UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

E K S T E N Z I J E   P R S T E N A

(SEMINARSKI RAD)

MIROSLAV ĆIRIĆ

NOVI SAD , 1989 .

Prsten R je (idealska) ekstenzija prstena A pomoću prstena B ako R sadrži ideal I izomorfan sa A i faktor prsten $R/_I$ je izomorfan sa B . Tom prilikom mi obično identifikujemo prstene A i I , odnosno prstene $R/_I$ i B . Dve ekstenzije R i R′ prstena A pomoću prstena B su ekvivalentne ako postoji izomorfizam φ od R na R′ koji fiksira elemente iz A (tj. $\varphi(a) = a$ za sve $a \in A$) i za kanoničke homomorfizme $\nu : R \longrightarrow B$ i $\nu' : R' \longrightarrow B$ sledeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\nu"'] & & R' \arrow[dl, "\nu'"] \\ & B & \end{tikzcd} .$$

U ovom radu izložićemo rešenje osnovnog problema o ekstenziji prstena koji možemo formulisati na sledeći način : ako su dati prsteni A i B , konstruisati sve prstene R koji imaju A kao svoj ideal i $R/_A$ je prsten izomorfan sa B . Rešenje tog problema dao je C.J.Everett [6] , i o njemu se govori u poglavlju 1. ovog rada . Teoremu 1.1. nazivamo Osnovnom teoremom Everetta o ekstenziji prstena ili , kraće , samo Everettovom teoremom . Prsten konstruisan na način dat u formulaciji Everettove teoreme nazivamo Everettovom sumom prstena A i B . Vidi se da u konstrukciji Everettove sume figuriše tri preslikavanja i to dva preslikavanja u oznaci $[\,,\,]$ i $\langle\,,\,\rangle$ od BxB u A i preslikavanje θ od B u translacioni omotač $\Omega(A)$ prstena A . U poglavlju 2. ovog rada razmatraju se neki specijalni slučajevi Everettove sume prstena . Tako , za preslikavanja $[\,,\,]$ i $\langle\,,\,\rangle$ izabrana tako da budu nula funkcije ($[a,b] = \langle a,b\rangle = 0$ za sve $a,b \in B$) dobijamo poznatu razdvojenu (split) ekstenziju prstena . Dobro poznati primer takve ekstenzije je Dorroh exstenzija prstena pomoću prstena celih brojeva . Takodje , u poglavlju 2. uvodimo pojam jake Everettove sume prstena kao Everetove sume kod koje preslikavanje θ jeste nulti homomorfizam ($\theta^a = 0$ za svaki $a \in B$) a zatim uvodimo i pojam jake ekstenzije prstena , pomoću koje opisujemo neke klase prstena . Rezultati dati u poglavljima 2. i 3. su originalni i biće objavljeni u radu M.Ćirića i S.Bogdanovića [4]. U poglavlju 3. se vrši generalizacija pojma distributivnosti u polugrupama i prstenima (M.Petrich [17]) i daju rezultati koji su generalizacije rezultata M.Petricha,[17] , i koji , takodje predstavljaju opise pomoću jakih ekstenzija prstena . U poglavlju 4. uvodimo pojam retraktivne ekstenzije prstena , prenoseći odgovarajući pojam iz Teorije polugrupa . Dokazuje se veoma interesantan rezultat da prsten R jeste retraktivna ekstenzija prstena A ako i samo ako A jeste direktni sumand prstena R . U ostalom delu poglavlja 4. dati rezultat primenjujemo za opisivanje nekih klasa prstena u obliku direktne sume nekih drugih prstena .

Nešto više o translacionim omotačima prstena i ekstenzijama prstena može se naći ekspozitornom članku : M.Petrich, The translational hull in semigroups and rings , Semigroup Forum , Vol. 1 (1970), 283-360 , u knjizi [15] ili u radovima [10,12,13] . O originalnoj verziji Everettove teoreme , nešto više se može naći u radu [6] ili knjizi[19] .

Prsten A je direktni sumand prstena R ako postoji prsten B tako da je R izomorfan direktnoj sumi prstena A i B (drugim rečima , A je direktni sumand prstena R ako A jeste ideal od R i R je izomorfan sa direktnom sumom prstena A i $R/_A$). Skup

$$U(R) = \{a \in R \mid ax = xa = 0 \text{ za sve } x \in R\}$$

nazivamo anihilatorom prstena R . Prsten R je Booleov ako svi njegovi elementi jesu idempotenti . Prsten je potpuno regularan ako njegova multiplikativna polugrupa jeste potpuno regularna. Ako S jeste polugrupa (prsten) tada sa Reg(S) (Gr(S), E(S)) obeležavamo skup svih regularnih (potpuno regularnih , idempotenata) elemenata iz S . Ako S jeste polugrupa , tada sa G_e obeležavamo maksimalnu podgrupu od S koja sadrži e kao svoju jedinicu .

Za nedefinisane pojmove i notacije upućujemo na [2] ,[16],[9] ili [11] .

1. OSNOVNA TEOREMA EVERETTA

DEFINICIJA 1.1. Neka R jeste prsten i neka x,y označavaju proizvoljne elemente iz R . Preslikavanje λ na R pisano sleva je leva translacija na R ako λ jeste endomorfizam aditivne grupe prstena R i

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y \quad .$$

Preslikavanje ρ na R , pisano zdesna , jeste desna translacija na R ako ρ jeste endomorfizam aditivne grupe prstena R i

$$(xy)\rho = x(y\rho) \quad .$$

Leva translacija λ i desna translacija ρ na R su vezane ako je

$$x(\lambda y) = (x\rho)y \quad .$$

U tom slučaju par (λ,ρ) je bitranslacija na R .

Leva translacija λ i desna translacija ρ na R su permutabilne ako

$$(\lambda x)\rho = \lambda(x\rho) \quad .$$

Skup T bitranslacija na R je permutabilan ako za sve (λ,ρ) i (λ',ρ') iz T su λ i ρ' permutabilne .

Skup $\Lambda(R)$ svih levih translacija na R jeste prsten u odnosu na uobičajene operacije sabiranja endomorfizama Abelove grupe i kompoziciju preslikavanja :

$$(\lambda+\lambda')x = (\lambda x)+(\lambda' x) \quad ,$$

$$(\lambda\lambda')x = \lambda(\lambda' x) \quad ,$$

za sve $x\in R$. Slično , skup $P(R)$ svih desnih translacija na R jeste prsten u odnosu na operaciju sabiranja endomorfizama Abelove grupe definisanu na isti način i operaciju kompozicije:

$$x(\rho\rho') = (x\rho)\rho' \quad ,$$

za sve $x\in R$.

Podprsten $\Omega(R)$ direktne sume $\Lambda(R)\oplus P(R)$ koja se sastoji od svih bitranslacija na R je translacioni omotač od R.

DEFINICIJA 1.2. Neka a jeste element prstena R . Preslikavanje λ_a na R definisano sa :

$$\lambda_a x = ax \qquad (x\in R)$$

je unutrašnja leva translacija na R indukovana sa a . Presli kavanje ρ_a na R definisano sa :

$$x\rho_a = xa \qquad (x \in R)$$

je unutrašnja desna translacija na R indukovana sa a . Par $(\lambda_a, \rho_a) = \pi_a$ je unutrašnja bitranslacija na R indukovana sa a . Skup $\Pi(R)$ svih unutrašnjih bitranslacija na R je unutrašnji deo od $\Omega(R)$. Analogno definišemo unutrašnje delove $\Gamma(R)$ i $\Delta(R)$ redom od $\Lambda(R)$ i $P(R)$.

Lako se proverava da $\Gamma(R)$ jeste levi ideal od $\Lambda(R)$, $\Delta(R)$ jeste desni ideal od $\mathbf{P}(R)$ i $\Pi(R)$ jeste ideal od $\Omega(R)$.

Ako $\omega = (\lambda, \rho)$ jeste bitranslacija na R , onda ćemo ω posmatrati i kao preslikavanje od R u R koje , pisano sleva je jednako sa λ a pisano zdesna je jednako sa ρ . Drugim rečima

$$\omega x = \lambda x \quad , \quad x\omega = x\rho \quad ,$$

za sve $x \in R$.

TEOREMA 1.1. (Everett [6]). Neka A i B jesu disjunktni prsteni . Neka $\theta : B \longrightarrow \Omega(A)$ jeste preslikavanje koje slika B u skup permutabilnih bitranslacija , u oznaci

$$\theta : a \longmapsto \theta^a \qquad (a \in B) ,$$

i neka $[\ ,\ ] : B\times B \longrightarrow A$ i $\langle\ ,\ \rangle : B\times B \longrightarrow A$ jesu preslikavanja takva da za sve $a,b,c \in B$ važe sledeći uslovi :

(1) $$\theta^a + \theta^b = \theta^{a+b} + \pi_{[a,b]} \quad ;$$

(2) $$\theta^a \theta^b = \theta^{ab} + \pi_{\langle a,b\rangle} \quad ;$$

(3) $$\langle ab,c\rangle + \langle a,b\rangle \theta^c = \langle a,bc\rangle + \theta^a \langle b,c\rangle \quad ;$$

(4) $$[0,0] = 0 \quad ;$$

(5) $$[a,b] = [b,a] \quad ;$$

(6) $$[a,b] + [a+b,c] = [a,b+c] + [b,c] \quad ;$$

(7) $$[a,b]\,\theta^c + \langle a+b,c\rangle = [ac,bc] + \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle \quad ;$$

(8) $$\theta^a [b,c] + \langle a,b+c\rangle = [ab,ac] + \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle \quad .$$

Definišimo aditivnu i multiplikativnu operaciju na $R = A \times B$ sa

(9) $$(\alpha,a) + (\beta,b) = (\alpha + \beta + [a,b]\,,\ a+b)$$

(10) $$(\alpha,a)\cdot(\beta,b) = (\alpha\beta + \langle a,b\rangle + \theta^a\beta + \alpha\theta^b\,,\ ab) \quad .$$

Tada R sa tako definisanim operacijama jeste prsten izomorfan nekoj ekstenziji od A pomoću B .

Obrnuto , svaka ekstenzija od A pomoću B je izomorfna nekom ovako konstruisanom prstenu .

Dokaz. Asocijativnost sabiranja lako sledi iz uslova (6) . Takodje , iz (4) i iz (6) , za $b = c = 0$, dobijamo da je $[a,0] = 0$ i iz (5) dobijamo da je $[0,a] = 0$ za sve $a \in B$, odakle se lako pokazije da $(0,0)$ jeste neutralni element za sabiranje u R . Lako se pokazije da inverzni element za sabiranje elementa (α,a) iz R jeste $(-\alpha-[a,-a], -a)$. Komutativnost sabiranja sledi iz (5) .

Neka $(\alpha,a),(\beta,b),(\gamma,c) \in R$. Kako su translacije λ^b i ρ^b vezane , to je $(\alpha\theta^b)\gamma = (\alpha\rho^b)\gamma = \alpha(\lambda^b\gamma) = \alpha(\theta^b\gamma)$. Kako su leva translacija λ^a i desna translacija ρ^c permutabilne , to je $(\theta^a\beta)\theta^c = (\lambda^a\beta)\rho^c = \lambda^a(\beta\rho^c) = \theta^a(\beta\theta^c)$. Takodje je $(\quad)^c = (\quad ^c)$ i $^a(\quad) = (^a\quad)$. Sa druge strane , iz (2) imamo da je

$$\langle a,b\rangle\gamma + \theta^{ab}\gamma = \theta^a\theta^b\gamma \ , \quad \alpha\theta^b\theta^c = \alpha\theta^{bc} + \alpha\langle b,c\rangle \ .$$

Koristeći (3) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\{(\alpha,a)(\beta,b)\}(\gamma,c) = (\alpha\beta + \langle a,b\rangle + \theta^a\beta + \alpha\theta^b \ , \ ab\ )(\gamma,c) = \\
&= ((\alpha\beta + \langle a,b\rangle + \theta^a\beta + \alpha\theta^b)\gamma + \langle ab,c\rangle + \theta^{ab}\gamma + (\alpha\beta + \langle a,b\rangle + \\
&+ \theta^a\beta + \alpha\theta^b)\theta^c \ , \ (ab)c\ ) = (\alpha\beta\gamma + \langle a,b\rangle\gamma + (\theta^a\beta)\gamma + (\alpha\theta^b)\gamma + \\
&+ \theta^{ab}\gamma + (\alpha\beta)\theta^c + \langle a,b\rangle\theta^c + \alpha\theta^b\theta^c + (\theta^a\beta)\theta^c + \langle ab,c\rangle \ , \ abc\ ) = \\
&= (\alpha\beta\gamma + \theta^a\theta^b\gamma + \theta^a(\beta\gamma) + \alpha(\theta^b\gamma) + \alpha(\beta\theta^c) + \alpha\theta^{bc} + \alpha\langle b,c\rangle \\
&+ \theta^a(\beta\theta^c) + \langle a,bc\rangle + \theta^a\langle b,c\rangle \ , \ abc\ ) = (\alpha(\beta\gamma + \theta^b\gamma + \beta\theta^c + \\
&\langle b,c\rangle) + \langle a,bc\rangle + \alpha\theta^{bc} + \theta^a(\beta\gamma + \langle b,c\rangle + \theta^b\gamma + \beta\theta^c) \ , \ abc\ ) = \\
&= (\alpha,a)(\beta\gamma + \langle b,c\rangle + \theta^b\gamma + \beta\theta^c \ , \ bc\ ) = (\alpha,a)\{(\beta,b)(\gamma,c)\} \ .
\end{aligned}$$

Prema tome , multiplikacija na R je asocijativna . Na kraju , koristeći osobine (1),(7) i (8) , bez teškoća možemo pokazati da važe distributivni zakoni . Dakle , R jeste prsten .

Uočimo podskup $I = \{(\alpha,0) \mid \alpha \in A\} \subseteq R$. Ako u (1) stavimo da je $a = b = 0$, tada iz (4) dobijamo da je $\theta^0 = \pi_0$ i iz (7) , za $a = b = c = 0$, dobijamo da je $\langle 0,0\rangle = 0$. Sada se lako proverava da I jeste podprsten od R . Neka $(\alpha,0) \in I$ i $(\beta,b) \in R$. Tada je

$$(\alpha,0)(\beta,b) = (\alpha\beta + \langle 0,b\rangle + \theta^0\beta + \alpha\theta^b \ , \ 0\ ) \in I \quad \text{i}$$
$$(\beta,b)(\alpha,0) = (\beta\alpha + \langle b,0\rangle + \theta^b\alpha + \beta\theta^0 \ , \ 0\ ) \in I \ ,$$

pa I jeste ideal prstena R . Na kraju , pokazaćemo da je faktor prsten $R/_I$ izomorfan sa B . Neka su $(\alpha,a),(\beta,b)$ R elementi takvi da je $(\alpha,a) \equiv (\beta,b)(\mathrm{mod} I)$ (pri čemu $\equiv(\mathrm{mod} I)$ jeste kongruencija prstena R indukovana idealom I) . Tada je $(\alpha,a) - (\beta,b) \in I$, odakle je $a-b = 0$, tj. $a = b$. Sa druge strane , $(\alpha,a)\equiv(\beta,a)(\mathrm{mod} I)$ za sve $\alpha,\beta\in A$ i sve $a\in B$. Prema tome , za proizvoljni element $(\alpha,a)\in R$ je

$$(\alpha,a) + I = A \times \{a\} ,$$

pa je očigledno da preslikavanje

$$(\alpha,a) + I = A \times \{a\} \longmapsto a$$

jeste izomorfizam iz $R/_I$ na B .

Obrnuto , neka R jeste ekstenzija prstena A pomoću prstena B , tj. neka A jeste ideal od R i neka $R/_I = B$. Neka $\nu : R \longrightarrow B$ jeste kanonički homomorfizam . Za proizvoljni element $a\in B$ (tj. a jeste klasa u R) neka a' jeste proizvoljni predstavnik te klase . Na taj način , izborom sistema $\{a' \mid a\in B\}\subseteq R$ mi smo definisali jedno jedan-jadan preslikavanje iz B u R ($a\longmapsto a'$, $a\in B$) . Očigledno je da je $\nu(a') = a$ za sve $a\in B$. Sa druge strane , za proizvoljne $a,b\in B$ je $\nu(a'+b') = \nu(a') + \nu(b') = a + b = \nu((a + b)')$ i $\nu(a'b') = \nu(a')\nu(b') = ab = \nu((ab)')$, tj.

$$(a+b)'\equiv a'+b'(\mathrm{mod} A) ,$$
$$(ab)'\equiv a'b'(\mathrm{mod} A) .$$

Prema tome , sa

$$[a,b] = a' + b' - (a + b)' ,$$
$$\langle a,b\rangle = a'b' - (ab)'$$

su definisana dva preslikavanja iz $B\times B$ u A . Definišimo preslikavanje $\theta : B \longrightarrow \Omega(A)$ sa :

$$\theta : a \longmapsto \theta^a = (\lambda^a, \rho^a) \qquad (a\in B) ,$$

gde λ^a jeste leva translacija na A definisana sa :

$$\lambda^a\alpha = a'\cdot\alpha \qquad (\alpha\in A) ,$$

i ρ^a jeste desna translacija na A definisana sa :

$$\alpha\rho^a = \alpha\cdot a' \qquad (\alpha\in A) .$$

Kako , ne umanjujući opštost dokaza,možemo uzeti da je $0'= 0$, to lako dobijamo (4) . Bez teškoća se pokazuju uslovi (1)-(8) , pa možemo konstruisati prsten $R'= A\times B$ na taj način što ćemo defimisati operacije sabiranja i množenja sa (9) i (10) . Dokažimo da su prsteni R i R' izomorfni . Definišimo preslikavanje $\varphi : R' \longrightarrow R$ sa:

$$\varphi((\alpha,a)) = \alpha + a' \qquad (\alpha\in A, a\in B) .$$

Neka je $x\in R$ proizvoljni element i neka je $\nu(x) = a\in B$, tj. $a = x + A$. Tada je $x\equiv a'(\mathrm{mod} A)$ pa $x - a' = \alpha \in A$. Prema tome , $x = \alpha + a' = \varphi((\alpha,a))$. Neka je $\alpha + a' = \beta + b'$, $\alpha,\beta \in A$, $a,b \in B$. Tada je $\nu(a') = \nu(b')$ odnosno $a = b$, odakle je $\alpha = \beta$, tj. $(\alpha,a) = (\beta, b)$. Dakle , preslikavanje φ je bijektivno .

Neka $(\alpha,a),(\beta,b) \in R'$. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi((\alpha,a)+(\beta,b)) &= \varphi((\alpha+\beta+[a,b], a+b)) = \\
&= \alpha + \beta + [a,b] + (a+b)' = \\
&= \alpha + \beta + a' + b' = \varphi((\alpha,a)) + \varphi((\beta,b)) , \\
\varphi((\alpha,a)(\beta,b)) &= \varphi((\alpha\beta + \langle a,b\rangle + \theta^a\beta + \alpha\theta^b , ab)) = \\
&= \alpha\beta + \langle a,b\rangle + a'\cdot\beta + \alpha\cdot b' + (ab)' = \\
&= \alpha\beta + a'\cdot\beta + \alpha\cdot b' + a'b' = (\alpha + a')(\beta + b') \\
&= \varphi((\alpha,a))\varphi((\beta,b)) .
\end{aligned}$$

Prema tome , φ jeste izomorfizam iz R' na R .□

DEFINICIJA 1.3. Prsten konstruisan na način dat u formulaciji Teoreme Everetta nazivamo Everettovom sumom prstena A i B , pomoću trojke preslikavanja $(\theta; [\,,\,]; \langle\,,\,\rangle)$ i obeležavamo je sa $E(A,B;\theta; [\,,\,]; \langle\,,\,\rangle)$.

Predstavljanje prstena R u obliku Everettove sume nekih prstena nazivamo Everettovom reprezentacijom prstena R .

Kao što se iz napred navedenog vidi , konstrukcija Everettove reprezentacije prstena koji je ekstenzija drugog prstena dobijena metodama koje su kombinacije metoda korišćenih za konstrukciju Schreierove ekstenzije grupa (izbor predstavnika klasa) i Yoshidine konstrukcije ekstenzije polugrupa [20] (korišćenje translacija) . Everettova reprezentacija , kao što se može videti , odredjena je izborom predstavnika klasa , ali za bilo koji izbor predstavnika klasa dobijamo ekvivalentne Everettove sume . Sledeća teorema nam precizno odredjuje pod kojim uslovima su dve Everettove sume ekvivalentne :

TEOREMA 1.2. Dve Everettove sume $E(A,B;\theta; [\,,\,]; \langle\,,\,\rangle)$ i $E(A,B;\theta'; [\,,\,]'; \langle\,,\,\rangle')$ prstena A i B su ekvivalentne ako i samo ako postoji preslikavanje $\xi : B \to A$ takvo da je $\xi(0)=0$ i za sve $a,b \in B$ je :

(11) $$\theta'^b = \theta^b + \pi_{\xi(b)} ;$$

(12) $$[a,b]' = [a,b] + \xi(a) + \xi(b) - \xi(a+b) ;$$

(13) $$\langle a,b\rangle' = \langle a,b\rangle + \theta^a\xi(b) + \xi(a)\theta^b + \xi(a)\xi(b) - \xi(a+b) .$$ □

2. JAKE EKSTENZIJE PRSTENA

Dobro poznata razdvojena (split) ekstenzija prstena može se dobiti iz Everettove sume prstena u kojoj su $[\,,\,]$ i $\langle\,,\,\rangle$ nula funkcije . Na ovaj način se , naprimer , može dobiti poznata Dorroh ekstenzija nekog prstena pomoću prstena celih brojeva . U ovom poglavlju ćemo posmatrati jedan drugi specijalni slučaj Everettove sume - slučaj kada Θ jeste nulti homomorfizam .

DEFINICIJA 2.1. Everettova suma $E(A,B;\Theta;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ prstena A i B jeste jaka Everettova suma prstena A i B ako Θ jeste nulti homomorfizam iz B u $\Omega(A)$, tj. ako je $\Theta^a = \pi_0$ za sve $a \in B$. U tom slučaju , jaku Everettovu sumu obeležavamo sa $E(A,B;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$.

Prsten R jeste jaka ekstenzija prstena A pomoću prstena B ako postoji neka jaka Everettova reprezentacija $E(A,B;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ prstena R .

Neka $R = E(A,B;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ jeste jaka Everettova suma prstena A i B . Tada se uslovi Teoreme Everetta svode na sledeće uslove :

(1′) $$\pi_{[a,b]} = \pi_0 \quad ;$$
(2′) $$\pi_{\langle a,b\rangle} = \pi_0 \quad ;$$
(3′) $$\langle a,bc\rangle = \langle ab,c\rangle \quad ;$$
(4′) $$[a,b] = [b,a] \quad ;$$
(5′) $$[0,0] = 0 \quad ;$$
(6′) $$[a,b] + [a+b,c] = [a,b+c] + [b,c] \quad ;$$
(7′) $$\langle a+b,c\rangle = [ac,bc] + \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle \quad ;$$
(8′) $$\langle a,b+c\rangle = [ab,ac] + \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle \quad ;$$

(za sve $a,b,c \in B$) i multiplikacija je data sa :

(10′) $$(\alpha,a)(\beta,b) = (\alpha\beta + \langle a,b\rangle,\ ab\ ) \quad .$$

Ako su $(\alpha_i,a_i) \in R$, $i=1,2,\dots,n$, $n \in Z^+$, tada je

(10′′) $$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i,a_i) = \Big(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i + \Big\langle \prod_{i=1}^{k}a_i,\ \prod_{j=k+1}^{n}a_j\Big\rangle,\ \prod_{i=1}^{n}a_i\Big)$$

za svaki k , $1 \le k \le n-1$ (prema (2′) i (3′)) .

U narednim razmatranjima koristićemo sledeći rezultat:

PROPOZICIJA 3.1. (Putcha ,[18]). Neka R jeste prsten u kome neki stepen svakog elementa leži u podgrupi . Tada su sledeći uslovi ekvivalentni :

(i) $(R,\cdot)$ je polumreža arhimedovskih polugrupa ;

(ii) nilpotenti iz R obrazuju ideal polugrupe $(R,\cdot)$;

(iii) nilpotenti iz R obrazuju ideal prstena R .□

Neka S jeste polugrupa i T jeste njena podpolugrupa. Preslikavanje $\varphi : S \to T$ jeste retrakcija ako φ jeste homomorfizam i $\varphi(t) = t$ za sve $t \in T$. U tom slučaju kažemo da T jeste retrakt od S . Ako T jeste ideal od S i postoji retrakcija od S na T , tada T jeste retraktivni ideal od S i S jeste retraktivna ekstenzija od T . Polugrupa S jeste nil-ekstenzija polugrupe T ako T jeste ideal od S i S/T jeste nil-polugrupa . Ako pri tome postoji retrakcija od S na T , tada S jeste retraktivna nil-ekstenzija od T .

TEOREMA 3.1. Neka R jeste prsten . Tada $(R,\cdot)$ jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa ako i samo ako R jeste jaka ekstenzija nil-prstena pomoću potpuno regularnog prstena.

Dokaz. Neka $(R,\cdot)$ jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa T. Tada $(R,\cdot)$ jeste polumreža arhimedovskih polugrupa , pa prema Propoziciji 3.1. imamo da skup A svih nilpotenata iz R jeste ideal prstena R . Neka $B = R/A$. Neka φ jeste retrakcija od $(R,\cdot)$ na T . Neka $a \in B$ jeste proizvoljni element . Tada je $a = x + A$ za neki $x \in R$. Takodje , $x^n \in T$ za neki $n \in Z^+$, odakle imamo da je

$$\begin{aligned}
(x-\varphi(x))^{n+1} &= (x-\varphi(x))^2(x-\varphi(x))^{n-1} \\
&= (x^2-x\varphi(x)-\varphi(x)x+\varphi(x)\varphi(x))(x-\varphi(x))^{n-1} \\
&= (x^2-\varphi(x)\varphi(x)-\varphi(x)\varphi(x)+\varphi(x)\varphi(x))(x-\varphi(x))^{n-1} \\
&= (x^2-\varphi(x)\varphi(x))(x-\varphi(x))^{n-1} \\
&= (x^2-x\varphi(x))(x-\varphi(x))^{n-1} \\
&= x(x-\varphi(x))^n = \dots = x^n(x-\varphi(x)) = \\
&= \varphi(x^n)(x-\varphi(x)) = (\varphi(x))^n(x-\varphi(x)) = \\
&= (\varphi(x))^{n+1}-(\varphi(x))^{n+1} = 0 .
\end{aligned}$$

Prema tome $x-\varphi(x) \in A$, tj. $x \equiv \varphi(x) (\mathrm{mod} A)$. Dakle $a = \varphi(x)+A$. Neka $\nu : R \to B$ jeste kanonički homomorfizam . Tada je $a = \nu(\varphi(x))$ i kako $\varphi(x)$ jeste potpuno regularni element i ν jeste homomorfizam , to i element a jeste potpuno regularan . Prema tome , B jeste potpuno regularan prsten . Očigledno je da A jeste nil-prsten . Prema Teoremi Everetta R je izomorfan nekoj Everettovoj sumi $E(A,B;\theta;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ pri čemu za predstavnika klase $a\in B$ možemo uzeti element $a'=\varphi(x)$, pri čemu je $\nu(x)=\nu(\varphi(x))=a$. Tada imamo da je

$$\alpha\theta^a=\alpha\cdot a'=\alpha\cdot\varphi(x)=\varphi(\alpha)\varphi(x)=0\varphi(x)=0 \quad \text{i}$$
$$\theta^a\alpha=a'\cdot\alpha=\varphi(x)\cdot\alpha=\varphi(x)\varphi(\alpha)=\varphi(x)0=0\ ,\alpha\in A, a\in B\ .$$

jer je $\varphi(\alpha)=0$ za sve $\alpha\in A$ (prema Teoremi I 4.3.[2]) . Dakle , $\theta^a=\pi_0$ za sve $a\in B$, pa R jeste jaka ekstenzija prstena A pomoću prstena B .

Obrnuto , neka R jeste jaka ekstenzija nil-prstena A pomoću potpuno regularnog prstena B , tj. postoji Everettova reprezentacija $E(A,B;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ prstena R . Neka $x=(\alpha,a)\in R$ jeste proizvoljni element . Tada postoji $n\in Z^+$ i $e\in E(B)$, $b\in B$ tako da je $\alpha^n=0$, $a=ea=ae$ i $ab=ba=e$. Osim toga , $x^n=(\alpha^n+\langle a,a^{n-1}\rangle,a^n)=(\langle a,a^{n-1}\rangle,a^n)$. Sada je

$$\begin{aligned}x^n\cdot(\langle e,e\rangle,e)&=(\langle a,a^{n-1}\rangle,a^n)(\langle e,e\rangle,e)=\\&=(\langle a^n,e\rangle,a^ne)=(\langle a,a^{n-1}e\rangle,a^n)=\\&=(\langle a,a^{n-1}\rangle,a^n)=x^n\ ,\end{aligned}$$

i na isti način imamo da je $(\langle e,e\rangle,e)x^n=x^n$. Sa druge strane

$$\begin{aligned}x^n\cdot(0,b^n)&=(\langle a,a^{n-1}\rangle,a^n)(0,b^n)=(\langle a^n,b^n\rangle,a^nb^n)=\\&=(\langle ea^n,b^n\rangle,e)=(\langle e,a^nb^n\rangle,e)=(\langle e,e\rangle,e)\ ,\end{aligned}$$

i na isti način dobijamo da je $(0,b^n)\cdot x^n=(\langle e,e\rangle,e)$. Takodje je $(\langle e,e\rangle,e)^2=(\langle e,e\rangle,e)$. Prema tome $x^n\in Gr(R)$.

Neka je $(\alpha,a)\in Gr(R)$. Tada postoji $(\beta,b)\in R$ tako da je $(\alpha,a)(\beta,b)(\alpha,a)=(\alpha,a)$ i $(\alpha,a)(\beta,b)=(\beta,b)(\alpha,a)$, tj. $(\alpha\beta\alpha+\langle ab,a\rangle,aba)=(\alpha,a)$ i $(\alpha\beta+\langle a,b\rangle,ab)=(\beta\alpha+\langle b,a\rangle,ba)$. Prema tome , $\alpha\beta\alpha+\langle ab,a\rangle=\alpha$, $aba=a$, $\alpha\beta+\langle a,b\rangle=\beta\alpha+\langle b,a\rangle$ i $ab=ba$, odakle je $\alpha=(\alpha\beta)^k\alpha+\langle ab,a\rangle$, za sve $k\in Z^+$, pa je $\alpha=\langle ab,a\rangle$. Dakle , proizvoljni element iz $Gr(R)$ je oblika $(\langle e,a\rangle,a)$, gde je $a\in B$ i a leži u maksimalnoj podgrupi od B sa jedinicom e . Neka je $(\langle e,a\rangle,a)\in Gr(R)$ i $(\beta,b)\in R$. Tada je $(\langle e,a\rangle,a)(\beta,b)=(\langle a,b\rangle,ab)$ i postoji $c\in B$ tako da je $(ab)c(ab)=ab$ i $(ab)c=c(ab)$. Sada je

$$\begin{aligned}(\langle a,b\rangle,ab)(0,c)&=(\langle ab,c\rangle,abc)=(\langle abcab,c\rangle,abc)=\\&=(\langle abc,abc\rangle,abc)=(\langle cab,cab\rangle,cab)=\end{aligned}$$

$$= (\langle c,abcab \rangle ,cab) = (\langle c,ab \rangle ,cab) =$$
$$= (0,c)(\langle a,b \rangle ,ab) \quad ,$$

i , osim toga ,

$$(\langle a,b \rangle ,ab)(0,c)(\langle a,b \rangle ,ab) = (\langle ab,c \rangle ,abc)(\langle a,b \rangle ,ab) =$$
$$= (\langle abc,ab \rangle ,abcab) = (\langle eabc,ab \quad ,ab) =$$
$$= (\langle e,abcab \rangle ,ab) = (\langle e,ab \rangle ,ab) = (\langle ea,b \rangle ,ab) =$$
$$= (\langle a,b \rangle ,ab) .$$

Prema tome , $(\langle e,a \rangle ,a)(\beta,b)=(\langle a,b \rangle ,ab) \in Gr(R)$ i na isti način dokazujemo da je $(\beta,b)(\langle e,a \rangle ,a)=(\langle b,a \rangle ,ba) \in Gr(R)$, pa $Gr(R)$ jeste ideal od R . Definišimo preslikavanje $\varphi : R \longrightarrow Gr(R)$ sa

$$\varphi((\alpha,a)) = (\langle e,a \rangle ,a) \quad , \quad (\alpha,a) \in R$$

gde a leži u maksimalnoj podgrupi od B sa jedinicom e . Neka su $(\alpha,a),(\beta,b) \in R$, pri čemu a i b leže u podgrupama od B sa jedinicama e i f redom . Neka ab leži u podgrupi od B sa jedinicom g . Tada je

$$\varphi(\alpha,a)\varphi(\beta,b) = (\langle e,a \rangle ,a)(\langle f,b \rangle ,b) = (\langle a,b \rangle ,ab) =$$
$$= (\langle a,bf \rangle ,ab) = (\langle ab,f \rangle ,ab) =$$
$$= (\langle gab,f \rangle ,ab) = (\langle g,abf \rangle ,ab) =$$
$$= (\langle g,ab \rangle ,ab) = \varphi((\alpha\beta + \langle a,b \rangle ,ab)) =$$
$$= \varphi((\alpha,a)(\beta,b)) \quad .$$

Prema tome , φ jeste retrakcija od $(R,\cdot)$ na $(Gr(R),\cdot)$, pa $(R,\cdot)$ jeste retraktivna nil-ekstenzija unije grupa $(Gr(R),\cdot)$.□

Polugrupa S jeste n-inflacija polugrupe T ako S jeste retraktivna ekstenzija od T i $S^{n+1} \subseteq T$ $(n \in Z^+)$.

POSLEDICA 2.1. Neka R jeste prsten . Tada $(R,\cdot)$ jeste n-inflacija unije grupa ako i samo ako R jeste jaka ekstenzija n+1-nilpotentnog prstena pomoću potpuno regularnog prstena .□

TEOREMA 2.2. Neka $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Tada R jeste (n+1)-nilpotentan prsten ako i samo ako R jeste jaka ekstenzija nula prstena pomoću n-nilpotentnog prstena .

<u>Dokaz.</u> Neka R jeste (n+1)-nilpotentan prsten , tj. $R^{n+1} = 0$. Neka $A = U(R)$ jeste anihilator prstena R . Neka $x,y \in A$ i $r \in R$. Tada je

$$(x+y)r = xr+yr = 0 \quad \text{i} \quad r(x+y) = rx+ry = 0 \quad ,$$

pa $x+y \in A$. Takodje , $(-x)r = -xr = 0$ i $r(-x) = -rx = 0$, pa $-x \in A$. Očigledno je $0 \in A$. Na kraju , $xr = rx = 0 \in A$. Prema tome , A jeste ideal prstena R . Prema Teoremi Everetta imamo da R jeste izomorfan nekoj Everettovoj sumi $E(A,B;\theta;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ prstena A i prstena $B=R_{/A}$. Prema definiciji preslikavanja θ u Teoremi Everetta imamo da za svaki $\alpha \in A$ i svaki $a \in B$ važi :

$$\theta^a\alpha = a'\cdot\alpha = 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha\theta^a = \alpha\cdot a' = 0 \quad .$$

Prema tome θ jeste nulti homomorfizam , pa data Everettova suma jeste jaka , tj. R jeste jaka ekstenzija prstena A i B .

Kako za sve $x_1,x_2,\ldots,x_n \in R$ imamo da je

$$x_1x_2\ldots x_nR \subseteq R^{n+1} = 0 \qquad \text{i} \qquad Rx_1x_2\ldots x_n \subseteq R^{n+1} = 0$$

to imamo da $x_1x_2\ldots x_n \in A$ za sve $x_1,x_2,\ldots,x_n \in R$, pa B jeste n-nilpotentni prsten . Očigledno je da A jeste nula prsten . Obrat se lako pokazuje .

3. GENERALIZOVANA DISTRIBUTIVNOST U POLUGRUPAMA I PRSTENIMA

U ovom poglavlju generalizujemo pojam distributivnosti u polugrupama i prstenima uveden u [17] .

DEFINICIJA 3.1. Neka je $n \in Z^+$, $n \geq 2$. Polugrupa S je n-distributivna ako je

$$a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n}(ax_i) \qquad \text{i} \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)a = \prod_{i=1}^{n}(x_ia)$$

za sve $a,x_1,x_2,\ldots,x_n \in S$.

Prsten je n-distributivan ako njegova multiplikativna polugrupa jeste n-distributivna .

LEMA 3.1. Neka S jeste n-distributivna polugrupa . Tada S jeste $(n+k(n-1))$-distributivna za sve $k \in Z^+$.□

LEMA 3.2. Grupa G jeste n-distributivna ako i samo ako G jeste komutativna i $a^n = a$ za sve $a \in G$.

Dokaz. Neka G jeste n-distributivna i neka e jeste jedinica grupe G . Tada za $a \in G$ imamo da je

$$a = ae = ae^n = (ae)^n = a^n \quad .$$

Neka $a,b \in G$. Prema Lemi 3.1. možemo pretpostaviti da je $n \geq 3$. Tada je $(ba)^n = ba$, pa je $(ba)^{n-1} = e$, odakle je

$$ab = (ba)^{n-1}abe = (ba)^{n-2}(ba^2)(be) = b(a^{n-2}a^2e) = ba^n = \\ = ba \quad .$$

Prema tome , G jeste komutativna .

Obrnuto , neka G jeste komutativna grupa i $a^n = a$ za sve $a \in G$. Neka $a, x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$. Tada je

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i a) = \prod_{i=1}^{n}(a x_i) = a^n(\prod_{i=1}^{n} x_i) = a(\prod_{i=1}^{n} x_i) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)a \quad ,$$

pa S jeste n-distributivna .□

DEFINICIJA 3.2. Polugrupa S je medijalna ako je

$$abcd = acbd$$

za sve $a,b,c,d \in S$.

LEMA 3.3. Ako S jeste medijalna polugrupa , tada

$$ax_1x_2\ldots x_nb = ax_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}b$$

za svaki $n \in Z$, $n \geq 2$, sve $a,b,x_1,x_2,\ldots,x_n \in S$ i svaku permutaciju σ skupa $\{1,2,\ldots,n\}$.□

TEOREMA 3.1. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni :

(i) S je regularna i n-distributivna ;

(ii) S je medijalna i $a^n = a$ za sve $a \in S$;

(iii) S je ortodoksna polugrupa i normalna traka n-distributivnih grupa .

<u>Dokaz.</u> (i)$\Rightarrow$(iii). Neka S jeste n-distributivna regularna polugrupa i neka je $a \in S$. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$, odakle je $a = axa = a(xa)^n = (axa)^n = a^n$. Prema tome , S jeste potpuno regularna , pa S jeste disjunktna unija n-distributivnih grupa . Neka $e,f \in E(S)$. Tada je

$$(ef)^2 = (ee)^{n-2}efef = e(e^{n-2}f^2) = e^{n-1}f^2 = ef \quad ,$$

pa S jeste ortodoksna . Neka $e,f,g \in E(S)$. Tada je

$$efge = ef^{n-1}ge = (eg)(f^{n-1}g)e = e(gf^{n-1})ge = egf^{n-1}e = egfe$$

pa E(S) jeste normalna traka .

Neka $a \in G_e$, $b \in G_f$, $e,f \in E(S)$. Tada je $a^{n-1} = e$, $b^{n-1} = f$ i

$$(ab)^{n-1} = (ab)^{2n-2} = (ab)^n(ab)^{n-2} = a^nb(ab)^{n-2} = \\ = aa^{n-2}(ab)^{n-1} = aa^{n-2}b^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1} = ef \quad ,$$

pa $ab \in G_{ef}$. Dakle , S jeste normalna traka E(S) grupa G_e , $e \in E(S)$.

(iii)$\Longrightarrow$(ii). Neka S jeste ortodoksna polugrupa i S jeste normalna traka Y n-distributivnih grupa G_α, $\alpha\in Y$. Tada je jasno da $E(S)$ jeste normalna traka izomorfna sa Y, tj. S jeste normalna traka $E(S)$ n-distributivnih grupa G_e, $e\in E(S)$, pri čemu G_e jeste grupa sa jedinicom e. Neka $x_i\in G_{e_i}$, $i=1,2,3,4$. Tada je

$$x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3e_1e_2e_3x_4 = x_1x_2e_1e_2x_3e_1e_2e_3x_4 =$$
$$= x_1e_1x_2e_1e_2x_3e_1e_2e_3x_4 = x_1e_1x_2e_1e_2x_3e_1e_2e_3e_4e_1e_2e_3x_4 =$$
$$= x_1e_1x_2e_1e_2x_3e_4e_1e_2e_3x_4 = x_1e_1x_2e_1e_2e_3e_4e_1e_2x_3e_4e_1e_2e_3x_4 =$$
$$= x_1e_1x_2e_3e_4e_1e_2x_3e_4e_1e_2e_3x_4 =$$
$$= x_1e_1e_2e_3e_4e_1x_2e_3e_4e_1e_2x_3e_4e_1e_2e_3x_4 =$$
$$= (x_1e_2e_3e_4)(e_1x_2e_3e_4)(e_1e_2x_3e_4)(e_1e_2e_3x_4) =$$
$$= (x_1e_2e_3e_4)(e_1e_2x_3e_4)(e_1x_2e_3e_4)(e_1e_2e_3x_4) =$$
$$= x_1e_1e_2e_3e_4e_1e_2e_3x_3e_3e_4e_1e_2e_3e_4e_1e_2x_2e_2e_3e_4e_1e_2e_3e_4x_4 =$$
$$= x_1e_1e_3e_2e_4e_1e_3x_3e_3e_2e_4e_1e_3e_2x_2e_2e_4e_1e_3e_2e_4x_4 =$$
$$= x_1e_1e_3x_3e_2e_4e_1e_3x_2e_4e_1e_3e_2x_4 =$$
$$= x_1e_1x_3e_1e_3e_2e_4e_1e_3x_2e_4e_1e_3e_2x_4 =$$
$$= x_1e_1x_3e_1e_3x_2e_4e_1e_3e_2x_4 = x_1x_3e_1e_3x_2e_1e_3e_2e_4e_1e_3e_2x_4 =$$
$$= x_1x_3e_1e_3x_2e_1e_3e_2x_4 = x_1x_3x_2e_1e_3e_2x_4 =$$
$$= x_1x_3x_2x_4 \quad ,$$

jer je grupa $G_{e_1e_2e_3e_4}$ komutativna i $E(S)$ jeste normalna traka . Dakle , S jeste medijalna polugrupa . Takodje je očigledno da je $a^n = a$ za sve $a\in S$ jer S jeste unija n-distributivnih grupa .

(ii)$\Longrightarrow$(i). Ova implikacija sledi na osnovu Leme 3.3.$\square$

TEOREMA 3.2. S jeste n-distributivna polugrupa ako i samo ako S jeste n-inflacija ortodoksne polugrupe , normalne trake n-distributivnih grupa .

<u>Dokaz.</u> Neka S jeste n-distributivna polugrupa . Tada za proizvoljni $x\in S$ je $x^{n+1} = xx^n = (xx)^n = x^{2n}$ i $2n > n+1$, pa S jeste periodična i $Reg(S) \neq \emptyset$. Kao u dokazu Teoreme 3.1. pokazujemo da je $a^n = a$ za sve $a\in Reg(S)$. Neka je $a\in Reg(S)$, $x\in S$. Tada je

$$ax = a^nx = (ax)^n \quad \text{i} \quad xa = xa^n = (xa)^n \quad ,$$

pa $ax, xa\in Reg(S)$, odakle imamo da $Reg(S)$ jeste ideal od S . Prema Teoremi 3.1. $Reg(S)$ jeste ortodoksna polugrupa i normalna traka n-distributivnih grupa .

Neka $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\in S$. Tada $x_{n+1}^{n+1}\in Reg(S)$, pa je

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = (\prod_{i=1}^{n} x_i)x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n}(x_ix_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_ix_{n+1})\ x_nx_{n+1} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1}(x_ix_{n+1}^2)\ x_nx_{n+1} = \dots = \prod_{i=1}^{n-1}(x_ix_{n+1}^{n+1})\ x_nx_{n+1} \in Reg(S),$$

jer $Reg(S)$ jeste ideal od S . Prema tome , $S^{n+1} \subseteq Reg(S)$. Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to Reg(S)$ sa:

$$\varphi(a) = a^{2n-1} \quad , \quad a \in S \ .$$

Neka $a,b \in S$. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= (ab)^{2n-1} = (ab)^{4n-3} = (ab)^n(ab)^{2n-3}(ab)^n = \\ &= a^nb(ab)^{2n-3}ab^n = a^{n-1}ab(ab)^{2n-3}abb^{n-1} = \\ &= a^{n-1}(ab)^n(ab)^{n-1}b^{n-1} = a^{n-1}a^nb(ab)^{n-1}b^{n-1} = \\ &= a^{2n-2}(ab)^nb^{n-1} = a^{2n-2}ab^nb^{n-1} = a^{2n-1}b^{2n-1} = \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \quad ,\end{aligned}$$

jer je $(ab)^{n+1} = (ab)^{2n}$. Prema tome , φ jeste homomorfizam iz S u $Reg(S)$. Ako je $a \in Reg(S)$, tada je $\varphi(a) = a^{2n-1} = a^n = a$, pa φ jeste retrakcija . Dakle , S jeste n-inflacija ortodoksne polugrupe , normalne trake n-distributivnih grupa.

Obrnuto , neka S jeste n-inflacija polugrupe T , pri čemu T jeste ortodoksna polugrupa i T jeste normalna traka n-distributivnih grupa . Prema Teoremi 3.1. T jeste n-distributivna polugrupa . Neka $\varphi : S \to T$ jeste retrakcija i neka $a,x_1,x_2,\dots,x_n \in S$. Tada iz $S^{n+1} \subseteq T$ imamo da je

$$a\prod_{i=1}^{n} x_i = \varphi(a\prod_{i=1}^{n} x_i) = \varphi(a)\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i) = \prod_{i=1}^{n}\varphi(a)\varphi(x_i) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\varphi(ax_i) = \varphi(\prod_{i=1}^{n} ax_i) = \prod_{i=1}^{n} ax_i \quad ,$$

zbog n-distributivnosti u T . Slično dokazujemo i drugu jednakost . Prema tome , S jeste n-distributivna .□

POSLEDICA 3.1. Neka S jeste n-distributivna polugrupa . Tada

$$ax_1\dots x_{n-1}b = ax_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n-1)}b$$

za sve $a,b,x_1,\dots,x_{n-1} \in S$ i svaku permutaciju σ skupa $\{1,2,\dots,n-1\}$.

Dokaz . Prema Teoremi 3.2. imamo da S jeste n-inflacija polugrupe T koja jeste regularna n-distributivna polugrupa . Prema Teoremi 3.1. T jeste medijalna . Neka $\varphi : S \to T$ jeste ratrakcija . Tada na osnovu Leme 3.3. imamo da je

$$a(\prod_{i=1}^{n-1}x_i)b = \varphi(a(\prod_{i=1}^{n-1}x_i)b) = \varphi(a)\prod_{i=1}^{n-1}\varphi(x_i)\cdot\varphi(b) =$$
$$= \varphi(a)(\prod_{i=1}^{n-1}\varphi(x_{\sigma(i)}))\varphi(b) = \varphi(a(\prod_{i=1}^{n-1}x_{\sigma(i)})b) =$$
$$= a(\prod_{i=1}^{n-1}x_{\sigma(i)})b \quad .\square$$

PROPOZICIJA 3.1.(Jacobson ,[8]). Neka R jeste prsten u kome za svaki element x postoji celi broj $n > 1$ takav da je $x^n = x$. Tada R jeste komutativan .□

TEOREMA 3.3. Sledeći uslovi za prsten R su ekvivalentni :

(i) R je regularan i n-distributivan ;

(ii) R je poddirektna suma n-distributivnih polja;

(iii) $a^n = a$ za svaki $a \in R$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$(ii). Sledi iz činjenice da svaki regularni komutativni prsten jeste poddirektna suma polja , iz Teoreme 3.1. i iz Propozicije 3.1.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sledi na osnovu Leme 3.2.

(iii)$\Rightarrow$(i). Sledi na osnovu Propozicije 3.1.□

TEOREMA 3.4. Prsten R je n-distributivan ako i samo ako R jeste jaka ekstenzija (n+1)-nilpotentnog prstena pomoću regularnog n-distributivnog prstena .

Dokaz. Neka R jeste jaka ekstenzija (n+1)-nilpotentnog prstena A pomoću regularnog n-distributivnog prstena B , tj. neka R jeste neka jaka Everettova suma $E(A,B;[\,,\,];\langle\,,\,\rangle)$ prstena A i B . Neka $(\alpha,a),(\alpha_i,a_i)\in R$, $i=1,2,\dots,n$ jesu proizvoljni elementi . Kako imamo da je $A^{2n} \subseteq A^{n+1} = 0$, to je , prema (10'') i komutativnosti u B ,

$$\prod_{i=1}^{n}((\alpha,a)(\alpha_i,a_i)) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i + \langle a,a_i\rangle, aa_i) =$$
$$= (\prod_{i=1}^{n}\alpha\alpha_i + \langle\prod_{i=1}^{n-1}aa_i, aa_n\rangle, \prod_{i=1}^{n}aa_i) =$$
$$= (\langle\prod_{i=1}^{n-1}aa_i, aa_n\rangle, \prod_{i=1}^{n}aa_i) = (\langle(\prod_{i=1}^{n-1}aa_i)a, a_n\rangle, a^n\prod_{i=1}^{n}a_i) =$$
$$= (\langle a^n\prod_{i=1}^{n-1}a_i, a_n\rangle, a\prod_{i=1}^{n}a_i) = (\langle a, \prod_{i=1}^{n}a_i\rangle, a\prod_{i=1}^{n}a_i) =$$
$$= (\alpha\prod_{i=1}^{n}\alpha_i + \langle a, \prod_{i=1}^{n}a_i\rangle, a\prod_{i=1}^{n}a_i) = (\alpha,a)\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i,a_i) \quad .$$

Prema tome , R jeste n-distributivan .

Obratno tvrdjenje sledi na osnovu Teoreme 3.2. i Teoreme 2.1. (odnosno Posledice 2.1.) .□

PRIMER 3.1. Neka je

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,0 \in Z_3 \right\}$, gde Z_3 jeste polje ostataka po mod3 . Tada R jeste 3-distributivni prsten - Takodje , Reg(R) nije podprsten od R pa R ne može biti predstavljen u obliku direktne sume 4-nilpotentnog prstena i regularnog 3-distributivnog prstena .

4. RETRAKTIVNE EKSTENZIJE PRSTENA

DEFINICIJA 4.1. Neka A jeste podprsten prstena R . Homomorfizam $\varphi : R \to A$ je retrakcija od R na A ako je

$$\varphi(a) = a \quad \text{za sve} \quad a \in A \ .$$

Ako postoji retrakcija od R na A , tada A nazivamo retraktom prstena R . Ako je , pri tome , A ideal od R , tada kažemo da A jeste retraktivni ideal od R i R jeste retraktivna ekstenzija prstena A .

TEOREMA 4.1. Prsten R jeste retraktivna ekstenzija prstena A ako i samo ako A jeste direktni sumand od R .

Dokaz. Neka R jeste retraktivna ekstenzija prstena A sa retrakcijom φ . Neka je $B = R_{/A}$ i neka je ν kanonički homomorfizam od R na B . Neka je $R' = A + B$. Definišimo preslikavanje $\psi : R \to R'$ sa :

$$\psi(a) = (\varphi(a), \nu(a - \varphi(a))) \quad , \quad a \in R \ .$$

Neka $a,b \in R$. Tada je

$$\begin{aligned} \psi(a+b) &= (\varphi(a+b), \nu(a+b-\varphi(a+b))) = \\ &= (\varphi(a)+\varphi(b), \nu(a+b-\varphi(a)-\varphi(b))) = \\ &= (\varphi(a)+\varphi(b), \nu(a-\varphi(a))+\nu(b-\varphi(b))) = \\ &= (\varphi(a), \nu(a-\varphi(a)))+(\varphi(b), \nu(b-\varphi(b))) = \\ &= \psi(a)+\psi(b) \ . \end{aligned}$$

Kako je $(a-\varphi(a))(b-\varphi(b)) = ab - a\varphi(b) - \varphi(a)b + \varphi(a)\varphi(b) =$

$$= ab - \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(b) =$$

$$= ab - \varphi(a)\varphi(b) = ab - \varphi(ab) \ ,$$

to je

$$\psi(ab) = (\varphi(ab), \nu(ab - \varphi(ab))) =$$

$$= (\varphi(a)\varphi(b), \nu((a-\varphi(a))(b-\varphi(b)))) =$$
$$= (\varphi(a)\varphi(b), \nu(a-\varphi(a))\nu(b-\varphi(b))) =$$
$$= (\varphi(a), \nu(a-\varphi(a)))(\varphi(b), \nu(b-\varphi(b))) =$$
$$= \psi(a)\psi(b) \quad .$$

Prema tome ψ jeste homomorfizam .

Neka je $\psi(a) = \psi(b)$, $a,b \in R$. Tada je $\varphi(a)=\varphi(b)$ i $\nu(a-\varphi(a)) = \nu(b-\varphi(b))$. Iz druge jednakosti dobijamo da je $(a-\varphi(a)) \equiv (b-\varphi(b))(\mathrm{mod} A)$, tj. $(a-\varphi(a))-(b-\varphi(b)) \in A$, odakle je

$$(a-\varphi(a))-(b-\varphi(b)) = \varphi((a-\varphi(a))-(b-\varphi(b))) =$$
$$= \varphi(a)-\varphi(a)-\varphi(b)+\varphi(b) = 0 \quad .$$

Kako je $\varphi(a) = \varphi(b)$, to je

$$0 = a-\varphi(a)-b+\varphi(b) = a-b \quad , \text{ tj. } \quad a = b \quad .$$

Prema tome , ψ jeste jedan-jedan .

Neka $(x,y) \in R'$. Tada $y \in B = \nu(R)$ pa postoji $b \in R$ tako da je $y = \nu(b)$. Kako je $(b-\varphi(b)) \equiv b(\mathrm{mod} A)$, to $\nu(b-\varphi(b)) = y$. Neka je $a = x + (b - \varphi(b))$. Tada je

$$\varphi(a) = \varphi(x+b-\varphi(b)) = \varphi(x)+\varphi(b)-\varphi(b) = x \quad ,$$

jer $x \in A$, i , sa druge strane ,

$$a-\varphi(a) = x+b-\varphi(b)-x = b-\varphi(b) \quad ,$$

pa je

$$\nu(a-\varphi(a)) = \nu(b-\varphi(b)) = y \quad .$$

Prema tome ,

$$(x,y) = (\varphi(a), \nu(a-\varphi(a))) = \psi(a) \quad .$$

Dakle , ψ jeste na , čime smo dobili da ψ jeste izomorfizam iz R na $R' = A \oplus B$.

Obrnuto , neka je $R = A \oplus B$. Tada A možemo identifikovati sa idealom $\{(\alpha,0) \mid \alpha \in A\}$ prstena R , pa R jeste ekstenzija od A . Definišimo preslikavanje $\varphi : R \longrightarrow A$ sa

$$\varphi((\alpha,a)) = (\alpha,0) \quad , \quad (\alpha,a) \in R \ .$$

Tada se lako proverava da φ jeste retrakcija .□

POSLEDICA 4.1. Neka A jeste prsten sa jedinicom . Tada R jeste ekstenzija od R ako i samo ako A jeste direktni sumand od R .

Dokaz. Ako R jeste ekstenzija od A , tada je preslikavanje $\varphi : R \longrightarrow A$ definisano sa : $\varphi(x) = xe$, $x \in R$, retrakcija , pri čemu e jeste jedinica prstena A .

Obrat je neposredan .□

U narednim razmatranjima ćemo pokazati kako se Teorema 4.1. može koristiti u direktnoj dekompoziciji prstena .

DEFINICIJA 4.2. Neka p jeste prost broj . Prsten R jeste p-prsten ako je

$$x^p = x \quad , \quad px = 0$$

za sve $x \in R$. Poznato je da R jeste p-prsten ako i samo ako R jeste poddirektna suma polja reda p .

DEFINICIJA 4.3. Neka p jeste prost broj . Komutativni prsten R je pred-p-prsten ako je R karakteristike p i

$$xy^p = x^p y$$

za sve $x,y \in R$.

TEOREMA 4.2. R jeste pred-p-prsten ako i samo ako R jeste direktna suma p-prstena i pred-p-nil-prstena .

Dokaz. Neka R jeste pred-p-prsten i $x,y \in R$ jesu proizvoljni elementi . Zbog komutativnosti u R imamo da važi binomni obrazac , tj.

$$(x+y)^p = \sum_{i=o}^{p} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} \quad , \quad \binom{p}{i} = \frac{p!}{(n-k)!k!} \quad ,$$

i , takodje , $(xy)^p = x^p y^p$. Kako p jeste prost broj i $(n-k)!k!$ deli $p!$, to imamo da $(n-k)!k!$ deli $(p-1)!$ pa p deli $\binom{p}{i}$ za sve $i=1,2,\dots,p-1$. Prema tome

$$(x+y)^p = x^p + y^p \quad .$$

Neka je $A = \{ x \in R \mid x^p = x \}$. Očigledno je $A \neq \emptyset$, jer $0 \in A$. Neka $x,y \in A$. Na osnovu prethodno pokazanog imamo da je $(x+y)^p = x^p + y^p = x + y$, $(xy)^p = x^p y^p = xy$, pa A jeste podprsten , tj. A jeste p-prsten .

Neka je $x \in R$. Tada je

$$x^{p+2} = x^2 x^p = x^{2p} x = x^{2p+1} \quad ,$$

pri čemu je $2p+1 > p+2$, pa R jeste periodični prsten . Takodje imamo da je

$$x^{5p-5} = x^{6p-6} = \dots = x^{kp-k}$$

za svaki $k \in Z$, $k \geq 5$. Kako $x^{5(p-1)}$ jeste idempotent , to je on jedinica za sve elemente x^m , $m \geq p+2$. Kako je $p^3 > p+2$, to je $x^{5(p-1)}$ jedinica za element x^m , $m = p^3$. Prema tome ,

$$(x^{p^3})^p = x^{p^4} = x^{p^4-p^3+p^3} = x^{p^3(p-1)} x^{p^3} = x^{5(p-1)} x^{p^3} = x^{p^3} \quad ,$$

pa $x^{p^3} \in A$. Neka $a \in A$ i $x \in R$. Tada

$$ax = a^p x = ax^p = a^p x^p = ax^{p^2} = a^p x^{p^2} = ax^{p^3} \in A \quad ,$$

i na isti način pokazujemo da $xa \in A$. Prema tome A jeste ideal od R. Očigledno je da $B = R_{/A}$ jeste pred-p-nil-prsten. Definišimo preslikavanje $\varphi : R \to A$ sa :

$$\varphi(x) = x^{p^3}, \quad x \in R .$$

Tada za $x,y \in R$ imamo da je

$$\varphi(x+y) = (x+y)^{p^3} = ((x+y)^p)^{p^2} = (x^p+y^p)^{p^2} = \dots = x^{p^3}+y^{p^3},$$
$$= \varphi(x)+\varphi(y) .$$

i zbog komutativnosti je $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Dakle, jeste retrakcija pa prema Teoremi 4.1. imamo da $R = A \oplus B$.

Obrat se pokazuje neposredno .□

TEOREMA 4.3. Sledeći uslovi za prsten R su ekvivalentni :

(i) $(R, \ )$ je nil-ekstenzija trake ;

(ii) $(R, \ )$ je nil-ekstenzija polumreže ;

(iii) R je direktna suma Booleovog prstena i nil-prstena .

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka $(R,\cdot)$ jeste nil-ekstenzija trake E. Neka $e,f \in E$. Tada $(e+f)f, f(e+f) \in E$, pa je

$$(e+f)f = ((e+f)f)^2 = (ef+f)^2 = (ef)^2+f^2+(ef)f+f(ef) =$$
$$= ef+f+ef+fef = (e+f)f+ef+fef ,$$

odakle je

$$ef + fef = 0 .$$

Na isti način dobijamo da je

$$fe + fef = 0 .$$

Prema tome , $ef = fe$, pa E jeste polumreža .

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka $(R,\cdot)$ jeste nil-ekstenzija polumreže E. Kao u delu (i)$\Rightarrow$(ii) dokaza ove teoreme , dobijamo da je $ef + fef = 0$ i iz $ef = fe$ dobijamo da je

$$2ef = 0 .$$

Sada je $(e+f)^2 = e + 2ef + f = e + f$, pa E jeste Booleov prsten . Definišimo preslikavanje $\varphi : R \to E$ sa :

$$\varphi(x) = e \quad \text{ako} \quad x^n = e \quad \text{za neki } n \in Z^+,$$

$(e \in E)$. Neka $x,y \in R$ i neka je $x^n = e$, $y^m = f$, za neke $n,m \in Z^+$, $e,f \in E$. Neka $(xy)^k = g$ za neke $k \in Z^+$, $g \in E$. Prema Teoremi X 3.1.[2] imamo da $(R,\cdot)$ jeste polumreža E nil-polugrupa K_e , $e \in E$, gde je $K_e = \{x \in R \mid x^n = e\}$ za neki $n \in Z^+$. Odavde imamo da je

$$\varphi(xy) = ef = \varphi(x)\varphi(y) .$$

Prema tome

$$g = g(x+y) = gx+gy = ge+gf$$

i , sa druge strane ,

$$ge = (x+y)^k e = (e+ef)^k = e+ef \ , \ gf = (x+y)^k f = ef+f \quad ,$$

odakle je

$$g = ge + gf = e + ef + ef + f = e + f + 2ef = e + f \quad ,$$

pa je

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad .$$

Dakle , φ jeste retrakcija pa prema Teoremi 4.1. R jeste direktna suma Booleovog prstena E i nil-prstena $R_{/E}$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Sledi neposredno .□

L I T E R A T U R A

[1] Abian,A. and McWorter,W.A, The structure of pre-p-rings , Monthly , 71 (1964) , 155-157 .

[2] Bogdanović,S, Semigroups with a system of subsemigroups , Inst. of Math. Novi Sad , 1985 .

[3] Bogdanović,S. and Milić,S, Inflations of semigroups , Publ. Inst. Math. 41(55) , (1987) , 63-73 .

[4] Ćirić,M. and Bogdanović,S, Generalized distributivity in semigroups and rings , (u pripremi) .

[5] Dorroh,J.L. Concerning adjunktions to algebras , Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932) , 85-88 .

[6] Everett,C.J, An extension theory for rings , Amer. J. Math. 64 (1942) , 363-370 .

[7] Herstein,I.N, An elementary proof of a Theorem of Jacobson , Duke Math. J. 21 (1954) , 45-48 .

[8] Jacobson,N, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree , Annals of Math, Vol 46 (1945),695-707.

[9] Kertesz,A, Lectures on Artinian rings , Akademiai Kiado , Budapest , 1987 .

[10] Mac Lane,S, Extensions and obstructions for rings, Illinois J. Math. 2 (1958) , 316-345 .

[11] Mc Coy , Theory of rings , New York-London,1964 .

[12] Müler,U. and Petrich,M, Erweiterungen eines Ringes durch eine direkte Summe zyklischer Ringe , J. Reine Angew. Math. 248 (1971) , 47-74 .

[13] Müller,U. and Petrich,M, Translationshüle and wesentlichen Erweiterungen eines zyklischen Ringes , J. Reine Angew. Math. 249 (1971) , 34-52 .

[14] Petrich,M, The translational hull in semigroups and rings , Semigroup Forum , 1 (1970) , 283-360 .

[15] Petrich,M, Rings and semigroups , Lecture notes in Math. No 380 , Springer-Verlag , 1974 .

[16] Petrich,M, Introduction to semigroups , Merill Ohio , 1973 .

[17] Petrich,M, Structure des demi-groupes et anneaux distributifs , C.R. Acad. Sc. Paris , SerA 268 (1969),849-852 .

[18] Putcha,M.S, Rings which are semilattices of Archimedean semigroups , Semigroup Forum , 23(1981),1-5 .

[19] Rédei,L, Algebra I , Pergamon Press , Oxford - New York , 1967 .

[20] Yoshida,R, Ideal extensions of semigroups and compound semigroups , Mem. Res. Inst. Sci. Eng. Ritumeikan Univ. 13 (1965) , 1-8 .