_i, \varphi_{ij}, \psi_{ij}\rangle$ . Jasno je da $\rho$ jeste refleksivna i simetrična . Dokazaćemo tranzitivnost . Neka je $a\ \rho\ b$ i $b\ \rho\ c$ , $a \in S_i$, $b \in S_j$, $c \in S_k$ . Tada je

$$(6)\qquad \varphi_{ij,i}(a) = \psi_{ij,j}(b) \ ,$$

$$(7)\qquad \psi_{ji,i}(a) = \varphi_{ji,j}(b) \ ,$$

$$(8)\qquad \varphi_{jk,j}(b) = \psi_{jk,k}(c) \ ,$$

$$(9)\qquad \psi_{kj,j}(b) = \varphi_{kj,k}(c) \ .$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
&\varphi_{jkij,jki} \circ \psi_{jki,ki} \circ \varphi_{ki,k}(c) = \\
&\quad = \varphi_{jkij,jki} \circ \varphi_{jki,jk} \circ \psi_{jk,k}(c) && (\text{ prema } (4)\ ) \\
&\quad = \varphi_{jkij,jk} \circ \varphi_{jk,j}(b) && (\text{ prema } (8),(2)\ ) \\
&\quad = \varphi_{jkij,j}(b) && (\text{ prema } (2)\ ) \\
&\quad = \psi_{jkij,j}(b) && (\text{ prema } (4)\ ) \\
&\quad = \psi_{jkij,ij} \circ \psi_{ij,j}(b) && (\text{ prema } (3)\ ) \\
&\quad = \psi_{jkij,ij} \circ \varphi_{ij,i}(a) && (\text{ prema } (6)\ ) \\
&\quad = \varphi_{jkij,jki} \circ \psi_{jki,i}(a) && (\text{ prema } (4)\ ) \\
&= \varphi_{jkij,jki} \circ \psi_{jki,ki} \circ \psi_{ki,i}(a) && (\text{ prema } (3)\ )
\end{aligned}$$

Kako $\psi_{jki,ki}$ i $\varphi_{jkij,jki}$ jesu jedan-jedan , to dobijamo da je

$$\psi_{ki,i}(a) = \varphi_{ki,k}(c)$$

Na sličan način pokazujemo da je

$$\varphi_{ik,i}(a) = \psi_{ik,k}(c) \quad .$$

Dakle , $a \rho c$ , pa $\rho$ jeste tranzitivna .

Neka je $a \rho b$ , $a \in S_i$ , $b \in S_j$ , i neka je $c \in S_k$ . Tada važi (6) i (7) , pa je

$$\psi_{jikjk,ikjk} \circ \varphi_{ikjk,ik} \circ \varphi_{ik,i}(a) =$$

$$= \varphi_{jikjk,jik} \circ \psi_{jik,ik} \circ \varphi_{ik,i}(a) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \varphi_{jikjk,jik} \circ \varphi_{jik,ji} \circ \psi_{ji,i}(a) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \varphi_{jikjk,jik} \circ \varphi_{jik,ji} \circ \varphi_{ji,j}(b) \qquad (\text{ prema } (7)\ )$$

$$= \varphi_{jikjk,jikj} \circ \varphi_{jikj,j}(b) \qquad (\text{ prema } (2)\ )$$

$$= \varphi_{jikjk,jiklj} \circ \psi_{jikj,j}(b) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \psi_{jikjk,jk} \circ \varphi_{jk,j}(b) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \psi_{jikjk,ikjk} \circ \psi_{ikjk,jk} \circ \varphi_{jk,j}(b) \qquad (\text{ prema } (3)\ ) \ .$$

Kako $\psi_{jikjk,ikjk}$ jeste jedan-jedan , to je

(10) $$\varphi_{ikjk,ik} \circ \varphi_{ik,i}(a) = \psi_{ikjk,jk} \circ \varphi_{jk,j}(b)$$

Sa druge strane ,

$$\varphi_{ikjk,ik} \circ \psi_{ik,k}(c) =$$

$$= \psi_{ikjk,kjk} \circ \varphi_{kjk,k}(c) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \psi_{ikjk,kjk} \circ \psi_{kjkl,k}(c) \qquad (\text{ prema } (4)\ )$$

$$= \psi_{ikjk,k}(c) \qquad (\text{ prema } (3)\ )$$

$$= \psi_{ikjk,jk} \circ \psi_{jk,k}(c) \qquad (\text{ prema } (3)\ ) \ ,$$

pa je

(11) $$\varphi_{ikjk,ik} \circ \psi_{ik,k}(c) = \psi_{ikjk,jk} \circ \psi_{jk,k}(c) \quad .$$

Sada dobijamo da je

$$\varphi_{ikjk,ik}(a*c) =$$

$$= \varphi_{ikjk,ik}(\varphi_{ik,i}(a) \cdot \psi_{ik,k}(c))$$

$$= \varphi_{ikjk,ik} \circ \varphi_{ik,i}(a) \cdot \varphi_{ikjk,ik} \circ \psi_{ik,k}(c)$$

$$= \psi_{ikjk,jk} \circ \varphi_{jk,j}(b) \cdot \psi_{ikjk,jk} \circ \psi_{jk,k}(c) \qquad (\ (10) \text{ i } (11)\ )$$

$$= \psi_{ikjk,jk}(\varphi_{jk,j}(b) \cdot \psi_{jk,k}(c))$$

$= \psi_{ikjk,jk}(b*c)$ .

Dakle ,

$$\varphi_{ikjk,ik}(a*c) = \psi_{ikjk,jk}(b*c) \quad ,$$

i , slično ,

$$\psi_{jkik,ik}(a*c) = \varphi_{jkik,jk}(b*c) \quad .$$

Prema tome , $a*c \;\rho\; b*c$ . Na sličan način dokazujemo da je $c*a \;\rho\; c*b$, pa $\rho$ jeste kongruencija .

Neka $\eta$ jeste tračna kongruencija na $S$ takva da je $S/\eta$ izomorfna sa $I$ i $S_i$ jesu $\eta$-klase . Tada je jasno da je

$$\rho \cap \eta = \varepsilon \quad ,$$

gde $\varepsilon$ jeste identička relacija na $S$ . Prema tome , $S$ je izomorfna poddirektnom proizvodu od $S/\eta \cong I$ i $S/\rho$ ( Propozicija II 1.4. [4] ).

Obrnuto , neka $S \subseteq I \times T$ jeste poddirektan proizvod trake $I$ i polugrupe $T$ tako da važi (5) . Neka je $S_i = (\{i\} \times T) \cap S$ , $i \in I$ . Tada je jasno da $S$ jeste traka $I$ polugrupa $S_i$ , $i \in I$ .

Definišimo preslikavanja $\varphi_{ij}$ , $i \le_1 j$, i $\psi_{ij}$ , $i \le_2 j$ , sa :

$$\varphi_{ij}((j,u)) = (i,u) \quad , \quad (j,u) \in S_j \quad , \quad i \le_1 j \quad ,$$

$$\psi_{ij}((j,u)) = (i,u) \quad , \quad (j,u) \in S_j \quad , \quad i \le_2 j \quad .$$

Prema (5) sledi da je $(i,u) \in S$ , pa je $(i,u) \in S_i$ u oba slučaja . Lako se proverava da su $\varphi_{ij}$ i $\psi_{ij}$ homomorfizmi i da uslovi (1)-(4) važe . Neka je $(i,u) \in S_i$ i $(j,v) \in S_j$ . Tada je

$$\varphi_{ij,i}((i,u))\psi_{ij,j}((j,v)) = (ij,u)(ij,v) = (ij,uv) =$$

$$= (i,u)(j,v) \quad ( = (i,u)*(j,v) ) \ .$$

Dakle , $S$ je jaka traka polugrupa $S_i$, $i \in I$ .

Neka je $i \le_1 j$ i neka $(j,u),(j,v) \in S_j$ tako da

$$\varphi_{ij}((j,u)) = \varphi_{ij}((j,v)) \quad .$$

Tada dobijamo da je $(i,u) = (i,v)$ , tj. $u = v$ . Prema tome , dobijamo da je $(j,u) = (j,v)$ , pa $\varphi_{ij}$ jeste jedan-jedan . Na sličan način pokazujemo da $\psi_{ij}$ , $i \le_2 j$ , jeste jedan-jedan . Dakle , $S$ je jaka čvrsta traka polugrupa $S_i$ , $i \in I$ .□

**TEOREMA 1.** *$S$ jeste čvrsta traka grupa ako i samo ako $S$ jeste regularna i poddirektan proizvod trake i grupe .*

**Dokaz.** Neka $S = \langle I; S_i, \varphi_{ij}, \psi_{ij} \rangle$ jeste čvrsta traka grupa $G_i$ , $i \in I$ , i neka $e_i$ jeste jedinica grupe $G_i$ , $i \in I$ . Tada prema Propoziciji 1. dobijamo da $S$ jeste poddirektan proizvod trake $I$ i polugrupe $S/\rho$ . Kako $S$ jeste regularna i $S/\rho$ jeste homomorfna slika od $S$ , tada $S/\rho$ jeste regularna . Jasno je da svaki idempotent iz $S/\rho$ jeste oblika $e\rho$ , gde $e$ jeste idempotent iz $S$ , tj. $e = e_i$ za neki $i \in I$ . Sa druge strane , za svaki $i, j \in I$ imamo da je

$$\varphi_{ij,i}(e_i) = e_{ij} = \psi_{ij,j}(e_j) \quad ,$$

$$\psi_{ji,i}(e_i) = e_{ji} = \varphi_{ji,j}(e_j) \quad ,$$

pa je $e_i \; \rho \; e_j$ . Dakle , $S/\rho$ ima tačno jedan idempotent , pa $S/\rho$ jeste grupa .

Obrnuto , neka $S$ jeste regularna polugrupa i $S$ jeste poddirektan proizvod trake $I$ i grupe $G$ . Neka $e$ jeste jedinica grupe $G$ . Uzmimo da je $S \subseteq I \times G$ . Neka je $i \in I$ . Tada postoji $a \in G$ tako da $(i,a) \in S$ . Kako $S$ jeste regularna , to postoji $(j,b) \in S$ tako da

$$(i,a) = (i,a)(j,b)(i,a) \quad \text{i} \quad (j,b) = (j,b)(i,a)(j,b) \quad .$$

Dakle

$$(i,a) = (iji, aba) \quad \text{i} \quad (j,b) = (jij, bab) \quad ,$$

tj. $i = iji$ , $a = aba$ , $j = jij$ i $b = bab$ . Dakle , $b = a^{-1}$ . Sada dobijamo da je

$$(i,e) = (ijji, abba) = (i,a)(j,b)^2(i,a) \in S \quad .$$

Osim toga, jasno je da $(i,e)$ jeste jedinica polugrupe $G_i = (\{i\} \times G) \cap S$ . Takodje , imamo da je

$$(i,b) = (i,e)(j,b)(i,e) \in S$$

i

$$(i,a)(i,b)(i,a) = (i,aba) = (i,a) \quad .$$

Prema tome, $G_i$ je regularna i kako $G_i$ sadrži tačno jedan idempotent , to $G_i$ jeste grupa .

Neka $i,j \in I$ i neka je $i \leq_1 j$ , $(j,a) \in S$ . Tada je $ji = i$, pa

$$(i,a) = (ji,ae) = (j,a)(i,e) \in S \quad .$$

Na sličan način pokazujemo da iz $i \leq_2 j$ i $(j,a) \in S$ sledi da $(i,a) \in S$. Dakle , (5) važi , pa prema Propoziciji 1. dobijamo da we have that $S$ jeste čvrsta traka grupa $G_i$ , $i \in I$ .□

**POSLEDICA .** *S je čvrsta traka periodičnih grupas ako i samo ako S jeste poddirektan proizvod trake i periodične grupe .*□

## LITERATURA


[1] *S.Bogdanović and M.Ćirić* , Bands of monoids , Matem. Bilten , 9-10 ( XXXV-XXXVI ) , 1985-1986 , Skopje 1989 , 57-61 .

[2] *M.Ćirić and S.Bogdanović* , Inflations of a band of monoids , Matematički Vesnik ( to appear ) .

[3] *A.H.Clifford* , Semigroups admitting relative inverses , Annals of Math. (2) 42 (1941) , 1037-1049 .

[4] *M.Petrich* , Introduction to semigroups , Merill , Ohio , 1973 .

[5] *M.Petrich* , The structure of completely regular semigroups , Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 189 , 1974 , 211-234 .

[6] *M.Petrich* , Regular semigroups which are subdirect products of a band and a semilattice of groups , Glasgow Math. J. 14 (1973) , 27-49 .

[7] *M.Petrich* , Inverse semigroups , J.Wiley&Sons , New York 1984 .

[8] *B.M.Schein* , Bands of monoids , Acta Sci. Math. Szeged 36 (1974) , 145-154 .

[9] *M.Yamada* , Strictly inversive semigroups , Bull. Shimane Univ. 13 (1964) , 128-138 .

*Univerzitet u Nišu*
*Ekonomski fakultet*
*Trg JNA* 11

*Univerzitet u Nišu*
*Mašinski fakultet*
*Beogradska* 14

## ABSTRACT

In this paper we consider band compositions determined by two transitive systems of monomorphisms , called the sturdy band of semigroups .