JEZICI I AUTOMATI

MIROSLAV D. ĆIRIĆ TATJANA S. PETKOVIĆ
STOJAN M. BOGDANOVIĆ

ПРОСВЕТА
НИШ

DR MIROSLAV D. ĆIRIĆ
vanredni profesor Univerziteta u Nišu

DR TATJANA S. PETKOVIĆ
docent Univerziteta u Nišu

DR STOJAN M. BOGDANOVIĆ
redovni profesor Univerziteta u Nišu

JEZICI I AUTOMATI

prvo izdanje, 2000.

Za izdavača
BOŽIDAR MARKOVIĆ, direktor

Urednik
DR BUDIMIR SOKOLOVIĆ

Redakcija
DR STOJAN BOGDANOVIĆ
DR VESELIN ILIĆ
DR LJUBOMIR HADŽI-PEŠIĆ
DR BUDIMIR SOKOLOVIĆ

Recenzenti
DR SINIŠA CRVENKOVIĆ
redovni profesor Univerziteta u Novom Sadu
DR PREDRAG STANIMIROVIĆ
vanredni profesor Univerziteta u Nišu

Izdavač
PROSVETA, NIŠ

Štampa
PROSVETA, NIŠ

Tiraž: 250 primeraka

ISBN 86-7455-457-1

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије. Београд

519. 713 (075.8)

Ћирић, Мирослав Д.
Jezici i automati / Miroslav D. Ćirić
Tatjana S. Petković, Stojan M. Bogdanović. –
[1. izd.] . – Niš : Prosveta, 2000 (Niš :
Prosveta). – III, 379 str. : graf. prikazi ;
22 cm

Tiraž 250. – Bibliografija: str. 335–361. –
Registar.

1. Петковић, Татјана С. 2. Богдановић
Стојан М.
519. 76 (075. 8)
а) Аутомати, коначни б) Математичка
лингвистика
ИД=85419788

Odlukom nastavno Naučnog-veća Filozofskog fakulteta u Nišu, sada Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, broj 215/13-1 od 28.07.1999. godine ova monografija je odobrena kao stalni udžbenik za predmet "Teorija jezika i automata”.

JEZICI
I
AUTOMATI

MIROSLAV D. ĆIRIĆ   TATJANA S. PETKOVIĆ
STOJAN M. BOGDANOVIĆ

Prosveta, Niš, 2000

Predgovor

Ova knjiga je zamišljena, pre svega, kao udžbenik za predmet *Teorija jezika i automata*, na trećoj godini osnovnih studija na smeru za Računarstvo i informatiku Odseka za Matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu. Međutim, ona je napisana tako da je mogu koristiti i studenti postdiplomskih studija za predmete *Teorija algoritama, jezika i automata*, na smeru za Računarstvo i informatiku, i *Teorija jezika i automata*, na smeru za Algebru i kombinatornu matematiku. Ona, svakako, može poslužiti i onima koji su zainteresovani za šira znanja o formalnim jezicima i automatima. Deo knjige sadrži i nove, originalne rezultate autora, koji su bili tema mnogih predavanja na Seminaru za algebru u Nišu, a takođe su izlagani i na brojnim međunarodnim konferencijama.

Tokom poslednjih pedesetak godina, koncepti informacije, obrade, prenosa i skladištenja informacija postali su centralni u mnogim oblastima savremene nauke. Njihovo izučavanje egzaktnim matematičkim metodama postalo je jedan od glavnih zadataka u tim oblastima, što je uslovilo pojavu raznih matematičkih apstrakcija tih koncepata. Matematički pojmovi jezika i automata spadaju među najvažnije tako nastale apstrakcije.

Kao zasebne discipline računarstva, matematičke teorije jezika i automata izdvojile su se pedesetih godina dvadesetog veka. Na njihov razvoj uticale su mnoge druge matematičke teorije, pre svega matematička logika i algebra, čije ideje, metode i rezultate teorije jezika i automata uspešno koriste još od samog svog nastanka. Važnu ulogu u njihovom razvoju imale su i druge prirodne, društvene, humanističke i tehničke nauke, kao i njihove značajne primene u raznim oblastima, a pre svega u teoriji informacija i računarstvu, i to podjednako u njegovoj hardverskoj i softverskoj komponenti. Najznačajnije primene jezici i automati su našli u dizajniranju arhitekture digitalnih računarskih sistema i digitalnih kola, konstrukciji raznih sistema za prenos, obradu i skladištenje informacija, formalnom opisivanju sintakse programskih jezika, leksičkoj analizi u kompilaciji i user-interface prevođenju, editovanju teksta, prepoznavanju oblika, paralelnoj obradi, generisanju i kompresiji slika, teoriji kodova, kriptologiji itd. Najnovija istraživanja u teoriji jezika i automata su u velikoj meri motivisana problemima koji dolaze iz biologije, a rezultati tih istraživanja imaju uspešne primene u modeliranju izvesnih objekata i fenomena u biologiji. Kao plod takvih tendencija, pojavile su se mnoge nove discipline, kao što su teorija Lindenmayerovih ili L-sistema, DNK izračunavanja, izračunavanja sa membranama (ćelijska izračunavanja), celularni automati itd. Više informacija o razvoju i savremenim trendovima teorije jezika i automata može se naći u trotomnoj knjizi *Handbook of Formal Languages*, koju su uredili Rozenberg i Salomaa ([1997a, 1997b, 1997c]) i radu Perrina [1995b], i drugim izvorima navedenim u spisku literature.

Ova knjiga predstavlja pokušaj da se na nov način obrade osnove teorije jezika i automata. Novine o kojima je reč ogledaju se u posebnom pristupu ovoj problematici koji se, u najvećoj meri, temelji na specifičnoj primeni egzaktnih algebarskih metoda, pre svega metoda teorije polugrupa.

Knjiga ima osam glava. U prvoj glavi se daju algebarski pojmovi, oznake i rezultati kojima bi čitalac morao vladati da bi sa uspehom ovladao ostatkom sadržaja ove knjige. U drugoj glavi daje se definicija slobodne polugrupe i razni njeni ekvivalenti, uvode se pojmovi jezika i gramatike, daje njihova klasifikacija i prikazuju osnovne osobine izvođenja u gramatici. U trećoj glavi govori se o Mealyevim i Mooreovim automatima, o realizaciji preslikavanja tim automatima, problemima ekvivalentnosti i minimizacije automata itd. Četvrta glava je posvećena automatima bez izlaza, pri čemu je posebna pažnja posvećena njihovim polugrupama prelaza, razlaganjima u direktnu sumu, i izvesnim varijetetima, uopštenim varijetetima i pseudovarijetetima automata. Peta glava bavi se jezicima koji se mogu raspoznati konačnim automatom i za klasu tih jezika se dokazuje da se poklapa sa klasom racionalnih jezika, onih jezika koji se mogu prepoznati konačnim monoidom ili konačnim nedeterminističkim automatom, odnosno generisati regularnom gramatikom. U šestoj glavi govori se o kontekstno-nezavisnim jezicima i njihovom raspoznavanju potisnim automatima, dok se u sedmoj glavi govori o kontekstno-zavisnim jezicima i njihovom raspoznavanju linearno ograničenim automatima, i o jezicima koji se uopšte mogu generisati gramatikama, i njihovom raspoznavanju Turingovim mašinama. Konačno, u osmoj glavi se razmatraju razni problemi odlučivosti u teoriji jezika.

Autori se srdačno zahvaljuju recenzentima, prof. dr Siniši Crvenkoviću i prof. dr Predragu Stanimiroviću, čije su sugestije znatno doprinele kvalitetu ovog rukopisa. Zahvaljujemo se i našim studentima i svim učesnicima Semi-

nara za algebru, koji su čitali ovaj rukopis još tokom njegove izrade i čije su diskusije bile od velike koristi autorima. Posebno se zahvaljujemo našim prijateljima mr Jeleni Kovačević i mr Žarku Popoviću, čije je bdenje nad ovom knjigom, od početka do kraja, bilo stalni podstrek autorima da ovaj posao i okončaju. Našim porodicama dugujemo veliku zahvalnost za pokazano strpljenje i toleranciju.

Univerzitet u Nišu, 2000.

Autori

Sadržaj

1 Algebarske osnove **5**

1.1. Skupovi, relacije i preslikavanja 5
1.2. Uređenja, ekvivalencije i grafovi 8
1.3. Algebre, podalgebre, homomorfizmi i kongruencije 15
1.4. Polugrupe 24
1.5. Podpolugrupe i kongruencije 33
1.6. Mreže i Booleove algebre 38
1.7. Direktni i poddirektni proizvodi. Direktni limiti 44
1.8. Identiteti i varijeteti 49
1.9. Uopšteni varijeteti i pseudovarijeteti 56
1.10. Regularnost varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta . . . 60
1.11. Zadaci 67

2 Slobodne polugrupe. Jezici i gramatike **75**

2.1. Reči. Definicija slobodne polugrupe 75
2.2. Ekvivalentne definicije slobodne polugrupe 77
2.3. Jezici i gramatike 83
2.4. Saglasnost izvođenja 87
2.5. Zadaci 90

3 Automati sa izlazom **93**

3.1. Pojam automata 94
3.2. Predstavljanje automata 97

3.3. Homomorfizmi, kongruencije, podautomati i generatorni skupovi ... 101
3.4. Preslikavanja indukovana automatima ... 105
3.5. Ekvivalentni automati. Redukovani automati ... 114
3.6. Minimizacija automata sa izlazom ... 118
3.7. Mooreovi automati ... 121
3.8. Kompozicija automata ... 128
3.9. Zadaci ... 131

4 Automati bez izlaza 133

4.1. Automati kao unarne algebre ... 134
4.2. Relacije Nerodea i Myhilla ... 137
4.3. Polugrupa prelaza automata ... 141
4.4. Direktne sume automata ... 145
4.5. Lokalno povezani automati ... 153
4.6. Lokalizacija varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta automata ... 158
4.7. Uopšteno direktabilni automati ... 165
4.8. Strukturna svojstva i polugrupe prelaza uopšteno direktabilnih automata ... 175
4.9. Reverzibilna stanja automata ... 187
4.10. Zadaci ... 193

5 Raspoznavanje jezika automatima 197

5.1. Minimalni automat jezika ... 198
5.2. Minimizacija automata bez izlaza ... 204
5.3. Sintaksički monoid jezika ... 212
5.4. Raspoznavanje jezika konačnim automatima ... 219
5.5. Nedeterministički automati ... 225
5.6. Proizvod jezika ... 227
5.7. Generisanje podpolugrupe i podmonoida jezikom ... 232
5.8. Racionalni jezici. Regularni izrazi. Teorema Kleenea ... 237
5.9. Jezici generisani regularnim gramatikama ... 242
5.10. Zadaci ... 247

6 Kontekstno-nezavisni jezici **253**

6.1. Kontekstno-nezavisne gramatike 254
6.2. Udaljavanje e-pravila i trivijalnih pravila 259
6.3. Gramatike u Normalnoj formi Chomsky 266
6.4. Stablo izvođnja. Lema o napumpavanju 272
6.5. Potisni automati 277
6.6. Raspoznavanje jezika potisnim automatima 282
6.7. Kontekstno-nezavisni jezici i potisni automati 288
6.8. Zadaci 289

7 Raspoznavanje jezika tipova 0 i 1 **291**

7.1. Turingove mašine 292
7.2. Turingove mašine i jezici tipa 0 299
7.3. Linearno ograničeni automati 304
7.4. Zadaci 310

8 Odlučivost u Teoriji jezika **313**

8.1. Izračunljivost i odlučivost. Churchova teza 314
8.2. Rekurzivni i rekurzivno nabrojivi jezici 316
8.3. Odlučivi i neodlučivi problemi u Teoriji jezika 326
8.4. Zadaci 332

Literatura **335**

Preface **363**

Contents **367**

Indeks **371**

Glava 1

Algebarske osnove

U ovoj glavi će biti uvedeni osnovni pojmovi i dati neki rezultati iz algebre koji će biti korišćeni u daljem radu.

1.1. Skupovi, relacije i preslikavanja

U ovoj knjizi poći ćemo od pretpostavke da čitaoci vladaju osnovnim pojmovima i oznakama Teorije skupova i Teorije brojeva. Skup nenula prirodnih brojeva označavaćemo sa $\mathbb{N}$, dok će skup prirodnih brojeva sa uključenom nulom biti označavan sa $\mathbb{N}^0$. Ako su $m, n \in \mathbb{N}^0$ brojevi takvi da je $m \leq n$, tada je $[m, n] = \{k \in \mathbb{N}^0 \,|\, m \leq k \leq n\}$. Pojam *klasa* koristićemo jednako kao i pojam *skup*. Klasa skupova biće obično nazivana *familijom skupova*. Kardinalni broj skupa H označavamo sa $|H|$, a sa H^c njegov komplement, u situaciji kada je poznato u odnosu na koji širi skup se taj komplement posmatra, a ukoliko to nije jasno, navešćemo eksplicitno koji je to skup. Familija skupova indeksirana skupom I će biti označavana sa H_i, $i \in I$, $\{H_i \,|\, i \in I\}$ ili $\{H_i\}_{i \in I}$. Ako je indeksni skup konačan i ima n elemenata, onda obično pišemo $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ i familiju indeksiranu sa I označavamo sa H_1, H_2, $\ldots$, H_n ili $\{H_i\}_{i=1}^n$.

Neka je $\{H_i\}_{i \in I}$ neprazna familija nepraznih skupova. Pod *Descartesovim proizvodom* te familije, koji označavamo sa $\prod_{i \in I} H_i$, podrazumevamo skup koji se sastoji iz svih preslikavanja

$$a : I \to \bigcup_{i \in I} H_i, \qquad a : i \mapsto a_i,$$

koja ispunjavaju uslov $a_i \in H_i$, za svaki $i \in I$. Jednostavnosti radi, element $a \in H = \prod_{i \in I} H_i$ pišemo kao $(a_i)_{i \in I}$ ili kraće samo (a_i), ako je indeksni skup

I dobro poznat. Za $i \in I$, preslikavanje $\pi_i : H \to H_i$, definisano sa $a\pi_i = a_i$, naziva se *i-tom projekcijom* od H na H_i, a a_i se naziva *i-tom koordinatom* od a. Ako je indeksni skup I konačan, u kom slučaju obično uzimamo da je $I = \{1, 2 \ldots, n\}$, onda obično pišemo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, i Descartesov proizvod familije $\{H_i\}_{i=1}^n$ označavamo sa $\prod_{i=1}^n H_i$ ili $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$. U tom slučaju proizvoljan element $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ nazivamo *uređenom n-torkom*, a ako je $n = 2$, onda govorimo o *uređenom paru*. Ako je $H_i = H$, za svaki $i \in I$, tada Descartesov proizvod $\prod_{i \in I} H_i$ označavamo sa H^I i nazivamo ga *Descartesovim stepenom* skupa H, a ako je $H_1 = H_2 = \cdots = H_n = H$, tada pišemo $\prod_{i=1}^n H_i = H^n$.

Neka je H neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$. Pod pojmom *n-arne relacije* na H podrazumevamo svaki podskup ξ skupa H^n, pri čemu to može biti i prazan podskup. Broj n se naziva *dužina* ili *arnost* relacije ξ. Relacije dužine 2 se nazivaju *binarne relacije*. Budući da najčešće radimo sa binarnim relacijama, onda binarne relacije kraće nazivamo samo *relacijama*. Skup svih binarnih relacija na H označavamo sa $\mathcal{B}(H)$. Specijalne vrste relacija na skupu H koje su vredne pažnje su *prazna relacija*, sa uobičajenom oznakom $\varnothing$, *relacija jednakosti* $\Delta_H = \{(x, x) \,|\, x \in H\}$, koja se takođe naziva i *dijagonala* ili *identička relacija*, i *univerzalna* ili *puna relacija* $\nabla_H = H \times H$. U slučajevima kada ne postoji opasnost od zabune, izostavljamo indeks H u Δ_H i ∇_H i pišemo prosto Δ i ∇. Ako je ξ relacija na H i $(a, b) \in \xi$, tada kažemo da su a i b *u relaciji* ξ i ponekad izraz "$(a, b) \in \xi$" zamenjujemo izrazom "$a \,\xi\, b$". Ako su H i K dva neprazna skupa, tada pod pojmom *relacije između skupova* podrazumevamo svaki podskup $\xi \subseteq H \times K$.

Proizvod relacija $\xi, \eta \in \mathcal{B}(H)$ je relacija $\xi\eta$ definisana sa

$$\xi\eta = \{(a, c) \in H \times H \,|\, (\exists b \in H)\, a \,\xi\, b \text{ i } b \,\eta\, c\}.$$

Za $\xi \in \mathcal{B}(H)$, relaciju $\xi^{-1} = \{(x, y) \,|\, (y, x) \in \xi\}$ nazivamo *inverznom* ili *obratnom relacijom* relacije ξ, relaciju $\xi' = \{(a, b) \in H \times H \,|\, (a, b) \notin \xi\}$ nazivamo *suprotnom relacijom* ili *negacijom* relacije ξ, a skupovi

$$\mathrm{dom}\xi = \{a \in H \,|\, (\exists b \in H)\, a \,\xi\, b\} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{ran}\xi = \{b \in H \,|\, (\exists a \in H)\, a \,\xi\, b\}$$

nazivaju se *domen* i *rang* relacije ξ, tim redom. Jasno je da važi $\mathrm{dom}(\xi^{-1}) = \mathrm{ran}\xi$ i $\mathrm{ran}(\xi^{-1}) = \mathrm{dom}\xi$. Za $a \in H$ pišemo

$$a\xi = \{x \in H \,|\, a \,\xi\, x\}, \qquad \xi a = \{x \in H \,|\, x \,\xi\, a\}.$$

Neka je H neprazan skup. Relaciju $\phi \in \mathcal{B}(H)$ nazivamo *parcijalno preslikavanje* ili *parcijalna transformacija* skupa H ako je $|a\phi| = 1$, za svaki

$a \in \operatorname{dom}\phi$. Drugim rečima, ϕ je parcijalno preslikavanje skupa H ako za svaki $a \in \operatorname{dom}\phi$ postoji tačno jedan $b \in H$ takav da je $(a,b) \in \phi$. Pri ovakvoj definiciji, i prazna relacija na H je parcijalno preslikavanje skupa H. Skup svih parcijalnih preslikavanja skupa H označavamo sa $\mathcal{PT}(H)$. Za $\varphi, \psi \in \mathcal{PT}(H)$ je

$$\operatorname{dom}(\varphi\psi) = [\operatorname{ran}\varphi \cap \operatorname{dom}\psi]\varphi^{-1}, \qquad \operatorname{ran}(\varphi\psi) = [\operatorname{ran}\varphi \cap \operatorname{dom}\psi]\psi,$$

i za svaki $a \in \operatorname{dom}(\varphi\psi)$ je

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi.$$

Ova relacija se često koristi kao ekvivalent definicije proizvoda parcijalnih preslikavanja, koji je inače specijalan slučaj proizvoda binarnih relacija.

Neka su φ i ψ parcijalna preslikavanja skupa H takva da je $\varphi \subseteq \psi$. Tada je $\operatorname{dom}\varphi \subseteq \operatorname{dom}\psi$ i $\operatorname{ran}\varphi \subseteq \operatorname{ran}\psi$. Ako uvedemo oznake $H = \operatorname{dom}\varphi$, $K = \operatorname{dom}\psi$, tada kažemo da je φ *restrikcija od* ψ *na* H, u oznaci $\varphi = \psi|H$, i da je ψ *proširenje od* φ *na* K.

Neka su H i K neprazni skupovi. Ako je ϕ parcijalno preslikavanje nekog skupa takvo da važi

$$\operatorname{dom}\phi \subseteq H \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ran}\phi \subseteq K,$$

tada kažemo da je ϕ *parcijalno preslikavanje* ili *parcijalna funkcija skupa* H *u skup* K, a ako je pri tome $\operatorname{dom}\phi = H$, tada kažemo da je ϕ *preslikavanje skupa* H *u skup* K. To u oba slučaja simbolički označavamo sa

$$\phi : H \to K,$$

što čitamo "ϕ *slika* H *u* K", ali u slučaju kada se radi o parcijanom preslikavanju, uvek to posebno ističemo. Prema definiciji parcijalnog preslikavanja, za svaki $x \in H$ postoji tačno jedan element $y \in K$ takav da je $(x,y) \in \phi$, pa tada umesto $\{y\} = x\phi$ pišemo $y = x\phi$ ili $\phi : x \mapsto y$, pri čemu kažemo da ϕ *slika* x *u* y. Time smo na prirodan način došli do tzv. *desnog označavanja* preslikavanja, tj. oznaka preslikavanja se nalazi sa desne strane argumenta, koje će biti korišćeno u ovoj knjizi. Ako $\phi : H \to K$ i $H = K$, tada kažemo da je ϕ *preslikavanje skupa* H (*u sebe*). Ako $\phi : H \to K$, $U \subseteq H$ i $V \subseteq K$, tada skupove

$$U\phi = \{y \in K \mid (\exists x \in U)\, x\phi = y\} \qquad \text{i} \qquad V\phi^{-1} = \{x \in H \mid x\phi \in V\}$$

nazivamo redom *slikom podskupa* U i *inverznom slikom podskupa* V, u odnosu na ϕ.

Neka su H i K neprazni skupovi i $\phi : H \to K$. Preslikavanje ϕ je *jedan-jedan* ako za sve $a, b \in H$, $a\phi = b\phi$ povlači $a = b$. Osim ovog naziva, često se koriste i nazivi *injektivno preslikavanje* i *injekcija*. Sa druge strane, ako je $H\phi = K$, tj. ako za svaki $y \in K$ postoji $x \in H$ tako da je $x\phi = y$, tada kažemo da je ϕ preslikavanje *na* K, odnosno da *slika* H *na* K. Takođe govorimo i da je ϕ *sirjektivno preslikavanje* ili *sirjekcija*. Preslikavanje ϕ nazivamo *bijektivnim preslikavanjem*, *bijekcijom* ili *obostrano jednoznačnim preslikavanjem* ako je ϕ i jedan-jedan i na.

Preslikavanje $\iota_H : H \to H$ nepraznog skupa H definisano sa: $x\iota_H = x$, za svaki $x \in H$, nazivamo *identičkim preslikavanjem skupa* H. Neka su H i K neprazni skupovi i neka $\varphi : H \to K$. Ako postoji $\psi : K \to H$ tako da je $\varphi\psi = \iota_H$ i $\psi\varphi = \iota_K$, tada kažemo da je ψ *inverzno preslikavanje* od φ. Posmatrajmo sada preslikavanja φ i ψ kao parcijalna preslikavanja nekog skupa U (recimo skupa $H \cup K$). Ako je ψ inverzno preslikavanje od φ, prema gornjoj definiciji, tada je $\psi = \varphi^{-1}$, gde je φ^{-1} inverzna relacija od φ. Obratno, ako je φ^{-1} parcijalno preslikavanje skupa U, tada $\varphi^{-1} : H \to H$ i φ^{-1} je inverzno preslikavanje od φ.

Dokaz naredne teoreme je veoma dobro poznat pa će biti izostavljen.

Teorema 1.1.1. *Preslikavanje φ nepraznog skupa H u neprazan skup K ima inverzno preslikavanje ako i samo ako je bijekcija.*

Literatura: Bogdanović and Ćirić [1993], Grátzer [1968], Howie [1976, 1991, 1995], Madarász and Crvenković [1992], Milić [1991]

1.2. Uređenja, ekvivalencije i grafovi

Osim preslikavanja, interesantni su i neki drugi tipovi relacija, pre svega *relacije parcijalnog uređenja* i *relacije ekvivalencije*. Neka je H neprazan skup. Relacija ξ na skupu H je:

– *refleksivna*, ako je $a\,\xi\,a$, za svaki $a \in H$, tj. ako je $\Delta_H \subseteq \xi$;
– *simetrična*, ako za $a, b \in H$, iz $a\,\xi\,b$ sledi $b\,\xi\,a$, tj. ako je $\xi \subseteq \xi^{-1}$;
– *anti-simetrična*, ako za $a, b \in H$, iz $a\,\xi\,b$ i $b\,\xi\,a$ sledi da je $a = b$, tj. ako je $\xi \cap \xi^{-1} \subseteq \Delta_H$;
– *tranzitivna*, ako za $a, b, c \in H$, iz $a\,\xi\,b$ i $b\,\xi\,c$ sledi $a\,\xi\,c$, tj. ako je $\xi\xi \subseteq \xi$.

Refleksivnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *kvazi-uređenjem*, refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *parcijalnim uređenjem*, ili kraće samo *uređenjem*, ili pak *relacijom poretka*, a refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacijom ekvivalencije*, ili samo *ekvivalencijom*.

Najpre ćemo se pozabaviti uređenjima. Uređenja najčešće označavamo simbolom $\leq$. Par $(A, \leq)$ koji se sastoji od skupa A i parcijalnog uređenja $\leq$ na njemu nazivamo *parcijalno uređenim skupom*, ili kraće samo *uređenim skupom*. Jednostavnosti radi, umesto "$(A, \leq)$ je uređen skup" govorićemo prosto "A je uređen skup", pri čemu ćemo podrazumevati da je uređenje na njemu označeno sa $\leq$. Ukoliko koristimo neku drugu oznaku za uređenje, to će biti posebno naznačeno. Ako je $\leq$ uređenje na skupu A, tada sa $<$ označavamo relaciju na A definisanu sa $a < b$ ako i samo ako je $a \leq b$ i $a \neq b$, a sa $\geq$ i $>$ označavamo inverzne relacije relacija $\leq$ i $<$, tim redom.

Da bi smo istakli razliku između uređenja i kvazi-uređenja, kvazi-uređenja ćemo najčešće označavati sa $\preccurlyeq$. Par $(A, \preccurlyeq)$, koji se sastoji od skupa A i kvazi-uređenja $\preccurlyeq$ na njemu, nazivamo *kvazi-uređenim skupom*, pri čemu obično govorimo prosto "A je kvazi-uređen skup" umesto "$(A, \preccurlyeq)$ je kvazi-uređen skup", pri čemu podrazumevamo da je kvazi-uređenje na A označeno sa $\preccurlyeq$. Obratnu relaciju kvazi-uređenja $\preccurlyeq$ obično označavamo sa $\succcurlyeq$, tj. $a \succcurlyeq b$ ako i samo ako je $b \preccurlyeq a$. Za kvazi-uređen skup A kažemo da je *usmeren kvazi-uređen skup* ako za proizvoljan konačan podskup $\{a_1, \ldots, a_n\}$ skupa A postoji $a \in A$ tako da je $a_i \preccurlyeq a$, za svaki $i \in [1, n]$. Na isti način definišemo i pojam *usmerenog uređenog skupa* .

Uređenje $\leq$ na A nazivamo *linearnim* ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leq b$ ili $b \leq a$, i u tom slučaju kažemo da je A *linearno uređen skup* ili *lanac*.

Za preslikavanje ϕ koje slika uređen skup A u uređen skup B kažemo da je *izotono* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leq b$ sledi $a\phi \leq b\phi$. Takođe kažemo i da ϕ *očuvava uređenje* ili da je *rastuće* preslikavanje. Slično, za preslikavanje ϕ iz A u B kažemo da je *antitono* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leq b$ sledi $b\phi \leq a\phi$. Za ovakvo preslikavanje takođe kažemo i da je *opadajuće*. Za ϕ kažemo da je *izomorfizam uređenih skupova* A i B, ili *uređajni izomorfizam* od A na B, ako je ϕ bijekcija od A na B i ϕ i ϕ^{-1} su izotona preslikavanja. Sa druge strane, za ϕ kažemo da je *dualni izomorfizam uređenih skupova* A i B, ili *dualni uređajni izomorfizam* od A na B, ako je ϕ bijekcija od A na B i ϕ i ϕ^{-1} su antitona preslikavanja.

Neka je A uređen skup. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *minimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo manji od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $x \leq a$ sledi $x = a$;
– *maksimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo veći od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $a \leq x$ sledi $a = x$;

– *najmanji element* skupa A, ako je manji od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $a \leq x$, za svaki $x \in A$;
– *najveći element* skupa A, ako je veći od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $x \leq a$, za svaki $x \in A$.

Primetimo da je najmanji (najveći) element skupa A, ukoliko takav postoji, istovremeno i jedinstven minimalan (maksimalan) element skupa A, dok obratno ne mora da važi. Skup A može imati proizvoljno mnogo minimalnih (maksimalnih) elemenata, dok može imati najviše jedan najmanji (najveći) element.

Neka je H neprazan podskup uređenog skupa A. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *gornja granica* skupa H, ako je $x \leq a$, za svaki $x \in H$;
– *donja granica* skupa H, ako je $a \leq x$, za svaki $x \in H$;
– *najmanja gornja granica*, ili *supremum*, skupa H, ako je a najmanji element skupa svih gornjih granica skupa H, tj. ako je a gornja granica skupa H i za svaku gornju granicu b skupa H važi $a \leq b$;
– *najveća donja granica*, ili *infimum*, skupa H, ako je a najveći element skupa svih donjih granica skupa H, tj. ako je a donja granica skupa H i za svaku donju granicu b skupa H važi $b \leq a$.

Supremum skupa H, ako postoji, označavamo sa $\bigvee H$, a infimum, takođe ako postoji, sa $\bigwedge H$. Ukoliko je $H = \{x_i \,|\, i \in I\}$, tada umesto $\bigvee H$ i $\bigwedge H$ pišemo redom

$$\bigvee_{i\in I} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i\in I} x_i,$$

a ako je $I = \{1, 2, \dots, n\}$, za neki prirodan broj n, tada umesto gornjih oznaka koristimo oznake

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i.$$

Sada ćemo preći na relacije ekvivalencije. Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu H. Ako su elementi $a, b \in H$ u relaciji θ, tj. $a\,\theta\, b$, tada kažemo i da su oni θ-*ekvivalentni*. Skup $a\theta$ nazivamo *klasom ekvivalencije* elementa $a \in H$ u odnosu na θ, ili kraće θ-*klasom* elementa a. Jasno je da je u tom slučaju $a \in a\theta$. Skup svih θ-klasa označavamo sa H/θ i nazivamo ga *faktor-skupom* skupa H, ili prosto *faktorom* skupa H, u odnosu na θ. Preslikavanje

$$\theta^\natural : a \mapsto a\theta$$

koje slika skup H na faktor-skup H/θ nazivamo *prirodnim preslikavanjem* skupa H određenim relacijom ekvivalencije θ.

Sa druge strane, neka su H i K neprazni skupovi i $\phi : H \to K$. Relaciju

$$\ker\phi = \{(x, y) \in H \times H \mid x\phi = y\phi\}$$

na skupu H nazivamo *jezgrom preslikavanja* ϕ. Vezu između relacija ekvivalencije i preslikavanja daje nam naredna teorema. Njen dokaz je elementaran, pa ga zbog toga ostavljamo čitaocu za vežbu.

Teorema 1.2.1. *Neka je H neprazan skup. Ako je ϕ preslikavanje skupa H u skup K, tada je $\ker\phi$ relacija ekvivalencije na H.*

Osim toga, za proizvoljnu relaciju ekvivalencije θ na H je $\ker(\theta^\natural) = \theta$.

Familiju $\{H_i \mid i \in I\}$ nepraznih podskupova skupa H nazivamo *razbijanjem* ili *particijom* skupa H, ako je

$$H = \bigcup_{i\in I} H_i$$

i za proizvoljan par $i, j \in I$ važi

$$H_i = H_j \qquad \text{ili} \qquad H_i \cap H_j = \varnothing.$$

Vezu između razbijanja skupa i njegovih relacija ekvivalencije daje nam naredna teorema. Njen dokaz je takođe elementaran, pa će biti prepušten čitaocu za vežbu.

Teorema 1.2.2. *Neka je $\varpi = \{H_i \mid i \in I\}$ razbijanje skupa H. Tada relacija θ_ϖ na skupu H definisana sa*

$$a\,\theta_\varpi\,b \iff (\exists i \in I)\ a, b \in H_i, \qquad (a, b \in H)$$

jeste relacija ekvivalencije na skupu H.

Obratno, neka je θ relacija ekvivalencije na skupu H. Tada familija

$$\varpi_\theta = \{a\theta \mid a \in H\}$$

jeste razbijanje skupa H.

Osim toga, preslikavanja

$$\varpi \mapsto \theta_\varpi \qquad i \qquad \theta \mapsto \varpi_\theta$$

su uzajamno inverzne bijekcije iz skupa svih razbijanja skupa H na skup svih relacija ekvivalencije na skupu H, i obratno.

Neka je H neprazan skup. Presek proizvoljne familije tranzitivnih relacija na H, ukoliko je neprazan, je i sam tranzitivna relacija na H. Prema tome, za proizvoljnu relaciju ξ na H, presek svih tranzitivnih relacija na H koje sadrže ξ je tranzitivna relacija. Tu relaciju ćemo označavati sa ξ^∞ i nazivaćemo je *tranzitivnim zatvorenjem* relacije ξ. Lako se proverava da je

$$\xi^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi^n.$$

Presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije na skupu H je neprazan, jer sadrži identičku relaciju na H. Taj presek je takođe i relacija ekvivalencije na H. Prema tome, za proizvoljnu relaciju ξ na skupu H, presek svih relacija ekvivalencije koje sadrže relaciju ξ je relacija ekvivalencije koju ćemo nazivati *relacijom ekvivalencije generisanom relacijom* ξ, i označavaćemo je sa ξ^e. Lako se proverava da je

$$\xi^e = (\xi \cup \xi^{-1} \cup \Delta)^\infty.$$

Neka je K proizvoljan podskup skupa H. Tada definišemo relaciju ε_K na H kao relaciju ekvivalencije na H koja ima samo dve klase: K i $H \setminus K$, tj.

$$\varepsilon_K = K \times K \cup (H \setminus K) \times (H \setminus K).$$

Drugim rečima, za elemente $a, b \in H$ važi

$$(a,b) \in \varepsilon_K \;\Leftrightarrow\; a, b \in K \text{ ili } a, b \in H \setminus K, \tag{1.1}$$

odnosno

$$(a,b) \in \varepsilon_K \;\Leftrightarrow\; (a \in K \;\Leftrightarrow\; b \in K). \tag{1.2}$$

Za relaciju ekvivalencije θ na skupu H kažemo da *zasićuje* podskup $K \subseteq H$ ako se K može predstaviti u obliku unije nekih θ-klasa od H. Relacije ekvivalencije koje zasićuju podskupove okarakterisane su sledećom teoremom.

Teorema 1.2.3. *Neka je K neprazan podskup skupa H. Tada relacija ekvivalencije θ na H zasićuje K ako i samo ako je $\theta \subseteq \varepsilon_K$.*

Dokaz. Neka je θ relacija ekvivalencije na H koja zasićuje K. Kako θ zasićuje K, to se K može zapisati u obliku $K = \bigcup\{C_i \mid i \in I\}$, gde C_i, $i \in I$ jesu θ-klase skupa H. Uzmimo proizvoljan par $(a,b) \in \theta$. Ako je $a \in K$, tada imamo da $a \in C_i$, za neki $i \in I$, pa iz $(a,b) \in \theta$ sledi da je $b \in C_i \subseteq K$.

Na potpuno isti način dokazujemo da iz $b \in K$ sledi $a \in K$. Dakle, prema (1.2) imamo da je $(a,b) \in \varepsilon_K$, tj. $\theta \subseteq \varepsilon_K$.

Obratno, neka je $\theta \subseteq \varepsilon_K$. Jasno je da je $K \subseteq \bigcup\{a\theta \,|\, a \in K\}$. Da bi dokazali obratnu inkluziju, treba dokazati da je $a\theta \subseteq K$, za svaki $a \in K$. Zaista, neka je $a \in K$ i $b \in a\theta$. Tada $(a,b) \in \theta \subseteq \varepsilon_K$, pa iz $a \in K$ i (1.2) sledi da je $b \in K$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, dokazali smo da je $K = \bigcup\{a\theta \,|\, a \in K\}$, što znači da θ zasićuje K. $\square$

Posledica 1.2.1. *Za proizvoljan neprazan podskup K skupa H, relacija ε_K je najveća relacija ekvivalencije na H koja zasićuje K.*

Za neprazan podskup K skupa H, relaciju ε_K nazivaćemo *glavnom ekvivalencijom* na H *određenom podskupom* K.

Na kraju ovog odeljka uvodimo neke pojmove iz Teorije grafova koji će biti potrebni u daljem tekstu. Pod pojmom *grafa* podrazumevamo uređen par $G = (G, \varrho)$ koji čine neprazan skup G, čije elemente nazivamo *čvorovima grafa* G, a ϱ je binarna relacija na G, čije elemente nazivamo *granama grafa* G. Primetimo da smo i ovde, jednostavnosti radi, a bez opasnosti od zabune, graf i njegov skup čvorova označili istim slovom G, odnosno izvršili smo poistovećivanje grafa i njegovog skupa čvorova, isto kao što ćemo u narednim odeljcima poistovećivati algebru i njen nosač. Za granu $(a,b) \in \varrho$ kažemo da *izlazi iz čvora* a, a da *ulazi u čvor* b. Grafički, čvorove grafa G predstavljamo tačkama u ravni ili prostoru, a granu $(a,b) \in \varrho$ predstavljamo orijentisanom linijom (strelicom) koja izlazi iz a a ulazi u b.

Granu oblika (a,a) nazivamo *petljom*, a niz grana oblika

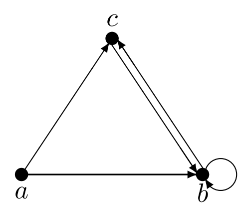
$$(a_1, a_2),\ (a_2, a_3),\ \ldots,\ (a_{n-1}, a_n) \in \varrho$$

nazivamo *putem* u grafu G, za koji kažemo da *vodi od čvora a do čvora b*. Broj grana u tom nizu nazivamo *dužinom* tog puta.

Primer 1.2.1. Neka je graf $G = (G, \varrho)$ zadat sa:

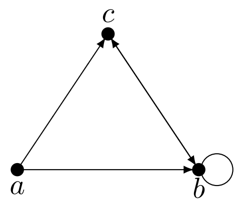
$$G = \{a, b, c\} \quad \text{i} \quad \varrho = \{(a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,b)\}.$$

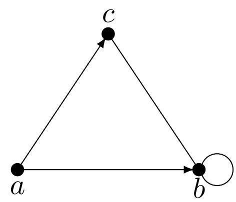
Ovaj graf predstavljamo sledećom slikom:



Primetimo da ovaj graf ima petlju u čvoru b i da ne postoji put koji vodi od čvora b ili c do čvora a.

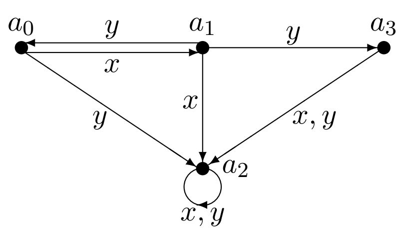
U teoriji grafova se često koristi konvencija prema kojoj se, ukoliko se u grafu javljaju i grana (a, b) i grana (b, a), ne povlače dve suprotno orijentisane linije između čvorova a i b, nego se povlači ili jedna dvostruko orijentisana linija ili jedna neorijentisana linija. Tako se graf iz Primera 1.2.1 može prikazati i na jedan od sledeća dva načina:





Takođe, orijentacija linije koja predstavlja petlju nema nikakvog značaja, pa se često izostavlja, kao što je to učinjeno na prethodnim slikama.

Jedna posebna vrsta grafova igra veoma važnu ulogu u predstavljanju automata, koji su tema narednih glava. To su takozvani *označeni grafovi* koje možemo shvatiti kao grafove kod kojih su grane označene simbolima iz izvesnog skupa X. Preciznije, označeni graf G definiše se kao trojka $G = (G, X, \lambda)$, gde je G skup *čvorova grafa*, X je skup *oznaka* a $\lambda \subseteq G \times X \times G$. Ako je $(a, x, b) \in \lambda$, tada kažemo da je grana (a, b) označena simbolom x, koji nazivamo *oznakom grane* (a, b). Jasno, grana može imati više različitih oznaka, pa prilikom grafičkog predstavljanja grafa orijentisanoj liniji kojom predstavljamo izvesnu granu pridružujemo spisak ili skup simbola kojima je ta grana označena. Drugim rečima, grane grafa su zapravo označene podskupovima skupa X. Jedan označeni graf prikazan je na sledećoj slici:



Drugi važan tip grafova, koji će igrati važnu ulogu kod izučavanja jezika, su stabla. Pod *korenskim stablom*, ili, jednostavnosti radi, samo *stablom*, podrazumevamo graf D bez petlji koji ispunjava sledeće uslove:

(a) postoji tačno jedan čvor u koji ne ulazi ni jedna grana, koji nazivamo *korenom stabla* D;
(b) u ostale čvorove ulazi tačno po jedna grana;
(c) za svaki čvor, osim korena, postoji tačno jedan put koji vodi od korena do njega.

Dužinu puta koji vodi od korena do nekog čvora nazivamo *nivoom* tog čvora. Ako je k nivo datog čvora, onda kažemo da je taj čvor na k-tom nivou. Za koren kažemo da je nivoa 0.

Čvor iz koga ne izlazi nijedna grana zovemo *listom*, ili *završnim čvorom*. Stablo iz čijeg svakog čvora, sem listova, izlaze tačno dve grane nazivamo *binarnim stablom*. Binarno stablo kod koga su svi listovi istog nivoa nazivamo *potpunim*. Kod takvog stabla, na i-tom nivou postoji tačno 2^i čvorova, a ako to stablo ima k nivoa, tada je broj n svih čvorova tog stabla jednak

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Pri tome je broj listova jednak $2^k = \frac{n+1}{2}$, a broj ostalih čvorova je $2^k - 1 = \frac{n-1}{2}$. Ako binarno stablo nije potpuno, onda su broj listova i broj ostalih čvorova manji od tih brojeva.

Ako je a proizvoljan čvor stabla D, tada stablo $D_a = (D_a, \varrho_a)$, gde je D_a skup svih čvorova $b \in D$ za koje postoji neki put iz a u b, a ϱ_a je restrikcija relacije ϱ na D_a, nazivamo *podstablom* stabla D *generisanim čvorom* a. Jasno, koren ovog stabla je a. Ako je $D_a \neq D$, tada kažemo da je D_a *pravo podstablo* od D.

Ako je $D = (D, \varrho)$ stablo, Y je neki neprazan skup i $\varphi : D \to Y$ je preslikavanje, tada kažemo da je D *stablo obeleženo* elementima skupa Y. Pri tome, u grafičkom predstavljanju stabla D, čvor $a \in D$ obeležavamo sa $a\varphi \in Y$. Primetimo da se ovaj pojam razlikuje od pojma označenog grafa, kod koga su, kao što smo videli, obeležene grane, a ovde su obeleženi čvorovi.

Literatura: Bogdanović and Ćirić [1993], Ćirić, Bogdanović and Kovačević [1998], Cvetković and Simić [1996], Cvetković [1996], Davey and Priestley [1990], Howie [1976, 1991, 1995], Madarász and Crvenković [1992], Milić [1991].

1.3. Algebre, podalgebre, homomorfizmi i kongruencije

Neka je A neprazan skup. Kao što smo rekli u prvom odeljku, za $n \in \mathbb{N}$, sa A^n označavamo skup svih uređenih n-torki elemenata iz A, i dodatno, stavljamo da je $A^0 = \{\varnothing\}$. Sada, za $n \in \mathbb{N}^0$, pod *n-arnom operacijom* na skupu A podrazumevamo svako preslikavanje $f : A^n \to A$. U tom slučaju, broj n se naziva *dužina* ili *arnost* operacije f. Iako će u ovoj knjizi simboli kojima označavamo preslikavanja biti pisani sa desne strane argumenata na koje deluju, kod operacija ćemo koristiti drugačiji način označavanja, čime će razlika između običnih preslikavanja i operacija biti još uočljivija. Naime, slika n-torke $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ u odnosu na operaciju f biće označavana sa $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Operacije dužine 1 nazivaju se *unarnim*, operacije dužine 2 se nazivaju *binarnim*, a operacije dužine 0 se nazivaju *nularnim operacijama*. Ako je f binarna operacija na A, tada radije pišemo "afb" umesto "$f(a,b)$". Nularne operacije su karakteristične, pa ćemo se nešto više zadržati na njima da bi smo pojasnili njihovo dejstvo. Naime, nularna operacija je preslikavanje $f : A^0 \to A$. Kako se skup A^0 sastoji iz samo jednog elementa $\varnothing$, to se tim preslikavanjem ustvari fiksira jedan element – konstanta $f(\varnothing) \in A$. Zato umesto o nularnim operacijama na skupu A često radije govorimo o izboru i fiksiranju izvesnih konstanti u tom skupu.

Tip algebri, ili *signatura*, kako se često još zove, definiše se kao skup simbola τ sa svojstvom da je svakom simbolu $f \in \tau$ pridružen neki broj $n \in \mathbb{N}^0$, koji nazivamo *arnost* ili *dužina* simbola f. U tom slučaju za f kažemo da je *n-arni operacijski simbol*. Nularne operacijske simbole nazivamo *znacima konstanti*. Za broj $n \in \mathbb{N}^0$, skup svih n-arnih operacijskih simbola iz τ označavaćemo sa τ_n. Pod *univerzalnom algebrom*, ili kraće samo *algebrom tipa* τ podrazumevamo uređeni par (A, F), gde je A neprazan skup, koji nazivamo *nosačem* te algebre, i $F = \{f^A \mid f \in \tau\}$ je familija operacija indeksirana skupom τ tako da je svakom n-arnom operacijskom simbolu $f \in \tau$ pridružena n-arna operacija f^A na A. Operacije f^A, $f \in \tau$, nazivaju se *fundamentalnim operacijama* pomenute algebre, a njihovom kompozicijom se dobijaju *izvedene operacije* te algebre. Ponekad, kada je nosač A poznat, izostavljamo gornji indeks A i pišemo jednostavno "f" umesto "f^A". Ako je f binarni operacijski znak, obično pišemo "afb" umesto "$f(a,b)$". U slučaju kada ne postoji opasnost od zabune, obično identifikujemo algebru (A, F) i njen nosač A, tako da umesto "algebra (A, F)" kažemo "algebra A". Kao što smo već napomenuli, ako je f nularni operacijski simbol tada f^A identifikujemo sa konstantom iz A koju ta nularna operacija fiksira. Za proizvoljan tip algebri τ, na proizvoljnom jednoelementnom skupu $A = \{a\}$ možemo definisati operacije tipa τ na sledeći način: ako je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, tada stavljamo da je $f^A(a, \ldots, a) = a$, a za $f \in \tau_0$ stavljamo da je $f^A = a$. Tako definisanu algebru tipa τ nazivamo *trivijalnom* ili *jednoelementnom algebrom*.

Tip algebri τ nazivamo *konačnim tipom* ako je τ konačan skup simbola, a algebru takvog tipa nazivamo *algebrom konačnog tipa*. Algebra čiji tip sadrži samo unarne operacijske znake naziva se *unarna algebra*, a algebra čiji tip sadrži samo jedan i to binarni operacijski znak naziva se *grupoid*. Za označavanje jedine binarne operacije grupoida A obično se koristi simbol $\cdot$, pri čemu se za $a, b \in A$, radi dodatnog pojednostavljenja, umesto "$a \cdot b$" piše "ab". Grupoid A u kome za sve $x, y, z \in A$ važi uslov $(xy)z = x(yz)$, naziva se *polugrupa*, pri čemu se taj uslov naziva *asocijativnim zakonom*. O polugrupama će biti reči u nekoliko posebnih poglavlja.

Neka je A algebra tipa τ. Podskup $B \subseteq A$ nazivamo *podalgebrom* od A ako je zatvoren za sve fundamentalne operacije algebre A, odnosno ako važe sledeći uslovi:

(i) $f^A \in B$, za svaki $f \in \tau_0$,
(ii) za $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, iz $a_1, \dots, a_n \in B$ sledi $f^A(a_1, \dots, a_n) \in B$.

Drugim rečima, B je podalgebra od A ako i samo ako je B algebra istog tipa τ. Za nosače tih algebri važi $B \subseteq A$ i za proizvoljan $f \in \tau$, f^B je restrikcija operacije f^A na B. U pojedinim slučajevima, kada τ ne sadrži nularne simbole, prazan podskup algebre se definiše kao njena podalgebra i naziva se *prazna podalgebra*. Pod pojmom *klase algebri* podrazumevamo svaku klasu koja se sastoji od algebri istog tipa. Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $S(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih podalgebri algebri iz $\boldsymbol{K}$. Za klasu $\boldsymbol{K}$ kažemo da je zatvorena za operator $S : \boldsymbol{K} \mapsto S(\boldsymbol{K})$, ili da je *zatvorena za podalgebre*, ako je $S(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Neka je H neprazan podskup algebre A tipa τ. Neka je sa $\langle H \rangle$ označen presek svih podalgebri od A koje sadrže podskup H. Nije teško proveriti da je $\langle H \rangle$ najmanja podalgebra od A koja sadrži H, i mi ćemo govoriti da je $\langle H \rangle$ *podalgebra od* A *generisana skupom* H.

Teorema 1.3.1. *Neka je A algebra tipa τ i neka je H neprazan podskup od A. Definišimo induktivno niz $\{E_k(H)\}_{k \in \mathbb{N}}$ podskupova od A na sledeći način:*

$$E_1(H) = H \cup \{f^A \mid f \in \tau_0\},$$

$$E_{k+1}(H) = E_k(H) \cup \{f^A(a_1, \dots, a_n) \mid f \in \tau_n,\, n \in \mathbb{N},\, a_1, \dots, a_n \in E_k(H)\},$$

za $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\{E_k(H)\}_{k \in \mathbb{N}}$ rastući niz skupova i važi

$$\langle H \rangle = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k(H).$$

D o k a z . Iz definicije niza $\{E_k(H)\}_{k\in\mathbb{N}}$ neposredno sledi da je on rastući niz skupova. Dalje, stavimo da je

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k(H).$$

Da bi smo dokazali da je $E \subseteq \langle H\rangle$, treba dokazati da je $E_k(H) \subseteq \langle H\rangle$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. To će biti dokazano indukcijom po k. Jasno, $E_1(H) \subseteq \langle H\rangle$. Pretpostavimo da je $E_k(H) \subseteq \langle H\rangle$ za neki $k \in \mathbb{N}$, i uzmimo proizvoljan $f \in \tau_n$, gde je $n \in \mathbb{N}$, i proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in E_k(H)$. Tada $a_1, \dots, a_n \in \langle H\rangle$, prema indukcijskoj pretpostavci, odakle je $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \langle H\rangle$, jer je $\langle H\rangle$ podalgebra od A. Prema tome, $E_{k+1}(H) \subseteq \langle H\rangle$. Time smo dokazali da je $E_k(H) \subseteq \langle H\rangle$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, odnosno da je $E \subseteq \langle H\rangle$.

Sa druge strane, za dokaz obratne inkluzije $\langle H\rangle \subseteq E$, dovoljno je dokazati da je E podalgebra od A. Uzmimo proizvoljan $f \in \tau_n$, gde je $n \in \mathbb{N}$, i proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in E$. Kako je $\{E_k(H)\}_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova, to postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $a_1, \dots, a_n \in E_k(H)$, pa tada imamo da je $f^A(a_1, \dots, a_n) \in E_{k+1}(H) \subseteq E$. Dakle, dokazali smo da je E podalgebra od A. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Primetimo da za konačne algebre prethodna teorema daje efektivni postupak za konstrukciju podalgebre generisane datim podskupom algebre. Na generatorne skupove ćemo se vraćati i kasnije, kada budemo govorili o polugrupama i monoidima, kao i o automatima.

Ako je H neprazan podskup algebre A takav da je $\langle H\rangle = A$, tada kažemo da H *generiše* A i da je H *generatorni skup* algebre A. Za algebru A kažemo da je *konačno generisana* ako ima konačan generatorni skup. Ako algebra A ima jednoelementni generatorni skup, tada kažemo da je *monogena* (ponegde se koristi i naziv *ciklična*).

Neka su A i B algebre tipa τ. Preslikavanje $\phi : A \to B$ naziva se *homomorfizam* iz A u B ako važe sledeći uslovi:

(i) ako je $f \in \tau_0$, tada je $f^A\phi = f^B$,

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $a_1, \dots, a_n \in A$, tada je

$$(f^A(a_1, \dots, a_n))\phi = f^B(a_1\phi, \dots, a_n\phi).$$

Ako je, uz to, ϕ injektivno (jedan-jedan) preslikavanje, tada kažemo da je ϕ *monomorfizam* ili da je *potapanje* iz A u B i da se A može *potopiti* u B. Sa druge strane, ako je ϕ sirjektivni homomorfizam iz A na B, tada kažemo da je ϕ *epimorfizam* iz A na B. Konačno, ako je homomorfizam $\phi : A \to B$

istovremeno injektivan i sirjektivan, tada kažemo da je ϕ *izomorfizam* iz A na B i da su A i B *izomorfne algebre*, što simbolički pišemo $A \cong B$. Lako se proverava da je $\cong$ relacija ekvivalencije na klasi svih algebri tipa τ. Svaka algebra izomorfna datoj algebri A biće ponekad nazivana njenom *izomorfnom kopijom*. Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $H(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih homomorfnih slika algebri iz $\boldsymbol{K}$, a sa $I(\boldsymbol{K})$ klasu svih izomorfnih kopija algebri iz $\boldsymbol{K}$. Za klasu $\boldsymbol{K}$ kažemo da je zatvorena za operator $H : \boldsymbol{K} \mapsto H(\boldsymbol{K})$, ili da je *zatvorena za homomorfne slike*, ako je $H(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, i da je zatvorena za operator $I : \boldsymbol{K} \mapsto I(\boldsymbol{K})$, ili da je *algebarska klasa*, ako je $I(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Sa algebarske tačke gledišta, izomorfne algebre imaju istu algebarsku strukturu, i jedina razlika među njima je u različitom označavanju njihovih elemenata, pa obično identifikujemo izomorfne algebre, tj. tretiramo ih kao jednake ili kao istu algebru.

Homomorfizam algebre A u nju samu nazivamo *endomorfizmom* te algebre, a izomorfizam A na samu sebe nazivamo *automorfizmom* te algebre.

Ako su A i B algebre tipa τ, $\phi : A \to B$ je homomorfizam i $H \subseteq A$ i $K \subseteq B$ su neprazni skupovi, tada skup

$$H\phi = \{a\phi \,|\, a \in H\}$$

nazivamo *homomorfnom slikom* skupa H u odnosu na ϕ, a skup

$$K\phi^{-1} = \{a \in A \,|\, a\phi \in K\}$$

nazivamo *inverznom homomorfnom slikom* skupa K u odnosu na ϕ. Ako su H i K podalgebre od A i B, tim redom, tada su i $H\phi$ i $K\phi^{-1}$ podalgebre od B i A, tim redom.

Neka je θ binarna relacija na algebri A tipa τ. Ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je θ *saglasna* (ili *kompatibilna*, kako se još ponekad kaže) sa fundamentalnom operacijom f^A na A ako iz $a_i \,\theta\, b_i$, za sve $i \in [1, n]$, sledi

$$f^A(a_1, \dots, a_n) \,\theta\, f^A(b_1, \dots, b_n).$$

Ako je $f \in \tau_0$, tada kažemo da je θ *saglasna* sa nularnom operacijom f^A ako je $f^A \,\theta\, f^A$. Očigledno, refleksivna relacija je uvek saglasna sa nularnim operacijama. Relaciju ekvivalencije koja je saglasna sa svim fundamentalnim operacijama na algebri A nazivamo *relacijom kongruencije*, ili kraće samo *kongruencijom* na A.

Neka je θ kongruencija na algebri A tipa τ. Tada se faktor-skup A/θ takođe može načiniti algebrom istog tipa τ ako fundamentalne operacije tipa τ na A/θ definišemo na sledeći način:

(i) ako je $f \in \tau_0$, tada stavljamo da je $f^{A/\theta} = f^A/\theta$;

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $a_1\theta, \dots, a_n\theta \in A/\theta$ su proizvoljni elementi, tada stavljamo da je

$$f^{A/\theta}(a_1\theta, \dots, a_n\theta) = (f^A(a_1, \dots, a_n))\theta.$$

Kako je θ saglasna sa f^A, za svaki $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, to su operacije $f^{A/\theta}$ dobro definisane, što znači da vrednost od $f^{A/\theta}(a_1\theta, \dots, a_n\theta)$ ne zavisi od toga kako smo odabrali predstavnike $a_1, \dots, a_n$ θ-klasa $a_1\theta, \dots, a_n\theta$. Drugim rečima, ako je $a_i\theta = a_i'\theta$, za $a_i, a_i' \in A$ i $i \in [1, n]$, tada imamo da je

$$(f^A(a_1, \dots, a_n))\theta = (f^A(a_1', \dots, a_n'))\theta,$$

zbog saglasnosti relacije θ sa operacijom f^A.

Algebra A/θ tipa τ sa fundamentalnim operacijama $f^{A/\theta}$ definisanim na gornji način naziva se *faktor-algebrom* (*količničkom algebrom*) algebre A u odnosu na kongruenciju θ.

Vezu između kongruencija i homomorfizama daje nam sledeća teorema.

Teorema 1.3.2. (Teorema o homomorfizmu). *Ako je θ kongruencija na algebri A tipa τ, tada je $\theta^\natural$ homomorfizam od A na A/θ.*

Obratno, ako je ϕ homomorfizam algebre A tipa τ na algebru B istog tipa, tada je $\ker\phi$ *kongruencija na A i preslikavanje $\Phi : A/\ker\phi \to B$ definisano sa*

$$(a \ker\phi)\Phi = a\phi,$$

za $a \in A$, je izomorfizam iz $A/\ker\phi$ na B.

Drugi deo Teoreme o homomorfizmu može biti formulisan i na sledeći način: *za proizvoljan homomorfizam $\phi : A \to B$ postoji izomorfizam Φ iz $A/\ker\phi$ na B tako da sledeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(\ker\phi)^\natural"'] & B \\ A/\ker\phi \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Za kongruenciju θ, homomorfizam $\theta^\natural$ se naziva *prirodni homomorfizam* kongruencije θ, a za homomorfizam ϕ, kongruencija $\ker\phi$ se naziva *jezgro homomorfizma* ϕ. U svetlu Teoreme o homomorfizmu, nećemo praviti razliku između pojmova "faktor-algebra" i "homomorfna slika algebre".

Teorema 1.3.3. (Druga teorema o izomorfizmu). *Neka je A algebra tipa τ i neka su θ i ϱ kongruencije na A takve da je $\theta \subseteq \varrho$. Tada je relacija ϱ/θ na A/θ definisana sa*

$$\varrho/\theta = \{(a\theta, b\theta) \in (A/\theta) \times (A/\theta) \mid (a,b) \in \varrho\} \tag{1.3}$$

kongruencija na A/θ i $(A/\theta)/(\varrho/\theta) \cong A/\varrho$.

Dokaz. Neka je $\phi : A/\theta \to A/\varrho$ preslikavanje definisano sa $(a\theta)\phi = a\varrho$. To preslikavanje je dobro definisano jer je $\theta \subseteq \varrho$. Dalje, za $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $a_1\theta, \dots, a_n\theta \in A/\theta$, imamo da je

$$\Big(f^{A/\theta}(a_1\theta, \dots, a_n\theta)\Big)\phi = \Big(\left(f^A(a_1, \dots, a_n)\right)\theta\Big)\phi = \Big(f^A(a_1, \dots, a_n)\Big)\varrho =$$
$$= f^{A/\varrho}(a_1\varrho, \dots, a_n\varrho) = f^{A/\varrho}\Big((a_1\theta)\phi, \dots, (a_n\theta)\phi\Big),$$

a za $f \in \tau_0$ je $(f^A\theta)\phi = f^A\varrho$. Prema tome, ϕ je homomorfizam. Osim toga, $(a\theta)\phi = (b\theta)\phi$ ako i samo ako je $a\varrho = b\varrho$, odnosno $(a,b) \in \varrho$, pa zaključujemo da je $\ker\phi = \varrho/\theta$. To znači da je ϱ/θ kongruencija na A, pa prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da je $(A/\theta)/(\varrho/\theta) \cong A/\varrho$. $\square$

Ako su $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ dve klase algebri tipa τ, tada se *Maljcevljev proizvod* klasa $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$, označen sa $\boldsymbol{K}_1 \circ \boldsymbol{K}_2$, definiše kao klasa svih algebri A tipa τ koje imaju osobinu da postoji kongruencija θ na A takva da odgovarajuća faktor-algebra A/θ pripada klasi $\boldsymbol{K}_2$ a svaka θ-klasa od A koja je podalgebra od A pripada klasi $\boldsymbol{K}_1$.

Neka je X skup izvesnih objekata koje ćemo nazivati *promenljivim* i neka je τ tip algebri. Tada se skup $T(X)$, čije elemente nazivamo *termima* tipa τ nad X, definiše kao najmanji skup koji zadovoljava sledeće uslove:

(i) $X \cup \tau_0 \subseteq T(X)$, tj. promenljive i znaci konstanti su termi;

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in T(X)$, tada i izraz (niz) oblika $f(u_1, \dots, u_n)$ pripada $T(X)$, tj. ako je $f \in \tau_n$ i $u_1, \dots, u_n$ su termi, tada je i $f(u_1, \dots, u_n)$ term.

Slučaj $X = \varnothing$ je dozvoljen samo ukoliko je $\tau_0 \neq \varnothing$. Kako su termi ustvari nizovi simbola definisani pomoću pravila (i) i (ii), to za dva terma $u = f(u_1, \dots, u_n)$ i $v = g(v_1, \dots, v_m)$, $f \in \tau_n$, $g \in \tau_m$, imamo da su jednaki ako i samo su jednaki kao nizovi simbola, tj. ako je $m = n$, $f = g$ i $u_i = v_i$, za svaki $i \in [1, n]$.

Na skupu $T = T(X)$ mogu se definisati operacije tipa τ na sledeći način: ako je $f \in \tau_0$, tada je f^T jednako termu f, a ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in T$, tada je $f^T(u_1, \dots, u_n)$ jednako termu $f(u_1, \dots, u_n)$. Na taj način $T(X)$ postaje algebra tipa τ koju nazivamo *term algebrom* tipa τ nad skupom X. Jasno je da je algebra $T(X)$ generisana skupom X.

Sledećom teoremom data je jedna vrlo važna osobina term algebri:

Teorema 1.3.4. *Neka je $T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom promenljivih X. Ako je A algebra tipa τ i φ je preslikavanje iz X u A, tada*

(a) *postoji jedinstven homomorfizam $\widehat{\varphi} : T(X) \to A$ koji je proširenje preslikavanja φ;*
(b) *ako skup $X\varphi$ generiše A, tada $\widehat{\varphi}$ slika $T(X)$ na A.*

Dokaz. Stavimo da je $T = T(X)$ i definišimo induktivno preslikavanje $\widehat{\varphi} : T \to A$ na sledeći način: $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za $x \in X$, $f^T\widehat{\varphi} = f^A$, za $f \in \tau_0$, a ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in T$ tako da je $u_1\widehat{\varphi}, \dots, u_n\widehat{\varphi}$ već definisano, tada je

$$(f^T(u_1, \dots, u_n))\widehat{\varphi} = f^A(u_1\widehat{\varphi}, \dots, u_n\widehat{\varphi}).$$

Lako se proverava da je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam i da je proširenje preslikavanja φ.

Neka je $\phi : T(X) \to A$ proizvoljan homomorfizam koji je proširenje preslikavanja φ. Kako je term algebra $T(X)$ generisana skupom X, to prema Teoremi 1.3.1 imamo da je

$$T(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k(X),$$

gde su skupovi $E_k(X)$ definisani kao u pomenutoj teoremi. Indukcijom po k dokazaćemo da je $u\phi = u\widehat{\varphi}$, za svaki term $u \in E_k(X)$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Jasno je da je $f\phi = f^A = f\widehat{\varphi}$ i $x\phi = x\varphi = x\widehat{\varphi}$, za svaki $f \in \tau_0$ i $x \in X$, što znači da je $u\phi = u\widehat{\varphi}$, za svaki term $u \in E_1(X)$. Pretpostavimo da je $u\phi = u\widehat{\varphi}$, za svaki term $u \in E_k(X)$, za neki $k \in \mathbb{N}$, i uzmimo da je $u \in E_{k+1}(X)$, tj. $u = f(u_1, \dots, u_n)$, za neke $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in E_k(X)$. Imajući u vidu da su ϕ i $\widehat{\varphi}$ homomorfizmi, prema indukcijskoj pretpostavci sledi da je

$$\begin{aligned} u\phi &= \Big(f^T(u_1,\dots,u_n)\Big)\phi = f^A(u_1\phi,\dots,u_n\phi) = \\ &= f^A(u_1\widehat{\varphi},\dots,u_n\widehat{\varphi}) = \Big(f^T(u_1,\dots,u_n)\Big)\widehat{\varphi} = u\widehat{\varphi}. \end{aligned}$$

Prema tome, indukcijom dobijamo da je $u\phi = u\widehat{\varphi}$, za svaki term $u \in T(X)$, što znači da je $\phi = \widehat{\varphi}$. Time je dokazano da se φ na jedinstven način može proširiti do homomorfizma iz $T(X)$ u A.

Dalje, neka skup $X\varphi$ generiše algebru A. Indukcijom po k lako dokazujemo da je $E_k(X\varphi) = (E_k(X))\,\widehat{\varphi}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, odakle dobijamo da je

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k(X\varphi) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E_k(X))\,\widehat{\varphi} = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E_k(X)\Big)\widehat{\varphi} = (T(X))\,\widehat{\varphi},$$

čime smo dokazali da važi (b). $\square$

Neka je $T = T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom X. Za term $u \in T$ neka je sa $c(u)$ označen skup svih promenljivih koje se javljaju u u, koji ćemo nazivati *sadržajem* terma u. Ako je $|c(u)| \leq n$, tada se u naziva *n-arnim termom*. U slučaju kada želimo da naznačimo da je $c(u) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$, zapisivaćemo u kao $u(x_1,\dots,x_n)$.

Za algebru A tipa τ, operacije tipa τ na A smo u prethodnom odeljku nazvali fundamentalnim operacijama. Takođe, rekli smo da se njihovom kompozicijom dobijaju i druge operacije koje nazivamo izvedenim. Te operacije su, zapravo, term operacije koje ovde formalno definišemo. Neka je $u(x_1,\dots,x_n) \in T$ proizvoljan n-arni term i neka je A algebra tipa τ. Tada definišemo induktivno n-arnu operaciju u^A na A na sledeći način:

(i) Ako je u promenljiva x_i, za neki $i \in [1,n]$, tada u^A jeste i-to projekciono preslikavanje, tj. za sve $a_1,\dots,a_n \in A$ je

$$u^A(a_1,\dots,a_n) = a_i.$$

(ii) Ako je $u = f \in \tau_0$, tada za sve $a_1,\dots,a_n \in A$ je

$$u^A(a_1,\dots,a_n) = f^A.$$

(iii) Ako je $u = f(u_1,\dots,u_n)$, gde je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i $u_1,\dots u_n \in T$ tako da su $u_1^A,\dots,u_n^A$ već definisani, tada za sve $a_1,\dots,a_n \in A$ je

$$u^A(a_1,\dots,a_n) = f(u_1^A(a_1,\dots,a_n),\dots,u_n^A(a_1,\dots,a_n)).$$

Operaciju u^A nazivamo *term operacijom* na A koja odgovara termu u.

Teorema 1.3.5. *Neka su A i B algebre tipa τ i neka je $T = T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom X.*

(a) *Ako je $u \in T$ proizvoljan n-arni term i $\theta \in \mathrm{Con}(A)$, tada iz $(a_i, b_i) \in \theta$, za sve $i \in [1, n]$, sledi*

$$(u^A(a_1, \dots, a_n), u^A(b_1, \dots, b_n)) \in \theta.$$

(b) *Ako je $u \in T$ proizvoljan n-arni term i $\varphi : A \to B$ je homomorfizam, tada za sve $a_1, \dots, a_n \in A$ važi*

$$(u^A(a_1, \dots, a_n))\varphi = u^B(b_1\varphi, \dots, b_n\varphi).$$

(c) *Ako je U podskup od A, tada je*

$$\langle U \rangle = \{u^A(a_1, \dots, a_n) \mid u \in T \text{ je } n\text{-arni term}, a_1, \dots, a_n \in U\}.$$

Dokaz. Indukcijom po k se jednostavno dokazuje za svaki $k \in \mathbb{N}$, tvrđenja (a) i (b) važe za svaki term $u \in E_k(X)$. Sa druge strane, tvrđenje (c) je neposredna posledica definicije term operacije i Teoreme 1.3.1. □

Literatura: Artamonov, Saliĭ, Skornyakov, Shevrin and Shulgeifer [1991], Burris and Sankappanavar [1981], Cohn [1965], Grätzer [1968], Jónsson [1972], Kočinac and Mandak [1996], Kurosh [1973], Mijajlović [1993], Maljcev [1970].

1.4. Polugrupe

Prema ranije uvedenoj definiciji, algebru sa jednom operacijom, i to binarnom, nazivamo *grupoidom*. Operaciju na grupoidu S obično označavamo tačkom "$\cdot$", a za $a, b \in S$ obično pišemo ab umesto "$a \cdot b$".

Neka je dat grupoid S i elementi $a, b, c \in S$. Ako pomnožimo elemente a i b, tim redom, dobijamo element ab iz S. Ako dalje pomnožimo elemente ab i c, tada ćemo njihov proizvod označiti sa $(ab)c$, pri čemu zagrade označavaju da smo najpre pomnožili a i b, a zatim njihov proizvod i c, tim redom. Sa druge strane, ako pomnožimo prvo b i c, a zatim a pomnožimo njihovim proizvodom, tim redom, dobijamo proizvod koji označavamo sa $a(bc)$. U opštem slučaju, kod grupoida se proizvodi $(ab)c$ i $a(bc)$ razlikuju. Međutim, može se desiti da operacija grupoida zadovoljava taj uslov, tj. da je $(ab)c = a(bc)$, za svaki izbor elemenata $a, b, c \in S$, i u tom slučaju kažemo da je takva operacija *asocijativna*, odnosno da zadovoljava *asocijativni zakon*. Grupoid čija je operacija asocijativna nazivamo *polugrupom*.

Ustanoviti da li je operacija grupoida asocijativna često nije jednostavno. U knjizi Clifforda i Prestona [1961] naveden je Lightov test asocijativnosti konačnih grupoida. On se sastoji u sledećem: Neka je $(S, \cdot)$ grupoid. Definišimo na S dve nove operacije $*$ i $\circ$ sa:

$$x * y = x \cdot (a \cdot y), \quad x \circ y = (x \cdot a) \cdot y, \qquad (x, y \in S),$$

gde je $a \in S$ fiksirani element. Jasno je da na S važi asocijativni zakon ako i samo ako su operacije $*$ i $\circ$ jednake za svaki $a \in S$.

Oslikajmo ovaj postupak na jednom primeru.

Primer 1.4.1. Neka je $(S, \cdot)$ grupoid dat tablicom:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha \end{array}$$

Tada za $a = \alpha$ proizvod $a \cdot y$ je u prvoj vrsti $(\alpha\alpha)$, i za $a = \beta$ proizvod $a \cdot y$ je u drugoj vrsti $(\beta\alpha)$.

Proširimo sada datu tablicu na desno najpre pomoću prve, a potom pomoću druge vrste, i izvršimo sva množenja pomoću elemenata iz S. Na taj način dobijamo operaciju $*$ za oba elementa grupoida S. Slično, proširimo tablicu na dole pomoću kolona iz S. Tako dobijamo operaciju $\circ$ za sve elemente iz S.

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|} & \alpha & \beta & \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & \beta & \boxed{\beta} & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \boxed{\alpha} \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$$

Sada nije teško videti da se za $a = \alpha$ tablice za $*$ i $\circ$ ne poklapaju, jer je

$$\beta * \beta = \beta \cdot (\alpha \cdot \beta) = \beta \cdot \alpha = \beta, \quad \beta \circ \beta = (\beta \cdot \alpha) \cdot \beta = \beta \cdot \beta = \alpha,$$

što se vidi u proširenoj tablici. Dakle, gornjom tablicom nije definisana polugrupa.

Asocijativni zakon može se uopštiti na sledeći način. Za grupoid G kažemo da zadovoljava *uopšteni asocijativni zakon* ako za svaki prirodan broj $n \geq 3$ i proizvoljnu n-torku $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemenata iz S, svi proizvodi tih elemenata u kojima se oni javljaju tim redom (gledano sleva na desno) su jednaki. Drugim rečima, to znači da proizvod tih elemenata ne zavisi od rasporeda zagrada, odnosno od redosleda kojim se taj proizvod izračunava, već samo od redosleda javljanja činilaca u proizvodu.

Jasno, kad god važi uopšteni asocijativni zakon, tada važi i asocijativni zakon. Sledeća teorema nam kaže da važi i obratno: Da bi na grupoidu važio uopšteni asocijativni zakon, dovoljno je da važi asocijativni zakon:

Teorema 1.4.1. *Svaka polugrupa zadovoljava uopšteni asocijativni zakon.*

Dokaz. Najpre ćemo za proizvoljan prirodan broj $k \geq 3$ i proizvoljne $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$ uvesti sledeću oznaku:

$$a_1 a_2 \cdots a_k = a_1(a_2(a_3 \cdots (a_{k-1}a_k)\ldots)).$$

Teoremu ćemo dokazati indukcijom. Jasno, uslovi uopštenog asocijativnog zakona važe za $n = 3$. Uzmimo da je $n > 3$ i da uslovi uopštenog asocijativnog zakona važe za svaki prirodan broj $r < n$.

Uzmimo da je u element iz S jednak proizvodu elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sa nekim razmeštajem zagrada, u kome se ovi elementi javljaju datim redom. Tada se u može zapisati u obliku $u = vw$, gde je v proizvod elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_r$ i w je proizvod elemenata $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$, (sa nekim razmeštajima zagrada), gde je $1 \leq r < n$. Indukcijom dobijamo da je $v = a_1 a_2 \cdots a_r$ i $w = a_{r+1}a_{r+2} \cdots a_n$, i

$$\begin{aligned} u &= vw = (a_1 a_2 \cdots a_r)(a_{r+1}a_{r+2} \cdots a_n) = (a_1(a_2 \cdots a_r))(a_{r+1}a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1((a_2 \cdots a_r)(a_{r+1}a_{r+2} \cdots a_n)) = a_1(a_2 \cdots a_r a_{r+1}a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

za $r > 1$, i $u = vw = a_1(a_2 \cdots a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$, za $r = 1$. Ovim je dokazano tvrđenje teoreme. $\square$

Teorema 1.4.1 nam dozvoljava da u polugrupi S izostavimo sve zagrade u proizvodima elemenata iz S. Na taj način ćemo proizvod elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$, u kome se oni javljaju tim redom, označavati prosto sa $a_1 a_2 \cdots a_n$, kao u dokazu Teoreme 1.4.1. Ako je $a_i = a$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada proizvod $a_1 a_2 \cdots a_n$ označavamo sa a^n, i nazivamo ga *n-ti stepen* elementa $a \in S$. Primetimo da se kod grupoida ne može dati ovakva definicija stepena.

Primer 1.4.2. Jedan od najprirodnijih primera asocijativnih operacija je operacija *dopisivanja*, ili, kako se u matematici često zove, *konkatenacija*. To je operacija kojom od zadatih grafičkih simbola, koje obično nazivamo slovima, gradimo reči, kao proizvode slova u odnosu na tu operaciju. Ova operacija je asocijativna, što znači da prilikom ispisivanja reči nije važan vremenski red kojim smo ispisivali slova koja grade neku reč, već je bitan samo grafički raspored, posmatran sleva na desno, kojim se slova javljaju u reči. Na primer, za reč "BROJ", svejedno je da li smo je napisali tako što smo, jedno za drugim, sleva na desno, pisali slova "B", "R", "O" i "J", ili smo, možda, zapisali prvo slovo "O", zatim sa njegove leve strane "B", zatim desno od slova "O" zapisali "J", i na kraju, između slova "B" i "O" ubacili slovo "R".

Više o operaciji dopisivanja biće rečeno kasnije.

Ako je S proizvoljna polugrupa, tada na skupu S možemo definisati još jednu operaciju $*$ sa: $a * b = ba$. Skup S sa tako definisanom operacijom je takođe polugrupa, koju nazivamo *dualna polugrupa* polugrupe S, u oznaci $\overleftarrow{S}$. Generalno, polugrupa ne mora biti komutativna, tj. vrednost proizvoda zavisi od redosleda elemenata koji se u njemu javljaju, i kao posledica toga u izrazima koji se odnose na polugrupe, njihove podskupove ili elemente se često javljaju odrednice "levi" i "desni". *Dual* izraza koji se odnosi na polugrupu, njene podskupove ili njene elemente je izraz koji dobijamo zamenom svake od odrednica "levi" sa "desni" i obratno, i zamenom svakog proizvoda ab sa ba. Ako neko tvrđenje A povlači tvrdjenje B, tada dual od A povlači dual od B. Zbog toga, ako je B neko tvrdjenje koje smo dokazali i ako je C njegov dual, tada C često koristimo ravnopravno sa B, iako ga ne dokazujemo.

Neka su S i T polugrupe. Preslikavanje $\phi : S \to T$ je *anti-homomorfizam* ako je $(ab)\phi = (b\phi)(a\phi)$, za sve $a, b \in S$. Bijektivni anti-homomorfizam nazivamo *anti-izomorfizam*. Polugrupe S i T su *anti-izomorfne* ako postoji anti-izomorfizam iz S na T. Jasno je da su polugrupe S i T anti-izomorfne ako i samo ako je S izomorfna polugrupi $\overleftarrow{T}$, tj. dualnoj polugrupi od T.

Primer 1.4.3. Drugi važan primer asocijativnih operacija su *proizvod relacija*, i specijalan slučaj te operacije - *slaganje* (*kompozicija*) *preslikavanja*. Tako imamo da skup $\mathcal{B}(H)$ svih binarnih relacija na skupu H čini polugrupu, koju nazivamo *polugrupom binarnih relacija* na H.

Slično je i kod parcijalnih preslikavanja skupa. Naime, skup $\mathcal{PT}(H)$ svih parcijalnih transformacija je takođe polugrupa, u odnosu na množenje parcijalnih transformacija, koju nazivamo *polugrupom parcijalnih transformacija* na H.

U slučaju transformacija na skupu razlikujemo dve vrste polugrupa. Neka je H neprazan skup. Za preslikavanje φ skupa H koristićemo dva načina označavanja.

Prvi način je *desno označavanje* preslikavanja:

$$\varphi : x \mapsto x\varphi, \qquad (x \in H).$$

Pri ovakvom označavanju kažemo da je φ *preslikavanje skupa* H *pisano zdesna.* Proizvod preslikavanja α i β skupa H pisanih zdesna je preslikavanje $\alpha\beta$ skupa H koje se definiše sa

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \qquad (x \in H).$$

Skup $\mathcal{T}_r(H)$ svih preslikavanja skupa H pisanih zdesna sa ovom operacijom je polugrupa koju nazivamo *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) *skupa* H *pisanih zdesna*. Polugrupa $\mathcal{T}_r(H)$ je podpolugrupa polugrupe $\mathcal{PT}(H)$.

Drugi način označavanja je *levo označavanje* preslikavanja:

$$\varphi : x \mapsto \varphi x, \qquad (x \in H).$$

U ovom slučaju kažemo da je φ *preslikavanje skupa* A *pisano sleva*. Proizvod preslikavanja α i β skupa H pisanih sleva je preslikavanje $\alpha\beta$ skupa H koje definišemo sa:

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \qquad (x \in H).$$

Skup $\mathcal{T}_l(H)$ svih preslikavanja skupa H pisanih sleva sa ovom operacijom je polugrupa koju nazivamo *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) *skupa* H *pisanih sleva*.

Jasno, polugrupe $\mathcal{T}_l(H)$ i $\mathcal{T}_r(H)$ su dualne. Zbog toga obično razmatramo samo jednu od tih polugrupa, najčešće polugrupu $\mathcal{T}_r(H)$, pa ćemo tu polugrupu kraće nazivati *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) skupa H.

Primer 1.4.4. Kao što je poznato, operacija sabiranja matrica definisana na skupu istotipnih matrica (nad nekim datim prstenom) je asocijativna, pa ovaj skup jeste polugrupa. To isto važi i za operaciju množenja matrica definisanu na skupu istotipnih kvadratnih matrica, pa i kvadratne matrice u odnosu na operaciju množenja matrica čine polugrupu. Međutim, to ne važi za skup nekvadratnih matrica, jer na tom skupu množenje matrica nije definisano za svaki par matrica.

Neka je S polugrupa. Za elemente $a, b \in S$ kažemo da *komutiraju* ako je $ab = ba$. Ako je A neprazan podskup polugrupe S, tada sa $C(A)$ označavamo skup svih elemenata iz S koji komutiraju sa svakim elementom iz A. Skup $C(S)$ nazivamo *centar* polugrupe S a njegove elemente *centralnim elementima*. Polugrupa S je *komutativna* ako svaka dva njena elementa komutiraju, tj. $S = C(S)$. Polugrupa S je *anti-komutativna* ako za $a, b \in S$, iz $ab = ba$ sledi $a = b$, tj. ako svaki element iz S komutira samo sa sobom.

Element a polugrupe S je *idempotent* (*idempotentan*) ako je $a^2 = a$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$. Polugrupa čiji su svi elementi idempotenti je *traka*. Komutativnu traku nazivamo *polumreža*. Polumreža S je *lanac* ako za sve $a, b \in S$ je ili $ab = a$ ili $ab = b$.

Primer 1.4.5. Operacije množenja i sabiranja prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva su komutativne pa svi ovi skupovi brojeva u odnosu na operacije sabiranja i množenja čine komutativne polugrupe. Jedan od primera nekomutativnih polugrupa je polugrupa svih kvadratnih matrica proizvoljnog tipa u odnosu na operaciju množenja matrica. Na primer, za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nad prstenom celih brojeva važi

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je, dakle, $AB \neq BA$.

Neka je S polugrupa i neka je $a \in S$. Element $e \in S$ je *leva* (*desna*) *jedinica elementa* a ako je $ea = a$ ($ae = a$), i e je *jedinica elementa* a ako je $ae = ea = a$. Ako je $e \in S$ jedinica (leva jedinica, desna jedinica) za sve elemente iz S, tada je e *jedinica* (*leva jedinica, desna jedinica*) *polugrupe* S. Prema definiciji, svaka (leva, desna) jedinica polugrupe je idempotent. Neposredno se proverava da polugrupa može imati najviše jednu jedinicu. Polugrupu koja ima jedinicu nazivamo *polugrupa sa jedinicom* ili *monoid*.

Neka je S polugrupa i neka je e element koji nije sadržan u S. Na skupu $S \cup \{e\}$ dodefinišimo množenje sa: $ae = ea = a$, ($a \in S$), $ee = e$ (proizvodi elemenata iz S ostaju isti). Tada skup $S \cup \{e\}$ sa tako definisanim množenjem jeste polugrupa sa jedinicom e, i nazivamo je *jedinično proširenje* polugrupe S pomoću elementa e. Ako je S polugrupa, tada sa S^1 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način: ako S ima jedinicu, tada je $S^1 = S$, a ako S nema jedinicu, tada S^1 jeste jedinično proširenje od S pomoću elementa 1. Jedinicu polugrupe najčešće označavamo simbolom e ili 1. Koristeći jedinično proširenje polugrupe, proširujemo i definiciju stepena u polugrupi: ako je S polugrupa i a je element iz S, tada je a^0 jedinica monoida S^1.

Neka je S polugrupa i neka je $z \in S$. Element z je *leva* (*desna*) *nula* od S ako je $za = z$ ($az = z$), z je *nula* od S ako z jeste leva i desna nula od S, a z je *bi-nula* od S ako je $zaz = z$, za svaki $a \in S$. Lako se proverava da sve leve nule, desne nule, nule i bi-nule polugrupa jesu idempotenti. Prema tome, polugrupa u kojoj je svaki element bi-nula (resp. leva nula, desna nula) jeste traka koju nazivamo *pravougaona* (resp. *levo nulta*, *desno nulta*) *traka*. Drugim rečima, polugrupa S je pravougaona (resp. levo nulta, desno nulta) traka ako je $aba = a$ (resp. $ab = a$, $ab = b$), za sve $a, b \in S$. Neposredno se proverava da polugrupa može imati najviše jednu nulu. Polugrupu koja ima nulu nazivamo *polugrupa sa nulom*.

Ako je S polugrupa i ako je z element koji nije sadržan u S, na skupu $S \cup \{z\}$ dodefinišimo množenje sa: $az = za = z$, $(a \in S)$, $zz = z$ (proizvodi elemenata iz S ostaju isti), i tada skup $S \cup \{z\}$ jeste polugrupa sa nulom z, koju nazivamo *nulto proširenje* od S *pomoću elementa* z. Ako je S polugrupa, tada sa S^0 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način: ako S ima nulu, tada je $S^0 = S$, a ako S nema nulu, tada S^0 jeste nulto proširenje od S pomoću elementa 0. Nulu polugrupe obično označavamo simbolom 0, i često izraz "$\{0\}$" zamenjujemo izrazom "0". U skladu sa prethodnim oznakama, sa $S = S^0$ označavamo da je S polugrupa sa nulom 0. Ako je $S = S^0$ i $A \subseteq S$, tada koristimo oznake: $A^0 = A \cup 0$, $A^\bullet = A \setminus \{0\}$. Ako je $S = S^0$, element $a \in S^\bullet$ je *delitelj nule* ako postoji $b \in S^\bullet$ tako da je $ab = 0$ ili $ba = 0$. Polugrupu $S = S^0$ koja nema delitelja nule, tj. kod koje je $S^\bullet$ podpolugrupa, nazivamo *polugrupa bez delitelja nule*.

Primer 1.4.6. Polugrupa $(\mathbb{N}, +)$ nema jedinicu, a njeno jedinično proširenje je upravo polugrupa $(\mathbb{N}^0, +)$, jer je 0 jedinica te polugrupe.

Sa druge strane, polugrupa $(\mathbb{N}, \cdot)$ ima jedinicu 1, ali nema nulu, i njeno nulto proširenje je upravo polugrupa $(\mathbb{N}^0, \cdot)$, jer je 0 nula te polugrupe. Polugrupa $(\mathbb{N}^0, \cdot)$ nema delitelje nule.

Inače, polugrupe $(\mathbb{N}, +)$ i $(\mathbb{N}^0, +)$ nazivamo *aditivnim polugrupama prirodnih brojeva*, a polugrupe $(\mathbb{N}, \cdot)$ i $(\mathbb{N}^0, \cdot)$ *multiplikativnim polugrupama prirodnih brojeva*. Odgovarajuće slične nazive koristimo i za cele i druge vrste brojeva, a takođe i za matrice.

Primer 1.4.7. Primer polugrupe sa deliteljima nule je multiplikativna polugrupa svih kvadratnih matrica proizvoljnog tipa. Na primer, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$ i $AB = \mathbf{0}$, gde smo sa $\mathbf{0}$ označili nula matricu, tj. matricu čiji su svi elementi nule.

Za polugrupu S kažemo da je *levo* (*desno*) *kancelativna* ako za proizvoljne $a, x, y \in S$, iz $ax = ay$ ($xa = ya$) sledi $x = y$. Ako je S i levo i desno kancelativna polugrupa, tada kažemo da je *kancelativna*.

Parcijalna (*binarna*) *operacija* nepraznog skupa S je preslikavanje nepraznog podskupa skupa $S \times S$ u S. Neprazan skup snabdeven parcijalnom operacijom nazivamo *parcijalni grupoid*. Ako je S parcijalni grupoid sa parcijalnom operacijom "$\cdot$" takav da je za proizvoljne $x, y, z \in S$, proizvod $x \cdot (y \cdot z)$ definisan ako i samo ako je definisan proizvod $(x \cdot y) \cdot z$, i pri tome su ti proizvodi jednaki, tada je S *parcijalna polugrupa*. Jasno je da svaki podskup polugrupe jeste parcijalna polugrupa. Sa druge strane, ako je Q parcijalna polugrupa, i ako je 0 element koji nije sadržan u Q, tada $Q \cup \{0\}$ sa operacijom "$\cdot$" definisanom sa:

$$x \cdot y = \begin{cases} xy\,, & \text{ako su } x, y, xy \in Q \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases},$$

gde je xy proizvod u Q, jeste polugrupa koju označavamo sa Q^0, i nazivamo *nulto proširenje parcijalne polugrupe* Q.

Primer 1.4.8. Primer parcijalne polugrupe je skup svih matrica (nad nekim datim prstenom). Naime, za matrice A, B i C, proizvodi $(AB)C$ i $A(BC)$ ne moraju biti definisani, međutim, kad god je jedan od njih definisan, tada je definisan i onaj drugi i pri tome su oni jednaki. Na primer, uzmimo da je definisan proizvod $(AB)C$. Ako je matrica A tipa $k \times l$, za neke $k, l \in \mathbb{N}$, tada B mora biti tipa $l \times m$, za neki $m \in \mathbb{N}$, i matrica AB je tipa $k \times m$. Da bi postojao proizvod $(AB)C$, onda C mora biti tipa $m \times n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, A, B i C su redom tipova $k \times l$, $l \times m$ i $m \times n$, pa je jasno da je definisan i proizvod $A(BC)$ i da je $(AB)C = A(BC)$.

Ako je H neprazan skup, tada sa $\mathcal{P}(H)$ označavamo *partitivni skup* skupa H, tj. skup svih podskupova skupa H. Neka je S polugrupa. Na partitivnom skupu polugrupe S definišimo množenje sa:

$$AB = \{x \in S \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\, x = ab\}, \qquad (\,A, B \in \mathcal{P}(S)\,).$$

Tada u odnosu na ovu operaciju $\mathcal{P}(S)$ jeste polugrupa koju nazivamo *partitivna polugrupa* polugrupe S. Jasno je da je $\mathcal{P}(S)$ polugrupa sa nulom $\varnothing$ (prazan skup), bez delitelja nule. Definicije i oznake koje smo uveli za množenje elemenata polugrupe S, koristićemo i za množenje elemenata polugrupe $\mathcal{P}(S)$. Za element a polugrupe S, u proizvodima podskupova od S, često izraz "$\{a\}$" zamenjujemo izrazom "a".

Podskup I polugrupe S nazivamo *levim* (resp. *desnim*) *idealom* od S ako je $SI \subseteq I$ (resp. $IS \subseteq S$), tj. ako za svaki $a \in I$ i svaki $x \in S$ važi $xa \in I$ (resp. $ax \in I$). Ako je I istovremeno i levi i desni ideal od S, tada kažemo da je I *ideal* od S. Ako je I ideal polugrupe S, tada možemo definisati relaciju ϱ_I na S na sledeći način: za $a, b \in S$ stavljamo

$$(a, b) \in \varrho_I \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } a, b \in I.$$

Lako se proverava da je ϱ_I kongruencija na S koju nazivamo *Reesovom kongruencijom* na S određenom idealom I ili *Reesovom kongruencijom ideala* I. Odgovarajuću faktor-polugrupu S/ϱ_I nazivamo *Reesovom faktor-polugrupom* od S određenom idealom I, i označavamo je jednostavnije sa S/I. Jasno je da je S/I polugrupa sa nulom koja je zapravo nulto proširenje parcijalne polugrupe $S \setminus I$. Za polugrupu S kažemo da je *idealska ekstenzija* polugrupe T pomoću neke polugrupe sa nulom Q ako je T ideal od S i faktor-polugrupa S/T je izomorfna sa Q.

Na kraju ovog odeljka dajemo neke rezultate koji će nam biti potrebni u daljem radu, a koji se tiču levih, desnih i bi-nula polugrupe.

Teorema 1.4.2. *Polugrupa S ima bi-nulu (levu nulu, desnu nulu) ako i samo ako je idealska ekstenzija pravougaone (levo nulte, desno nulte) trake.*

Ako su e i f bi-nule polugrupe S, tada je $esf = ef$, za svaki $s \in S$.

Dokaz. Pretpostavimo da S ima bi-nulu. Označimo sa E skup svih bi-nula u S. Za proizvoljan $e \in E$ važi $e^3 = e$, odakle je $e^2 = e^6 = ee^4e = e$. Dakle, E je traka, koja je, jasno, pravougaona. Sa druge strane, za $e \in E$ i $s, t \in S$ imamo da je $(es)t(es) = e(st)es = es$ i $(se)t(se) = se(ts)e = se$. Prema tome, $es, se \in E$, pa je E ideal u S, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka je S idealska ekstenzija pravougaone trake E. Uočimo proizvoljne elemente $e \in E$ i $s \in S$. Tada je $es \in E$, odakle dobijamo $ese = e(es)e = e$. Znači, e je bi-nula polugrupe S.

Slučajevi sa levim i desnim nulama se razmatraju na sličan način.

Uočimo, sada, proizvoljne elemente $e, f \in E$ i $s \in S$. Tada je $sf \in E$ i $f = fef$, odakle je $esf = es(fef) = e(sf)ef = ef$. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Koristeći prethodnu teoremu, dokazujemo sledeće:

Posledica 1.4.1. *Neka polugrupa S ima levu (resp. desnu) nulu. Tada se skup svih levih (resp. desnih) nula polugrupe S poklapa sa skupom svih bi-nula polugrupe S.*

Ako S ima nulu, tada je ona jedinstvena i polugrupa S nema drugih levih, desnih ili bi-nula.

Dokaz. Označimo sa L i B skupove svih levih i bi-nula polugrupe S, tim redom. Očigledno je $L \subseteq B$. Uočimo proizvoljan $f \in B$. Tada je $f = fef$.

Međutim, prema Lemi 1.4.2, L je ideal polugrupe S, odakle sledi da je $f \in SLS \subseteq L$. Prema tome, $L = B$.

Ostale relacije se dokazuju na sličan način. $\square$

Ukoliko polugrupa S ima nulu 0 i za svaki element $a \in S$ postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $a^k = 0$, tada S jeste *nil-polugrupa*. Za $k \in \mathbb{N}$, polugrupu S sa nulom 0 nazivamo *k-nilpotentnom polugrupom* ako je $S^k = \{0\}$, tj. ako je $a_1a_2\cdots a_n = 0$, za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$. Za polugrupu S sa nulom kažemo da je *nilpotentna polugrupa* ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da S jeste k-nilpotentna. Ako je polugrupa S idealska ekstenzija polugrupe T takva da S/T jeste k-nilpotentna (nilpotentna) polugrupa, tada S nazivamo *k-nilpotentnom* (*nilpotentnom*) *ekstenzijom* polugrupe T.

Literatura: Artamonov, Saliĭ, Skornyakov, Shevrin and Shulgeifer [1991], Bogdanović [1985], Bogdanović and Ćirić [1993], Clifford and Preston [1961, 1967], Grillet [1995], Higgins [1992], Howie [1976, 1995], Lallement [1979], Petrich [1973, 1977].

1.5. Podpolugrupe i kongruencije

Podsetimo se da neprazan podskup T polugrupe S jeste *podpolugrupa* od S ako je T *zatvoren za operaciju* polugrupe S, tj. ako je $ab \in T$, kad god su $a, b \in T$. Drugim rečima, T je podpolugrupa od S ako i samo ako je $T^2 \subseteq T$. Ako je T podpolugrupa polugrupe S, tada kažemo i da je S *nadpolugrupa* od T.

Kao i kod proizvoljnih algebri, za neprazan podskup H polugrupe S, sa $\langle H \rangle$ označavamo podpolugrupu generisanu skupom H. Ako je $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tada pišemo $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ umesto $\langle \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \rangle$, i kažemo da je $\langle H \rangle$ *generisana elementima* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Podpolugrupu $\langle a \rangle$ polugrupe S generisanu jednoelementnim podskupom $\{a\}$ od S nazivamo *monogena* ili *ciklična* podpolugrupa od S.

Ako je H podskup polugrupe S takav da je $\langle H \rangle = S$, tada kažemo da H *generiše polugrupu* S i da je H *generatorni skup* polugrupe S. Elemente iz H nazivamo *generatorni elementi* ili *generatori* od S. Na primer, multiplikativna polugrupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva generisana je skupom prostih brojeva. Polugrupu generisanu svojim jednoelementnim podskupom nazivamo *monogena* ili *ciklična* polugrupa.

Dokaz sledećeg tvrdjenja je elementaran, pa ga izostavljamo:

Teorema 1.5.1. *Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Tada je*

$$\langle H\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^n.$$

Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Element $a \in S$ *ima razlaganje u proizvod elemenata iz H* ako postoje $a_1, a_2, \dots, a_n \in H$ tako da je $a = a_1a_2\cdots a_n$. Prema Teoremi 1.3.1, H je generatorni skup polugrupe S ako i samo ako svaki element iz S ima razlaganje u proizvod elemenata iz H. Element $a \in S$ ima *jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz H* ako iz $a = a_1a_2\cdots a_n$ i $a = b_1b_2\cdots b_m$, $a_i, b_j \in H$, sledi da je $n = m$ i $a_i = b_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

U daljem tekstu ćemo se više pozabaviti monoidima, koji, kao što ćemo videti, igraju veoma značajnu ulogu u ovoj knjizi.

Ako je S monoid, tada pod *podmonoidom* od S podrazumevamo svaku podpolugrupu T od S koja sadrži jedinicu e monoida S. Primetimo da se može desiti da neka podpolugrupa T od S može sama biti monoid, a ne biti podmonoid od S, jer jedinica f monoida T može biti različita od jedinice e monoida S. To je posledica činjenice da za proizvoljnu polugrupu S i proizvoljan idempotent $f \in E(S)$, skup

$$M_f = \{a \in S \mid af = fa = a\}$$

je podpolugrupa od S i monoid sa jedinicom f. Osim toga, M_f je maksimalna podpolugrupa od S koja je monoid sa jedinicom f, što znači da je svaka druga podpolugrupa od S sa takvom osobinom sadržana u M_f.

Ako je H neprazan podskup monoida S, tada slično kao kod polugrupa definišemo *podmonoid* od S *generisan skupom H* kao najmanji podmonoid od S koji sadrži H, odnosno, kao presek svih podmonoida od S koji sadrže H. Takav podmonoid ćemo označavati sa $\langle H\rangle^*$, da bi se razlikovao od podpolugrupe od S generisane sa H. Ipak, u slučajevima kada ne postoji opasnost od mešanja ta dva pojma, koristićemo i jednostavniju oznaku $\langle H\rangle$.

Slično Teoremi 1.5.1, može se dokazati da je:

Teorema 1.5.2. *Neka je H neprazan podskup monoida S sa jedinicom e. Tada je*

$$\langle H\rangle^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} H^n,$$

pri čemu je $H^0 = \{e\}$.

Korišćenjem prethodnih teorema može se dati i algoritam za konstrukciju podpolugrupe, odnosno podmonoida, generisanog datim skupom. Daćemo teoremu koja se tiče monoida, zbog kasnijih primena te teoreme. Slična teorema se na potpuno isti način dokazuje i za polugrupe.

Teorema 1.5.3. *Neka je S monoid sa jedinicom e, neka je $H \subseteq S$ neprazan podskup i M je podmonoid od S generisan sa H. Definišimo niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od S sa*

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} H^k,$$

za $n \in \mathbb{N}^0$. Tada

(a) *Niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ je rastući i*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} E_n.$$

(b) *Ako postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $E_n = E_{n+1}$, tada je $E_n = M$.*

(c) *Ako je monoid S konačan, tada postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $E_n = M$.*

D o k a z . Podsetimo se najpre da prema Teoremi 1.5.2 važi

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} H^k.$$

(a) Niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ je rastući, jer je $E_{n+1} = E_n \cup H^{n+1}$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}^0$. Takođe, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$ je

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} X^k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} H^k = M,$$

odakle je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} E_n \subseteq M.$$

Sa druge strane, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$ je $H^n \subseteq E_n$, pa je

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} H^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} E_n.$$

Prema tome, važi (a).

(b) Uzmimo da je $E_n = E_{n+1}$, za neki $n \in \mathbb{N}^0$. Kako je $E_{n+1} = E_n \cup H^{n+1}$, to znači da je $H^{n+1} \subseteq E_n$. Ako je $H^{n+i} \subseteq E_n$, za neki $i \in \mathbb{N}$, tada je

$$\begin{aligned} H^{n+i+1} &= H^{n+i} \cdot H \subseteq E_n \cdot H = \left(\bigcup_{j=0}^{n} X^j \right) \cdot H \\ &= \bigcup_{j=0}^{n} X^{j+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} H^j \subseteq E_{n+1} = E_n. \end{aligned}$$

Prema tome, indukcijom dobijamo da je $H^{n+i} \subseteq E_n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, odakle je $E_{n+i} = E_n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, što zajedno sa (a) daje $M = E_n$.

(c) Ako je monoid S konačan, tada je $\{|E_n|\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ rastući niz prirodnih brojeva ograničen odozgo sa $|S|$, odakle sledi da postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $|E_n| = |E_{n+1}|$, što dalje znači da je $E_n = E_{n+1}$, jer je niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ rastući. $\square$

Ranije smo već uveli pojam kongruencije na algebri. Međutim, kod polugrupa uvodimo još nekoliko srodnih pojmova. Za relaciju ξ na polugrupi S kažemo da je *levo* (*desno*) *saglasna* ako za sve $a, b, x \in S$, iz $a\,\xi\, b$ sledi $xa\,\xi\, xb$ ($ax\,\xi\, bx$), i da je *stabilna* ako za sve $a, b, c, d \in S$, iz $a\,\xi\, c$ i $b\,\xi\, d$ sledi $ab\,\xi\, cd$. Levo (desno) saglasnu relaciju ekvivalencije na polugrupi S nazivamo *levom* (*desnom*) *kongruencijom* na S, a *kongruencijom* na S nazivamo relaciju koja je istovremeno i leva i desna kongruencija na S. Jedan ekvivalent definicije kongruencije dat je sledećom lemom koja se veoma lako dokazuje, pa će stoga njen dokaz biti izostavljen.

Lema 1.5.1. *Relacija ekvivalencije ξ na polugrupi S je kongruencija ako i samo ako je stabilna.*

Neka je θ relacija ekvivalencije na polugrupi S. Tada definišemo:

$$\theta_l^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x \in S^1)\ (xa, xb) \in \theta\},$$

$$\theta_r^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall y \in S^1)\ (ay, by) \in \theta\},$$

$$\theta^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in \theta\}.$$

Važna svojstva ovih relacija data su sledećom teoremom.

Teorema 1.5.4. *Neka je θ relacija ekvivalencije na polugrupi S. Tada*

(a) $\theta_l^\flat$ *je najveća leva kongruencija na S sadržana u θ;*
(b) $\theta_r^\flat$ *je najveća desna kongruencija na S sadržana u θ;*
(c) $\theta^\flat$ *je najveća kongruencija na S sadržana u θ.*

D o k a z . Dokazaćemo samo tvrđenje pod (c), jer se ostala tvrđenja dokazuju slično.

(c) Lako se proverava da je $\theta^\flat$ relacija ekvivalencije na S. Uzmimo $(a,b) \in \theta^\flat$ i $c \in S$. Tada je $(xcay, xcby) \in \theta$, za sve $x, y \in S^1$, odakle sledi da je $(ca, cb) \in \theta^\flat$. Prema tome, $\theta^\flat$ je levo saglasna. Slično dokazujemo desnu saglasnost. Ovim smo dokazali da je $\theta^\flat$ kongruencija na S. Jasno je da je $\theta^\flat$ sadržana u θ.

Neka je ϱ proizvoljna kongruencija na S sadržana u θ. Uzmimo $(a,b) \in \varrho$. Kako je ϱ kongruencija, to je $(xay, xby) \in \varrho$, za sve $x, y \in S^1$, odakle je $(xay, xby) \in \theta$, za sve $x, y \in S^1$, pa je $(a,b) \in \theta^\flat$, prema definiciji relacije $\theta^\flat$. Prema tome, $\varrho \subseteq \theta^\flat$, što znači da je $\theta^\flat$ zaista najveća kongruencija na S sadržana u θ. □

Proizvoljnom podskupu H polugrupe S pridružujemo relacije P_H, R_H i L_H na S definisane na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
P_H &= \{(a,b) \in S \times S \,|\, (\forall x, y \in S^1)\ xay \in H \ \Leftrightarrow\ xby \in H\},\\
R_H &= \{(a,b) \in S \times S \,|\, (\forall x \in S^1)\ ax \in H \ \Leftrightarrow\ bx \in H\},\\
L_H &= \{(a,b) \in S \times S \,|\, (\forall x \in S^1)\ xa \in H \ \Leftrightarrow\ xb \in H\}.
\end{aligned}
$$

Ove relacije imaju važna svojstva koja prikazuje sledeća teorema:

Teorema 1.5.5. *Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Tada važi*

(a) *L_H je najveća leva kongruencija na S koja zasićuje H;*
(b) *R_H je najveća desna kongruencija na S koja zasićuje H;*
(c) *P_H je najveća kongruencija na S koja zasićuje H.*

D o k a z . Ovo sledi iz Teoreme 1.5.4, jer su L_H, R_H i P_H levo, desno i kongruencijsko otvorenje relacije ε_H, tim redom. □

Relacije P_H, R_H i L_H nazivamo redom *glavnom kongruencijom*, *glavnom desnom kongruencijom* i *glavnom levom kongruencijom* na S *određenom skupom* H.

Literatura: Artamonov, Saliĭ, Skornyakov, Shevrin and Shulgeifer [1991], Bogdanović [1985], Bogdanović and Ćirić [1993], Clifford and Preston [1961, 1967], Dubreil [1941], Grillet [1995], Higgins [1992], Howie [1976, 1995], Lallement [1979], Petrich [1973, 1977], Teissier [1951].

1.6. Mreže i Booleove algebre

U ovom odeljku govorimo o još nekim važnim primerima univerzalnih algebri – o mrežama i Booleovim algebrama.

Uređeni skup čiji svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum nazivamo *mrežom*. Indukcijom se lako dokazuje da i svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum. Za beskonačne podskupove mreže to ne mora da važi. Ako je L mreža, tada se na L mogu definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ sa

$$\wedge : (a, b) \mapsto a \wedge b \qquad \text{i} \qquad \vee : (a, b) \mapsto a \vee b.$$

Po analogiji sa odgovarajućim operacijama na skupovima, operaciju $\vee$ nazivaćemo *unijom*, a operaciju $\wedge$ *presekom*. Drugim rečima, govorićemo da je $\bigvee H$ *unija skupa* H a $a \vee b$ je *unija elemenata* a i b, i slično, da je $\bigwedge H$ *presek skupa* H a $a \wedge b$ je *presek elemenata* a i b.

Koristeći operacije unije i preseka, mrežu možemo definisati i kao univerzalnu algebru sa dve fundamentalne binarne operacije koje zadovoljavaju nekoliko specijalnih uslova. Naime, neposredno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.6.1. *Ako je L mreža, tada je $(L, \wedge, \vee)$ univerzalna algebra takva da za sve $x, y, z \in L$ važe sledeći uslovi:*

$(L1)$ $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$	*(idempotentnost);*
$(L2)$ $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$	*(komutativnost);*
$(L3)$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	*(asocijativnost);*
$(L4)$ $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$	*(apsorpcija).*

Obratno, ako je L univerzalna algebra sa dve fundamentalne binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju uslove $(L1)$–$(L4)$, tada je L mreža, u odnosu na parcijalno uređenje $\leq$ definisano sa

$$a \leq b \ \Leftrightarrow\ a \wedge b = a \qquad (\textit{ili, ekvivalentno, } a \leq b \ \Leftrightarrow\ a \vee b = b).$$

Uslove $(L1)$–$(L4)$ u Teoremi 1.6.1 nazivamo *aksiomama mreže*.

Tretiranje mreže kao univerzalne algebre omogućava nam da kao i kod svake druge univerzalne algebre govorimo o podmrežama, kongruencijama, homomorfizmima, izomorfizmima, direktnim proizvodima mreža itd. Za mrežu L i $a \in L$, podmreže

$$[a) = \{x \in L \mid a \leq x\} \qquad \text{i} \qquad (a] = \{x \in L \mid x \leq a\}$$

su *poluotvoreni intervali* mreže L, a za $a, b \in L$ takve da je $a \leq b$, podmreže

$$(a, b) = \{x \in L \mid a < x < b\} \qquad \text{i} \qquad [a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$

su *otvoreni interval* i *zatvoreni interval* (*segment*) mreže L, tim redom. Na isti način definišu se i *poluotvoreni*, *otvoreni* i *zatvoreni intervali uređenih skupova*.

Neka je H podskup uređenog skupa A. Ako za proizvoljne $a, x \in A$, iz $x \leq a$ i $a \in H$ sledi $a \in H$, tada H nazivamo *idealom uređenog skupa* A, a ako za proizvoljne $a, x \in A$, iz $a \leq x$ i $a \in H$ sledi $a \in H$, tada H nazivamo *filtrom* ili *dualnim idealom uređenog skupa* A. Za proizvoljan element $a \in A$, poluotvoreni interval $(a]$ je najmanji ideal od A koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim idealom* uređenog skupa A generisanim sa a, a poluotvoreni interval $[a)$ je najmanji filter (dualni ideal) od A koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim filtrom* ili *glavnim dualnim idealom* uređenog skupa A generisanim sa a. Na potpuno isti način definišemo i *ideal* i *glavni ideal kvazi-uređenog skupa*, kao i *filter* i *glavni filter kvazi-uređenog skupa*.

Sa druge strane, za podskup H mreže L kažemo da je *ideal* mreže L ako je ideal uređenog skupa $(L, \leq)$ i zatvoren je za operaciju $\vee$ u L, tj. $a \vee b \in H$, za sve $a, b \in H$. Za proizvoljan element $a \in L$, poluotvoreni interval $(a]$ je takođe i najmanji ideal mreže L koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim idealom* mreže L generisanim elementom a. Takođe, H nazivamo *filtrom* ili *dualnim idealom* mreže L ako je filter uređenog skupa $(L, \leq)$ i zatvoren je za operaciju $\wedge$, tj. $a \wedge b \in H$, za sve $a, b \in H$. Za proizvoljan element $a \in L$, poluotvoreni interval $[a)$ je i najmanji filter (dualni ideal) mreže L koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim filtrom* ili *glavnim dualnim idealom* mreže L generisanim sa a.

Što se tiče izomorfizama mreža, oni se mogu povezati sa izomorfizmima uređenih skupova na način koji prikazuje sledeća teorema.

Teorema 1.6.2. *Neka su L i K mreže i neka je ϕ preslikavanje iz L u K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *ϕ je izomorfizam mreže L na mrežu K;*

(ii) *ϕ je sirjekcija iz L na K i za proizvoljne $a, b \in L$ važi*

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a\phi \leq b\phi;$$

(iii) *ϕ je uređajni izomorfizam iz L na K.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Uzmimo proizvoljne $a, b \in L$. Ako je $a \leq b$, tada je $a \wedge b = a$, pa je $a\phi = (a \wedge b)\phi = a\phi \wedge b\phi$, odakle dobijamo da je $a\phi \leq b\phi$.

Obratno, neka je $a\phi \leq b\phi$. Tada je $a\phi = a\phi \wedge b\phi = (a \wedge b)\phi$, odakle sledi da je $a = a \wedge b$, zbog injektivnosti preslikavanja ϕ, pa je, dakle, $a \leq b$. Prema tome, dokazali smo (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Iz (ii) neposredno sledi da je ϕ i injektivno preslikavanje, što znači da je i bijekcija, a takođe i da su ϕ i ϕ^{-1} izotona preslikavanja, čime dobijamo da važi (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i). Uzmimo proizvoljne $a, b \in L$. Iz $a \wedge b \leq a$ i $a \wedge b \leq b$ sledi da je $(a \wedge b)\phi \leq a\phi$ i $(a \wedge b)\phi \leq b\phi$, tj. da je $(a \wedge b)\phi$ donja granica za $a\phi$ i $b\phi$, pa preostaje da se dokaže da je i njihova najveća donja granica. U tom cilju, uzmimo proizvoljnu donju granicu u za $a\phi$ i $b\phi$. Kako je ϕ sirjektivno preslikavanje, to je $u = x\phi$, za neki $x \in L$, i imamo da je $x\phi = u \leq a\phi$ i $x\phi = u \leq b\phi$. Iz izotonosti preslikavanja ϕ^{-1} dalje sledi da je $x \leq a$ i $x \leq b$, pa je $x \leq a \wedge b$, odakle dobijamo da je $u = x\phi \leq (a \wedge b)\phi$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, $(a \wedge b)\phi = a\phi \wedge b\phi$. Na potpuno isti način dokazujemo da je $(a \vee b)\phi = a\phi \vee b\phi$. Ovim je dokazano da je ϕ izomorfizam mreže L na mrežu K. $\square$

Najmanji element mreže L, ako takav postoji, nazivamo *nulom*, a najveći element, ukoliko postoji, nazivamo *jedinicom mreže* L. Nulu i jedinicu mreže obično označavamo sa 0 i 1, tim redom. Mrežu koja ima nulu i jedinicu nazivamo *ograničenom mrežom*. Ograničena mreža se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju $(L1)$–$(L4)$, i nularnim operacijama (konstantama) 0 i 1 koje zadovoljavaju uslove

$(L5)$ $0 \wedge x = 0$ (ili, ekvivalentno, $0 \vee x = x$), za svaki $x \in L$;
$(L6)$ $1 \wedge x = x$ (ili, ekvivalentno, $1 \vee x = 1$), za svaki $x \in L$.

Za neprazan podskup H mreže L kažemo da je *ograničen* ako ima bar jednu donju i bar jednu gornju granicu.

Nije teško pokazati da su na proizvoljnoj mreži L sledeći uslovi ekvivalentni:

$(L7)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, za sve $x, y, z \in L$;
$(L7')$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, za sve $x, y, z \in L$.

Mrežu koja zadovoljava bilo koji od tih uslova nazivamo *distributivnom mrežom*.

Neka je L ograničena mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Za element $y \in L$ kažemo da je *dopuna* (*komplement*) elementa $x \in L$ ako važi

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{i} \qquad x \vee y = 1.$$

U tom slučaju je i x dopuna za y, tj. relacija "biti dopuna" je simetrična. Ako je pri tome mreža L još i distributivna, tada se lako dokazuje da svaki element $x \in L$ može imati najviše jednu dopunu, koju ćemo označavati sa x'. Ograničenu distributivnu mrežu u kojoj svaki element ima dopunu nazivamo *Booleovom algebrom*. Preslikavanje $x \mapsto x'$ je unarna oparacija na L, i nazivamo je *operacijom dopune*. Booleova algebre se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0 i 1 koje pored uslova $(L1)$–$(L7)$ zadovoljavaju i uslove

$(L8)$ $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$, za svaki $x \in L$;
$(L9)$ $(x')' = x$, za svaki $x \in L$;
$(L10)$ $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, za sve $x, y \in L$.

Naravno, ovaj skup aksioma nije minimalan – neke aksiome se mogu izvesti kao posledice drugih aksioma, ali to ovde nije tako bitno. Podsetimo se da su aksiome $(L10)$ poznate kao *DeMorganovi zakoni*.

Kako smo napred napomenuli, svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum, ali to ne mora da važi za beskonačne podskupove. Stoga mrežu u kojoj svaki neprazan podskup ima supremum i infimum nazivamo *potpunom* ili *kompletnom mrežom*. Jasno, svaka takva mreža je ograničena. Podskup K potpune mreže L je *potpuna podmreža* od L ako supremum i infumum (u L) svakog nepraznog podskupa od K leže u K.

Navedimo sada neke važne primere mreža i Booleovih algebri.

Primer 1.6.1. Najpoznatiji primer Booleove algebre je *Booleova algebra podskupova* datog skupa H. Naime, *partitivni skup* $\mathcal{P}(H)$ (skup svih podskupova od H), parcijalno uređen skupovnom inkluzijom, je Booleova algebra. Operacije unije i preseka u toj Booleovoj algebri poklapaju se sa operacijama skupovne unije i preseka, operacija dopune se poklapa sa skupovnom operacijom dopune do skupa H, jedinica u $\mathcal{P}(H)$ je ceo skup H a nula je prazan skup $\emptyset$. Ova Booleova algebra je potpuna.

Primer 1.6.2. Skup $\mathcal{B}(H)$ svih binarnih relacija na nepraznom skupu H, parcijalno uređen inkluzijom relacija, takođe čini potpunu Booleovu algebru, koju nazivamo *Booleovom algebrom relacija* na H. Jasno, Booleova algebra relacija na H izomorfna je Booleovoj algebri podskupova od $H \times H$.

Nula i jedinica u $\mathcal{B}(H)$ su redom prazna i univerzalna relacija na H.

Primer 1.6.3. Označimo sa $\mathcal{E}(H)$ skup svih relacija ekvivalencije na nepraznom skupu H. Taj skup je parcijalno uređen inkluzijom relacija, i u odnosu na to parcijalno uređenje on je potpuna mreža, mada nije podmreža od $\mathcal{B}(H)$. Naime, dok se operacija preseka na $\mathcal{E}(H)$ poklapa sa operacijom preseka u $\mathcal{B}(H)$, operacija unije je određena drugačije, jer skupovna unija dve ili više relacija ekvivalencije ne mora biti relacija ekvivalencije. Neka je K proizvoljan neprazan podskup od $\mathcal{E}(H)$ i neka je $\langle K\rangle$ podpolugrupa polugrupe $\mathcal{B}(H)$ binarnih relacija na H generisana sa K. Tada se $\bigvee K$ poklapa sa skupovnom unijom svih relacija iz $\langle K\rangle$.

Nula i jedinica u $\mathcal{E}(H)$ su redom Δ_H i ∇_H.

Primer 1.6.4. Neka je $\mathrm{Sub}(A)$ *skup svih podalgebri* algebre A tipa τ (ako je $\tau_0 = \varnothing$, tada je prazna podalgebra uključena u $\mathrm{Sub}(A)$). Tada skup $\mathrm{Sub}(A)$, parcijalno uređen skupovnom inkluzijom, čini potpunu mrežu u kojoj za proizvoljan skup $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ važi

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \text{i} \qquad \bigvee_{i\in I} A_i = \Big\langle \bigcup_{i\in I} A_i \Big\rangle.$$

Jedinica ove mreže je cela algebra A, a nula je prazna podalgebra, ukoliko je $\tau_0 = \varnothing$, odnosno podalgebra generisana skupom svih konstanti, ukoliko je $\tau_0 \neq \varnothing$.

Mrežu $\mathrm{Sub}(A)$ nazivamo *mrežom podalgebri* algebre A.

Primer 1.6.5. Neka je $\mathrm{Con}(A)$ *skup svih kongruencija* na algebri A tipa τ. Tada je $\mathrm{Con}(A)$ potpuna podmreža mreže $\mathcal{E}(A)$ relacija ekvivalencije na A, sa istom nulom i jedinicom kao $\mathcal{E}(A)$.

Ako je L mreža sa najmanjim elementom 0, tada za element $a \in L \setminus \{0\}$ kažemo da je *atom* u L ako ne postoji $b \in L$ takav da je $0 < b < a$. Za L kažemo da je *atomična* ako za svaki element $x \in L \setminus \{0\}$ postoji atom $a \in L$ takav da je $0 < a \leq x$, dok za L kažemo da je *atomistična* ako se svaki element iz $L \setminus \{0\}$ može predstaviti kao supremum nekog skupa atoma. Jasno, svaka atomistična mreža je atomična, dok obratno ne mora da važi.

Primer 1.6.6. U Booleovoj algebri $\mathcal{P}(H)$ svih podskupova skupa H, atomi su jednoelementni podskupovi od H. Jasno, ova mreža je atomična.

Preslikavanje φ mreže L u sebe nazivamo *ekstenzivnim*, ako je $a \leq a\varphi$, za svaki $a \in L$, *kontraktivnim*, ako je $a\varphi \leq a$, za svaki $a \in L$, i *idempotentnim*, ako je $(a\varphi)\varphi = a\varphi$, za svaki $a \in L$. Ekstenzivno, izotono i idempotentno preslikavanje na L nazivamo *operatorom zatvorenja*, dok kontraktivno, izotono i idempotentno preslikavanje nazivamo *operatorom otvorenja*. Ako je φ operator zatvorenja na L, tada za element $a \in L$ takav da je $a\varphi = a$ kažemo da je *zatvoren* za φ ili da je *φ-zatvoren*. Ukoliko je φ operator otvorenja, onda za element sa takvom osobinom kažemo da je *otvoren* za φ ili da je *φ-otvoren*.

Ovde ćemo navesti nekoliko primera operatora zatvorenja i otvorenja koji su se već pojavili u prethodnom tekstu. Mnoštvo drugih primera operatora zatvorenja i otvorenja može se naći u daljem tekstu knjige.

Primer 1.6.7. Neka je H neprazan skup. Preslikavanje $\xi \mapsto \xi^\infty$, za $\xi \in \mathcal{B}(H)$ predstavlja operator zatvorenja na $\mathcal{B}(H)$ a odgovarajući zatvoreni elementi su upravo tranzitivne relacije na H. Time je opravdano to što smo ξ^∞ ranije nazvali *tranzitivnim zatvorenjem* relacije ξ. Preslikavanje $\xi \mapsto \xi^e$ takođe je operator zatvorenja na $\mathcal{B}(H)$, a odgovarajući zatvoreni elementi su relacije ekvivalencije na H. To zatvorenje nazivamo *ekvivalencijskim zatvorenjem* relacije ξ ili *ekvivalencijom generisanom relacijom* ξ.

Primer operatora otvorenja je operator $\xi \mapsto \xi \cap \xi^{-1}$, a odgovarajući otvoreni elementi su simetrične relacije na H, pri čemu se uzima da je i prazna relacija simetrična.

Primer 1.6.8. Ako je A algebra tipa τ, tada je $H \mapsto \langle H \rangle$, gde je H podskup od A, operator zatvorenja na Booleovoj algebri $\mathcal{P}(A)$ svih podskupova od A. Skup svih elemenata iz $\mathcal{P}(A)$ zatvorenih za ovaj operator je skup svih podalgebri od A.

Primer 1.6.9. Neka je A algebra tipa τ. Za relaciju $\xi \in \mathcal{B}(A)$, označimo sa $\xi^\#$ presek svih kongruencija na A koje sadrže relaciju ξ, tada je $\xi \mapsto \xi^\#$ operator zatvorenja na $\xi \in \mathcal{B}(A)$ a skup svih elemenata zatvorenih za taj operator je upravo skup svih kongruencija na A. Ovaj operator nazivamo *kongruencijskim zatvorenjem* relacije ξ, a kongruenciju $\xi^\#$ nazivamo *kongruencijom* na A *generisanom sa* ξ.

Primer 1.6.10. Neka je ξ relacija na skupu X. Relacija $(\xi \cup \Delta)^\infty = \Delta \cup \xi^\infty$ je najmanja refleksivna i tranzitivna relacija na X koja sadrži relaciju ξ, odnosno najmanje kvazi-uređenje na X koje sadrži ξ, i nazivamo je *refleksivno-tranzitivnim zatvorenjem* relacije ξ, ili *kvazi-uređenjem* na X generisanim relacijom ξ.

Neka je dalje ξ relacija na polugrupi S. Relacija

$$\xi^c = \{(xay, xby) \mid x, y \in S^1, \, (a, b) \in \xi\}$$

je najmanja saglasna relacija na S koja sadrži ξ, i nazivaćemo je *saglasnim zatvorenjem* relacije ξ. Lako se proverava da unija proizvoljne familije saglasnih relacija i proizvod konačno mnogo saglasnih relacija na S jesu takođe saglasne relacije na S, odakle, prema definiciji tranzitivnog zatvorenja relacije, dobijamo da i tranzitivno zatvorenje saglasne relacije jeste saglasna relacija. Iz svega ovog se može lako zaključiti da za datu relaciju ξ na polugrupi S, $(\xi^c \cup \Delta)^\infty$ je najmanje saglasno kvazi-uređenje na S koje sadrži ξ. Kako saglasno kvazi-uređenje na polugrupi S nazivamo *polu-kongruencijom* na S, to ćemo $(\xi^c \cup \Delta)^\infty$ nazivati *polu-kongruencijom* na S *generisanom relacijom* ξ.

Primer 1.6.11. Neka je S polugrupa i $\theta_l^\flat$, $\theta_r^\flat$ i $\theta^\flat$ su relacije definisane u prethodnom odeljku. Tada preslikavanja $\theta \mapsto \theta_l^\flat$, $\theta \mapsto \theta_r^\flat$ i $\theta \mapsto \theta^\flat$ jesu operatori otvorenja na mreži relacija ekvivalencije na S, pa ćemo relaciju $\theta_l^\flat$ nazivati *levim kongruencijskim otvorenjem*, relaciju $\theta_r^\flat$ *desnim kongruencijskim otvorenjem*, a relaciju $\theta^\flat$ *kongruencijskim otvorenjem* relacije ekvivalencije θ.

Literatura: Artamonov, Saliĭ, Skornyakov, Shevrin and Shulgeifer [1991], Birkhoff [1979], Burris and Sankappanavar [1981], Ćirić, Bogdanović and Kovačević [1998], Crawley and Dilworth [1973], Crvenković, Dolinka and Madarász [1998], Davey and Priestley [1990], Grätzer [1978], Kočinac and Mandak [1996], Perović [1998], Szàsz [1971].

1.7. Direktni i poddirektni proizvodi. Direktni limiti

Postoji mnogo načina da se od zadatih algebri naprave nove algebre. Pored formiranja faktor-algebri, jedan od najpoznatijih načina je i formiranje direktnog proizvoda zadate familije algebri, o čemu će biti reči u nastavku. Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ neprazna familija algebri tipa τ. Na Descartesovom proizvodu $A = \prod_{i\in I} A_i$ te familije definišemo operacije tipa τ "pokoordinatno", što znači na sledeći način:

(i) za $f \in \tau_0$ stavljamo da je $f^A = (f^{A_i})_{i\in I}$;

(ii) za $f \in \tau_n$, gde je $n \in \mathbb{N}$, i $a^{(k)} = (a_i^{(k)})_{i\in I} \in A$, gde je $k \in [1, n]$, stavljamo da je

$$f^A(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) = (f^{A_i}(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}))_{i\in I}.$$

Sa tako definisanim operacijama A je algebra tipa τ. Svaku algebru izomorfnu ovako definisanoj algebri A nazivamo *direktnim proizvodom* algebri A_i, $i \in I$. Ako je I konačan skup, tada za taj direktni proizvod kažemo da je *konačan*. Sa druge strane, ako je za svaki $i \in I$ algebra A_i izomorfna nekoj algebri B, tada direktan proizvod algebri A_i, $i \in I$, označavamo sa B^I i nazivamo *direktnim stepenom* algebre B.

U slučaju da je neka od algebri A_i, $i \in I$, trivijalna, tada je obično odstranjujemo iz proizvoda, jer i posle njenog odstranjivanja dobijamo isti (preciznije izomorfan) direktan proizvod. Ako je A direktan proizvod algebri A_i, $i \in I$, tada je π_i homomorfizam, za svaki $i \in I$, i nazivamo ga *projekcijskim homomorfizmom* iz A na A_i.

Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $P(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih direktnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, sa $P_f(\boldsymbol{K})$ klasu svih konačnih direktnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, a sa $Pow(\boldsymbol{K})$ klasu svih direktnih stepena algebri iz $\boldsymbol{K}$. Za klasu $\boldsymbol{K}$ kažemo da je zatvorena za operator $P : \boldsymbol{K} \mapsto P(\boldsymbol{K})$, ili da je *zatvorena za direktne proizvode*, ako je $P(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, da je zatvorena za operator $P_f : \boldsymbol{K} \mapsto P_f(\boldsymbol{K})$, ili da je *zatvorena za konačne direktne proizvode*, ako je $P_f(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, i da je zatvorena za operator $Pow : \boldsymbol{K} \mapsto Pow(\boldsymbol{K})$, ili da je zatvorena za *direktne stepene*, ako je $Pow(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Neka je A podalgebra direktnog proizvoda $\prod_{i\in I} A_i$ algebri A_i, $i \in I$, takva da je $A\pi_i = A_i$, za svaki $i \in I$. Tada A, a takođe i svaku drugu algebru izomorfnu sa A, nazivamo *poddirektnim proizvodom* algebri A_i, $i \in I$. Ukoliko je za svaki $i \in I$, algebra A_i izomorfna nekoj algebri B, tada poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$, nazivamo *poddirektnim stepenom* algebre B.

Teorema 1.7.1. *Algebra A je poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$, ako i samo ako postoji familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ kongruencija na A za koju važi:*

(a) $A/\theta_i \cong A_i$, *za svaki* $i \in I$;

(b) $\bigcap\limits_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$.

Dokaz. Neka je $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familija kongruencija na A koja zadovoljava uslove (a) i (b). Definišimo preslikavanje $\phi : A \to \prod_{i\in I} A_i$ sa

$$a\phi = (a\theta_i)_{i\in I} \qquad (a \in S),$$

gde je $A_i = A/\theta_i$. Tada je ϕ homomorfizam i $(A\phi)\pi_i = A_i$, za svaki $i \in I$. Prema (b) sledi da je ϕ injektivno. Prema tome, ϕ je izomorfizam iz A na $A\phi$, pa je A poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$.

Obratno, neka je $A \subseteq \prod_{i\in I} A_i$ poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$. Za $i \in I$ neka je φ_i restrikcija projekcionog homomorfizma π_i na A i neka je $\theta_i = \ker\varphi$. Tada je $A/\theta_i \cong A_i$, prema Teoremi o homomorfizmu, i familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ zadovoljava uslov (b). Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Teorema 1.7.1 može se iskazati i u terminima homomorfizama:

Posledica 1.7.1. *Algebra A je poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$, ako i samo ako postoji familija $\{\phi_i\}_{i\in I}$ homomorfizama za koju važi:*

(a) ϕ_i *slika A na A_i, za svaki* $i \in I$;

(b) $(\forall x, y \in A)((\forall i \in I)\, x\phi_i = y\phi_i) \Rightarrow x = y)$.

Posledica 1.7.2. (Tranzitivnost poddirektnih proizvoda). *Ako je algebra A poddirektan proizvod algebri A_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$, A_α je poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I_\alpha$, tada je A poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$, gde je $I = \bigcup_{\alpha \in Y} I_\alpha$.*

Pre nego što damo još jedan rezultat vezan za poddirektne proizvode, dokazaćemo jednu veoma korisnu teoremu.

Teorema 1.7.2. (Teorema o korespondenciji). *Neka je θ kongruencija na algebri A. Tada je mreža $\mathrm{Con}(A/\theta)$ izomorfna glavnom filtru $[\theta)$ mreže $\mathrm{Con}(A)$.*

Dokaz. Dokazaćemo da preslikavanje $\varrho \mapsto \varrho/\theta$ jeste izomorfizam glavnog filtra $[\theta)$ mreže $\mathrm{Con}(A)$ na mrežu $\mathrm{Con}(A/\theta)$.

Za proizvoljan $\mu \in \mathrm{Con}(A/\theta)$ definišimo relaciju ϱ na A sa

$$\varrho = \{(a,b) \in A \times A \mid (a\theta, b\theta) \in \mu\}.$$

Neposrednom proverom dobija se da je $\varrho \in \mathrm{Con}(A)$ i $\theta \subseteq \varrho$. Osim toga,

$$\begin{aligned} (x,y) \in \varrho/\theta \quad &\Leftrightarrow \quad x = a\theta \text{ i } y = b\theta \quad \text{za neki par } (a,b) \in \varrho \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \mu, \end{aligned}$$

pa je $\mu = \varrho/\theta$. To znači da $\varrho \mapsto \varrho/\theta$ slika $[\theta)$ na $\mathrm{Con}(A/\theta)$.

Sa druge strane, uzmimo proizvoljne $\varrho, \varrho' \in [\theta)$. Ako je $\varrho \subseteq \varrho'$, tada $\varrho/\theta \subseteq \varrho'/\theta$, prema (1.3). Obratno, neka je $\varrho/\theta \subseteq \varrho'/\theta$, i uzmimo da je $(a,b) \in \varrho$. Tada je $(a\theta, b\theta) \in \varrho/\theta \subseteq \varrho'/\theta$, pa je $(a\theta, b\theta) = (c\theta, d\theta)$, za neke $c, d \in A$ takve da je $(c,d) \in \varrho'$. Sada imamo da je

$$(a,c) \in \theta \subseteq \varrho', \quad (c,d) \in \varrho' \quad \text{i} \quad (d,b) \in \theta \subseteq \varrho',$$

odakle je $(a,b) \in \varrho'$, što znači da je $\varrho \subseteq \varrho'$.

Prema tome, dokazali smo da je $\varrho \mapsto \varrho/\theta$ izomorfizam uređenih skupova, pa prema Teoremi 1.6.2 dobijamo da je to i mrežni izomorfizam iz $[\theta)$ na $\mathrm{Con}(A/\theta)$. $\square$

Sada dokazujemo sledeće:

Teorema 1.7.3. *Neka je $\{\theta_i\}_{i \in I}$ familija kongruencija na algebri A i*

$$\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i.$$

Tada je algebra A/θ poddirektan proizvod algebri A/θ_i, $i \in I$.

Dokaz. Ako za svaki $i \in I$ stavimo da je $\vartheta_i = \theta_i/\theta$, tada prema Drugoj teoremi o izomorfizmu sledi da je $\vartheta_i \in \mathrm{Con}(A/\theta)$ i $(A/\theta)/\vartheta_i \cong A/\theta_i$, za svaki $i \in I$. Dalje, prema Teoremi o korespondenciji imamo da je

$$\bigcap_{i\in I} \vartheta_i = \Delta_{A/\theta},$$

pa na osnovu Teoreme 1.7.1 sledi da je A/θ poddirektan proizvod algebri $(A/\theta)/\vartheta_i \cong A/\theta_i$, $i \in I$. $\square$

Za klasu $\boldsymbol{K}$ algebri, sa $P_s(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu koja se sastoji iz svih poddirektnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, i kažemo da je klasa $\boldsymbol{K}$ zatvorena za operator $P_s : \boldsymbol{K} \mapsto P_s(\boldsymbol{K})$, ili da je *zatvorena za poddirektne proizvode*, ako je $P_s(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Neka je I usmeren kvazi-uređen skup i neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija algebri tipa τ. Za svaki par $i, j \in I$ takav da je $i \preccurlyeq j$, neka je $\phi_{i,j}$ homomorfizam iz A_i u A_j tako da familija $\{\phi_{i,j}\}_{i\preccurlyeq j}$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) za svaki $i \in I$, $\phi_{i,i}$ je identičko preslikavanje na A_i;
(ii) za sve $i, j, k \in I$ takve da je $i \preccurlyeq j \preccurlyeq k$ važi $\phi_{i,j}\phi_{j,k} = \phi_{i,k}$.

Tada trojku $(I; \{A_i\}_{i\in I}, \{\phi_{i,j}\}_{i\preccurlyeq j})$, jednostavnije zapisanu kao $(I; A_i, \phi_{i,j})$, nazivamo *direktnom familijom algebri*. Kvazi-uređen skup naziva se *nosačem* a familija $\{A_i\}_{i\in I}$ *bazom* te familije. Svaka familija homomorfizama koja zadovoljava uslove (i) i (ii) naziva se *tranzitivnim sistemom homomorfizama*.

Teorema 1.7.4. *Neka je $(I; A_i, \phi_{i,j})$ direktna familija algebri tipa τ,*

$$B = \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \,\middle|\, (\exists k \in I)(\forall i, j \in I)(k \preccurlyeq i \preccurlyeq j \ \Rightarrow a_i\phi_{i,j} = a_j) \right\},$$

i neka je θ relacija na B definisana sa

$$(a, b) \in \theta \ \Leftrightarrow\ (\exists k \in I)(\forall i \in I)(k \preccurlyeq i \ \Rightarrow\ a_i = b_i),$$

gde su $a = (a_i)_{i\in I}$, $b = (b_i)_{i\in I} \in B$. Tada je B podalgebra direktnog proizvoda $\prod_{i\in I} A_i$ i θ je kongruencija na B.

Dokaz. Ako je $f \in \tau_0$, tada je $(f^{A_i})_{i\in I} \in B$, jer je $f^{A_i}\phi_{i,j} = f^{A_j}$, za sve $i, j \in I$ takve da je $i \preccurlyeq j$. Dalje, neka je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i neka su $a^{(s)} = (a_i^{(s)})_{i\in I} \in B$, $s \in [1, n]$, proizvoljni elementi. Za svaki $s \in [1, n]$

postoji $k_s \in I$ tako da za sve $i, j \in I$ takve da je $k \preccurlyeq i \preccurlyeq j$ važi $a_i^{(s)}\phi_{i,j} = a_j^{(s)}$. Kako je I usmeren kvazi-uređen skup, to postoji $k \in I$ tako da je $k \succcurlyeq k_s$, za svaki $s \in [1, n]$, i za proizvoljne $i, j \in I$ takve da je $k \preccurlyeq i \preccurlyeq j$ imamo da je $k_s \preccurlyeq i \preccurlyeq j$, za svaki $s \in [1, n]$, pa važi

$$\Big(f^{A_i}(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)})\Big)\phi_{i,j} = f^{A_j}(a_i^{(1)}\phi_{i,j}, \dots, a_i^{(n)}\phi_{i,j}) = f^{A_j}(a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)}).$$

Prema tome

$$f^{\prod_{i\in I} A_i}(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) = \Big(f^{A_i}(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)})\Big)_{i\in I} \in B,$$

čime smo dokazali da je B podalgebra od $\prod_{i\in I} A_i$.

Neka je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i neka su $a^{(s)} = (a_i^{(s)})_{i\in I}$, $b^{(s)} = (b_i^{(s)})_{i\in I} \in B$, $s \in [1, n]$, elementi takvi da je $(a^{(s)}, b^{(s)}) \in \theta$, za svaki $s \in [1, n]$. To znači da za svaki $s \in [1, n]$ postoji $k_s \in I$ tako da za svaki $i \succcurlyeq k_s$ važi $a_i^{(s)} = b_i^{(s)}$. Sa druge strane, postoji $k \in I$ tako da je $k \succcurlyeq k_s$, za svaki $s \in [1, n]$, odakle dobijamo da za svaki $i \succcurlyeq k$ važi $i \succcurlyeq k_s$, za svaki $s \in [1, n]$, pa je, dakle, $a_i^{(s)} = b_i^{(s)}$ za svaki $i \succcurlyeq k$. Prema tome, za svaki $i \succcurlyeq k$ važi

$$f^{A_i}(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) = f^{A_i}(b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(n)}),$$

odakle sledi da

$$\Big(f^B(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}), f^B(b^{(1)}, \dots, b^{(n)})\Big) \in \theta.$$

Ovim smo dokazali da je θ kongruencija na B. $\square$

Ako je $(I; A_i, \phi_{i,j})$ direktna familija algebri i algebra B i kongruencija θ su definisani kao u Teoremi 1.7.4, tada svaku algebru izomorfnu faktor-algebri B/θ nazivamo *direktnim limitom*, ili kraće samo *limitom*, te direktne familije algebri.

Značaj direktnih limita u univerzalnoj algebri bazira se, pre svega, na sledećoj važnoj teoremi:

Teorema 1.7.5. *Svaka algebra je direktan limit familije svih svojih konačno generisanih podalgebri.*

Dokaz. Neka je A algebra tipa τ i neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija svih konačno generisanih podalgebri od A, pri čemu za $i, j \in I$ važi da je $i \preccurlyeq j$ ako i samo ako je $A_i \subseteq A_j$. Ako je $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, proizvoljan konačan skup konačno generisanih podalgebri od A, pri čemu je za svaki $s \in [1,n]$, algebra A_{i_s} generisana konačnim skupom H_{i_s}, tada je konačan i skup $H = \bigcup\{H_{i_s} \mid s \in [1,n]\}$, pa je $\langle H \rangle$ konačno generisana podalgebra od A takva da je $A_{i_s} \subseteq \langle H \rangle$, za svaki $s \in [1,n]$. Odavde zaključujemo da je I usmeren kvazi-uređen skup. Konačno, za $i, j \in I$ takve da je $i \preccurlyeq j$, neka je preslikavanje $\phi_{i,j} : A_i \to A_j$ definisano sa: $a\phi_{i,j} = a$, za svaki $a \in A_i$. Jasno je da je $(I; A_i, \phi_{i,j})$ direktna familija algebri.

Neka su podalgebra B direktnog proizvoda $\prod_{i \in I} A_i$ i kongruencija θ na B definisani kao u Teoremi 1.7.4. S obzirom na definiciju homomorfizama $\phi_{i,j}$, imamo da je

$$B = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \,\middle|\, (\exists a \in A)(\exists k \in I)(\forall i \succcurlyeq k)\, b_i = a \right\}.$$

Koristeći činjenicu da je I usmeren kvazi-uređen skup, lako se dokazuje da za svaki $b = (b_i)_{i \in I}$ postoji tačno jedan $a \in A$ takav da za neki $k \in I$ i svaki $i \succcurlyeq k$ važi $b_i = a$, pa definišemo preslikavanje $\phi : B \to A$ uzimajući da je $b\phi = a$. Neposrednom proverom, ponovo koristeći usmerenost kvazi-uređenog skupa I, utvrđuje se da je ϕ homomorfizam. Neka je $a \in A$ proizvoljan element i neka je A_k, $k \in I$, monogena podalgebra od A generisana sa a. Tada za proizvoljan $i \in I$, $a \in A_i$ ako i samo ako je $i \succcurlyeq k$, pa definišemo element $b = (b_i)_{i \in I}$ na sledeći način: Ako za $i \in I$ važi $i \succcurlyeq k$, tada stavljamo $b_i = a$, a ako nije $i \succcurlyeq k$, tada uzimamo da je b_i bilo koji element iz A_i. Jasno je da je $b = (b_i)_{i \in I} \in B$ i $b\phi = a$. Prema tome, ϕ slika B na A.

Na kraju, neposredno se proverava da je $\ker \phi = \theta$, što prema Teoremi o homomorfizmu znači da je $A \cong B/\theta$, odnosno da je A direktan limit familije $(I; A_i, \phi_{i,j})$. $\square$

Literatura: Artamonov, Saliĭ, Skornyakov, Shevrin and Shulgeifer [1991], Birkhoff [1944], Burris and Sankappanavar [1981], Ćirić, Petković and S. Bogdanović [2000], Fleischer [1955], Fuchs [1952], Grätzer [1968], Kimura [1958a], Maljcev [1970], Wenzel [1967].

1.8. Identiteti i varijeteti

Jedan od osnovnih načina za izražavanje izvesnih "zakona" koji važe na nekoj algebri ili nekoj klasi algebri je njihovo izražavanje preko identiteta. U ovom odeljku govorimo upravo o identitetima i klasama algebri koje se mogu zadati preko identiteta, koje nazivamo varijetetima.

Najpre uvodimo pojam identiteta. Ako je $T = T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom X, tada *identitom* tipa τ nad X, ili *identitetom u* $T(X)$, nazivamo uređeni par $(u, v) \in T \times T$, koji obično pišemo kao izraz oblika $u = v$. To je samo formalna jednakost terma u i v, jer, u opštem slučaju, u i v su različiti elementi iz $T(X)$. Skup svih identiteta u $T(X)$ biće označen sa Id_X. Može se lako dokazati da su svake dve term algebre nad skupovima promenljivih iste kardinalnosti izomorfne, zbog čega ćemo sve term algebre nad skupom promenljivih kardinalnosti $\varkappa$ identifikovati i označavati sa $T_\varkappa$, dok ćemo skup svih identiteta nad takvom term algebrom označavati sa $\mathrm{Id}_\varkappa$. Specijalno, sa T_ω i Id_ω označavamo term algebru i skup svih identiteta nad prebrojivim skupom promenljivih, tim redom.

Neka je $u = v \in \mathrm{Id}_X$, pri čemu u i v jesu n-arni termi tipa τ, za neki $n \in \mathbb{N}$, i neka je A algebra istog tipa τ. Kažemo da algebra A *zadovoljava identitet* $u = v$, ili da je identitet $u = v$ *zadovoljen na algebri* A, u oznaci $A \models u = v$, ako su term operacije u^A i v^A jednake, tj.

$$u^A(a_1, \ldots, a_n) = v^A(a_1, \ldots, a_n),$$

za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$. Intuitivno, A zadovoljava identitet $u = v$ ako za svaku moguću zamenu promenljivih u termima u i v elementima iz A, termi u i v daju isti element iz A. Ako je Σ neki skup identiteta, tada algebra A *zadovoljava skup identiteta* Σ ako A zadovoljava svaki identitet iz Σ, što pišemo $A \models \Sigma$. Skup svih identiteta nad skupom X zadovoljenih na A označavamo sa $\mathrm{Id}_X(A)$ ili $\mathrm{Id}_\varkappa(A)$, ako je $|X| = \varkappa$. Specijalno, skup svih identiteta nad prebrojivim skupom promenljivih zadovoljenih na A označavamo sa $\mathrm{Id}_\omega(A)$.

Slične definicije mogu se uvesti za klasu $\boldsymbol{K}$ algebri tipa τ. Naime, kažemo da klasa $\boldsymbol{K}$ zadovoljava identitet $u = v \in \mathrm{Id}_X$, u oznaci $\boldsymbol{K} \models u = v$, ako svaka algebra iz $\boldsymbol{K}$ zadovoljava $u = v$, odnosno da zadovoljava skup identiteta Σ, u oznaci $\boldsymbol{K} \models \Sigma$, ako $\boldsymbol{K}$ zadovoljava svaki identitet iz Σ. Skup svih identiteta nad X zadovoljenih na $\boldsymbol{K}$ označavamo sa $\mathrm{Id}_X(\boldsymbol{K})$ ili sa $\mathrm{Id}_\varkappa(\boldsymbol{K})$, ako je $|X| = \varkappa$. Posebno, skup svih identiteta nad prebrojivim skupom promenljivih zadovoljenih na $\boldsymbol{K}$ označavamo sa $\mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{K})$. Klasu svih algebri tipa τ koje zadovoljavaju skup identiteta Σ označavamo sa $[\Sigma]$, i ako je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$ tada kažemo da je $\boldsymbol{K}$ klasa *definisana skupom identiteta* Σ.

Sledeća teorema nam daje alternativni način za definisanje pojma zadovoljenja identiteta na algebri:

Teorema 1.8.1. *Neka je A algebra tipa τ i $u = v$ je identitet tipa τ nad skupom promenljivih X. Tada $A \models u = v$ ako i samo ako je $u\varphi = v\varphi$, za svaki homomorfizam $\varphi : T(X) \to A$, tj. ako je par (u, v) sadržan u jezgru svakog homomorfizma iz $T(X)$ u A.*

D o k a z . Neka $u = v$ jeste n-arni identitet oblika

$$u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n).$$

Pretpostavimo da algebra A zadovoljava taj identitet. Neka je $\varphi : T(X) \to A$ proizvoljan homomorfizam i za svaki $i \in I$ neka je $a_i = x_i\varphi$. Tada prema Teoremi 1.3.5 imamo da je

$$(u(x_1, \dots, x_n))\varphi = u^A(a_1, \dots, a_n) = v^A(a_1, \dots, a_n) = (v(x_1, \dots, x_n))\varphi,$$

tj. $u\varphi = v\varphi$.

Obratno, neka je $u\varphi = v\varphi$ za svaki homomorfizam $\varphi : T(X) \to A$. Uočimo proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in A$ i definišimo preslikavanje $\varphi : X \to A$ sa: $x_i\varphi = a_i$, za svaki $i \in [1, n]$, i $x\varphi$ je bilo koji element iz A, za svaki $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Prema Teoremi 1.3.4, postoji homomorfizam $\widehat{\varphi} : T(X) \to A$ takav da je $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za svaki $x \in X$, odakle, opet prema Teoremi 1.3.5, sledi da je

$$u^A(a_1, \dots, a_n) = (u(x_1, \dots, x_n))\varphi = (v(x_1, \dots, x_n))\varphi = v^A(a_1, \dots, a_n).$$

Ovim je dokazano da algebra A zadovoljava identitet $u = v$, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Neka je $\boldsymbol{K}$ klasa algebri tipa τ. Kongruenciju θ na algebri A tipa τ nazivaćemo $\boldsymbol{K}$*-kongruencijom* ako odgovarajuća faktor-algebra A/θ pripada klasi $\boldsymbol{K}$. Skup svih $\boldsymbol{K}$-kongruencija na algebri A označavaćemo sa $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$.

Sada možemo preći na dokaz glavnog rezultata ovog odeljka koji daje razne karakterizacije varijeteta algebri. Naime, *varijetetom* algebri nazivaćemo svaku klasu algebri $\boldsymbol{K}$ koja zadovoljava bilo koji od pet ekvivalentnih uslova naredne teoreme.

Teorema 1.8.2. (Birkhoffova teorema). *Sledeći uslovi za algebarsku klasu $\boldsymbol{K}$ su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i direktne proizvode;*
(ii) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike i poddirektne proizvode;*
(iii) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ *je glavni filter mreže* $\mathrm{Con}(A)$*, za svaku algebru A;*
(iv) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ *je potpuna podmreža mreže* $\mathrm{Con}(A)$*, za svaku algebru A;*
(v) $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$*, za neki skup identiteta* $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega$.

D o k a z . (i)⇒(ii). Ova implikacija je očigledna.

(ii)⇒(i). Neka je $A \in \boldsymbol{K}$ i neka je B podalgebra od A. Takođe, neka je I prebrojiv skup i

$$C = \left\{ (a_i)_{i\in I} \in A^I \,\middle|\, (\exists b \in B)\, \{i \in I \,|\, a_i \neq b\} \text{ je konačan skup } \right\}.$$

Lako se proverava da je C poddirektan stepen od A, što znači da je $C \in \boldsymbol{K}$, prema pretpostavci (ii). Definišimo relaciju θ na C sa

$$(a, b) \in \theta \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \,|\, a_i \neq b_i\} \text{ je konačan skup},$$

gde su $a = (a_i)_{i\in I}$, $b = (b_i)_{i\in I} \in C$. Neposredno se proverava da je θ kongruencija na C. Dalje, za $b \in B$ neka je $p^b = (p_i^b)_{i\in I} \in C$ element definisan sa $p_i^b = b$, za svaki $i \in I$. Tada za sve $b, b' \in B$ takve da je $b \neq b'$ važi $(p^b, p^{b'}) \notin \theta$, i za svaki $p \in C$ postoji tačno jedan $b \in B$ takav da je $(p, p^b) \in \theta$. Prema tome, $C/\theta \cong B$, odakle sledi da je $B \in \boldsymbol{K}$, čime smo dokazali (i).

(ii)⇒(iii). Neka je A proizvoljna algebra. Primetimo najpre da iz zatvorenosti klase $\boldsymbol{K}$ za homomorfne slike sledi da $\boldsymbol{K}$ sadrži trivijalnu algebru, jer je ona homomorfna slika svake algebre, što znači da je skup $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ neprazan.

Dalje dokazujemo da iz zatvorenosti klase $\boldsymbol{K}$ za poddirektne proizvode sledi da je skup $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ zatvoren za preseke kongruencija. Zaista, neka je $\{\theta_i \,|\, i \in I\}$ proizvoljna familija elemenata iz $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$, i neka je

$$\theta = \bigcap_{i\in I} \theta_i.$$

Tada prema Teoremi 1.7.3 sledi da je A/θ poddirektan proizvod algebri A/θ_i, $i \in I$. Kako je $A/\theta_i \in \boldsymbol{K}$, za svaki $i \in I$, to prema pretpostavci dobijamo da je $A/\theta \in \boldsymbol{K}$, tj. $\theta \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$, što je i trebalo dokazati.

Dakle, skup $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ je zatvoren za proizvoljne preseke, odakle sledi da sadrži najmanji element. Prema tome, da bi smo dokazali da je $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ glavni filter od $\mathrm{Con}(A)$ (generisan svojim najmanjim elementom), dovoljno je dokazati da je $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ filter uređenog skupa $(\mathrm{Con}(A), \subseteq)$, što je neposredna posledica zatvorenosti klase $\boldsymbol{K}$ za homomorfne slike. Zaista, neka su $\theta, \vartheta \in \mathrm{Con}(A)$ kongruencije takve da je $\theta \subseteq \vartheta$ i $\theta \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$. Prema Drugoj teoremi o izomorfizmu, A/ϑ je homomorfna slika od A/θ, i $A/\theta \in \boldsymbol{K}$, odakle je $A/\vartheta \in \boldsymbol{K}$, tj. $\vartheta \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$, što potvrđuje da je $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ filter uređenog skupa $(\mathrm{Con}(A), \subseteq)$. Ovim je implikacija (ii)⇒(iii) dokazana.

(iii)⇒(iv). Ova implikacija je jasna.

(iv)$\Rightarrow$ (ii). Najpre dokazujemo da je klasa $\boldsymbol{K}$ zatvorena za poddirektne proizvode. U tom cilju, razmotrimo proizvoljnu familiju $\{A_i \,|\, i \in I\}$ algebri iz $\boldsymbol{K}$ i proizvoljan poddirektan proizvod A te familije. Neka je, pri tome, $\{\theta_i \,|\, i \in I\}$ familija kongruencija na A koja zadovoljava uslove Teoreme 1.7.1. Tada je $\theta_i \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$, za svaki $i \in I$, i

$$\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A. \tag{1.4}$$

Sa druge strane, prema pretpostavci imamo da $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ ima najmanji element, označimo ga sa μ, pa iz $\mu \subseteq \theta_i$, za svaki $i \in I$, i (1.4) sledi da je $\mu = \Delta_A$, odnosno $\Delta_A \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$. Međutim, to znači da je $A \in \boldsymbol{K}$, što je i trebalo dokazati. Dakle, klasa $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za poddirektne proizvode.

Da bi smo dokazali da je klasa $\boldsymbol{K}$ zatvorena za homomorfne slike, razmotrimo proizvoljnu algebru $A \in \boldsymbol{K}$ i algebru B takvu da postoji homomorfizam φ iz A na B. Za $i = 1, 2$, neka je $A_i = A$, $\varphi_i = \varphi$, π_i je projekcioni homomorfizam iz $A_1 \times A_2$ na A_i, $P = \{p \in A_1 \times A_2 \,|\, p\pi_1\varphi_1 = p\pi_2\varphi_2\}$, π_i' je restrikcija od π_i na P, $\theta_i = \ker \pi_i$ i $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$ u $\mathrm{Con}(P)$. Kako je $P/\theta_i \cong A_i$, to je $\theta_i \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(P)$, za $i = 1, 2$, i konačno $\theta \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(P)$, jer je $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(P)$ podmreža od $\mathrm{Con}(P)$.

Sa druge strane, postoji homomorfizam ψ iz P na B takav da je $\psi = \pi_1'\varphi_1 = \pi_2'\varphi_2$. Jasno, $\theta_i \subseteq \ker \psi$, za $i = 1, 2$, pa je $\theta \subseteq \ker \psi$. Obratno, ako je $(p, q) \in \ker \psi$ i $r = (p\pi_1', q\pi_2')$, tada je $r \in P$, $(p, r) \in \theta_1$ i $(r, q) \in \theta_2$, odakle je $(p, q) \in \theta_1\theta_2 \subseteq \theta$. Prema tome, $\ker \psi = \theta$, pa je $P/\theta \cong B$, pa iz činjenice da je $\theta \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(P)$ dobijamo da je $B \in \boldsymbol{K}$, što je i trebalo dokazati. Ovim je implikacija (iv)$\Rightarrow$(ii) dokazana.

(i)$\Rightarrow$(v). Razmotrimo term algebru $T = T_\omega$ nad prebrojivim skupom promenljivih i skup $\mathrm{Id}_\omega(A)$ svih identiteta u T_ω zadovoljenih u A. Drugim rečima,

$$\mathrm{Id}_\omega(A) = \bigcap \{\ker \varphi \,|\, \varphi \text{ je homomorfizam iz } T \text{ u } A\}, \tag{1.5}$$

pa dakle, $\mathrm{Id}_\omega(A)$ je kongruencija na T. Sa druge strane, neka je

$$\Sigma = \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{K}) = \bigcap \{\mathrm{Id}_\omega(A) \,|\, A \in \boldsymbol{K}\}. \tag{1.6}$$

Jasno, Σ je takođe kongruencija na T. Za proizvoljnu algebru $A \in \boldsymbol{K}$ i homomorfizam φ iz T na A imamo da je faktor-algebra $T/\ker\varphi$ izomorfna podalgebri od A, odakle je $T/\ker\varphi \in \boldsymbol{K}$, odnosno $\ker\varphi \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(T)$. Sada na osnovu (1.5) i (iv) dobijamo da je $\mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(T)$, za svaki $A \in \boldsymbol{K}$, pa iz (1.6) i (iv) sledi da je $\Sigma \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(T)$.

Sada ćemo dokazati da je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$. Prema (1.6) i (1.5) sledi da je $\boldsymbol{K} \subseteq [\Sigma]$. Obratno, neka je $A \in [\Sigma]$ proizvoljna algebra. Neka je B njena proizvoljna konačno generisana podalgebra. Kako je term algebra T generisana prebrojivim skupom X, a algebra B je generisana nekim konačnim skupom B', to postoji preslikavanje iz X na B' koje se može proširiti do homomorfizma φ iz T na B, prema Teoremi 1.3.4. Tada je φ i homomorfizam iz T u A, pa je

$$\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega(A) \subseteq \ker \varphi,$$

pa iz $\Sigma \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(T)$ i uslova (iii), za koji smo već dokazali da je ekvivalentan sa (i), sledi da je $\ker \varphi \in \mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(T)$, odakle je $B \in \boldsymbol{K}$. Prema tome, svaka konačno generisana podalgebra od A pripada klasi $\boldsymbol{K}$. Kako se svaka algebra može predstaviti kao direktan limit svojih konačno generisanih podalgebri, to na osnovu Teoreme 1.7.5 i zatvorenosti klase $\boldsymbol{K}$ za direktne proizvode, podalgebre i homomorfne slike dobijamo da je $A \in \boldsymbol{K}$. Time smo dokazali da je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$.

(v)$\Rightarrow$(i). Neposrednom proverom dobijamo da je klasa $\boldsymbol{K}$ zatvorena za podalgebre i direktne proizvode. Da bi smo dokazali da je zatvorena i za homomorfne slike, razmotrimo proizvoljnu algebru $A \in \boldsymbol{K}$ i homomorfizam ϕ iz A na neku algebru B. Neka je $T = T(X)$ term algebra nad X, gde je X prebrojiv skup, i ψ je proizvoljan homomorfizam iz T u B. Za svaki $x \in X$ izaberimo proizvoljan element iz $(x\psi)\phi^{-1}$, i označimo ga sa $x\bar{\varphi}$. Tada je $\bar{\varphi}$ preslikavanje iz X na A, i može se proširiti do homomorfizma φ iz T na A. Kako je $x\varphi\phi = x\psi$, za svaki $x \in X$, to je $\varphi\phi = \psi$. Sada, za proizvoljan identitet $u = v$ iz Σ imamo da je

$$u\psi = u\varphi\phi = v\varphi\phi = v\psi,$$

jer $A \models \Sigma$, pa dakle $B \models \Sigma$. Time smo dokazali implikaciju (v)$\Rightarrow$(i). $\square$

Lako se proverava da presek proizvoljne familije varijeteta jeste takođe varijetet, odakle neposredno zaključujemo da za proizvoljnu klasu $\boldsymbol{K}$ algebri postoji najmanji varijetet, označen sa $V(\boldsymbol{K})$, koji sadrži $\boldsymbol{K}$. Naime, to je presek svih varijeteta koji sadrže $\boldsymbol{K}$, i nazivamo ga *varijetetom generisanim klasom* $\boldsymbol{K}$. Karakterizaciju takvog varijeteta daje nam sledeća teorema:

Teorema 1.8.3. *Neka je* $\boldsymbol{K}$ *proizvoljna klasa algebri. Tada je*

$$V(\boldsymbol{K}) = HSP(\boldsymbol{K}) = HP_s(\boldsymbol{K}).$$

D o k a z . Kako je $P_s(\boldsymbol{K}) \subseteq SP(\boldsymbol{K})$, to imamo da je $HP_s(\boldsymbol{K}) \subseteq HSP(\boldsymbol{K})$. Dalje, iz $\boldsymbol{K} \subseteq V(\boldsymbol{K})$ sledi $HSP(\boldsymbol{K}) \subseteq HSP(V(\boldsymbol{K}))$, a na osnovu Teoreme 1.8.2, $HSP(V(\boldsymbol{K})) = V(\boldsymbol{K})$. Prema tome, važi

$$HP_s(\boldsymbol{K}) \subseteq HSP(\boldsymbol{K}) \subseteq V(\boldsymbol{K}).$$

Preostaje jošamo da se dokaže da je $V(\boldsymbol{K}) \subseteq HP_s(\boldsymbol{K})$, za šta je dovoljno dokazati da je $HP_s(\boldsymbol{K})$ varijetet.

Iz činjenice da kompozicija dva epimorfizma takođe jeste epimorfizam neposredno sledi da je klasa $HP_s(\boldsymbol{K})$ zatvorena za homomorfne slike. Pre no što dokažemo da je ta klasa zatvorena i za poddirektne proizvode, stavimo da je $P_s(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}'$ i dokažimo da je $P_sH(\boldsymbol{K}') \subseteq HP_s(\boldsymbol{K}')$. Neka je $B \in P_sH(\boldsymbol{K}')$, tj. neka je $B \subseteq \prod_{i\in I} B_i$ poddirektan proizvod algebri B_i, $i \in I$, pri čemu za svaki $i \in I$, B_i jeste homomorfna slika algebre $A_i \in \boldsymbol{K}'$ u odnosu na homomorfizam ϕ_i iz A_i na B_i. Definišimo preslikavanje

$$\phi : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$$

na sledeći način: za $a = (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ neka je $a\phi = (a_i\phi_i)_{i\in I}$. Neposrednom proverom ustanovljuje se da je ϕ homomorfizam i da je sirjektivan. Neka je $A = B\phi^{-1}$. Uočimo proizvoljan $i \in I$ i $a_i \in A_i$. Neka je $a_i\phi_i = b_i \in B_i$. Kako je B poddirektan proizvod algebri B_i, $i \in I$, to postoji $b \in B$ tako da je $b\pi_i = b_i$. Neka je sada $a \in \prod_{i\in I} A_i$ element određen sa: $a\pi_i = a_i$, a za $j \in I$, $j \neq i$, neka je $a\pi_j$ proizvoljan element iz $(b\pi_j)\phi_j^{-1}$. Tada je $(a\pi_j)\phi_j = b\pi_j$, za svaki $j \in I$, što znači da je $a\phi = b$, pa je $a \in B\phi^{-1} = A$, pri čemu je $a\pi_i = a_i$. Dakle, A je poddirektan proizvod algebri $A_i \in \boldsymbol{K}'$, $i \in I$, i B je homomorfna slika od A, pa je $B \in HP_s(\boldsymbol{K}')$.

Dakle, $P_sHP_s(\boldsymbol{K}) \subseteq HP_sP_s(\boldsymbol{K}) \subseteq HP_s(\boldsymbol{K})$, na osnovu tranzitivnosti poddirektnih proizvoda (Posledica 1.7.2). Prema tome, klasa $HP_s(\boldsymbol{K})$ je zatvorena i za poddirektne proizvode, što znači i da je varijetet koji sadrži $\boldsymbol{K}$, pa je $V(\boldsymbol{K}) \subseteq HP_s(\boldsymbol{K})$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Literatura: Birkhoff [1935], Bogdanović and Ćirić [1997], Burris and Sankappanavar [1981], Ćirić and Bogdanović [1996a], Grätzer [1968], Kimura [1958b], Kočinac and Mandak [1996], Kogalovskiĭ [1965], Kurosh [1973], Maljcev [1970], Mijajlović [1993], Schein [1965], Tarski [1946], Taylor [1979].

1.9. Uopšteni varijeteti i pseudovarijeteti

Nake je $T = T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom promenljivih X i neka je $\Sigma \subseteq T \times T$ skup identiteta u T. Ako se skup Σ može zapisati u obliku $\Sigma = \{u_i = v_i\}_{i\in I}$, gde je I usmeren kvazi-uređen skup, tada kažemo da je Σ *usmeren skup identiteta*, a za algebru A tipa τ kažemo da *ultimativno zadovoljava* Σ, ako postoji $k \in I$ tako da $A \models u_i = v_i$, za svaki $i \succcurlyeq k$, i pišemo $A \models_u \Sigma$. Klasu svih algebri tipa τ koje ultimativno zadovoljavaju usmeren skup identiteta Σ označavamo sa $[\Sigma]_u$ ili sa $[u_i = v_i \,|\, i \in I]_u$, i za $\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$ kažemo da je klasa *ultimativno definisana* usmerenim skupom identiteta Σ.

U slučaju kada je $I = \mathbb{N}$, sa uobičajenim uređenjem prirodnih brojeva, tj. $\Sigma = \{u_n = v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je niz identiteta, tada pišemo $[u_n = v_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$ ili prosto $[u_n = v_n]_u$, i za $\boldsymbol{K} = [u_n = v_n]_u$ kažemo da je klasa *ultimativno definisana* nizom identiteta $\{u_n = v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Familiju skupova nazivaćemo *usmerenom familijom skupova* ako u odnosu na inkluziju skupova ona čini usmeren uređen skup, a uniju takve familije nazivaćemo *usmerenom unijom*.

Klasu algebri $\boldsymbol{K}$ nazivaćemo *uopštenim varijetetom* ako zadovoljava bilo koji od četiri ekvivalentna uslova naredne teoreme.

Teorema 1.9.1. *Sledeći uslovi za klasu algebri $\boldsymbol{K}$ su ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{K}$ je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre, konačne direktne proizvode i direktne stepene;*

(ii) *$\boldsymbol{K}$ je usmerena unija varijeteta;*

(iii) *$\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$ za neki usmereni skup identiteta $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega$;*

(iv) *postoji filter $\mathcal{F}$ Booleove algebre $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega)$ takav da za svaku algebru A važi*
$$A \in \boldsymbol{K} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathcal{F}.$$

Dokaz. (i)⇒(ii). Ako je $\boldsymbol{K}_0$ proizvoljna konačna podklasa od $\boldsymbol{K}$, tada je
$$V(\boldsymbol{K}_0) = HSP(\boldsymbol{K}_0) = HSP_fPow(\boldsymbol{K}_0) \subseteq HSP_fPow(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K},$$
i kako za proizvoljne klase $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ važi $V(\boldsymbol{K}_1), V(\boldsymbol{K}_2) \subseteq V(\boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2)$, to imamo da
$$\{V(\boldsymbol{K}_0) \mid \boldsymbol{K}_0 \text{ je konačna podklasa od } \boldsymbol{K}\}$$
jeste usmerena familija varijeteta i $\boldsymbol{K}$ je unija te familije.

(ii)$\Rightarrow$(i). Ova implikacija se dokazuje neposrednom proverom.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je $\boldsymbol{K}$ unija usmerene familije varijeteta $\{\boldsymbol{V}_\alpha\}_{\alpha\in Y}$. Za svaki $\alpha \in Y$ neka je $\Sigma_\alpha = \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha)$. Možemo pisati $\Sigma_\alpha = \{u_i = v_i\}_{i\in I_\alpha}$, pri čemu je $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$, za $\alpha \neq \beta$. Neka je $I = \bigcup_{\alpha\in Y} I_\alpha$ i neka je $\preccurlyeq$ relacija na I definisana za $i, j \in I$ sa

$$i \preccurlyeq j \ \Leftrightarrow \ i \in I_\alpha,\ j \in I_\beta,\ \text{za neke } \alpha, \beta \in Y,\ \text{i } \boldsymbol{V}_\alpha \subseteq \boldsymbol{V}_\beta.$$

Tada je $\preccurlyeq$ kvazi-uređenje na I i $(I, \preccurlyeq)$ je usmeren kvazi-uređen skup. Uzmimo takođe da je $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in Y} \Sigma_\alpha = \{u_i = v_i\}_{i\in I}$. Dokazaćemo da je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$.

Neka je $A \in \boldsymbol{K}$, tj. $A \in \boldsymbol{V}_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i neka je $k \in I_\alpha$ proizvoljan element. Ako je $i \in I$ element takav da je $i \succcurlyeq k$, tada je $i \in I_\beta$, za neki $\beta \in Y$ takav da je $\boldsymbol{V}_\alpha \subseteq \boldsymbol{V}_\beta$, odakle dobijamo da je $A \in \boldsymbol{V}_\beta$ i $A \models u_i = v_i$, jer je $u_i = v_i \in \Sigma_\beta$. To znači da je $A \in [\Sigma]_u$.

Obratno, neka je $A \models_u \Sigma$, neka je $k \in I$ element takav da $A \models u_i = v_i$, za svaki $i \succcurlyeq k$, i neka je $\alpha \in Y$ tako da je $k \in I_\alpha$. Tada $A \models u_i = v_i$, za svaki $i \in I_\alpha$, tj. $A \models \Sigma_\alpha = \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha)$, pa je $A \in \boldsymbol{V}_\alpha \subseteq \boldsymbol{K}$, što je i trebalo dokazati.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Neka je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$, gde je $\Sigma = \{u_i = v_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Id}_\omega$ neki usmeren skup identiteta. Za svaki $k \in I$ neka je $\boldsymbol{V}_k = [u_i = v_i \,|\, i \succcurlyeq k]$. Razmotrimo $k, l \in I$ takve da je $k \preccurlyeq l$. Ako je $A \in \boldsymbol{V}_k$, tada $A \models u_i = v_i$, za svaki $i \succcurlyeq k$, pa $A \models u_i = v_i$, za svaki $i \succcurlyeq l$, što znači da je $A \in \boldsymbol{V}_l$. Prema tome, $k \preccurlyeq l$ povlači $\boldsymbol{V}_k \subseteq \boldsymbol{V}_l$, čime smo dokazali da je $\{\boldsymbol{V}_k\}_{k\in I}$ usmerena familija varijeteta takva da je $\boldsymbol{K} = \bigcup_{k\in I} \boldsymbol{V}_i$.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Neka je $\boldsymbol{K}$ unija usmerene familije varijeteta $\{\boldsymbol{V}_\alpha\}_{\alpha\in Y}$ i

$$\mathcal{F} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega) \ \Big|\ (\exists \alpha \in Y)\, \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha) \subseteq \Sigma\Big\}.$$

Jasno je da je $\mathcal{F}$ filter Booleove algebre $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega)$, a za proizvoljnu algebru A važi

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathcal{F} \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in Y)\ \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha) \subseteq \mathrm{Id}_\omega(A) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in Y)\ A \in \boldsymbol{V}_\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad A \in \boldsymbol{K}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

(iv)$\Rightarrow$(i). Ova implikacija je neposredna posledica relacija

$$\begin{gathered} \mathrm{Id}_\omega(H(A)) \supseteq \mathrm{Id}_\omega(A), \quad \mathrm{Id}_\omega(S(A)) \supseteq \mathrm{Id}_\omega(A), \quad \mathrm{Id}_\omega(Pow(A)) \supseteq \mathrm{Id}_\omega(A), \\ \mathrm{Id}_\omega(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{Id}_\omega(A_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Id}_\omega(A_n), \end{gathered}$$

koje važe za proizvoljne algebre $A, A_1, \ldots, A_n$ datog tipa. $\square$

Lako se proverava da je presek proizvoljne familije uopštenih varijeteta takođe uopšteni varijetet, odakle neposredno zaključujemo da za proizvoljnu klasu $\boldsymbol{K}$ algebri postoji najmanji uopšteni varijetet, označen sa $G(\boldsymbol{K})$, koji sadrži $\boldsymbol{K}$. Jasno, to je presek svih uopštenih varijeteta koji sadrže $\boldsymbol{K}$, i nazivamo ga *uopštenim varijetetom generisanim klasom* $\boldsymbol{K}$. Karakterizaciju uopštenog varijeteta generisanog klasom algebri daje nam sledeća teorema:

Teorema 1.9.2. *Neka je* $\boldsymbol{K}$ *proizvoljna klasa algebri. Tada je*

$$G(\boldsymbol{K}) = HSP_f Pow(\boldsymbol{K}).$$

D o k a z . Dokaz ove teoreme sličan je dokazu Teoreme 1.8.3. □

Klasu $\boldsymbol{K}$ konačnih algebri nazivaćemo *pseudovarijetetom* ako zadovoljava bilo koji od tri ekvivalentna uslova naredne teoreme.

Teorema 1.9.3. *Sledeći uslovi za klasu* $\boldsymbol{K}$ *konačnih algebri konačnog tipa su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i konačne direktne proizvode;*

(ii) $\boldsymbol{K}$ *se sastoji od svih konačnih algebri iz nekog uopštenog varijeteta;*

(iii) $\boldsymbol{K} = [u_n = v_n \mid n \in \mathbb{N}]_u$ *za neki niz identiteta* $\{u_n = v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Id}_\omega$.

D o k a z . (i)⇒(ii). Dokazaćemo da svaka konačna algebra iz uopštenog varijeteta $G(\boldsymbol{K}) = HSP_f Pow(\boldsymbol{K})$ pripada klasi $\boldsymbol{K}$. Neka je $A \in G(\boldsymbol{K})$ proizvoljna konačna algebra. Tada postoje algebre $A_1, \dots, A_n \in \boldsymbol{K}$, skupovi $I_1, \dots, I_n$, algebra $B \subseteq A_1^{I_1} \times \cdots \times A_n^{I_n}$ i sirjektivni homomorfizam $\phi : B \to A$. Za svaki $a \in A$, označimo sa b_a proizvoljan element iz B za koji je $b_a\phi = a$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da skup $\{b_a \mid a \in A\}$ generiše B, jer u suprotnom možemo da umesto B razmatramo podalgebru generisanu tim skupom, imajući u vidu da je A homomorfna slika i te algebre. Za $a \in A$, element b_a možemo zapisati u obliku

$$b_a = (b_{1,a}, \dots, b_{n,a}), \quad \text{gde je } b_{k,a} = \left(b_{k,a}^{(i)}\right)_{i\in I_k}, \text{ za svaki } k \in [1, n].$$

Za svaki $k \in [1, n]$, definišimo sada relaciju θ_k na I_k sa

$$(i, j) \in \theta_k \;\Leftrightarrow\; (\forall a \in A)\; b_{k,a}^{(i)} = b_{k,a}^{(j)}.$$

Jasno je da je θ_k relacija ekvivalencije na I_k, a kako je $b_{k,a}^{(i)} \in A_k$, za svaki $i \in I_k$, i A_k je konačna algebra, to postoji konačno mnogo θ_k-klasa, tj. faktor-skup $J_k = I_k/\theta_k$ je konačan. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je skup J_k dobijen izdvajanjem tačno po jednog elementa iz svake θ_k-klase. Za proizvoljan $k \in [1,n]$ neka je $\varphi_k : A_k^{I_k} \to A_k^{J_k}$ preslikavanje definisano sa

$$\left(\left(b_{k,a}^{(i)}\right)_{i\in I_k}\right)\varphi_k = \left(b_{k,a}^{(i)}\right)_{i\in J_k}.$$

Tada je jasno da je φ_k sirjektivni homomorfizam, odakle sledi da i preslikavanje $\varphi : A_1^{I_1} \times \cdots \times A_n^{I_n} \to A_1^{J_1} \times \cdots \times A_n^{J_n}$ definisano sa

$$(b_1,\dots,b_n)\varphi = (b_1\varphi_1,\dots,b_n\varphi_n)$$

takođe jeste sirjektivni homomorfizam. Imajući u vidu definicije preslikavanja φ, φ_k i relacije θ_k, kao i činjenicu da je algebra B generisana skupom $\{b_a \mid a \in A\}$, rutinskom proverom utvrđujemo da je restrikcija homomorfizma φ na B injektivna, što znači da algebra $A_1^{J_1} \times \cdots \times A_n^{J_n}$ sadrži podalgebru B' izmomorfnu sa B, pa je, dakle, A homomorfna slika i od B'. Kako je $A_1^{J_1} \times \cdots \times A_n^{J_n}$ konačan direktan proizvod algebri iz $\boldsymbol{K}$, to prema pretpostavci (i) dobijamo da je $A \in \boldsymbol{K}$, što je i trebalo dokazati.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{Fin}$, gde je $\boldsymbol{G}$ neki uopšteni varijetet a $\boldsymbol{Fin}$ je klasa svih konačnih algebri datog tipa. Kako međusobno neizomorfnih konačnih algebri konačnog tipa ima prebrojivo mnogo, to možemo pisati

$$\boldsymbol{K} = I(\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{Fin} = I(\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}).$$

Uočimo proizvoljne $i,j \in \mathbb{N}$. Kako je $V(\{A_1,\dots,A_n\}) \subseteq \boldsymbol{K}$ i $B_j \notin \boldsymbol{K}$, to $B_j \notin V(\{A_1,\dots,A_n\})$, pa možemo izabrati proizvoljan identitet

$$\varepsilon_{ij} \in \mathrm{Id}_\omega(V(\{A_1,\dots,A_n\})) \setminus \mathrm{Id}_\omega(B_j).$$

Skup $\{\varepsilon_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N},\ i > j\}$ je prebrojiv, pa se može svrstati u niz. Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljno svrstavanje tog skupa u niz. Dokazaćemo da važi $\boldsymbol{K} = [e_n \mid n \in \mathbb{N}]_u$.

Neka je $A \in \boldsymbol{K}$. Tada je $A \cong A_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, pa $A \models \varepsilon_{ij}$ za svaki $i \geq k$ i svaki $j < i$, što znači da A zadovoljava sve sem možda konačno mnogo identiteta iz niza $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, odnosno da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $A \models e_m$, za svaki $m \geq n$. Prema tome, $A \in [e_n \mid n \in \mathbb{N}]_u$, čime smo dokazali da je $\boldsymbol{K} \subseteq [e_n \mid n \in \mathbb{N}]_u$. Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da nijedna algebra iz $\boldsymbol{Fin} \setminus \boldsymbol{K}$ ne pripada klasi $[e_n \mid n \in \mathbb{N}]_u$. Zaista, ako je $A \in \boldsymbol{Fin} \setminus \boldsymbol{K}$, tada je $A \cong B_j$, za neki $j \in \mathbb{N}$, pa za svaki $i > j$, A ne zadovoljava identitet ε_{ij}, prema načinu kako je taj identitet izabran. Dakle, A ne zadovoljava beskonačno mnogo identiteta iz niza $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, što znači da $A \notin [e_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$. Prema tome, dokazali smo da je $\boldsymbol{K} = [e_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$.

(iii)⇒(i). Ovo sledi neposredno iz Teoreme 1.9.1. □

Može se lako proveriti da presek proizvoljne familije pseudovarijeteta jeste takođe pseudovarijetet, što znači da za proizvoljnu klasu $\boldsymbol{K}$ konačnih algebri postoji najmanji pseudovarijetet koji sadrži $\boldsymbol{K}$. Naravno, to je presek svih pseudovarijeteta koji sadrže $\boldsymbol{K}$. Taj pseudovarijetet označavamo sa $Pv(\boldsymbol{K})$, i nazivamo ga *pseudovarijetetom generisanim klasom* $\boldsymbol{K}$. Njegovu karakterizaciju daje nam sledeća teorema:

Teorema 1.9.4. *Neka je $\boldsymbol{K}$ proizvoljna klasa konačnih algebri. Tada je*

$$Pv(\boldsymbol{K}) = G(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Fin} = HSP_f(\boldsymbol{K}).$$

Dokaz. Sledi neposredno iz dokaza Teoreme 1.9.3. □

Literatura: Agliano and Nation [1989], Almeida [1994, 1989, 1990], Baldwin and Berman [1976], Banaschewski [1983], Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Eilenberg [1973, 1974, 1976], Eilenberg and Schutzenberger [1976], Grätzer and Plonka [1970], Graczyńska [1991], Higgins [1990], Howie [1991], Pin [1984], Reiterman [1982], Thérien [1980, 1981].

1.10. Regularnost varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta

Kao što će se pokazati i u kasnijim delovima ove knjige, veoma važna osobina identiteta je njegova regularnost, odnosno neregularnost. Zato u ovom odeljku prikazujemo glavna opšta svojstva regularnih i neregularnih identiteta, varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta.

Najpre moramo da uvedemo neke nove pojmove. Podsetimo se da smo u Odeljku 1.4. polumrežu definisali kao komutativnu traku, tj. komutativnu idempotentnu polugrupu. Koristeći ovaj pojam, uvešćemo i njemu odgovarajući pojam u slučaju algebri proizvoljnog tipa τ. Definicija koju ćemo dati zavisi od toga da li u τ ima ili nema znaka konstanti, tj. da li je $\tau_0 = \varnothing$ ili je $\tau_0 \neq \varnothing$, pa u zavisnosti od toga dajemo dve definicije.

(1) Neka je $\tau_0 = \varnothing$ i neka je S proizvoljna polumreža. Definišimo operacije tipa τ na S na sledeći način:

(1.1) ako je $f \in \tau_n$, za $n \geq 2$, i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$, tada uzimamo da je

$$f^S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

gde je na desnoj strani ove jednakosti proizvod u polumreži S;

(1.2) ako je $f \in \tau_1$ i $a \in S$, tada uzimamo da je $f^S(a) = a$.

Tada S sa ovako definisanim operacijama predstavlja algebru tipa τ koju nazivamo *τ-polumrežom.*

(2) Neka je $\tau_0 \neq \varnothing$ i neka je S proizvoljna polumreža sa jedinicom 1. Definišimo operacije tipa τ na S na sledeći način:

(2.1) ako je $f \in \tau_n$, za $n \geq 2$, tada operaciju f^S definišemo kao u (1.1);

(2.2) ako je $f \in \tau_1$, tada operaciju f^S definišemo kao u (1.2);

(2.3) ako je $f \in \tau_0$, tada uzimamo da je $f^S = 1$.

Sa ovako definisanim operacijama S predstavlja algebru tipa τ koju takođe nazivamo *τ-polumrežom.*

U svakom od ovih slučajeva, klasu svih τ-polumreža označavamo sa $\mathbf{S}_\tau$.

Primetimo da u gornjim definicijama postoji izvesno odudaranje u definiciji operacija $f \in \tau_n$, za $n \geq 2$, u odnosu na definiciju unarnih operacija, kod kojih se činjenica da je S polumreža uopšte ne koristi, a ne koristi se suštinski ni kod definisanja nularnih operacija. Kod unarnih algebri, tj. kod algebri kod kojih je $\tau = \tau_1$, pri definiciji τ-polumreža nije potrebno krenuti od polumreže, već S može biti bilo koji skup. O takvim algebrama biće reči u Glavi 4.

Jednostavno se proverava da je svaka dvoelementna polumreža izomorfna polumreži $S = \{0, 1\}$ u kojoj je $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ i $1 \cdot 1 = 1$ (tj. 0 je nula a 1 je jedinica u S). Zbog toga, kada budemo govorili *dvoelementna polumreža*, mislićemo upravo na ovu polumrežu. Odgovarajuću dvoelementnu τ-polumrežu označavaćemo sa $\mathbf{2}_\tau$.

Vratimo se sada na pitanje regularnosti identiteta. Za identitet $u = v$ kažemo da je *regularan* ako je skup svih promenljivih koje se javljaju u termu u jednak skupu svih promenljivih koje se javljaju u termu v. U suprotnom kažemo da je taj identitet *neregularan*.

Sa Id_ω^R i Id_ω^N označavaćemo redom skup svih regularnih i skup svih neregularnih identiteta iz Id_ω, a za klasu $\boldsymbol{K}$ algebri, odnosno za algebru A, sa $\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})$ i $\mathrm{Id}_\omega^N(\boldsymbol{K})$, odnosno $\mathrm{Id}_\omega^R(A)$ i $\mathrm{Id}_\omega^N(A)$, označavamo redom skup svih regularnih i skup svih neregularnih identiteta zadovoljenih na $\boldsymbol{K}$, odnosno na A. Takođe, ako je Σ neki skup identiteta, tada će skupovi svih regularnih i svih neregularnih identiteta iz Σ biti označeni sa Σ_R i Σ_N, tim redom. Za svaki podskup od Σ_R kažemo da je *regularan podskup* od Σ, a za svaki podskup od Σ_N da je *neregularan podskup* od Σ.

Sledećom teoremom pokazujemo da su regularni identiteti upravo oni zadovoljeni na τ-polumrežama.

Teorema 1.10.1. *Neka je $u = v$ identitet tipa τ nad skupom promenljivih X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$u = v$ je regularan identitet;*

(ii) *$u = v$ je zadovoljen na svakoj τ-polumreži;*

(iii) *$u = v$ je zadovoljen na $\mathbf{2}_\tau$.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je $u = v$ regularan varijetet i $\{x_1, \dots, x_n\}$ je skup svih promenljivih koje se javljaju u termima u i v. Razmotrimo proizvoljnu τ-polumrežu S i elemente $a_1, \dots, a_n \in S$. Tada je

$$u^S(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdots a_n = v^S(a_1, \dots, a_n),$$

što znači da S zadovoljava $u = v$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ova implikacija je trivijalna.

(iii)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da $u = v$ nije regularan identitet, tj. da postoji slovo $x' \in X$ koje se javlja u jednom od terma u i v, a ne javlja u drugom. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da se x' javlja u u a ne javlja u v. Neka je sada $\varphi : X \to \mathbf{2}_\tau$ preslikavanje definisano sa

$$x\varphi = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x = x' \\ 1 & \text{ako je } x \neq x'. \end{cases}$$

Prema Teoremi 1.3.4, φ se može proširiti do homomorphizma $\widehat{\varphi} : T(X) \to \mathbf{2}_\tau$, i tada važi $u\widehat{\varphi} = 0$ i $v\widehat{\varphi} = 1$, što daje $u\widehat{\varphi} \neq v\widehat{\varphi}$. Međutim, to prema Teoremi 1.8.1 znači da identitet $u = v$ nije zadovoljen na $\mathbf{2}_\tau$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom (iii). Prema tome, zaključujemo da $u = v$ mora biti regularan identitet. $\square$

Za varijetet $\boldsymbol{V}$ kažemo da je *regularan varijetet* ako se može definisati nekim skupom regularnih identiteta, dok u suprotnom kažemo da je $\boldsymbol{V}$ *neregularan varijetet*. Karakterizaciju regularnih varijeteta daje sledeća teorema:

Teorema 1.10.2. *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *varijetet algebri tipa* τ. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{V}$ *je regularan varijetet;*

(ii) *svaki identitet zadovoljen na* $\boldsymbol{V}$ *je regularan;*

(iii) $\mathbf{S}_\tau \subseteq \boldsymbol{V}$*;*

(iv) $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{V}$.

Dokaz. (i)⇒(iii). Ako je $\boldsymbol{V}$ regularan varijetet, tj. $\boldsymbol{V} = [\Sigma]$, za neki skup Σ regularnih identiteta, i ako je S proizvoljna τ-polumreža, tada prema Teoremi 1.10.1 imamo da $S \models \Sigma$, odakle sledi da je $\mathbf{S}_\tau \subseteq \boldsymbol{V}$.

(iii)⇒(iv). Ova implikacija je evidentna.

(iv)⇒(ii). Ako je $u = v$ identitet zadovoljen na $\boldsymbol{V}$, tada je zadovoljen i na $\mathbf{2}_\tau$, prema pretpostavci (iv), pa dalje prema Teoremi 1.10.1 sledi da je $u = v$ regularan identitet.

(ii)⇒(i). Ova implikacija je trivijalna. □

Naredne dve posledice dobijaju se neposredno iz prethodne teoreme. U drugoj posledici, a i nadalje u knjizi, sa $\mathbf{O}$ označavamo *varijetet trivijalnih* (*jednoelementnih*) *algebri* datog tipa. Jasno, to je najmanji varijetet algebri tog tipa.

Posledica 1.10.1. *Za proizvoljan tip algebri* τ, $\mathbf{S}_\tau$ *je najmanji regularan varijetet algebri tipa* τ.

Posledica 1.10.2. *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *varijetet algebri tipa* τ. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{V}$ *je neregularan varijetet;*

(ii) *neki neregularan identitet je zadovoljen na* $\boldsymbol{V}$*;*

(iii) $\mathbf{S}_\tau \cap \boldsymbol{V} = \mathbf{O}$*;*

(iv) $\mathbf{S}_\tau \nsubseteq \boldsymbol{V}$*;*

(v) $\mathbf{2}_\tau \notin \boldsymbol{V}$.

Iz Teoreme 1.10.2 neposredno sledi da presek proizvoljne familije regularnih varijeteta takođe jeste regularan varijetet, što znači da za svaku klasu $\boldsymbol{K}$, presek svih regularnih varijeteta koji sadrže tu klasu jeste najmanji regularan varijetet koji sadrži $\boldsymbol{K}$. Taj varijetet označavaćemo sa $R(\boldsymbol{K})$

i nazivaćemo ga *regularnim varijetetom generisanim klasom* $\boldsymbol{K}$. U slučaju varijeteta $\boldsymbol{V}$, $R(\boldsymbol{V})$ nazivaćemo *regularizacijom varijeteta* $\boldsymbol{V}$.

Sledeća teorema daje jednu karakterizaciju regularnog varijeteta generisanog klasom algebri:

Teorema 1.10.3. *Ako je* $\boldsymbol{K}$ *proizvoljna klasa algebri, tada je*

$$R(\boldsymbol{K}) = [\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})].$$

Dokaz. Jasno je da je $[\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})]$ regularan varijetet koji sadrži $\boldsymbol{K}$, pa je $R(\boldsymbol{K}) \subseteq [\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})]$. Sa druge strane, $R(\boldsymbol{K}) = [\Sigma]$, gde je $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega$ neki skup regularnih identiteta. Kako je $\boldsymbol{K} \subseteq [\Sigma]$, to je $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})$, odakle je $[\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})] \subseteq [\Sigma] = R(\boldsymbol{K})$. Dakle, dokazali smo da je $[\mathrm{Id}_\omega^R(\boldsymbol{K})] = R(\boldsymbol{K})$. $\square$

Uopšteni varijetet $\boldsymbol{G}$ nazivamo *regularnim uopštenim varijetetom* ako je ultimativno definisan nekim usmerenim skupom regularnih identiteta, dok ga u suprotnom nazivamo *neregularnim uopštenim varijetetom*. Slično, pseudovarijetet $\boldsymbol{P}$ nazivamo *regularnim pseudovarijetetom* ako je ultimativno definisan nekim nizom regularnih identiteta, a u suprotnom ga nazivamo *neregularnim pseudovarijetetom*.

Pre nego što damo teoreme kojima se karakterišu regularni uopšteni varijeteti i pseudovarijeteti, navodimo jedan pomoćni rezultat:

Lema 1.10.1. *Neka je* $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$ *usmeren skup identiteta i neka je* F *proizvoljan filter kvazi-uređenog skupa* I. *Tada je* $\{u_j = v_j \mid j \in F\}$ *takođe usmeren skup identiteta i*

$$[u_i = v_i \mid i \in I]_u = [u_j = v_j \mid j \in F].$$

Dokaz. Dokaz ove leme je jednostavan i ostavlja se čitaocu za vežbu. $\square$

Ako je $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$ usmeren skup identiteta i F je filter od I, tada ćemo i za skup $\{u_j = v_j \mid j \in F\}$ govoriti da je *filter usmerenog skupa identiteta* $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$. Takođe, ako je J podskup usmerenog kvazi-uređenog skupa I, tada kažemo da je J *kofinalan podskup* od I ako za svaki $i \in I$ postoji $j \in J$ tako da je $i \preccurlyeq j$, što znači da J ima neprazan presek sa svakim filtrom od I. Ako je $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$ usmeren skup identiteta i J je kofinalan podskup od I, tada za skup identiteta $\{u_i = v_i \mid i \in J\}$ kažemo da je *kofinalan podskup* skupa $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$.

Teorema 1.10.4. *Neka je $\boldsymbol{G}$ uopšteni varijetet algebri tipa τ. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{G}$ je regularan uopšteni varijetet;*
(ii) *$\boldsymbol{G}$ je usmerena unija regularnih varijeteta;*
(iii) *$\boldsymbol{G}$ sadrži regularan varijetet;*
(iv) *$\mathbf{S}_\tau \subseteq \boldsymbol{G}$;*
(v) *$\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{G}$;*
(vi) *svaki usmeren skup identiteta koji ultimativno definiše $\boldsymbol{G}$ sadrži regularan filter;*
(vii) *postoji filter Booleove algebre $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega^R)$ takav da za svaku algebru A važi*

$$A \in \boldsymbol{G} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathcal{F}.$$

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je $\boldsymbol{G}$ regularan uopšteni varijetet ultimativno definisan nekim regularnim usmerenim skupom identiteta $\{u_i = v_i \,|\, i \in I\}$. Tada prema dokazu Teoreme 1.9.1 imamo da je $\boldsymbol{G}$ unija usmerene familije varijeteta $\boldsymbol{V}_k = [u_i = v_i \,|\, i \succcurlyeq k]$, $k \in I$, pri čemu je jasno da su svi ovi varijeteti regularni.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ova implikacija je trivijalna.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Ako je $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{G}$, za neki regularan varijetet $\boldsymbol{V}$, tada prema Teoremi 1.10.2 sledi da je $\mathbf{S}_\tau \subseteq \boldsymbol{V}$, pa je $\mathbf{S}_\tau \subseteq \boldsymbol{G}$.

(iv)$\Rightarrow$(v). To je očigledno.

(v)$\Rightarrow$(vi). Neka je uopšteni varijetet $\boldsymbol{G}$ ultimativno definisan nekim usmerenim skupom identiteta $\{u_i = v_i \,|\, i \in I\}$. Tada iz $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{G}$ sledi da postoji $k \in I$ tako da $\mathbf{2}_\tau \models u_i = v_i$, za svaki $i \succcurlyeq k$, pa prema Teoremi 1.10.1 imamo da je $\{u_i = v_i \,|\, i \in F\}$ regularan filter od $\{u_i = v_i \,|\, i \in I\}$, gde je $F = \{i \in I \,|\, i \succcurlyeq k\}$ glavni filter od I generisan sa k.

(vi)$\Rightarrow$(i). Ova implikacija je neposredna posledica Leme 1.10.1.

(ii)$\Rightarrow$(vii). Neka je $\boldsymbol{G}$ usmerena unija regularnih varijeteta $\{\boldsymbol{V}_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ i

$$\mathcal{F} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega^R) \;\Big|\; (\exists \alpha \in Y)\, \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha) \subseteq \Sigma\Big\}.$$

Tada je $\mathcal{F}$ filter Booleove algebre $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega^R)$, i za proizvoljnu algebru A važi

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow (\exists \alpha \in Y)\ \mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{V}_\alpha) \subseteq \mathrm{Id}_\omega(A) \\ &\Leftrightarrow (\exists \alpha \in Y)\ A \in \boldsymbol{V}_\alpha \\ &\Leftrightarrow A \in \boldsymbol{G}. \end{aligned}$$

(vii)$\Rightarrow$(v). Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljan filter Booleove algebre $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega^R)$ koji ispunjava uslov (vii). Tada je $\mathrm{Id}_\omega(\mathbf{2}_\tau) = \mathrm{Id}_\omega^R \in \mathcal{F}$, pa je $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{G}$. $\square$

Neposredno iz prethodne teoreme dobijaju se sledeće karakterizacije neregularnih uopštenih varijeteta algebri.

Posledica 1.10.3. *Neka je $\boldsymbol{G}$ uopšteni varijetet algebri tipa τ. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{G}$ je neregularan uopšteni varijetet;*
(ii) *$\boldsymbol{G}$ je usmerena unija neregularnih varijeteta;*
(ii) *svaki varijetet sadržan u $\boldsymbol{G}$ je neregularan;*
(iv) *$\mathbf{S}_\tau \cap \boldsymbol{G} = \mathbf{O}$;*
(v) *$\mathbf{S}_\tau \nsubseteq \boldsymbol{G}$;*
(vi) *$\mathbf{2}_\tau \notin \boldsymbol{G}$;*
(vii) *svaki usmeren skup identiteta koji ultimativno definiše $\boldsymbol{G}$ sadrži neregularan kofinalan podskup.*

Ako je $\boldsymbol{K}$ proizvoljna klasa algebri, tada sa $\underline{\boldsymbol{K}}$ označavamo klasu svih konačnih algebri iz $\boldsymbol{K}$.

Teorema 1.10.5. *Neka je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet algebri konačnog tipa τ. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{P}$ je regularan pseudovarijetet;*
(ii) *$\underline{\mathbf{S}}_\tau \subseteq \boldsymbol{P}$;*
(iii) *$\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{P}$;*
(iv) *svaki niz identiteta koji ultimativno definiše $\boldsymbol{P}$ sadrži konačno mnogo neregularnih identiteta;*
(v) *$\boldsymbol{P}$ je skup svih konačnih algebri iz nekog regularnog uopštenog varijeteta.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). To je neposredna posledica Teoreme 1.10.1.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ova implikacija je očigledna.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Neka je $\boldsymbol{P} = [u_n = v_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$. Tada iz $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{P}$ sledi da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da $\mathbf{2}_\tau \models u_n = v_n$, za svaki $n \geq k$, što znači da je svaki identitet iz skupa $\{u_n = v_n \,|\, n \geq k\}$ regularan, odakle zaključujemo da u nizu $\{u_n = v_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ može postojati najviše konačno mnogo neregularnih identiteta.

(iv)$\Rightarrow$(i). Neka je $\boldsymbol{P} = [u_n = v_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$. Tada prema pretpostavci imamo da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je identitet $u_n = v_n$ regularan, za svaki $n \geq k$, pa prema Lemi 1.10.1 sledi da je $\boldsymbol{P} = [u_n = v_n \,|\, n \geq k]$.

(iii)⇒(v). Prema Teoremi 1.9.3, $\boldsymbol{P} = \underline{\boldsymbol{G}}$, za neki uopšteni varijetet $\boldsymbol{G}$, i iz $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{G}$, prema Teoremi 1.10.4 dobijamo da je $\boldsymbol{G}$ regularan uopšteni varijetet.

(v)⇒(iii). Kako je $\mathbf{2}_\tau$ konačna algebra koja pripada svakom regularnom uopštenom varijetetu, to iz pretpostavke (v) sledi da je $\mathbf{2}_\tau \in \boldsymbol{P}$. □

Posledica 1.10.4. *Neka je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet algebri konačnog tipa τ. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{P}$ je neregularan pseudovarijetet;*
(ii) $\underline{\mathbf{S}}_\tau \cap \boldsymbol{P} = \underline{\mathbf{O}}$*;*
(iii) $\underline{\mathbf{S}}_\tau \nsubseteq \boldsymbol{P}$*;*
(iv) $\mathbf{2}_\tau \notin \boldsymbol{P}$*;*
(v) *svaki niz identiteta koji ultimativno definiše $\boldsymbol{P}$ sadrži beskonačno mnogo neregularnih identiteta;*
(vi) *$\boldsymbol{P}$ je skup svih konačnih algebri iz nekog neregularnog uopštenog varijeteta.*

Literatura: Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Ćirić, Petković and S. Bogdanović [2000], Graczyńska [1983b, 1985, 1990, 1991, 1995], Grätzer and Płonka [1970], Jonsson and Nelson [1974], Płonka [1967, 1969, 1984], Płonka and A. Romanowska [1992], Romanowska and Smith [1991], Saliĭ[1969a, 1969b], Smirnov [1976].

1.11. Zadaci

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu X. Dokazati da je tada relacija $<$ na X definisana sa

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ i } x \neq y$$

antirefleksivna i tranzitivna. Obratno, ako je $<$ antirefleksivna i tranzitivna relacija na skupu X, tada je relacija $\leq$ na X definisana sa

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ili } x = y$$

parcijalno uređenje na skupu X. Dokazati.

2. Neka je ρ relacija na skupu A. Dokazati da važi:

(a) ako je ρ simetrična, tranzitivna i $A\rho \cup \rho A \neq \varnothing$, tada je ρ relacija ekvivalencije;
(b) ako je ρ simetrična i antisimetrična, tada je ρ tranzitivna.

3. Neka je ξ kvazi-uređenje na skupu X. Dokazati da:

(a) $\overline{\xi} = \xi \cap \xi^{-1}$ je relacija ekvivalencije na skupu X;
(b) za proizvoljne $\alpha, \beta \in X/\overline{\xi}$ važi

$$(\exists x \in \alpha)\,(\exists y \in \beta)\,(a,b) \in \xi \Leftrightarrow (\forall x \in \alpha)\,(\forall y \in \beta)\,(a,b) \in \xi;$$

(c) relacija $\leq$ definisana na $X/\overline{\xi}$ sa

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\exists x \in \alpha)\,(\exists y \in \beta)\,(a,b) \in \xi, \quad \text{za proizvoljne } \alpha, \beta \in X/\overline{\xi},$$

je uređenje na $X/\overline{\xi}$;
(d) za proizvoljne $x, y \in X$ važi

$$(x,y) \in \xi \Rightarrow y\xi \subseteq x\xi \text{ i } \xi x \subseteq \xi y;$$

(e) za proizvoljne $x, y \in X$ važi

$$(x,y) \in \overline{\xi} \Leftrightarrow x\xi = y\xi \Leftrightarrow \xi x = \xi y.$$

4. Neka je ρ binarna relacija na skupu X. Dokazati da je ρ ekvivalencija ako i samo ako je $\rho = \rho\rho^{-1} \cup \Delta_X$.

5. Neka su ρ i θ ekvivalencije na skupu X. Dokazati da je $\rho\theta$ relacija ekvivalencije ako i samo ako je $\rho\theta = \theta\rho$.

6. Preslikavanje $\phi : H \to K$ je *levo* (*desno*) *invertibilno* ako postoji preslikavanje $\psi : K \to H$ tako da je $\psi\phi = \iota_K$ ($\phi\psi = \iota_H$). Dokazati:

(a) preslikavanje je levo invertibilno ako i samo ako je sirjektivno;
(b) preslikavanje je desno invertibilno ako i samo ako je injektivno.

7. Dokazati da svako preslikavanje skupova može biti predstavljeno kao proizvod jednog sirjektivnog i jednog injektivnog preslikavanja.

8. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podskupovi skupa X. Neka je π familija podskupova Y_T skupa X oblika

$$Y_T = \bigcap_{i \in T} X_i \cap \bigcap_{i \notin T} X_i^c, \quad \text{za svaki } T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dokazati da je π razbijanje skupa X.

9. Neka su ρ i σ relacije ekvivalencije (kongruencije) na skupu (algebri) A. Dokazati da je $(\rho\sigma)^\infty$ najmanja relacija ekvivalencije (kongruencija) na A koja sadrži ρ i σ.

10. Neka su A, B i C algebre i $\phi : A \to B$ i $\psi : A \to C$ su homomorfizmi takvi da je ϕ sirjektivan i $\ker \phi \subseteq \ker \psi$. Tada postoji homomorfizam $\varphi : B \to C$ takav da je $\operatorname{ran} \varphi = \operatorname{ran} \psi$ i da dijagram na slici komutira. Dokazati.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[dl, "\varphi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

11. Neka je preslikavanje $\phi : A \to B$ homomorfizam algebre A u algebru B i θ je kongruencija na A takva da je $\theta \subseteq \ker \phi$. Dokazati da je preslikavanje $\psi : A/\theta \to B$ definisano sa

$$(a\theta)\psi = a\phi, \quad \text{za svaki } a\theta \in A/\theta,$$

homomorfizam.

12. Neka je ϕ endomorfizam i θ je kongruencija na algebri A. Tada je preslikavanje $\overline{\phi} : A/\theta \to (A\phi)/\theta$ definisano sa

$$(a\theta)\overline{\phi} = (a\phi)\theta, \quad \text{za svaki } a\theta \in A/\theta,$$

endomorfizam algebre A/θ ako i samo ako kongruencija θ zadovoljava uslov

$$(a_1, a_2) \in \theta \Rightarrow (a_1\phi, a_2\phi) \in \theta.$$

13. Dokazati da podpolugrupa monogene polugrupe ne mora biti monogena.

14. Neka je $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$. Dokazati da je

(a) S polugrupa u odnosu na uobičajeno množenje matrica,
(b) S ima beskonačno mnogo desnih jedinica i nema levu jedinicu,
(c) S ima nulu i svaki element iz S je delitelj nule,
(d) $E(S)$ je levo nulta traka.

15. Neka je $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i operacija $\cdot$ na S je definisana sa

$$a \cdot b = \max\{a, b\}.$$

Dokazati sledeće:

(a) S je polumreža,
(b) S ima jedinicu i nulu,
(c) skup $T_1 = \{1, 2, 3\}$ je podmonoid monoida S, a skup $T_2 = \{2, 3, 4\}$ je podpolugrupa monoida S i T_2 je monoid, ali nije podmonoid monoida S.

16. *Desna translacija* polugrupe S je preslikavanje ϕ takvo da je $(ab)\phi = a(b\phi)$, za sve $a, b \in S$.

(a) Dokazati da je skup $\mathrm{P}(S)$ svih desnih translacija polugrupe S podmonoid monoida $\mathcal{T}_r(S)$ svih preslikavanja polugrupe S.
(b) Dokazati da je S desno nulta traka ako i samo ako je $\mathrm{P}(S) = \mathcal{T}_r(S)$.

17. Dokazati da je preslikavanje desna nula u polugrupi transformacija ako i samo ako je konstantno. Šta je sa levim nulama?

18. Neka je $G = (G, \cdot)$ grupoid i ρ je relacija ekvivalencije na G. Na faktor-skupu G/ρ definišemo množenje sa

$$(x\rho) * (y\rho) = (x \cdot y)\rho.$$

Dokazati da je $(G/\rho, *)$ grupoid ako i samo ako je ρ kongruencija na grupoidu G.

19. Svaka polugrupa je izomorfna nekoj polugrupi preslikavanja. Dokazati.

20. Neka je S polumreža sa nulom, I ideal od S i $a \in S$ takav da $a \notin I$. Dokazati da postoji maksimalan ideal J od S takav da je $I \subseteq J$ i $a \notin J$.

21. Neka je A proizvoljna algebra tipa τ. Dokazati da je A izomorfna podalgebri algebre $A \times \mathbf{2}_\tau$.

22. Dokazati da je algebra A izomorfna direktnom proizvodu algebri A_i, $i \in I$, ako i samo ako

(a) za svako $i \in I$ postoji epimorfizam $\phi_i : A \to A_i$;
(b) za svaku algebru B takvu da postoje homomorfizmi $\psi_i : B \to A_i$ za svako $i \in I$, postoji jedinstven homomorfizam $\psi : B \to A$ takav da je $\psi\phi_i = \psi_i$, za svako $i \in I$.

23. Dokazati da je algebra A je direktan proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$, ako i samo ako postoji familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ kongruencija na A koja zadovoljava sledeće uslove:

(a) $A/\theta_i \cong A_i$, za svaki $i \in I$
(b) $\bigcap\{\theta_i \,|\, i \in I\} = \Delta_A$;
(c) za svaku familiju $\{x_i\}_{i\in I}$ elemenata iz A postoji element $x \in A$ takav da je $(x, x_i) \in \theta_i$, za svaki $i \in I$.

24. Za kongruencije θ_1 i θ_2 na algebri A kažemo da su *permutabilne* ako je $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$. Dokazati da je algebra A direktan proizvod algebri A_1 i A_2 ako i samo ako postoje kongruencije θ_1 i θ_2 na A koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(a) $A/\theta_1 \cong A_1$ i $A/\theta_2 \cong A_2$;
(b) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$;
(c) $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$;
(d) θ_1 i θ_2 su permutabilne kongruencije.

25. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dokazati da je algebra A direktan proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i\in[1,n]}$, ako i samo ako postoji familija $\{\theta_i\}_{i\in[1,n]}$ kongruencija na A koja zadovoljava sledeće uslove:

(a) $A/\theta_i \cong A_i$, za svaki $i \in [1,n]$;
(b) $\bigcap\{\theta_i \,|\, i \in [1,n]\} = \Delta_A$;
(c) $\bigcap\{\theta_i \,|\, i \in [1,k]\}$ i θ_{k+1} su permutabilne kongruencije, za svaki $k \in [1, n-1]$;
(d) $\left(\bigcap\{\theta_i \,|\, i \in [1,k]\}\right) \vee \theta_{k+1} = \nabla_A$, za svaki $i \in [1, n-1]$.

26. Za algebru A kažemo da je *direktno* (*poddirektno*) *nerazloživa* ako ili A jeste trivijalna algebra ili iz pretpostavke da je A direktan (poddirektan) proizvod algebri A_i, $i \in I$, sledi da postoji $i \in I$ tako da je $A \cong A_i$ i A_j je trivijalna algebra, za svaki $j \in I$, $j \neq i$. Dokazati da važi sledeće:

(a) Svaka konačna algebra je izomorfna direktnom proizvodu direktno nerazloživih algebri.
(b) Svaka algebra je izomorfna poddirektnom proizvodu poddirektno nerazloživih algebri.
(c) Netrivijalna algebra A je poddirektno nerazloživa ako i samo ako mreža kongruencija $\mathrm{Con}\,(A)$ na A ima tačno jedan atom.

27. Dokazati da je svaka algebra iz varijeteta $\boldsymbol{V}$ izomorfna poddirektnom proizvodu poddirektno nerazloživih algebri iz $\boldsymbol{V}$.

28. Dokazati da je svaka Booleova algebra izomorfna poddirektnom proizvodu dvoelementnih Booleovih algebri.

29. Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija algebri, za svako $i \in I$ neka je φ_i homomorfizam iz A_i na neku algebru B, i neka je

$$C = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod\{A_i \,|\, i \in I\} \mid x_i\varphi_i = x_j\varphi_j, \text{ za sve } i, j \in I\}.$$

Dokazati da je C poddirektan proizvod algebri A_i, $i \in I$.

Algebru C nazivaćemo *povratnim proizvodom* algebri A_i, $i \in I$, u odnosu na algebru B i homomorfizme φ_i, $i \in I$.

30. Dokazati da je algebra A povratni proizvod algebri A_1 i A_2, u odnosu na algebru H ako i samo ako postoje kongruencije θ_1 i θ_2 na A takve da važe sledeći uslovi:

(a) $A/\theta_1 \cong A_1$, $A/\theta_2 \cong A_2$ i $A/\theta \cong H$, gde je $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$;
(b) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$;
(c) θ_1 i θ_2 su permutabilne kongeuencije.

31. Familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ kongruencija na algebri A je *apsolutno permutabilna* ako za svaku familiju $\{x_i\}_{i\in I}$ elemenata iz A važi:

$$(\forall i, j \in I)(x_i, x_j) \in \bigvee\{\theta_i \mid i \in I\} \Rightarrow (\exists z \in A)(\forall k \in I)\ (x_k, z) \in \theta_k.$$

Dokazati da je algebra A povratan proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$, u odnosu na algebru H, ako i samo ako postoji familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ kongruencija na A koja zadovoljava sledeće uslove:

(a) $A/\theta_i \cong A_i$, za svaki $i \in I$, i $A/\theta \cong H$, gde je $\theta = \bigvee\{\theta_i \,|\, i \in I\}$;
(b) $\bigcap\{\theta_i \,|\, i \in I\} = \Delta_A$;
(c) familija $\{\theta_i\}_{i\in I}$ je apsolutno permutabilna.

32. Dokazati da se svaki poddirektan proizvod Booleovih algebri može predstaviti kao njihov povratni proizvod.

33. Neka je $\boldsymbol{K}$ algebarska klasa algebri tipa τ. Dokazati da važi sledeće:

(a) $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za poddirektne proizvode ako i samo ako $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ ima najmanji element, za svaku algebru A tipa τ za koju je taj skup neprazan.
(b) $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za homomorfne slike ako i samo ako je $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ filter uređenog skupa $\mathrm{Con}\,(A)$, za svaku algebru A.

34. Neka je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet algebri. Dokazati da važi sledeće:

(a) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{P}}(A)$ ima najmanji element, za svaku konačnu algebru A.
(b) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{P}}(A)$ je filter od $\mathrm{Con}\,(A)$, za svaku konačnu algebru A.

35. Dokazati da je za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, sledeći skupovi čine varijetete:

(a) skup svih k-nilpotentnih polugrupa;
(b) skup svih k-nilpotentnih ekstenzija levo (desno) nultih traka;
(c) skup svih k-nilpotentnih ekstenzija pravougaonih traka.

Dati reprezentacije ovih varijeteta preko identiteta.

36. Dokazati da sledeći skupovi čine uopštene varijetete:

(a) skup svih nilpotentnih polugrupa;
(b) skup svih nilpotentnih ekstenzija levo (desno) nultih traka;
(c) skup svih nilpotentnih ekstenzija pravougaonih traka.

Odrediti usmerene skupove koji ultimativno određuju te uopštene varijetete.

37. Dokazati da sledeći skupovi čine pseudovarijetete:

(a) skup svih konačnih nilpotentnih polugrupa;
(b) skup svih konačnih nilpotentnih ekstenzija levo (desno) nultih traka;
(c) skup svih konačnih nilpotentnih ekstenzija pravougaonih traka.

38. Neka je V varijetet algebri koje imaju jednu nularnu operaciju 0 i binarnu $+$ koje zadovoljavaju identitete $x+0=0+x=x$. Dokazati da za proizvoljne algebre $A, B, C \in V$ važi da iz $C = A \times B$ sledi da postoje podalgebre A' i B' od C takve da je

(a) A' je izomorfna sa A;
(b) B' je izomorfna sa B;
(c) $A' \cap B' = \{0\}$;
(d) svako $c \in C$ se na jedinstven način može predstaviti u obliku $c = a + b$, gde je $a \in A'$, $b \in B'$.

Glava 2

Slobodne polugrupe. Jezici i gramatike

Jezik se formalno definiše kao skup reči, a reči kao konačni nizovi slova, elemenata nekog alfabeta. Drugim rečima, jezici predstavljaju podskupove skupa svih reči formiranih nad nekim datim alfabetom. Na veoma prirodan način, reči se mogu nadovezivati jedna na drugu, što određuje operaciju na tom skupu koja mu daje strukturu polugrupe, i to polugrupe kakvu nazivamo slobodnom polugrupom. Te polugrupe su predmet razmatranja u prva dva Odeljka ove glave, u kojima se uvode osnovni pojmovi potrebni za dalji rad sa rečima i jezicima, i dokazuju razni ekvivalenti pojma slobodne polugrupe.

U drugom delu govori se o jednom od najznačajnijih pojmova Teorije formalnih jezika, a to je pojam gramatike, koji je uveo Chomsky [1956, 1959]. U Odeljcima 2.3 i 2.4 definišu se najznačajniji tipovi gramatika, uvodi čuvena hijerarhija jezika pomenutog autora i opisuju se osnovna opšta svojstva gramatika.

2.1. Reči. Definicija slobodne polugrupe

Neka je dat neprazan skup X, koji ćemo nazivati *alfabetom*, a njegove elemente *slovima*. *Reč* nad alfabetom X definišemo kao neprazan konačan niz

$$x_1x_2\cdots x_n$$

elemenata iz X. Iz ovakve definicije je jasno da se jednakost reči definiše kao jednakost nizova. To znači da su dve reči

$$u = x_1x_2\cdots x_n \qquad \text{i} \qquad v = y_1y_2\cdots y_m$$

jednake ako i samo ako je $m = n$ i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Za reč $u = x_1x_2 \cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, broj n, tj. broj elemenata u nizu $x_1x_2 \cdots x_n$, označavamo sa $|u|$, i nazivamo ga *dužinom reči* u. Dalje, sa $|u|_x$ označavamo broj pojavljivanja slova x u reči u, a sa $c(u)$ skup svih slova koja se pojavljuju u reči u, koji nazivamo *sadržajem reči* u. Jasno je da važi sledeća jednakost:

$$|u| = \sum_{x \in c(u)} |u|_x.$$

Skup svih reči nad alfabetom X označavaćemo sa X^+. Na tom skupu definiše se operacija *spajanja*, *dopisivanja* ili *konkatenacija*, na sledeći način: proizvod reči $x_1x_2 \cdots x_n$ i $y_1y_2 \cdots y_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$, je reč

$$x_1x_2 \cdots x_ny_1y_2 \cdots y_m.$$

Lako se proverava da je ova operacija asocijativna, što znači da X^+ sa tom operacijom čini polugrupu. Tu polugrupu nazivaćemo *slobodnom polugrupom* nad alfabetom X. Jedinično proširenje polugrupe X^+ pomoću elementa e ($e \notin X^+$) nazivaćemo *slobodnim monoidom* nad alfabetom X, i označavaćemo ga sa X^*. Element e, tj. jedinicu monoida X^*, nazivamo *praznom reči*. Definiciju dužine reči ćemo proširiti i na praznu reč na taj način što ćemo uzeti da je $|e| = 0$. Za $n \in \mathbb{N}^0$, sa $X^{\geq n}$ označavamo skup svih reči iz X^* dužine veće ili jednake n, sa X^n skup svih reči iz X^* dužine jednake n, a sa $X^{\leq n}$ skup svih reči iz X^* dužine manje ili jednake n.

Primer 2.1.1. Neka je dat jednoelementan alfabet $X = \{x\}$. Reči nad tim alfabetom su

$$x,\ xx,\ xxx,\ \ldots,\ \underbrace{xx \cdots x}_{n \text{ puta}},\ \ldots$$

Kako je X^+ polugrupa, to možemo koristiti pojam stepena uveden u prethodnoj glavi, pa se gornji niz reči može zapisati u sledećem obliku:

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots.$$

Odavde se jasno vidi da je slobodna polugrupa X^+ izomorfna polugrupi $(\mathbb{N}, +)$, a slobodan monoid X^* monoidu $(\mathbb{N}^0, +)$.

Slobodna polugrupa nad jednoelementnim alfabetom jedini je primer komutativne slobodne polugrupe. Slobodne polugrupe nad alfabetima sa više od jednog slova ne mogu biti komutativne, jer za dva različita slova x i y, reči xy i yx su različite. Na primer, neka je $X = \{x, y\}$. Reči nad tim alfabetom su

$$x,\ y,\ xy,\ yx,\ xyx,\ xy^2,\ yx^2,\ yxy,\ xyx^2,\ (xy)^2,\ xy^2x,\ xy^3,\ \ldots.$$

Neka su date proizvoljne reči u i v nad alfabetom X. Za reč u kažemo da je *levi odsečak* ili *prefiks* reči v ako postoji reč $w \in X^*$ takva da je $v = uw$, ili kraće, ako je $v \in uX^*$. Ako je pri tome $w \in X^+$, tj. $v \in uX^+$, tada kažemo da je u *pravi levi odsečak* ili *pravi prefiks* reči v. Dualno se definiše *desni odsečak* ili *sufiks* reči, kao i *pravi desni odsečak* ili *pravi sufiks* reči. Takođe, za u kažemo da je *podreč*, *odsečak* ili *infiks* reči v ako postoje reči $w', w'' \in X^*$ takve da je $v = w'uw''$, ili kraće, $v \in X^*uX^*$. Ako je pri tome bar jedna od reči w' i w'' iz X^+, tada kažemo da je u *prava podreč*, *pravi odsečak* ili *pravi infiks* reči v.

Neka je u reč nad alfabetom X i $k \in \mathbb{N}$ tako da je $k \leq |u|$. Tada sa $l_k(u)$ označavamo *levi odsečak reči u dužine k*, a sa $r_k(u)$ *desni odsečak reči u dužine k*. Umesto $l_1(u)$ pišemo i $h(u)$, a umesto $r_1(u)$ pišemo $t(u)$. Jasno, $h(u)$ označava prvo slovo reči u, koje nazivamo *glavom* reči u, a $t(u)$ označava poslednje slovo reči u, koje nazivamo *repom* reči u. Sa $\overline{u}$ označavamo *dual reči u*, tj. reč nastalu iz u obrtanjem redosleda pojavljivanja slova u u. Drugim rečima, ako je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, tada je $\overline{u} = x_n \cdots x_2x_1$. *Inicijalni deo* reči u, u oznaci $i(u)$, definišemo kao reč nastalu iz u zadržavanjem samo prvog pojavljivanja (gledano sleva na desno) svakog slova koje se pojavljuje u u, a *finalni deo* reči u, u oznaci $f(u)$, definišemo sa $f(u) = \overline{i(\overline{u})}$. *Levi deo* reči u, u oznaci $l(u)$, definišemo kao najkraći levi odsečak od u koji sadrži sva slova koja se pojavljuju u u, dok se *desni deo* reči u, u oznaci $r(u)$, definiše sa $r(u) = \overline{l(\overline{u})}$.

Literatura: Bogdanović and Ćirić [1993], Howie [1976, 1991, 1995], Lallement [1979], Petrich [1977], Shyr [1991].

2.2. Ekvivalentne definicije slobodne polugrupe

Pojam slobodne polugrupe, odnosno slobodnog monoida, može se definisati na više ekvivalentnih načina. Ovde dajemo neke od najvažnijih ekvivalenata definicije pojma slobodne polugrupe.

Najpre dajemo sledeću teoremu:

Teorema 2.2.1. *Neka je X^+ slobodna polugrupa nad alfabetom X i neka je φ preslikavanje iz X u neku polugrupu T. Tada*

(a) *φ može biti prošireno do homomorfizma $\widehat{\varphi}$ iz X^+ u T;*

(b) *$\widehat{\varphi}$ je jedini homomorfizam iz X^+ u T koji proširuje preslikavanje φ;*

(c) *ako skup $X\varphi$ generiše T, tada je $\widehat{\varphi}$ sirjektivni homomorfizam.*

D o k a z . (a) Definišimo preslikavanje $\widehat{\varphi}$ iz X^+ u T na sledeći način: za $u = x_1x_2\cdots x_n \in X^+$, pri čemu su $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, neka je

$$u\widehat{\varphi} = (x_1\varphi)(x_2\varphi)\cdots(x_n\varphi). \tag{2.1}$$

Jasno, $\widehat{\varphi}$ je dobro definisano i $\widehat{\varphi}$ je homomorfizam iz X^+ u T takav da je $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za svaki $x \in X$.

(b) Neka je φ' proizvoljni homomorfizam iz X^+ u T koji je proširenje preslikavanja φ. Uzmimo proizvoljnu reč $u \in X^+$. Neka je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Tada je

$$\begin{aligned} u\varphi' &= (x_1x_2\cdots x_n)\varphi' = (x_1\varphi')(x_2\varphi')\cdots(x_n\varphi') && \text{(jer je } \varphi' \text{ homomorfizam)} \\ &= (x_1\varphi)(x_2\varphi)\cdots(x_n\varphi) && \text{(jer je } \varphi' \text{ proširenje od } \varphi) \\ &= u\widehat{\varphi} && \text{(prema (2.1))} \end{aligned}$$

Prema tome, $\varphi' = \widehat{\varphi}$, čime je tvrđenje (b) dokazano.

(c) Neka $X\varphi$ generiše T. Uzmimo proizvoljan element $a \in T$, tada je $a = a_1a_2\cdots a_n$, za neke $a_1, a_2, \dots, a_n \in X\varphi$, i dalje, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, je $a_i = x_i\varphi$, za neki $x_i \in X$. Prema tome, za $u = x_1x_2\cdots x_n \in X^+$ imamo da je

$$u\widehat{\varphi} = (x_1\varphi)(x_2\varphi)\cdots(x_n\varphi) = a_1a_2\cdots a_n = a.$$

Dakle, homomorfizam $\widehat{\varphi}$ je sirjektivan. $\square$

Posledica 2.2.1. *Svaka polugrupa je homomorfna slika neke slobodne polugrupe.*

D o k a z . Neka je S proizvoljna polugrupa. Uzmimo bilo koji generatorni skup X polugrupe S. Jasno, takav skup uvek postoji jer, na primer, samo S je jedan od svojih generatornih skupova. Dalje, neka je $\varphi : X \to S$ preslikavanje definisano sa $x\varphi = x$, za svaki $x \in X$. Prema Teoremi 2.2.1, φ može biti prošireno do homomorfizma iz slobodne polugrupe X^+ u S, i taj homomorfizam je sirjektivan, jer X generiše S. Dakle, S je homomorfna slika od X^+. $\square$

Sada dajemo prvi od nekoliko ekvivalenata pojma slobodne polugrupe koje ćemo navesti u ovom odeljku:

Teorema 2.2.2. *Neka je X neprazan podskup polugrupe S. Tada je S slobodna polugrupa nad alfabetom X ako i samo ako X generiše S i svako preslikavanje iz X u proizvoljnu polugrupu T može biti prošireno do homomorfizma iz S u T.*

Dokaz. Neka X generiše S i neka svako preslikavanje iz X u proizvoljnu polugrupu T može biti prošireno do homomorfizma iz S u T. Neka je φ preslikavanje iz X u slobodnu polugrupu X^+ definisano sa $x\varphi = x$, za svaki $x \in X$. Prema pretpostavci, preslikavanje φ može biti prošireno do homomorfizma $\widehat{\varphi}$ iz S u X^+. Za proizvoljan $u \in X^+$ imamo da je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za neke $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, pa za $a = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \in S$ imamo da je $a\widehat{\varphi} = u$. Prema tome, $\widehat{\varphi}$ slika S na X^+.

Dalje, neka je $a\widehat{\varphi} = b\widehat{\varphi}$, za neke $a, b \in S$. Kako X generiše S, to je $a = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ i $b = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$, pa iz $a\widehat{\varphi} = b\widehat{\varphi}$ sledi da je $x_1x_2\cdots x_n = y_1y_2\cdots y_m$ u X^+, što znači da je $n = m$ i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ovim smo dokazali da je $a = b$, pa je $\widehat{\varphi}$ injekcija. Dakle, $\widehat{\varphi}$ je izomorfizam iz S na X^+, što je i trebalo dokazati.

Obrat sledi iz definicije slobodne polugrupe i Teoreme 2.2.1. $\square$

Primetimo da se u uslovu Teoreme 2.2.2, koji kaže da se svako preslikavanje iz X u proizvoljnu polugrupu T može proširiti do homomorfizma iz S u T, ne zahteva da to proširenje bude jedinstveno. Može se lako dokazati da je jedinstvenost "ugrađena" u taj uslov, tj. da se iz njega može izvesti jedinstvenost proširenja preslikavanja.

Kao što smo videli u prethodnoj teoremi, da bi polugrupa S bila slobodna polugrupa nad nekim svojim nepraznim podskupom X, neophodno je da X generiše S, tj. da se svaki element iz S može razložiti u proizvod elemenata iz X. Međutim, taj uslov nije dovoljan. Sledećom teoremom ćemo pokazati da je potrebno još i da svako takvo razlaganje bude jedinstveno.

Teorema 2.2.3. *Neka je X neprazan podskup polugrupe S. Tada je S slobodna polugrupa nad alfabetom X ako i samo ako svaki element iz S poseduje jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz X.*

Dokaz. Neka svaki element iz S poseduje jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz X. Neka je $\varphi : X \to S$ preslikavanje definisano sa $x\varphi = x$, za svaki $x \in X$. Prema Teoremi 2.2.1, φ može biti prošireno do homomorfizma $\widehat{\varphi}$ iz X^+ u S. Kako je $X\varphi = X$ i X generiše S, to ponovo prema Teoremi 2.2.1 imamo da $\widehat{\varphi}$ slika X^+ na S. Dalje, neka je $u\widehat{\varphi} = v\widehat{\varphi}$, za neke $u, v \in X^+$. Uzmimo da je $u = x_1x_2\cdots x_n$ i $v = y_1y_2\cdots y_m$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$. Tada iz $u\widehat{\varphi} = v\widehat{\varphi}$ dobijamo da je $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = y_1 \cdot y_2 \cdots y_m$ u S, pa prema pretpostavci imamo da je $n = m$

i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Prema tome, $u = v$, pa je $\widehat{\varphi}$ injekcija. Na taj način smo dokazali da je S izomorfna slobodnoj polugrupi X^+.

Obrat je neposredna posledica definicije slobodne polugrupe. $\square$

Primetimo da se prethodna teorema može formulisati i na sledeći način:

Teorema 2.2.4. *Polugrupa S je slobodna polugrupa ako i samo ako svaki element iz S poseduje jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz $S \setminus S^2$.*

Argumenti slični onima korišćenim u dokazu Teoreme 2.2.3, koriste se i u dokazu sledeće teoreme:

Teorema 2.2.5. *Svake dve slobodne polugrupe nad alfabetima iste kardinalnosti su izomorfne.*

Dokaz. Neka su dati alfabeti X i Y iste kardinalnosti. To znači da postoji bijekcija φ iz X na Y. Prema Teoremi 2.2.1, φ se može proširiti do homomorfizma $\widehat{\varphi}$ iz X^+ u Y^+, koji je sirjektivan, jer $X\varphi = Y$ generiše Y^+. Uzmimo $u, v \in X^+$ takve da je $u\widehat{\varphi} = v\widehat{\varphi}$. Neka je $u = x_1 x_2 \cdots x_n$ i $v = y_1 y_2 \cdots y_m$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$. Tada iz $u\widehat{\varphi} = v\widehat{\varphi}$ dobijamo da je

$$(x_1\varphi)(x_2\varphi)\cdots(x_n\varphi) = (y_1\varphi)(y_2\varphi)\cdots(y_m\varphi).$$

Kako su $x_1\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_n\varphi, y_1\varphi, y_2\varphi, \ldots, y_m\varphi \in B$, to iz jednakosti gornjih dveju reči dobijamo da je $m = n$ i $x_i\varphi = y_i\varphi$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prema pretpostavci, φ je injekcija, pa je $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, što znači da je $u = v$. Prema tome, i $\widehat{\varphi}$ je injekcija, čime smo dokazali da su slobodne polugrupe X^+ i Y^+ izomorfne. $\square$

Polugrupu S nazivamo *ravnodeljivom* ako za proizvoljne $a, b, c, d \in S$, iz $ab = cd$ sledi da je

$$a = cp \quad \text{i} \quad pb = d, \qquad\qquad \text{za neki } p \in S^1,$$

ili

$$aq = c \quad \text{i} \quad b = qd, \qquad\qquad \text{za neki } q \in S^1.$$

Korišćenjem ovog pojma, može se dati još jedan ekvivalent definicije slobodne polugrupe:

Teorema 2.2.6. *Polugrupa S je slobodna ako i samo ako je ravnodeljiva i važi*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S^n = \varnothing. \tag{2.2}$$

Dokaz. Neka je S ravnodeljiva i neka važi (2.2). Posmatrajmo opadajući niz podpolugrupa

$$S \supseteq S^2 \supseteq \cdots \supseteq S^k \supseteq S^{k+1} \supseteq \cdots .$$

Ako se taj niz stabilizuje, što znači da je $S^{k+1} = S^k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada prema (2.2) dobijamo da je

$$S^k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S^n = \varnothing,$$

što je očigledno nemoguće. Prema tome, važi

$$S \supset S^2 \supset \cdots \supset S^k \supset S^{k+1} \supset \cdots .$$

Za $k \in \mathbb{N}$, neka je $C_k = S^k \setminus S^{k+1}$. Za proizvoljan $a \in S$, iz (2.2) dobijamo da je skup $\{n \in \mathbb{N} \,|\, a \notin S^{n+1}\}$ neprazan, pa ima najmanji element, recimo k. To znači da je $a \in S^k \setminus S^{k+1}$, tj. $a \in C_k$. Ovim smo dokazali da važi

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k. \tag{2.3}$$

Sa druge strane, neka su $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$, i neka je $a \in C_k \cap C_l$. Tada je $a \in S^k \setminus S^{k+1}$ i $a \in S^l \setminus S^{l+1}$, što je nemoguće, s obzirom da je $S^l \subseteq S^{k+1}$, ukoliko je $k < l$, odnosno $S^k \subseteq S^{l+1}$, ukoliko je $l < k$. Ovim smo dokazali da važi

$$C_k \cap C_l = \varnothing, \qquad \text{kad god je } k \neq l.$$

Dokažimo dalje da za svaki $k \in \mathbb{N}$, svaki element iz C_k ima jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz $X = S \setminus S^2$. To je jasno kada je $k = 1$. Uzmimo da to tvrđenje važi za neki $k \in \mathbb{N}$ i dokažimo da važi i za $k+1$. Neka je $a \in C_{k+1}$ proizvoljan element. Prema definiciji skupa C_{k+1} je $a \in S^{k+1}$, odakle je

$$a = x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1}, \tag{2.4}$$

za neke $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in S$, i sa druge strane $a \notin S^{k+2}$, što znači da $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in S = S^2 = X$. Uzmimo sada da je

$$a = y_1 y_2 \cdots y_m, \tag{2.5}$$

za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$. Zbog činjenice da $a \notin S^{k+2}$ imamo da je $m \leq k+1$. Osim toga, $m > 1$, jer u suprotnom dobijamo da je $y_1 = a \in S^{k+1}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $y_1 \in X = S \setminus S^2$. Dakle, $1 < m \leq k+1$, pa na osnovu ravnodeljivosti polugrupe S, iz jednakosti

$$x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = y_1 y_2 \cdots y_m,$$

koju smo dobili iz (2.4) i (2.5), sledi da je

$$x_1 = y_1 p \qquad \text{i} \qquad p x_2 \cdots x_{k+1} = y_2 \cdots y_m, \tag{2.6}$$

za neki $p \in S^1$, ili je

$$x_1 q = y_1 \qquad \text{i} \qquad x_2 \cdots x_{k+1} = q y_2 \cdots y_m, \tag{2.7}$$

za neki $q \in S^1$. Međutim, kako su $x_1, y_1 \in S \setminus S^2$, to (2.6) može da važi samo za $p = 1$, a (2.7) samo za $q = 1$, i u oba slučaja dobijamo da je

$$x_1 = y_1 \qquad \text{i} \qquad x_2 \cdots x_{k+1} = y_2 \cdots y_m.$$

Kako je $x_2 \cdots x_{k+1} \in C_k$, to prema indukcijskoj pretpostavci dobijamo da je $k+1 = m$ i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{2, \ldots, k+1\}$. Time je postojanje jedinstvenog razlaganja u proizvod elemenata iz X dokazana i za elemente iz C_{k+1}. Prema tome, indukcijom dobijamo da osobina postojanja jedinstvenog razlaganja u proizvod elemenata iz X važi u svakom C_k, pa prema (2.3), to važi i u S. Dakle, prema Teoremi 2.2.4, S je slobodna polugrupa nad alfabetom X.

Obrat sledi neposredno iz definicije slobodne polugrupe. $\square$

Teorema 2.2.7. *Polugrupa S je slobodna ako i samo ako je ravnodeljiva i postoji homomorfizam iz S u polugrupu $(\mathbb{N}, +)$.*

Dokaz. Neka je S ravnodeljiva i neka postoji homomorfizam φ iz S u polugrupu $(\mathbb{N}, +)$. Prema Teoremi 2.2.6, da bi se dokazalo da je S slobodna, ostaje da se dokaže da važi (2.2), ili, što je ekvivalentno, da za svaki $a \in S$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $a \notin S^{k+1}$. Zaista, za $a \in S$ neka je $k = a\varphi$. Ako je sada $a \in S^{k+1}$, tj. $a = a_1 a_2 \cdots a_{k+1}$, za neke $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in S$, tada je

$$k = a\varphi = (a_1\varphi) + (a_2\varphi) + \cdots + (a_{k+1}\varphi) \geq k+1,$$

čime smo dobili kontradikciju. Prema tome, $a \notin S^{k+1}$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, ako je S slobodna polugrupa, tada je jasno da je S ravnodeljiva a preslikavanje $u \mapsto |u|$, gde $|u|$ označava dužinu reči u, je homomorfizam iz S u polugrupu $(\mathbb{N}, +)$. $\square$

Teoreme slične prethodnim mogu biti dokazane i za slobodne monoide.

Literatura: Bogdanović and Ćirić [1993], Dubreil-Jacotin [1947], Howie [1976, 1991, 1995], Lallement [1979], Levi [1944], McKnight and Storey [1969], Shyr [1991].

2.3. Jezici i gramatike

U Teoriji formalnih jezika, pod *jezikom* nad alfabetom X podrazumeva se proizvoljan podskup slobodnog monoida X^* nad tim alfabetom. Pod *formalnom gramatikom*, ili kraće samo *gramatikom*, podrazumeva se trojka $G = (V, X, \pi)$ gde je V konačan skup koji nazivamo *rečnikom* gramatike G, skup $X \subseteq V$ je neprazan podskup koji nazivamo *terminalnim alfabetom*, i $\pi \subseteq (V \setminus X)^+ \times V^*$ je konačan podskup koji nazivamo *pravilima* gramatike G. Elemente iz skupa $V \setminus X$ nazivamo *pomoćnim simbolima*, a sam skup $V \setminus X$ *pomoćnim alfabetom*.

Da bi pojednostavili pisanje, kao zamenu za izraz $(u, v) \in \pi$ koristićemo izraz $u \to v$. Za reč $w' \in V^*$ kažemo da je *neposredno izvodljiva* iz reči $w \in V^*$, što označavamo sa $w \Rightarrow w'$, ako postoje $(p, q) \in V^*$ i pravilo $u \to v$ iz π tako da je

$$w = puq \qquad \text{i} \qquad w' = pvq.$$

Drugim rečima, reč w' je neposredno izvedena iz reči w ako postoji pravilo $u \to v$ iz π takvo da je u podreč od w a reč w' je dobijena iz w tako što smo podreč u u w zamenili sa v.

Dalje, kažemo da je reč $w' \in V^*$ *izvodljiva* iz reči $w \in V^*$, što označavamo sa $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, ako je ili $w = w'$ ili postoji niz $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, gde je $n \geq 2$, takav da važi

$$w = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n = w'.$$

U tom slučaju, niz $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazivamo *izvođenjem* reči w' iz w.

Za pomoćni simbol $\sigma \in V \setminus X$, skup

$$L(G, \sigma) = \{w \in X^* \mid \sigma \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

nazivamo *jezikom generisanim gramatikom* G polazeći od σ. Za jezik $L \subseteq X^*$ kažemo da je *generisan gramatikom*, ili da je *jezik tipa 0*, ako postoji gramatika $G = (V, X, \pi)$ i pomoćni simbol $\sigma \in V \setminus X$ tako da je $L = L(G, \sigma)$.

Iz definicije jezika generisanog gramatikom vidi se razlog zbog čega su simboli iz $V \setminus X$ nazvani pomoćnim. Naime, oni su samo pomoćno sredstvo u izvođenjima koja se vrše prilikom generisanja jezika, jer se tokom izvođenja gube a krajnje rezultate izvođenja predstavljaju samo reči izgrađene od terminalnih (završnih) simbola, što objašnjava i njihov naziv.

Za generisanje nekih posebnih tipova jezika uvode se neka dodatna ograničenja na pravilima iz π. Tako formalnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazivamo *kontekstno-zavisnom*, ili *gramatikom tipa 1*, ako je proizvoljno pravilo iz π oblika

$$u\alpha v \to upv,$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$, $p \in V^*$ i $u, v \in (V \setminus X)^*$. Odgovarajuće jezike nazivamo *kontekstno-zavisnim jezicima* ili *jezicima tipa 1*.

Ako je svako pravilo iz π oblika

$$\alpha \to p,$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$ i $p \in V^*$, tada gramatiku G nazivamo *kontekstno-nezavisnom*, *kontekstno-slobodnom* ili gramatikom *tipa 2*. Jezike generisane ovakvim gramatikama nazivamo *kontekstno-nezavisnim jezicima* ili *jezicima tipa 2*.

Razlog zbog čega gramatike tipa 1 nazivamo kontekstno-zavisnim, a gramatike tipa 2 kontekstno-nezavisnim je sledeći. U slučaju kontekstno-zavisnih jezika, neposredno izvođenje $w \Rightarrow w'$ događa se u slučaju kada je $u\alpha v$ podreč od w, i tom prilikom se simbol α zamenjuje sa p. Prema tome, ovakva zamena vrši se samo kod reči u kojima se α javlja u određenom kontekstu, između reči u i v, pa ove gramatike zaista zavise od konteksta. Kod kontekstno-nezavisnih gramatika, simbol α možemo zameniti sa p u svakoj reči u kojoj se on javlja, nezavisno od konteksta u kome se javlja. Otuda potiče naziv ovih gramatika.

Osim ovih gramatika, veoma su važne i *regularne gramatike*, koje se ponegde nazivaju i *gramatikama tipa 3*, *desno linearnim gramatikama* ili *racionalnim gramatikama*. Kod ovih gramatika svako pravilo ima oblik

$$\alpha \to p\beta$$

gde su $\alpha, \beta \in V \setminus X$ i $p \in X^+$, ili

$$\alpha \to q,$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$ i $q \in X^*$. Jezike generisane ovim gramatikama nazivaćemo *regularnim jezicima* ili *jezicima tipa 3*.

Ovakva klasifikacija gramatika i jezika, koju je prvi napravio Chomsky, naziva se *hijerarhija Chomsky*. Ako za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, sa $\mathfrak{L}_k$ označimo klasu svih jezika tipa k, i ako sa $\mathfrak{L}_2'$ označimo klasu svih jezika iz $\mathfrak{L}_2$ koji ne sadrže praznu reč, tada imamo da je

$$\mathfrak{L}_3 \subseteq \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_0 \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{L}_2' \subseteq \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_0.$$

Postoje primeri koji potvrđuju da su prethodne inkluzije stroge.

Istaknimo da važi sledeća teorema.

Teorema 2.3.1. *Jezik L nad alfabetom X je kontekstno-zavisan ako i samo ako je generisan gramatikom $G = (V, X, \pi)$ čija su pravila oblika $u \to v$, pri čemu je $|u| \leq |v|$.*

Primetimo da se regularne gramatike nazivaju i desno linearnim zato što se u pravilima $\alpha \to p\beta$ simbol β pojavljuje sa desne strane. Prirodno se nameće ideja da se definiše i levo linearna gramatika kao gramatika čija su pravila oblika

$$\alpha \to \beta p$$

gde su $\alpha, \beta \in V \setminus X$ i $p \in X^+$, ili

$$\alpha \to q,$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$ i $q \in X^*$. Međutim, može se pokazati da ovakve gramatike generišu iste jezike kao i desno linearne gramatike, pa stoga nema potrebe za ovakvom definicijom.

Napomenimo da prilikom navođenja skupa pravila gramatike često koristimo dogovor prema kome, ukoliko se u skupu pravila gramatike nalazi niz pravila oblika

$$u \to v_1,\ u \to v_2,\ \dots\ ,\ u \to v_n,$$

onda taj niz zamenjujemo jednostavnijim izrazom

$$u \to v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Primer 2.3.1. Neka je data rečenica

Mladić bledog lica gleda kroz mutno staklo razigranu decu.

Ova rečenica je gramatički pravilna rečenica srpskog jezika, i možemo je izvesti iz pomoćnog simbola

(rečenica)

pomoću sledećih pravila:

(rečenica)→(subjekat)(predikat)
(subjekat)→(imenica)(atribut)
(predikat)→(glagol)(odredba za način)(objekat)
(atribut)→(pridev)(imenica)
(odredba za način)→(predlog)(pridev)(imenica)
(objekat)→(pridev)(imenica)
(imenica)→mladić
(imenica)→lica
(imenica)→staklo
(imenica)→decu
(pridev)→bledog
(pridev)→mutno
(pridev)→razigranu
(glagol)→gleda
(predlog)→kroz

Primetimo da su zagradama označeni pomoćni simboli. Naravno, pomoću ovakvih pravila moguće je izvesti i neke druge rečenice, kakva je, na primer, rečenica

Mladić bledog stakla gleda kroz mutno decu razigranu lica.

I ova rečenica je gramatički, odnosno sintaksno ispravna, iako je semantički neispravna, jer je besmislena.

Primer 2.3.2. Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda, \mu\}$ i pravila su data sa

$$\sigma \to x\sigma, \quad \sigma \to y\sigma, \quad \sigma \to x\lambda, \quad \lambda \to y\mu, \quad \mu \to e.$$

Tada je gramatika G regularna, pri čemu je

$$L(G, \sigma) = X^*xy.$$

Zaista, za svaku reč $w \in X^*$ postoji izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w\sigma \Rightarrow wx\lambda \Rightarrow wxy\mu \Rightarrow wxy,$$

pa je $X^*xy \subseteq L(G, \sigma)$.

Sa druge strane, uzmimo da je $w \in L(G, \sigma)$, tj. da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$. To znači da postoji niz $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, gde je $n \geq 2$, takav da važi

$$\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w_n = w.$$

Kako je pravilo $\mu \to e$ jedino koje ne sadrži pomoćni simbol sa desne strane, to dobijamo da je $w_{n-1} = w\mu$. Dalje, $\lambda \to y\mu$ je jedino pravilo u kome se μ javlja na desnoj strani, pa je $w = w'y$, za neki $w' \in X^*$, i $w_{n-2} = w'\lambda$. Slično, pravilo $\sigma \to x\lambda$ je jedino u kome se λ javlja sa desne strane, pa je $w' = w''x$, za neki $w'' \in X^*$ i $w_{n-3} = w''\sigma$. Prema tome,

$$w = w'y = w''xy \in X^*xy,$$

što znači $L(G, \sigma) \subseteq X^*xy$. Dakle, $L(G, \sigma) = X^*xy$.

Primer 2.3.3. Neka je $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$ i pravila su data sa

$$\sigma \to x\lambda y, \quad \lambda \to x\lambda y, \quad \lambda \to e.$$

Tada je G kontekstno-nezavisna gramatika i

$$L(G, \sigma) = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Prema tome, jezik $\{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je kontekstno-nezavisan. Kao što ćemo videti kasnije, ovaj jezik nije regularan, što potvrđuje da postoje kontekstno-nezavisni jezici koji nisu regularni.

Literatura: Chomsky [1956, 1957, 1959, 1963], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Marcus [1997], Mateescu and Salomaa [1997a, 1997b].

2.4. Saglasnost izvođenja

Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$. Kao što smo videli u prethodnom poglavlju, za reči $w, w' \in V^*$, neposredno izvođenje reči w' iz reči w u gramatici G, u oznaci $w \Rightarrow w'$, definiše se sa

$$w \Rightarrow w' \;\Leftrightarrow\; (\exists p, q \in V^*)(\exists (u, v) \in \pi)\; w = puq \;\&\; w' = pvq, \tag{2.8}$$

pri čemu govorimo da je reč w' neposredno izvodljiva iz w u gramatici G. Drugim rečima, sa (2.8) je definisana relacija $\Rightarrow$ na slobodnom monoidu V^*, koju nazivamo *relacijom neposrednog izvođenja* u gramatici G. Potsetimo se takođe da za reči $w, w' \in V^*$ pišemo $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, i kažemo da je reč w' izvodljiva iz w u gramatici G, ako je ili $w = w'$, ili postoji niz

$$w \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n \Rightarrow w', \qquad n \in \mathbb{N}^0, \tag{2.9}$$

neposrednih izvođenja u gramatici G. U slučaju da je $w \neq w'$ i postoji niz (2.9) neposrednih izvođenja u G, tada taj niz nazivamo izvođenjem u G, i u tom slučaju neposredna izvođenja iz tog niza nazivamo *koracima* izvođenja (2.9) a broj koraka u izvođenju (2.9) nazivamo *dužinom izvođenja* (2.9). Primetimo takođe da se i izvođenje $\overset{*}{\Rightarrow}$ može tretirati kao relacija na V^*, definisana kao refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\Rightarrow$, koju ćemo nazivati *relacijom izvođenja* u gramatici G. U slučajevima kada je to potrebno da bi se izbegla moguća zabuna, ove relacije ćemo označavati sa $\underset{G}{\Rightarrow}$ i $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$.

Veoma lako se dokazuje i sledeća lema:

Lema 2.4.1. *Neka je data gramatika $G = (V, A, \pi)$. Tada važi:*

(i) $\Rightarrow$ *je saglasno zatvorenje relacije π;*

(ii) $\overset{*}{\Rightarrow}$ *je polu-kongruencija na V^* generisana sa π.*

Štaviše, dokazuje se i sledeća osobina izvođenja u gramatici:

Teorema 2.4.1. *Neka je data gramatika $G = (V, A, \pi)$, neka su $u, v, w \in V^*$ i neka je $u \overset{*}{\Rightarrow} v$. Tada postoje izvođenja*

$$uw \overset{*}{\Rightarrow} vw \qquad i \qquad wu \overset{*}{\Rightarrow} wv \tag{2.10}$$

za koja važi

(i) *dužine izvođenja (2.10) nisu veće od dužine izvođenja $u \overset{*}{\Rightarrow} v$;*

(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenjima (2.10) nalaze se među pravilima koja se koriste u izvođenju $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.*

Dokaz. Dokaz će biti izveden indukcijom po dužini izvođenja $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.

Pretpostavimo najpre da je $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine 1, tj. neposredno izvođenje. To znači da je $u = pu'q$ i $v = pv'q$, za neke $p, q \in V^*$ i neki pravilo $u' \to v'$ iz π. Tada imamo da je $uw = pu'(qw)$, $vw = pv'(qw)$, $wu = (wp)u'q$ i $wv = (wp)v'q$, odakle dobijamo da $uw \Rightarrow vw$ i $wu \Rightarrow wv$.

Uzmimo dalje da je $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine $n > 1$ i da tvrđenje teoreme važi za sva izvođenja dužine manje od n. Tada imamo da je $u \Rightarrow u' \overset{*}{\Rightarrow} v$, za neki $u' \in V^*$, pri čemu je $u' \overset{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine $n - 1$, pa prema napred dokazanom i prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je

$$uw \Rightarrow u'v \overset{*}{\Rightarrow} vw \qquad \text{i} \qquad wu \Rightarrow wu' \overset{*}{\Rightarrow} wv,$$

pri čemu su izvođenja $u'w \overset{*}{\Rightarrow} vw$ i $wu' \overset{*}{\Rightarrow} wv$ dužine ne veće od $n-1$, i takođe, izvođenja $uw \Rightarrow u'w$ i $wu \Rightarrow wu'$ su zasnovana na istom pravilu kao i $u \Rightarrow u'$, a izvođenja $u'w \overset{*}{\Rightarrow} vw$ i $wu' \overset{*}{\Rightarrow} wv$ su zasnovana na istim pravilima kao i izvođenja $u' \overset{*}{\Rightarrow} v$. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. $\square$

Potsetimo se da smo u Glavi 1, zajedno sa pojmom saglasne relacije, uveli i pojam *stabilne relacije* kao relacije ξ na polugrupi S takve da za sve $a, b, c, d \in S$, iz $a \,\xi\, c$ i $b \,\xi\, d$ sledi $ab \,\xi\, cd$. Tom prilikom smo i dokazali da su na relacijama ekvivalencije ti pojmovi ekvivalentni. U tom dokazu koriste se samo refleksivnost i tranzitivnost relacije, što znači da se to isto može dokazati i za kvazi-uređenja, odnosno, *kvazi-uređenje ξ na polugrupi S je saglasno ako i samo ako je stabilno*. Odavde, prema Lemi 2.4.1, zaključujemo i da je relacija $\overset{*}{\Rightarrow}$ izvođenja u gramatici G takođe stabilna. Štaviše, važi i sledeća teorema:

Teorema 2.4.2. *Neka je data gramatika $G = (V, A, \pi)$ i neka su $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in V^*$, $n \in \mathbb{N}$, reči za koje važi*

$$u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i, \qquad \text{za svaki } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{2.11}$$

Tada postoji izvođenje

$$u_1 u_2 \cdots u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 v_2 \cdots v_n \tag{2.12}$$

za koje važi

(i) *dužina izvođenja (2.12) nije veća od zbira dužina izvođenja (2.11);*

(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenju (2.12) nalaze se među pravilima koja se koriste u izvođenjima (2.11).*

Dokaz. Tvrđenje teoreme će biti dokazano indukcijom po n. Označimo sa l_i dužinu izvođenja $u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i$, $1 \le i \le n$.

Jasno je da tvrđenje teoreme važi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $n > 1$ i da tvrđenje važi za sva izvođenja dužine $n - 1$. Tada prema indukcijskoj pretpostavci dobijamo da postoji izvođenje

$$u_1 \cdots u_{n-1} \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \cdots v_{n-1}, \tag{2.13}$$

čija dužina nije veća od $l_1 + \cdots + l_{n-1}$, i u kome se ne koriste nikakva pravila koja se ne koriste u izvođenjima $u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i$, $1 \le i \le n - 1$. Sa druge strane, prema Teoremi 2.4.1 imamo da postoje izvođenja

$$u_1 \cdots u_{n-1} u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \cdots v_{n-1} u_n \quad \text{i} \quad v_1 \cdots v_{n-1} u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \cdots v_{n-1} v_n, \tag{2.14}$$

pri čemu dužina prvog ne prelazi dužinu izvođenja (2.13), odnosno ne prelazi $l_1 + \cdots + l_{n-1}$, a dužina drugog ne prelazi l_n, i takođe, među pravilima koja se koriste u prvom su samo pravila koja se koriste u (2.13), a među pravilima koja se koriste u drugom od izvođenja iz (2.14) se koriste samo pravila koja se koriste pri izvođenju $u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_n$. Prema tome, iz (2.14) sledi da postoji izvođenje oblika (2.12) koje zadovoljava uslove (i) i (ii) teoreme. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Literatura: Bogdanović and Ćirić [1993], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Tamura [1975].

2.5. Zadaci

1. Dokazati da podpolugrupa $T = \{x^2, x^3, \ldots\}$ slobodne polugrupe $\{x\}^+$ nije slobodna.

2. U slobodnoj polugrupi X^+ reči α, β, γ zadovoljavaju relaciju $\alpha\beta = \beta\gamma$ ako i samo ako postoje $u, v \in X^+$ i $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\alpha = uv$, $\beta = (uv)^k u$, $\gamma = vu$. Dokazati.

3. Na slobodnom monoidu X^* definisana je relacija ρ sa

$$(u, v) \in \rho \Leftrightarrow c(u) = c(v),$$

za $u, v \in X^*$. Dokazati da je ρ najmanja kongruencija na X^* takva da je X^*/ϱ polumreža.

4. Dokazati da podpolugrupa S slobodne polugrupe ima jedinstveni minimalni skup generatora $A = S \setminus S^2$.

5. Monoid M je slobodan ako i samo ako svaki element $m \in S = M \setminus \{e\}$ ima jedinstvenu faktorizaciju kao proizvod elemenata iz $A = S \setminus S^2$. Dokazati.

6. Neka je $X = \{x, y\}$ i neka je S podpolugrupa slobodne polugrupe X^+ generisana skupom $\{xy, yx, xyx, yxy\}$. Dokazati da je $S \setminus S^2 = \{xy, yx, xyx, yxy\}$. Da li je S slobodna?

7. Monoid M je slobodan ako i samo ako je kancelativan, ravnodeljiv, nema invertibilnih elemenata i svaki element $m \in M \setminus \{e\}$ ima samo konačan broj netrivijalnih levih faktora. Dokazati.

8. Neka je M podmonoid slobodnog monoida X^*. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) M je slobodan;
(ii) za svaku reč $u \in X^*$ iz $Mu \cap M \neq \varnothing$ i $uM \cap M \neq \varnothing$ sledi $u \in M$;
(iii) za svaku reč $u \in X^*$ iz $Mu \cap M \cap uM \neq \varnothing$ sledi $u \in M$.

9. Neka su L, L_1 i L_2 jezici koji su generisani gramatikama $G = (V, X, \pi)$, $G_1 = (V_1, X, \pi_1)$ i $G_2 = (V_2, X, \pi_2)$ polazeći od simbola σ, σ_1 i σ_2, tim redom. Konstruisati gramatike koje generišu jezike L^c, $L^{(*)}$, $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$.

10. Data je gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma\}$, i

$$\pi : \ \sigma \to x\sigma x + y\sigma y + x + y + e.$$

Dokazati da je $L(G, \sigma) = \{u \in X^* \mid u = \overline{u}\}$, tj. $L(G, \sigma)$ je skup palindroma nad alfabetom X.

11. Data je gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$, i

$$\begin{aligned}\sigma &\to x\lambda y + y\lambda x,\\ \lambda &\to x\lambda + y\lambda + e.\end{aligned}$$

Dokazati da je $L(G, \sigma) = \{u \in X^* \mid h(u) \neq t(u)\}$, tj. $L(G, \sigma)$ je skup svih reči nad alfabetom X kod kojih se početno i krajnje slovo razlikuju.

12. Opisati jezike u X^*, gde je $X = \{x, y\}$, generisane regularnim gramatikama sa izvođenjima:

(a) $\sigma \to x\lambda$, $\lambda \to y\lambda + e$;
(b) $\sigma \to x\lambda$, $\lambda \to x\lambda + y\lambda + y\mu$, $\mu \to e$.

13. Naći kontekstno-slobodne gramatike koje generišu sledeće jezike nad alfabetom $X = \{x, y\}$:

(a) $L = \{x^n y^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
(b) $L = \{u\overline{u} \mid u \in X^*\}$.

Glava 3

Automati sa izlazom

Automati sa izlazom, koji će biti glavni predmet razmatranja u ovoj glavi, predstavljaju matematičku apstrakciju mašine koja radi u diskretnoj vremenskoj skali, i koja tokom tog rada, pod uticajem ulaznih signala, menja svoja unutrašnja stanja i emituje odgovarajuće izlazne signale. Glavni zadatak ovih automata je da vrše obradu informacija, na taj način što će ulaznu informaciju, predstavljenu nekim nizom ulaznih simbola, transformisati u izlaznu informaciju, predstavljenu odgovarajućim nizom izlaznih simbola. Pitanje koje se prirodno nameće je: Kakve se transformacije mogu realizovati pomoću automata sa izlazom? Odgovor na to dali su, nezavisno jedan od drugog, Raney [1958] i Glushkov [1961a], koji su pokazali da su to transformacije ulaznih u izlazne reči zadate takozvanim automatovnim preslikavanjima. Pri tome je Glushkov dokazao da za svaku takvu transformaciju postoji automat sa minimalnim brojem stanja koji je realizuje. Ovi rezultati inicirali su intenzivno izučavanje uslova pod kojima su dva automata ekvivalentna, pod čime podrazumevamo da realizuju iste transformacije ulaznih u izlazne reči, i rad na pronalaženju postupaka za minimizaciju automata, tj. za nalaženje automata sa minimalnim brojem stanja ekvivalentnog datom automatu.

U ovoj glavi prikazaćemo najznačajnije rezultate dobijene u ovoj oblasti. Algoritam za minimizaciju automata koji će biti prikazan dali su Aufenkamp i Hohn [1957]. Biće dokazana i poznata teorema Gilla [1960] i Bloha [1960] koja kaže da je svaki automat Mealyevog tipa ekvivalentan nekom automatu Mooreovog tipa. Na kraju glave će biti prikazano i nekoliko metoda za kompoziciju automata, odnosno za konstrukciju automata polazeći od unapred datih jednostavnijih automata.

3.1. Pojam automata

Automati koje razmatramo u ovoj glavi predstavljaju matematičku apstrakciju mašine koja radi u diskretnoj vremenskoj skali i koja tokom tog rada, pod uticajem ulaznih signala, menja svoja unutrašnja stanja i emituje odgovarajuće izlazne signale. O stanjima mašine razmišljamo kao o nekim njenim unutrašnjim atributima, koji, zajedno sa ulazom, određuju izlaz u datom trenutku. U digitalnom računaru, na primer, pod poznavanjem stanja podrazumevamo poznavanje sadržaja svih registara, ili bar onih koji su relevantni za ponašanje izlaza mašine.

Kada u ovoj glavi budemo govorili *automat*, mislićemo na pojam *Mealyevog automata*, ili *automata Mealyevog tipa*, koji se definiše kao uređena petorka $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ za koju važi:

- A je neprazan skup koji nazivamo *skup stanja* automata A;
- X je neprazan skup koji nazivamo *skup ulaza* (*ulaznih signala*, *ulaznih simbola*) automata A;
- Y je neprazan skup koji nazivamo *skup izlaza* (*izlaznih signala*, *izlaznih simbola*) automata A;
- $\delta : A \times X \to A$ je preslikavanje koje nazivamo *funkcija prelaza* (*funkcija narednog stanja*) automata A;
- $\lambda : A \times X \to Y$ je preslikavanje koje nazivamo *funkcija izlaza* automata A.

Primetimo da smo ovde i automat i njegov skup stanja označili istim slovom A, odnosno poistovetili smo automat i njegov skup stanja, što se, kao što već znamo, često koristi u algebri, kada se, u cilju pojednostavljenja oznaka, algebra poistovećuje sa svojim nosačem. Ako se ova činjenica jasno uoči, onda sigurno neće biti opasnosti od zabune usled takvog načina označavanja.

Princip rada ovako definisanog automata možemo shvatiti na sledeći način: Automat A se u određenom trenutku nalazi u stanju $a \in A$, a na njegov ulaz dospeva ulazni signal $x \in X$. Pod dejstvom tog signala automat menja stanje i u sledećem trenutku prelazi u stanje $\delta(a, x) \in A$, i istovremeno se na izlaz automata šalje izlazni signal $\lambda(a, x) \in Y$. Prema tome, ovako definisani automat je matematička apstrakcija realnog sistema koji radi u diskretnoj vremenskoj skali.

Specijalizacijom ovako definisanog pojma automata dobijamo razne druge zanimljive tipove automata. Ako automat $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ zadovoljava uslov

$$\delta(a,x) = \delta(a',x') \;\Rightarrow\; \lambda(a,x) = \lambda(a',x'),$$

za sve $a, a' \in A$, $x, x' \in X$, što je ekvivalentno uslovu da postoji preslikavanje $\mu : A \to Y$ takvo da se preslikavanje λ može izraziti preko μ i δ sa

$$\lambda(a,x) = \mu(\delta(a,x)),$$

za sve $a \in A$, $x \in X$, tada $\mathcal{A}$ zovemo *Mooreov automat*, ili *automat Mooreovog tipa*, i pišemo $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$. Preslikavanje μ nazivamo *funkcija znaka* a $\mu(a)$ nazivamo *znak* stanja $a \in A$. Razlika između Mealyevog i Mooreovog automata leži u tome da se kod Mealyevog automata istovremeno vrši prelazak u naredno stanje i šalje izlazni signal, dok se kod Mooreovog automata najpre vrši prelaz u naredno stanje, a tek onda šalje izlazni signal koji zavisi samo od stanja u koje je automat prešao (taj signal je znak tog stanja), dok ne zavisi direktno od ulaznog signala. Drugim rečima, zavisnost izlaznog signala od ulaznog je posredna i ispoljava se samo kroz njegov uticaj na promenu stanja.

Ako za Mooreov automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ važi da je $Y = A$ i μ je identičko preslikavanja skupa A, tada zanemarujemo skup Y i preslikavanje μ, pišemo $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ i automat $\mathcal{A}$ nazivamo *automat bez izlaza*.

Automat svoj rad uvek započinje iz nekog određenog stanja koje ponekad unapred ističemo. U tom slučaju govorimo o *inicijalnom* (*Mealyevom*) *automatu* koji definišemo kao uređenu šestorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$, gde je $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealyev automat a $a_0 \in A$ je fiksirano stanje koje nazivamo *početno* (*inicijalno*) *stanje*. Slično definišemo *inicijalni Mooreov automat*, u oznaci $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \mu)$, i *inicijalni automat bez izlaza*, u oznaci $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$.

Jasno da od proizvoljnog automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ možemo napraviti automat bez izlaza – to je automat (A, X, δ) nastao iz $\mathcal{A}$ zanemarivanjem skupa izlaznih signala i funkcije izlaza. Takođe, od automata $\mathcal{A}$ možemo napraviti i inicijalni automat fiksirajući bilo koje njegovo stanje i proglašavajući ga za inicijalno stanje.

Ako su skupovi stanja, ulaza i izlaza automata konačni, tada ga nazivamo *konačan automat*. Jasno, od najvećeg praktičnog značaja su upravo ovakvi automati. O još nekim vrstama automata biće reči nešto kasnije u ovoj knjizi.

Neka je dat Mealyev automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Tada njegove funkcije prelaza i izlaza možemo proširiti redom do preslikavanja $\delta : A \times X^* \to A^*$

i $\lambda : A \times X^* \to Y^*$ na sledeći način: Za $a \in A$ i $u \in X^+$, $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, stavljamo da je

$$\delta(a, u) = a_1 a_2 \cdots a_n, \tag{3.1}$$

gde je

$$a_1 = \delta(a, x_1),\ a_2 = \delta(a_1, x_2), \ldots,\ a_n = \delta(a_{n-1}, x_n), \tag{3.2}$$

i

$$\lambda(a, u) = y_1 y_2 \cdots y_n, \tag{3.3}$$

pri čemu je

$$y_1 = \lambda(a, x_1),\ y_2 = \lambda(a_1, x_2), \ldots,\ y_n = \lambda(a_{n-1}, x_n). \tag{3.4}$$

Takođe

$$\delta(a, e) = a, \qquad \lambda(a, e) = e, \tag{3.5}$$

gde smo prazne reči i u X^* i u Y^* označili istim slovom e.

Primetimo da smo i funkcije prelaza i izlaza i njihova proširenja označavali istim slovima δ i λ. Iako to sa matematičke strane nije sasvim korektno, usvajamo takvu konvenciju u označavanju da bi olakšali rad. Pri tome imamo u vidu da nema opasnosti od zabune ako znamo odakle je argument na koji ta preslikavanja deluju, jer se vrednosti funkcija prelaza i izlaza i njihovih proširenja poklapaju na skupu $A \times X$.

Skup X ćemo nadalje nazivati i *ulazni alfabet*, polugrupu X^+ i monoid X^* ćemo nazivati *ulazna polugrupa* i *ulazni monoid* a njihove elemente *ulazne reči* automata A, dok ćemo skup Y nazivati *izlazni alfabet*, polugrupu Y^+ i monoid Y^* *izlazna polugrupa* i *izlazni monoid* a njihove elemente *izlazne reči* automata A. Princip rada Mealyevog automata sada možemo prikazati i na sledeći način: na ulaz automata dolaze jedan za drugim ulazni signali $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, tj. ulazna reč $x_1 x_2 \cdots x_n \in X^+$, i pod njenim uticajem automat A prelazi iz stanja a u stanje a_n preko niza *međustanja* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, a na izlaz se jedan za drugim šalju izlazni signali $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$, odnosno izlazna reč $y_1 y_2 \cdots y_n \in Y^+$. Naravno, ako na ulaz automata dospe prazna reč, tada automat ostaje u istom stanju i nema izlaznog signala (na izlaz se šalje prazna reč).

Zadnje stanje a_n u nizu datom u (3.1), odnosno (3.2), označavamo sa au. Ovom oznakom zadato je preslikavanje

$$(a, u) \mapsto au \tag{3.6}$$

koje slika $A \times X^*$ u A, koje je takođe proširenje funkcije prelaza. U većem broju knjiga koje se bave Teorijom automata to preslikavanje se koristi umesto preslikavanja definisanog sa (3.1), i označava se upravo sa δ. Međutim, mi ćemo ovde koristiti oba ova preslikavanja, zavisno od konkretnih potreba, sa oznakama kakve smo dali. Primetimo da preslikavanje δ definisano sa (3.1) daje više informacija o radu automata nego preslikavanje definisano sa (3.6). Naime, preslikavanjem $(a, u) \mapsto au$ određeno je samo zadnje stanje au u koje se iz stanja a dospeva pod uticajem ulazne reči u, dok je preslikavanjem δ određen i niz međustanja preko kojih se stiže iz stanja a u stanje au. Sa druge strane, u slučaju kada nam taj niz međustanja nije bitan, zbog jednostavnijeg pisanja radije koristimo drugo preslikavanje.

Lako se dokazuje da važi sledeća lema.

Lema 3.1.1. *Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Tada za proizvoljne $a \in A$, $u, v \in X^*$ važi:*

(a) $\delta(a, uv) = \delta(a, u)\delta(au, v)$;

(b) $\lambda(a, uv) = \lambda(a, u)\lambda(au, v)$;

(c) $a(uv) = (au)v$.

Osim automata sa izlazom, Mealyevih i Mooreovih, koji će biti glavni predmet razmatranja u ovoj glavi, u narednim glavama radićemo i sa automatima bez izlaza i drugim tipovima automata, kao što su nedeterministički, potisni itd. Više informacija o raznim tipovima automata može se naći u navedenoj literaturi.

Literatura: Gécseg and Peák [1972], Huffman [1954], Mealy [1955], Moore [1956], Rabin and Scott [1959], Shannon and McCarthy (eds.) [1956].

3.2. Predstavljanje automata

Najprirodniji način predstavljanja automata jeste njihovo predstavljanje zadavanjem skupova i preslikavanja koji ga čine, korišćenjem uobičajenih metoda koji se generalno koriste u predstavljanju skupova i preslikavanja. To je posebno jednostavno kada se radi o konačnim automatima. Konačne automate je takođe veoma zgodno zadavati takozvanim prelazno–izlaznim tablicama, sličnim Cayleyevim tablicama koje se koriste za predstavljanje algebarskih struktura. *Prelazno–izlazna tablica* Mealyevog automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ je pravougaona tablica sa vrstama koje odgovaraju svakom ulaznom simbolu i kolonama koje odgovaraju stanjima. Na mestu u tablici koje odgovara vrsti određenoj ulaznim simbolom $x \in X$ i koloni određenoj stanjem $a \in A$ upisuje se uređeni par $(\delta(a,x), \lambda(a,x))$. To je prikazano u sledećoj tablici

$$\begin{array}{c|ccc} A & \dots & a & \dots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ x & \dots & (\delta(a,x), \lambda(a,x)) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Veoma pogodan način zadavanja automata je njihovo zadavanje pomoću grafova. Neka je dat Mealyev automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. *Prelazno-izlaznim grafom* automata $\mathcal{A}$ nazivamo označeni graf čiji skup čvorova je skup stanja A, skup oznaka je $X \times Y$, a grane i njihove oznake su određene na sledeći način: ako se iz stanja $a \in A$ pod uticajem ulaznog signala $x \in X$ prelazi u stanje $b\,(= \delta(a,x) \in A)$, pri čemu se emituje izlazni signal $y\,(= \lambda(a,x) \in Y)$, tada graf ima granu (a,b) koja je označena uređenim parom (x,y). Kao što smo istakli kada smo govorili o označenim grafovima, grane označenog grafa su u opštem slučaju označene sa više simbola, tj. skupom simbola, pa ako je M skup svih oznaka iz $X \times Y$ pridruženih grani (a,b), tada kažemo da je ta grana označena skupom M.

Primer 3.2.1. Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, gde je

$$A = \{a, b, c\}, \quad X = \{x, x', x''\} \quad \text{i} \quad Y = \{y, y'\},$$

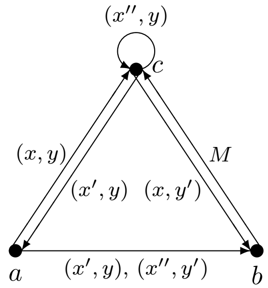
i funkcije prelaza i izlaza su definisane sa:

$$\begin{gathered} \delta(a,x) = \delta(b,x) = \delta(b,x') = \delta(b,x'') = \delta(c,x'') = c, \\ \delta(a,x') = \delta(a,x'') = \delta(c,x) = b, \;\; \delta(c,x') = a \\ \lambda(a,x) = \lambda(a,x') = \lambda(b,x) = \lambda(c,x') = \lambda(c,x'') = y \\ \lambda(a,x'') = \lambda(b,x') = \lambda(b,x'') = \lambda(c,x) = y'. \end{gathered}$$

Prelazno-izlazna tablica ovog automata je sledeća

A	a	b	c
x	(c,y)	(c,y)	(b,y')
x'	(b,y)	(c,y')	(a,y)
x''	(b,y')	(c,y')	(c,y)

dok je njegov prelazno-izlazni graf dat sa



gde je $M = \{(x, y), (x', y'), (x'', y')\}$.

Kada se radi o inicijalnom automatu, tada pri njegovom zadavanju tablicom koristimo konvenciju prema kojoj je za inicijalno stanje rezervisano prvo mesto u nizu stanja.

Pri zadavanju Mooreovih automata, umesto parova $(\delta(a, x), \lambda(a, x))$ u tablicu se upisuje samo $\delta(a, x)$, dok se preslikavanje μ zadaje tako što se iznad vrste u kojoj su poređana stanja dodaje još jedna vrsta u koju se upisuju njihovi znakovi, pri čemu se znak $\mu(a)$ stanja $a \in A$ piše upravo iznad a. To je prikazano u sledećoj tablici:

A	$\dots$	$\mu(a)$	$\dots$
	$\dots$	a	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$	
x	$\dots$	$\delta(a, x)$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$	

Prelazno-izlazni graf Mooreovog automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ ima nešto drugačiji izgled nego graf Mealyevog automata. Naime, kod grafa Mooreovog automata čvorovi su označeni uređenim parovima oblika (a, y), gde je $a \in A$, $y \in Y$ i $\mu(a) = y$, a grane su označene samo odgovarajućim ulaznim simbolima.

Primer 3.2.2. Neka je dat Mooreov automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$, gde je

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad X = \{x_1, x_2\}, \quad Y = \{y_1, y_2\},$$

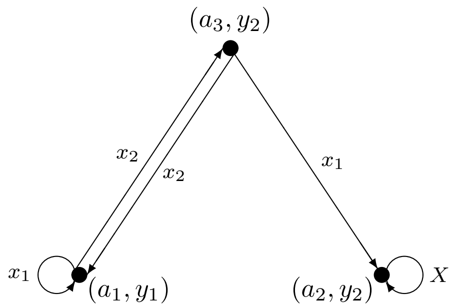
i funkcije δ i μ su zadate sa:

$$\delta(a_1, x_1) = \delta(a_3, x_2) = a_1, \quad \delta(a_1, x_2) = a_3,$$
$$\delta(a_2, x_1) = \delta(a_2, x_2) = \delta(a_3, x_1) = a_2$$
$$\mu(a_1) = y_1, \quad \mu(a_2) = \mu(a_3) = y_2.$$

Ovaj automat zadaje se tablicom

A	y_1	y_2	y_2
	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_3	a_2	a_1

i predstavlja se sledećim prelazno-izlaznim grafom



Automat A može biti zadat kao Mealyev automat tablicom

A	a_1	a_2	a_3
x_1	(a_1, y_1)	(a_2, y_2)	(a_2, y_2)
x_2	(a_3, y_2)	(a_2, y_2)	(a_1, y_1)

Primer 3.2.3. Uzmimo da prekidač lampe radi na sledeći način: Pritiskom na dugme on ili zatvara ili otvara električno kolo zavisno od toga da li je ono ranije bilo otvoreno ili zatvoreno. Sistem koji se satoji od lampe i prekidača možemo razmatrati kao Mooreov automat sa dva stanja – *kolo je otvoreno* i *kolo je zatvoreno*, jednim ulaznim signalom – *pritiskanje dugmeta* i dva izlazna signala – *lampa svetli* i *lampa ne svetli*. Rad ovakvog automata predstavljen je sledećom tablicom:

Lampa	lampa svetli	lampa ne svetli
	kolo je zatvoreno	kolo je otvoreno
pritiskanje dugmeta	kolo je otvoreno	kolo je zatvoreno

Kod zadavanja automata bez izlaza u tablicu se upisuju samo vrednosti funkcije prelaza, tj. imamo samo *tablicu prelaza* čiji je izgled prikazan na sledeći način:

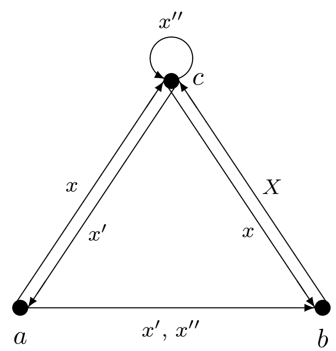
A	$\dots$	a	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$	
x	$\dots$	$\delta(a, x)$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$	

Kod ovakvih automata imamo samo *graf prelaza* kod koga su čvorovi označeni stanjima a grane odgovarajućim ulaznim simbolima.

Primer 3.2.4. Automat bez izlaza $A = (A, X, \delta)$ koji odgovara Mealyevom automatu $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ iz Primera 3.2.1 ima sledeću tablicu prelaza

A	a	b	c
x	c	c	b
x'	b	c	a
x''	b	c	c

dok je njegov graf prelaza dat sa



3.3. Homomorfizmi, kongruencije, podautomati i generatorni skupovi

Slično kao kod algebarskih struktura, i kod automata se mogu definisati pojmovi kao što su homomorfizam, kongruencija, podautomat, generatorni skup i drugi. Kod automata bez izlaza to je veoma lako. Naime, neka je $A = (A, X, \delta)$ automat bez izlaza, i neka je svakom ulaznom simbolu $x \in X$ pridruženo preslikavanje η_x skupa A definisano sa $a\eta_x = ax\,(= \delta(a, x)\,)$, za $a \in A$. Uobičajeno je da se i za ovo preslikavanje koristi isti naziv kao i za preslikavanje δ – *funkcija prelaza*. Ako preslikavanja η_x, $x \in X$, tretiramo kao unarne operacije na skupu stanja A, tada dobijamo unarnu algebru pridruženu automatu A koju najčešće poistovećujemo sa tim automatom. Drugim rečima, svaki automat može se tretirati kao unarna algebra, a može se učiniti i obratno, tj. svaka unarna algebra može se tretirati kao automat. Prema tome, svi napred navedeni algebarski pojmovi će kod takvih automata imati svoje uobičajeno algebarsko značenje.

Međutim, ovde se nećemo mnogo zadržavati na automatima bez izlaza, jer je njima posvećena posebna glava knjige, već ćemo pažnju posvetiti automatima sa izlazom. Videćemo da su definicije pojmova homomorfizma, kongruencije, podautomata i generatornog skupa automata sa izlazom slične definicijama odgovarajućih algebarskih pojmova, ali da postoje i izvesne razlike, jer ovde u obzir moramo uzeti i izlazni deo automata. Definicije koje će biti date važe za automate koji imaju iste skupove ulaznih i iste skupove izlaznih simbola. Takve automate nazivaćemo *automatima istog tipa*[1]. Slične definicije mogu se dati i za automate koji nisu istog tipa, ali takve definicije ovde neće biti neophodne, zbog čega ih izostavljamo.

Pod pojmom *podskupa* automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ podrazumevaćemo svaki podskup njegovog skupa stanja a pod pojmom *relacije na automatu* $\mathcal{A}$ podrazumevaćemo svaku relaciju na njegovom skupu stanja. Slično, ako su $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ dva automata istog tipa, pod pojmom *preslikavanja* iz automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{A}'$ podrazumevaćemo svako preslikavanje koje skup stanja automata $\mathcal{A}$ slika u skup stanja automata $\mathcal{A}'$.

Neka su sada $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ dva automata istog tipa za koje važi da je $A' \subseteq A$, preslikavanja δ' i λ' su restrikcije preslikavanja δ i λ na $A' \times X$, tim redom, i za svaki $a \in A'$ i $x \in X$ važi $\delta(a, x) \in A'$. Tada automat $\mathcal{A}'$ nazivamo *podautomatom* automata $\mathcal{A}$, a ako je A' pravi podskup od A, onda kažemo da je $\mathcal{A}'$ *pravi podautomat* od $\mathcal{A}$. Drugim rečima, podskup A' automata $\mathcal{A}$ je podautomat od $\mathcal{A}$ ako i samo ako je *zatvoren za prelaze* u automatu $\mathcal{A}$, što znači da za svaki $a \in A'$ i $x \in X$ važi $\delta(a, x) \in A'$. U slučaju da je $\mathcal{A}$ inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, i A' osim gornjih uslova ispunjava i uslov da je $a_0 \in A'$, tada za $\mathcal{A}'$ kažemo da je *inicijalni podautomat* od $\mathcal{A}$.

Ako su $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ automati istog tipa i $\varphi : A \to A'$ je preslikavanje takvo da za svaki $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$(\delta(a, x))\varphi = \delta'(a\varphi, x) \qquad \text{i} \qquad \lambda(a, x) = \lambda'(a\varphi, x),$$

tada preslikavanje φ nazivamo *homomorfizmom* automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{A}'$. Lako se proverava da tada $A\varphi$ jeste podautomat automata $\mathcal{A}'$, pri čemu $A\varphi$ nazivamo *homomorfnom slikom* automata $\mathcal{A}$. Osim toga, ako je φ i bijekcija, onda ga nazivamo *izomorfizmom* automata $\mathcal{A}$ na automat $\mathcal{A}'$, a za automate

[1] U stvari, možemo reći da su dva automata istog tipa ako su im skupovi ulaznih simbola, odnosno skupovi izlaznih simbola, iste kardinalnosti. Međutim, kako takve skupove poistovećujemo, a kao što znamo, i monoidi nad takvim skupovima su izomorfni, to nema potrebe komplikovati te definicije.

$\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ kažemo da su *izomorfni*. Kao što je uobičajeno u algebri, izomorfne automate poistovećujemo.

Lako se proverava da važi sledeća lema:

Lema 3.3.1. *Neka je φ homomorfizam automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ u automat $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$. Tada za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$ važi:*

(a) $\delta(a, u) = a_1 a_2 \cdots a_n \;\Rightarrow\; \delta'(a\varphi, u) = (a_1\varphi)(a_2\varphi)\cdots(a_n\varphi)$;
(b) $\lambda(a, u) = \lambda'(a\varphi, u)$;
(c) $(au)\varphi = (a\varphi)u$.

U slučaju kada su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ inicijalni automati, tada *homomorfizmom inicijalnih automata* nazivamo homomorfizam automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{A}'$ koji inicijalno stanje automata $\mathcal{A}$ slika u inicijalno stanje automata $\mathcal{A}'$.

Sledeći pojam koji uvodimo je pojam kongruencije na automatu. Neka je ϱ relacija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Ako za sve $a, b \in A$ i $x \in X$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi da je

$$(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \varrho \quad \text{i} \quad \lambda(a, x) = \lambda(b, x),$$

tada za ϱ kažemo da je *saglasna* (*kompatibilna*) na $\mathcal{A}$, a saglasnu relaciju ekvivalencije na $\mathcal{A}$ nazivamo *kongruencijom* na automatu $\mathcal{A}$. Sledeća lema pokazuje da se to svojstvo kongruencija sa slova prenosi i na proizvoljne reči.

Lema 3.3.2. *Neka je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Tada za $a, b \in A$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi da je*

$$(au, bu) \in \varrho \qquad i \qquad \lambda(a, u) = \lambda(b, u),$$

za svaki $u \in X^*$.

D o k a z . Tvrđenje leme se lako dokazuje indukcijom po dužini reči ostavlja se čitaocu za vežbu. □

Ako je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A}$, tada slično kao kod algebarskih struktura uvodimo pojam faktor-automata na sledeći način: Na faktor-skupu A/ϱ definišemo preslikavanja

$$\delta_\varrho : (A/\varrho) \times X \to A/\varrho \quad \text{i} \quad \lambda_\varrho : (A/\varrho) \times X \to Y,$$

sa

$$\delta_\varrho(a\varrho, x) = (\delta(a, x))\varrho \quad \text{i} \quad \lambda_\varrho(a\varrho, x) = \lambda(a, x),$$

za sve $a \in A$ i $x \in X$. Koristeći činjenicu da je ϱ kongruencija na A, lako se proverava da su preslikavanja δ_ϱ i λ_ϱ dobro definisana, tj. da njihove vrednosti ne zavise od izbora predstavnika ϱ-klasa, pa $(A/\varrho, X, Y, \delta_\varrho, \lambda_\varrho)$ jeste automat koji obeležavamo sa A/ϱ i nazivamo *faktor-automatom* automata A u odnosu na kongruenciju ϱ.

Vezu između kongruencija na automatu i homomorfizama daje nam sledeća teorema.

Teorema 3.3.1. (Teorema o homomorfizmu). *Ako je ϱ kongruencija na automatu A, tada je $\varrho^\natural$ homomorfizam iz A na A/ϱ.*

Obratno, ako je φ homomorfizam automata $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ na automat $A' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$, tada je $\ker\varphi$ *kongruencija na A i preslikavanje $\Phi : A/\varrho \to A'$ definisano sa*

$$(a \in A) \qquad\qquad \Phi : (a \ker\varphi) \mapsto a\varphi$$

je izomorfizam iz A/ϱ na A'.

Dokaz. Dokaz je elementaran i ostavlja se čitaocu za vežbu. □

Neka je H neprazan podskup automata $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Ako za svako stanje $a \in A$ postoji stanje $b \in H$ i ulazna reč $u \in X^*$ tako da je $a = bu$, tada H nazivamo *generatornim skupom* automata A i kažemo da H *generiše* automat A, odnosno da je automat A *generisan skupom* H. Drugim rečima, skup H generiše automat A ako se u svako stanje automata A može stići iz nekog stanja skupa H. Dalje, za H kažemo da je *minimalan generatorni skup* automata A ako nijedan pravi podskup od H ne generiše A. Automat A je *konačno generisan* ako ima konačan generatorni skup. Ako je A generisan nekim svojim jednoelementnim podskupom $\{a\}$, tada kažemo da je A *monogeni automat generisan stanjem a*. Ako je A inicijalni automat i generisan je svojim inicijalnim stanjem, tj. u svako stanje iz A se može stići iz inicijalnog stanja, tada A nazivamo *povezanim inicijalnim automatom*. Automat koji je generisan svakim svojim stanjem nazivamo *jako povezanim*. Ako je H proizvoljan podskup automata A, tada se lako proverava da skup

$$S(H) = \{a \in A \mid (\exists b \in H)(\exists u \in X^*)\, a = bu\}$$

jeste najmanji podautomat od A koji sadrži skup H, i nazivamo ga *podautomatom* od A *generisanim skupom* H. Ako je A inicijalni automat, tada njegov podautomat generisan inicijalnim stanjem nazivamo *stablom automata A*.

3.4. Preslikavanja indukovana automatima

Svakom stanju a automata $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ možemo pridružiti preslikavanje $\phi_a : X^* \to Y^*$ definisano sa

$$u\phi_a = \lambda(a, u), \quad \text{za } u \in X^*, \tag{3.7}$$

koje nazivamo *preslikavanje indukovano stanjem a automata A*. Ako je $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ inicijalni automat, tada preslikavanje ϕ_{a_0} indukovano inicijalnim stanjem a_0 automata A nazivamo *preslikavanje indukovano inicijalnim (Mealyevim) automatom*.

Štaviše, ako su dati slobodni monoidi X^* i Y^* i preslikavanje $\phi : X^* \to Y^*$, tada za ϕ kažemo da može biti indukovano inicijalnim Mealyevim automatom ako postoji neki inicijalni Mealyev automat $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ takav da je $\phi = \phi_{a_0}$, a za automat A kažemo da *predstavlja* ili *realizuje* preslikavanje ϕ.

Šta praktično predstavljaju preslikavanja indukovana automatima? Uzmimo da automat A počne sa radom iz stanja a. Kao rezultat njegovog rada imamo da se ulaznim rečima pridružuju odgovarajuće reči, i to pridruživanje je određeno upravo preslikavanjem ϕ_a. Možemo reći i da automat A vrši obradu informacija na taj način što se svakoj ulaznoj informaciji, predstavljenom nekom reči iz X^* pridružuje neka informacija predstavljena nekom reči iz Y^*. Prirodno se postavlja pitanje: Kakve transformacije informacija mogu biti realizovane automatima? To pitanje se matematičkim jezikom može iskazati i na sledeći način: Pod kojim uslovima preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* može biti indukovano nekim inicijalnim Mealyevim automatom? Odgovor na to pitanje biće dat u daljem tekstu.

Najpre uvodimo sledeći pojam. Preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* nazivamo *automatovnim preslikavanjem* ako zadovoljava sledeće uslove:

(A1) ϕ očuvava dužinu reči, tj. $|u\phi| = |u|$, za svaki $u \in X^*$;

(A2) svaki levi odsečak proizvoljne reči $u \in X^*$ se preslikavanjem ϕ slika u levi odsečak reči $u\phi$.

Naziv "automatovno preslikavanje" biće opravdan osobinom ovih preslikavanja da mogu biti indukovana inicijalnim Mealyevim automatom.

Podsetimo se da za reč u i prirodan broj $k \leq |u|$, $r_k(u)$ označava *desni odsečak* reči u dužine k.

Teorema 3.4.1. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Svakoj reči $u \in X^*$ pridružimo preslikavanje $\phi_u : X^* \to Y^*$ definisano sa*

$$v\phi_u = r_{|v|}((uv)\phi), \quad \text{za } v \in X^*. \tag{3.8}$$

Tada:

(a) *Za proizvoljne $u, v \in X^*$, $v\phi_u$ je jedinstveno rešenje jednačine*

$$(uv)\phi = (u\phi)w \tag{3.9}$$

u Y^*, po promenljivoj w.

(b) *ϕ_u je automatovno preslikavanje, za svaki $u \in X^*$, i $\phi_e = \phi$.*
(c) *$\phi_{uv} = (\phi_u)_v$, za sve $u, v \in X^*$.*

Dokaz. (a) Kako je u levi odsečak od uv, to prema osobini (A1) automatovnih preslikavanja dobijamo da je $u\phi$ levi odsečak od $(uv)\phi$, tj. da je $(uv)\phi = (u\phi)w$, za neki $w \in Y^*$. Prema tome, jednačina (3.9) ima rešenje u Y^*. Zbog kancelativnosti u Y^*, to rešenje je jedinstveno. Konačno, zbog toga što ϕ očuvava dužinu reči, imamo

$$|(uv)\phi| = |uv| = |u| + |v| \qquad \text{i} \qquad |(u\phi)w| = |u\phi| + |w| = |u| + |w|,$$

odakle sledi $|v| = |w|$. Prema tome,

$$w = r_{|v|}((uv)\phi) = v\phi_u.$$

(b) Uzmimo proizvoljan $u \in X^*$. Iz (3.8) se jasno vidi da ϕ_u očuvava dužinu reči. Neka su $v, v' \in X^*$ reči takve da je v' levi odsečak od v, tj. $v = v'v''$, za neki $v'' \in X^*$. Tada prema (a) imamo da je

$$(uv)\phi = (uv'v'')\phi = ((uv')\phi)(v''\phi_{uv'}) = (u\phi)(v'\phi_u)(v''\phi_{uv'}),$$

odakle zbog jedinstvenosti rešenja jednačine (3.9) sledi

$$v\phi_u = (v'\phi_u)(v''\phi_{uv'}).$$

Prema tome, $v'\phi_u$ je levi odsečak od $v\phi_u$, što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da je ϕ_u automatovno preslikavanje.

Dalje, ako u (3.8) stavimo da je $u = e$, onda neposredno sledi da je $\phi_e = \phi$.

(c) Za proizvoljan $w \in X^*$ je

$$(uvw)\phi = (u\phi)((vw)\phi_u) = (u\phi)(v\phi_u)(w(\phi_u)_v) = ((uv)\phi)(w(\phi_u)_v),$$

pa zbog (a) dobijamo da je

$$w\phi_{uv} = w(\phi_u)_v.$$

Prema tome, važi (c). □

Preslikavanja ϕ_u, $u \in X^*$, definisana u prethodnoj teoremi nazivamo *stanjima automatovnog preslikavanja* ϕ. Zašto smo izabrali takav naziv biće razjašnjeno kasnije, kada budemo konstruisali donji automat određen preslikavanjem ϕ.

Glavna teorema ovog poglavlja je sledeća:

Teorema 3.4.2. *Preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* može biti indukovano inicijalnim Mealyevim automatom ako i samo ako je automatovno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je preslikavanje ϕ indukovano inicijalnim Mealyevim automatom $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$, tj. $u\phi = \lambda(a_0, u)$, za svaki $u \in X^*$. Iz definicije proširenih funkcija prelaza i izlaza se jasno vidi da ϕ očuvava dužinu reči. Uzmimo proizvoljnu reč $u = x_1x_2\cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Prema definiciji proširenih funkcija prelaza i izlaza je

$$\begin{aligned} \delta(a_0, u) &= a_1a_2\cdots a_n, \\ \lambda(a_0, u) &= y_1y_2\cdots y_n, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gde je

$$\begin{aligned} &a_1 = \delta(a_0, x_1),\ a_2 = \delta(a_1, x_2),\ \ldots,\ a_n = \delta(a_{n-1}, x_n), \\ &y_1 = \lambda(a_0, x_1),\ y_2 = \lambda(a_1, x_2)\ \ldots,\ y_n = \lambda(a_{n-1}, x_n), \end{aligned} \tag{3.11}$$

što znači da je $u\phi = y_1y_2\cdots y_n$. Sa druge strane, proizvoljan levi odsečak v reči u je oblika $v = x_1\cdots x_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a iz (3.10) i (3.11) takođe sledi da je

$$v\phi = \lambda(a_0, v) = \lambda(a_0, x_1\cdots x_i) = y_1\cdots y_i,$$

pa je, prema tome, $v\phi$ levi odsečak reči $u\phi$. Time je dokazano da je ϕ automatovno preslikavanje.

Obratno, neka je ϕ automatovno preslikavanje. Definišimo inicijalni Mealyev automat A^ϕ na sledeći način: $A^\phi = (X^*, e, X, Y, \delta^\phi, \lambda^\phi)$, pri čemu su preslikavanja δ^ϕ i λ^ϕ definisana sa:

$$\begin{aligned} \delta^\phi(u,x) &= ux \\ \lambda^\phi(u,x) &= x\phi_u \end{aligned} \qquad (u \in X^*,\ x \in X). \tag{3.12}$$

Da bi smo dokazali da je preslikavanje ϕ indukovano automatom A^ϕ, treba dokazati da za proizvoljnu reč $u \in X^*$ važi

$$u\phi = \lambda^\phi(e,u). \tag{3.13}$$

To ćemo dokazati indukcijom po dužini reči u. Jasno je da to važi za reči dužine 0 i 1. Uzmimo da (3.13) važi za sve reči dužine n i dokažimo da važi i za reči dužine $n+1$. Neka je $u \in X^*$ i $u = x_1x_2\dots x_{n+1}$, za neke $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in A$. Sa u' označimo reč $x_1x_2\cdots x_n$. Prema Teoremi 3.4.1, $u\phi = (u'\phi)(x_{n+1}\phi_{u'})$. Dalje, prema indukcijskoj hipotezi je $u'\phi = \lambda^\phi(e,u')$, a prema (3.13) je $x_{n+1}\phi_{u'} = \lambda^\phi(u', x_{n+1})$. Prema tome, ostaje da se dokaže

$$\lambda^\phi(e,u')\lambda^\phi(u',x_{n+1}) = \lambda^\phi(e,u). \tag{3.14}$$

Zaista, prema definiciji proširenih funkcija prelaza i izlaza imamo da je

$$\begin{aligned} \delta^\phi(e,u) &= a_1a_2\cdots a_{n+1}, \\ \lambda^\phi(e,u) &= y_1y_2\cdots y_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

gde je

$$\begin{array}{l} a_1 = \delta^\phi(e,x_1),\ a_2 = \delta^\phi(a_1,x_2),\ \dots,\ a_n = \delta^\phi(a_{n-1},x_n),\ a_{n+1} = \delta^\phi(a_n,x_{n+1}), \\ y_1 = \lambda^\phi(e,x_1),\ y_2 = \lambda^\phi(a_1,x_2)\ \dots,\ y_n = \lambda^\phi(a_{n-1},x_n),\ y_{n+1} = \lambda^\phi(a_n,x_{n+1}). \end{array}$$

Na isti način dobijamo da je

$$\begin{aligned} \delta^\phi(e,u') &= a_1a_2\cdots a_n, \\ \lambda^\phi(e,u') &= y_1y_2\cdots y_n. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Sa druge strane, prema (3.12) imamo da je $a_1 = \delta^\phi(e,x_1) = ex_1 = x_1$, $a_2 = \delta^\phi(a_1,x_2) = x_1x_2$, itd., čime dobijamo da je $a_n = x_1x_2\cdots x_n = u'$. Sada imamo da je

$$y_{n+1} = \lambda^\phi(a_n,x_{n+1}) = \lambda^\phi(u',x_{n+1}),$$

pa koristeći (3.15) i (3.16) dobijamo (3.14). Ovim je teorema dokazana. □

Za automatovno preslikavanje ϕ, automat A^{ϕ} konstruisan kao u prethodnoj teoremi nazivamo *gornjim automatom* određenim sa ϕ. Smisao ovog termina biće objašnjen kasnije.

Konstrukcija gornjeg automata određenog automatovnim preslikavanjem nije jedini način da se iz zadatog automatovnog preslikavanja konstruiše automat. Jedan drugi način prikazan je u sledećoj lemi:

Lema 3.4.1. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje i A_ϕ je skup njegovih različitih stanja. Tada su sa*

$$\begin{aligned} \delta_\phi(\phi_u, x) &= \phi_{ux} \\ \lambda_\phi(\phi_u, x) &= x\phi_u \end{aligned} \qquad (u \in X^*,\ x \in X) \tag{3.17}$$

definisana preslikavanja $\delta_\phi : A_\phi \times X \to A_\phi$ i $\lambda_\phi : A_\phi \times X \to Y$, i $\mathcal{A}_\phi = (A_\phi, X, Y, \delta_\phi, \lambda_\phi)$ je automat.

Osim toga, za sve $u \in X^*$ i $v = x_1x_2\cdots x_n$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, važi:

$$\delta_\phi(\phi_u, v) = \phi_{ux_1}\phi_{ux_1x_2}\cdots\phi_{ux_1x_2\cdots x_n}; \tag{3.18}$$

$$(\phi_u)v = \phi_{uv}; \tag{3.19}$$

$$\lambda(\phi_u, v) = v\phi_u. \tag{3.20}$$

Dokaz. Najpre treba dokazati da su preslikavanja δ_ϕ i λ_ϕ dobro definisana. Pre svega, treba dokazati da za $u, v \in X^*$ i proizvoljan $x \in X$ važi:

$$\phi_u = \phi_v \;\Rightarrow\; \phi_{ux} = \phi_{vx}; \tag{3.21}$$

$$\phi_u = \phi_v \;\Rightarrow\; x\phi_u = x\phi_v. \tag{3.22}$$

Zaista, implikacija (3.21) je neposredna posledica Teoreme 3.4.1 (c), jer $\phi_u = \phi_v$ povlači $\phi_{ux} = (\phi_u)_x = (\phi_v)_x = \phi_{vx}$, dok je implikacija (3.22) jasna. Prema tome, δ_ϕ i λ_ϕ su dobro definisana preslikavanja. Takođe, λ_ϕ zaista slika $A_\phi \times X$ u Y. Naime, za proizvoljne $u \in X^*$, $x \in X$ imamo da je $|x\phi_u| = 1$, jer ϕ_u očuvava dužinu reči, pa je dakle $x\phi_u \in Y$. Ovim smo dokazali da su preslikavanja δ_ϕ i λ_ϕ dobro definisana, pa je, prema tome, $\mathcal{A}_\phi$ zaista automat.

Dalje, za proizvoljan $u \in X^*$ i $v = x_1x_2\cdots x_n$, za $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, imamo da važi

$$\delta_\phi(\phi_u, v) = a_1a_2\cdots a_n, \tag{3.23}$$

gde je

$$a_1 = \delta_\phi(\phi_u, x_1),\; a_2 = \delta_\phi(a_1, x_2),\; \dots\;,\; a_n = \delta_\phi(a_{n-1}, x_n).$$

Međutim, prema (3.17) je

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta_\phi(\phi_u, x_1) = \phi_{ux_1}, \\ a_2 &= \delta_\phi(a_1, x_2) = \delta_\phi(\phi_{ux_1}, x_2) = \phi_{ux_1x_2}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n &= \delta_\phi(a_{n-1}, x_n) = \delta_\phi(\phi_{ux_1x_2\cdots x_{n-1}}, x_n) = \phi_{ux_1x_2\cdots x_n}, \end{aligned}$$

pa, sobzirom na (3.23), dobijamo (3.18). Jednakost (3.19) sledi neposredno iz (3.18). Konačno, jednakost (3.20) ćemo dokazati indukcijom po dužini reči v. Jasno je da (3.20) važi za sve reči dužine 1. Prema tome, ostaje da se dokaže da iz indukcijske pretpostavke da (3.20) važi za sve reči dužine $k \leq n-1$ sledi da (3.20) važi i za v. Zaista, prema indukcijskoj pretpostavci, za $v' = x_1x_2\cdots x_{n-1}$ imamo da je

$$\lambda_\phi(\phi_u, v') = v'\phi_u, \tag{3.24}$$

i dalje

$$\begin{aligned} \lambda_\phi(\phi_u, v) &= \lambda_\phi(\phi_u, v'x_n) \\ &= \lambda_\phi(\phi_u, v')\lambda_\phi((\phi_u)v', x_n) \\ &= \lambda_\phi(\phi_u, v')\lambda_\phi(\phi_{uv'}, x_n) && \text{(prema (3.19))} \\ &= (v'\phi_u)(x_n\phi_{uv'}) && \text{(prema (3.24) i (3.17))} \\ &= (v'\phi_u)(x_n(\phi_u)_{v'}) && \text{(prema Teoremi 3.4.1 (c))} \\ &= (v'x_n)\phi_u = v\phi_u\,, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, (3.20) važi za sve reči $u, v \in X^*$. Ovim je dokaz leme kompletiran. □

Automat A_ϕ konstruisan u Lemi 3.4.1 nazivamo *donjim automatom* određenim sa ϕ. I za ovakav automat se može dokazati da indukuje preslikavanje ϕ. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 3.4.3. *Svako automatovno preslikavanje je indukovano donjim automatom određenim njime.*

Dokaz. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Prema Teoremi 3.4.1 (b), $\phi = \phi_e$, pa iz (3.18) dobijamo da za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$\lambda_\phi(\phi_e, u) = u\phi_e = u\phi.$$

Dakle, ϕ je indukovano automatom A_ϕ. □

Dalje dokazujemo još jednu lemu.

Lema 3.4.2. *Neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ proizvoljan automat koji indukuje automatovno preslikavanje $\phi : X^* \to Y^*$. Tada za proizvoljan $u \in X^*$ je $\phi_u = \phi_{a_0 u}$, tj. za svaki $v \in X^*$ važi*

$$v\phi_u = \lambda(a_0 u, v).$$

Dokaz. Uzmimo $u, v \in X^*$. Tada je

$$\begin{aligned} v\phi_u &= r_{|v|}((uv)\phi) && \text{(prema (3.8))} \\ &= r_{|v|}(\lambda(a_0, uv)) && \text{(prema (3.7))} \\ &= r_{|v|}(\lambda(a_0, u)\lambda(a_0 u, v)) && \text{(prema Lemi 3.1.1)} \\ &= \lambda(a_0 u, v) && \text{(jer je } |\lambda(a_0 u, v)| = |v|\text{)} \end{aligned}$$

čime je lema dokazana. □

Veza gornjeg i donjeg automata određenog automatovnim preslikavanjem i drugih automata koji ga indukuju data je sledećom teoremom. Ta teorema u izvesnom smislu opravdava upotrebu naziva "gornji" i "donji" automat.

Teorema 3.4.4. *Neka je ϕ automatovno preslikavanje, $\mathcal{A}$ je proizvoljan inicijalni automat koji indukuje ϕ i $\mathcal{A}'$ je stablo automata $\mathcal{A}$. Tada*

(a) *$\mathcal{A}'$ je homomorfna slika od $\mathcal{A}^\phi$;*
(b) *$\mathcal{A}_\phi$ je homomorfna slika od $\mathcal{A}'$.*

Dokaz. Neka $\phi : X^* \to Y^*$, $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ i neka je A' skup stanja od $\mathcal{A}'$.

(a) Definišimo preslikavanje $\varphi : X^* \to A'$ sa

$$u\varphi = a_0 u \qquad (u \in X^*). \tag{3.25}$$

Dokazaćemo da je φ homomorfizam iz $\mathcal{A}^\phi$ na $\mathcal{A}'$. Prvo, jasno je da φ slika X^* na A'. Dalje, uzmimo proizvoljne $u \in X^*$, $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned} (\delta^\phi(u, x))\varphi &= (ux)\varphi && \text{(prema (3.12))} \\ &= a_0 ux && \text{(prema (3.25))} \\ &= a_0 ux = (a_0 u)x && \text{(prema (3.25) i Lemi 3.1.1)} \\ &= \delta(a_0 u, x) && \\ &= \delta(u\varphi, x) && \text{(prema (3.25)),} \end{aligned}$$

i, sa druge strane,

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\phi}(u,x) &= x\phi_u && \text{(prema (3.12))}\\
&= r_1((ux)\phi) && \text{(prema (3.8))}\\
&= r_1(\lambda(a_0,ux)) && \text{(prema (3.7))}\\
&= r_1(\lambda(a_0,u)\lambda(a_0u,x)) && \text{(prema Lemi 3.1.1)}\\
&= \lambda(a_0u,x) && \text{(jer je } |\lambda(a_0u,x)|=1\text{)}\\
&= \lambda(u\varphi,x) && \text{(prema (3.25))},
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali da je φ homomorfizam.

(b) Definišimo preslikavanje $\psi : A' \to A_\phi$ sa

$$
a\psi = \phi_u \;\Leftrightarrow\; a = a_0u \qquad (a \in A'). \tag{3.26}
$$

Najpre ćemo dokazati da je ψ dobro definisano. Jasno, za svaki $a \in A'$ postoji $u \in X^*$ tako da je $a = a_0u$. Neka su $u, v \in X^*$ reči za koje je $a = a_0u = a_0v$. Tada prema Lemi 3.4.2 imamo da je

$$
\phi_u = \phi_{a_0u} = \phi_{a_0v} = \phi_v.
$$

Na ovaj način smo dokazali da je ψ dobro definisano.

Dalje, uzmimo proizvoljne $a \in A'$, $x \in X$. Tada je $a = a_0u$, za neki $u \in X^*$, odakle je

$$
\begin{aligned}
(\delta(a,x))\psi &= (ax)\psi && \text{(jer je } \delta(a,x)=ax\text{)}\\
&= (a_0ux)\psi && \text{(jer je } a=a_0u\text{)}\\
&= \phi_{ux} && \text{(prema (3.26))}\\
&= \delta_\phi(\phi_u,x) && \text{(prema (3.17))}\\
&= \delta_\phi(a\psi,x) && \text{(jer je } a\psi=\phi_u\text{)},
\end{aligned}
$$

i, sa druge strane,

$$
\begin{aligned}
(\lambda(a,x))\psi &= \lambda(a_0u,x) && \text{(jer je } a=a_0u\text{)}\\
&= x\phi_u && \text{(prema Lemi 3.4.1)}\\
&= \lambda_\phi(\phi_u,x) && \text{(prema (3.17))}\\
&= \lambda_\phi(a\psi,x) && \text{(jer je } a\psi=\phi_u\text{)}.
\end{aligned}
$$

Dakle, ψ je homomorfizam iz A' u A_ϕ. Jasno, za proizvoljan $\phi_u \in A_\phi$ je $\phi_u = (a_0u)\psi$, pa ψ slika A' na A_ϕ. Time je dokazano da važi (b). $\square$

Na kraju ovog odeljka dajemo jedan primer automatovnog preslikavanja i njegovog minimalnog automata.

Primer 3.4.1. Neka je $X = Y = \{0, 1\}$ i preslikavanje $\phi : X^* \to Y^*$ je definisano na sledeći način:

(i) Ako 0101 nije podreč od u, tada stavljamo $u\phi = u$.
(ii) Ukoliko je 0101 podreč od u, tada preslikavanje ϕ sva slova koja se u u javljaju posle prvog pojavljivanja podreči 0101 preinačuje u 0. Drugim rečima, ako u predstavimo u obliku $u = p0101q$, gde su $p, q \in X^*$ i 0101 nije podreč od $p010$, tada je $u\phi = (p0101q)\phi = p01010^{|q|}$.

Nije teško videti da je ϕ automatovno preslikavanje. Da bi smo našli donji automat tog preslikavanja, odredićemo njegova stanja. Naime, za proizvoljnu reč $u \in X^*$ odredićemo stanje ϕ_u preslikavanja ϕ. Razlikujemo nekoliko slučajeva:

(1) Neka je 0101 podreč od u. Tada je $u\phi = p01010^{|q|}$, gde je $u = p0101q$ i $p, q \in X^*$ tako da 0101 nije podreč od $p010$, i za proizvoljnu reč $v \in X^*$ imamo da je

$$v\phi_u = r_{|v|}((uv)\phi) = r_{|v|}(p01010^{|q|+|v|}) = 0^{|v|}.$$

(2) Neka 0101 nije podreč od u. Tada je bitan sufiks reči u dužine tri, tj. poslednja tri slova te reči. Imamo sledeće podslučejeve:

(2.1) Jedna od reči 111 i 011 je sufiks od u. Tada, za proizvoljnu reč $v \in X^*$, 0101 je podreč od uv ako i samo ako je podreč od v, pa je

$$v\phi_u = r_{|v|}((uv)\phi) = r_{|v|}(u(v\phi)) = v\phi,$$

što znači da je $\phi_u = \phi$.

(2.2) Jedna od reči 000, 100 i 110 je sufiks od u. Neka je $v \in X^*$ proizvoljna reč. Ako je 101 prefiks od v, tada je

$$v\phi_u = r_{|v|}((uv)\phi) = r_{|v|}(u1010^{|v|-3}) = 1010^{|v|-3}.$$

Sa druge strane, ako 101 nije prefiks od v, tada je 0101 podreč od uv ako i samo ako je podreč od v, pa kao u slučaju (2.1) dobijamo da je $v\phi_u = v\phi$.

Prema tome, za proizvoljan $v \in X^*$ je

$$v\phi_u = \begin{cases} 1010^{|v|-3}, & \text{ako je 101 prefiks od } v, \\ v\phi, & \text{ako 101 nije prefiks od } v. \end{cases}$$

(2.3) Jedna od reči 001 i 101 je sufiks od u. Tada za proizvoljnu reč $v \in X^*$, kao u prethodnom slučaju dobijamo

$$v\phi_u = \begin{cases} 010^{|v|-2}, & \text{ako je 01 prefiks od } v, \\ v\phi, & \text{ako 01 nije prefiks od } v. \end{cases}$$

(2.4) Reč 010 je sufiks od u. Tada za proizvoljnu reč $v \in X^*$, kao u prethodnim slučajevima dobijamo

$$v\phi_u = \begin{cases} 10^{|v|-1}, & \text{ako je 1 prvo slovo u } v, \\ v\phi, & \text{ako je 0 prvo slovo u } v. \end{cases}$$

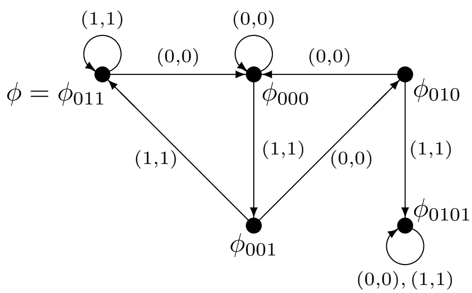
Prema tome, svako stanje automatovnog preslikavanja ϕ jednako je jednom od preslikavanja iz (1), (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4). Ne umanjujući opštost, možemo uzeti da sva stanja preslikavanja ϕ jesu sledeća preslikavanja

$$\phi_{0101},\ \phi_{011},\ \phi_{000},\ \phi_{001} \text{ i } \phi_{010}.$$

Pri tome je $\phi = \phi_{011}$. Dakle, prema definiciji donjeg automata A_ϕ automatovnog preslikavanja ϕ imamo da je to automat predstavljen tablicom

A_ϕ	ϕ_{0101}	ϕ_{000}	ϕ_{001}	ϕ_{010}	ϕ_{011}
0	$(\phi_{0101}, 0)$	$(\phi_{000}, 0)$	$(\phi_{010}, 0)$	$(\phi_{000}, 0)$	$(\phi_{000}, 0)$
1	$(\phi_{0101}, 0)$	$(\phi_{001}, 1)$	$(\phi_{011}, 1)$	$(\phi_{0101}, 1)$	$(\phi_{011}, 1)$

ili grafom



Literatura: Gécseg and Peák [1972], Glushkov [1961a], Letičevskiĭ [1962, 1965a], Raney [1958].

3.5. Ekvivalentni automati. Redukovani automati

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealyev automat. Sa $\Phi_{\mathcal{A}}$ ćemo označavati skup svih automatovnih preslikavanja indukovanih stanjima automata $\mathcal{A}$.

Ako su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$, onda za $a \in A$ i $a' \in A'$ kažemo da su *ekvivalentna stanja* ako a i a' indukuju isto automatovno preslikavanje, tj. ako je $\phi_a = \phi_{a'}$. Slično, za $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ kažemo da su *ekvivalentni automati* ako je $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{A}'}$, tj. ako je svako stanje automata $\mathcal{A}$ ekvivalentno nekom stanju automata $\mathcal{A}'$ i obratno. Jasno, ovako uvedena relacija među automatima je relacija ekvivalencije na skupu svih automata, što opravdava njen naziv. Dalje, ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ inicijalni automati, onda kažemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ *ekvivalentni inicijalni automati* ako su ekvivalentna njihova inicijalna stanja, tj. ako $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ indukuju isto automatovno preslikavanje.

Teorema 3.5.1. *Svaka homomorfna slika automata A je ekvivalentna sa tim automatom.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, $\mathcal{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ i φ je homomorfizam iz $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}'$. Tada prema Lemi 3.3.1, za proizvoljan $a \in A$ je

$$u\phi_a = \lambda(a, u) = \lambda'(a\varphi, u) = u\phi_{a\varphi},$$

za svaki $u \in X^*$. Prema tome, $\phi_a = \phi_{a\varphi}$, za svaki $a \in A$, pa kako φ slika A na A', to je $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{A}'}$, čime smo dokazali da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ ekvivalentni automati. □

Podsetimo se da se kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ definiše kao relacija ekvivalencije ϱ na A koja zadovoljava uslov da za proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi da je $(ax, bx) \in \varrho$ i $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$. Automati sa izlazom se od algebri razlikuju i po tome što kod njih, za razliku od algebri, univerzalna relacija ne mora biti najveća kongruencija, jer uopšte i ne mora biti kongruencija, zbog dosta jakog zahteva da u tom slučaju mora biti $\lambda(a, u) = \lambda(b, u)$, za sve $a, b \in A$ i $u \in X^*$. Ipak, svaki automat sa izlazom ima najveću kongruenciju, koja se konstruiše na sledeći način.

Teorema 3.5.2. *Za proizvoljan automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, relacija $\varrho_{\mathcal{A}}$ na A definisana sa*

$$(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}} \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in X^*)\ \lambda(a, u) = \lambda(b, u)$$

$(a, b \in A)$, je najveća kongruencija na $\mathcal{A}$.

Dokaz. Lako se proverava da je $\varrho_{\mathcal{A}}$ relacija ekvivalencije na A. Da bi smo dokazali njenu saglasnost, uzmimo $a, b \in A$ takve da je $(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$ i uzmimo proizvoljan $x \in X$. Tada za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$\begin{aligned}
\lambda(\delta(a, x), u) &= \lambda(ax, u) = r_{|u|}(\lambda(a, xu)) && \text{(prema Lemi 3.1.1 (b), jer je } |\lambda(ax, u)| = |u|\text{)}\\
&= r_{|u|}(\lambda(b, xu)) && \text{(jer je } (a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}\text{)}\\
&= \lambda(bx, u) = \lambda(\delta(b, x), u),
\end{aligned}$$

što znači da je $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \varrho_{\mathcal{A}}$. Sa druge strane, iz $(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$ sledi $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$. Prema tome, $\varrho_{\mathcal{A}}$ je kongruencija na $\mathcal{A}$.

Da bi smo dokazali da je $\varrho_{\mathcal{A}}$ najveća kongruencija na $\mathcal{A}$, uzmimo proizvoljnu kongruenciju ϱ na $\mathcal{A}$ i $a, b \in A$ takve da je $(a, b) \in \varrho$. Prema Lemi 3.3.2, za proizvoljan $u \in X^*$ je $\lambda(a, u) = \lambda(b, u)$, odakle sledi da je $(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$. Prema tome, $\varrho \subseteq \varrho_{\mathcal{A}}$. Ovim je teorema dokazana. □

Napomena 3.5.1. Primetimo da relacija ϱ_A može biti definisana i sa:

$$(a,b) \in \varrho_A \;\Leftrightarrow\; \phi_a = \phi_b \qquad\qquad (a,b \in A).$$

Ako za automat A važi da je ϱ_A identička relacija na A, tj. ako je identička relacija jedina kongruencija na A, tada kažemo da je automat A *redukovan* ili *prost*. Nije teško pokazati da je za proizvoljan automat A, faktor-automat A/ϱ_A redukovan, pa ga nazivamo *redukovanim automatom automata* A. Ako je, osim toga, A inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, tada i njegov redukovani automat A/ϱ_A tretiramo kao inicijalni automat sa inicijalnim stanjem $a_0\varrho_A$.

Teorema 3.5.3. *Svaki automat je ekvivalentan sa svojim redukovanim automatom.*

Dokaz. Sledi neposredno iz Teoreme 3.5.1. $\square$

Teorema 3.5.4. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje, A je proizvoljan automat koji indukuje ϕ i A' je stablo od A. Tada je redukovani automat od A' izomorfan donjem automatu A_ϕ preslikavanja ϕ.*

Dokaz. Neka je $A = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ i A' je skup stanja od A'. Posmatrajmo homomorfizam ψ iz A' na A_ϕ definisan u dokazu Teoreme 3.4.4. Za proizvoljne $a, b \in A'$ je $a = a_0u$, $b = a_0v$, za neke $u, v \in X^*$, i $a\psi = \phi_u$, $b\psi = \phi_v$, prema definiciji preslikavanja ψ, pa na osnovu Leme 3.4.2, $\phi_a = \phi_{a_0u} = \phi_u$ i $\phi_b = \phi_{a_0v} = \phi_v$. Prema tome

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \varrho_{A'} &\Leftrightarrow \phi_a = \phi_b && \text{(prema (A1))}\\
&\Leftrightarrow \phi_u = \phi_v && \text{(jer je } \phi_a = \phi_u \text{ i } \phi_b = \phi_v\text{)}\\
&\Leftrightarrow a\psi = b\psi && \text{(prema definiciji za } \psi\text{)}\\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \ker\psi\ ,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\varrho_{A'} = \ker\psi$. Sada prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da je automat $A'/\varrho_{A'}$ izomorfan automatu A_ϕ. $\square$

Teorema 3.5.5. *Automati A i A' su ekvivalentni ako i samo ako su redukovani automati A/ϱ_A i $A'/\varrho_{A'}$ izomorfni.*

Dokaz. Neka su $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i $A' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ ekvivalentni automati. Tada za proizvoljan $a \in A$ postoji bar jedan $a' \in A'$ takav da je $\phi_a = \phi_{a'}$, pa ako izaberemo bilo koji element iz A' za koji to važi i označimo ga sa $a\varphi$, tada smo sa $\varphi : a \mapsto a\varphi$ definisali preslikavanje iz A u A'. Najpre ćemo dokazati da za proizvoljne $a \in A$, $x \in X$ važi

$$\phi_{ax} = \phi_{(a\varphi)x}. \tag{3.27}$$

Zaista, prema Lemi 3.1.1 imamo da za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$(xu)\phi_a = (x\phi_a)(u\phi_{ax}) \quad \text{i} \quad (xu)\phi_{a\varphi} = (x\phi_{a\varphi})(u\phi_{(a\varphi)x}). \tag{3.28}$$

Sa druge strane, zbog $\phi_a = \phi_{a\varphi}$ imamo da je

$$(xu)\phi_a = (xu)\phi_{a\varphi} \quad \text{i} \quad x\phi_a = x\phi_{a\varphi},$$

odakle je, prema Teoremi 3.4.1 (a), $u\phi_{ax} = u\phi_{(a\varphi)x}$, čime smo dokazali (3.27).

Jasno, iz (3.27) sledi da za proizvoljne $a \in A$, $x \in X$ važi

$$\phi_{(ax)\varphi} = \phi_{(a\varphi)x},$$

što znači da $((ax)\varphi, (a\varphi)x) \in \varrho_{A'}$, odnosno

$$((\delta(a,x))\varphi, \delta'(a\varphi, x)) \in \varrho_{A'}, \tag{3.29}$$

za sve $a \in A$, $x \in X$.

Definišimo sada preslikavanje $\psi : A \to A'/\varrho_{A'}$ sa

$$a\psi = (a\varphi)\varrho_{A'} \qquad (a \in A). \tag{3.30}$$

Dokazaćemo da je ψ homomorfizam iz A na $A'/\varrho_{A'}$. Zaista, za proizvoljne $a \in A$, $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned}
(\delta(a,x))\psi &= (\delta(a,x)\varphi)\varrho_{A'} && \text{(prema (3.30))}\\
&= (\delta'(a\varphi,x))\varrho_{A'} && \text{(prema (3.29))}\\
&= \delta_{\varrho_{A'}}((a\varphi)\varrho_{A'}, x) && \text{(prema definiciji za } \delta_{\varrho_{A'}}\text{)}\\
&= \delta_{\varrho_{A'}}(a\psi, x) && \text{(prema (3.30))}
\end{aligned}$$

i, sa druge strane,

$$\begin{aligned}
\lambda(a,x) &= x\phi_a && \text{(prema definiciji za } \phi_a\text{)}\\
&= x\phi_{a\varphi} && \text{(jer je } \phi_a = \phi_{a\varphi}\text{)}\\
&= \lambda'(a\varphi, x) && \text{(prema definiciji za } \phi_{a\varphi}\text{)}\\
&= \lambda_{\varrho_{A'}}((a\varphi)\varrho_{A'}, x) && \text{(prema definiciji za } \lambda_{\varrho_{A'}}\text{)}\\
&= \lambda_{\varrho_{A'}}(a\psi, x) && \text{(prema (3.30)),}
\end{aligned}$$

čime smo dokazali da je ψ homomorfizam iz A u $A'/\varrho_{A'}$. Dalje, proizvoljan element iz $A'/\varrho_{A'}$ je oblika $a'\varrho_{A'}$, za neki $a' \in A'$, pa kako je $\Phi_A = \Phi_{A'}$, to je $\phi_{a'} = \phi_a$, za neki $a \in A$. Odavde dobijamo da je

$$\phi_{a'} = \phi_a = \phi_{a\varphi},$$

što znači da je $(a', a\varphi) \in \varrho_{A'}$, pa je, prema tome,

$$a'\varrho_{A'} = (a\varphi)\varrho_{A'} = a\psi.$$

Time smo dokazali da ψ slika A na $A'/\varrho_{A'}$, pa je ψ zaista homomorfizam iz A na $A'/\varrho_{A'}$.

Dalje, za $a, b \in A$ važi

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \varrho_A \;&\Leftrightarrow\; \phi_a = \phi_b && \text{(prema Napomeni 3.5.1)}\\
&\Leftrightarrow\; \phi_{a\varphi} = \phi_{b\varphi} && \text{(jer je } \phi_a = \phi_{a\varphi} \text{ i } \phi_b = \phi_{b\varphi}\text{)}\\
&\Leftrightarrow\; (a\varphi, b\varphi) \in \varrho_{A'} && \text{(prema Napomeni 3.5.1)}\\
&\Leftrightarrow\; a\psi = b\psi && \text{(prema (3.30))}\\
&\Leftrightarrow\; (a,b) \in \ker\psi\ .
\end{aligned}$$

To znači da je $\varrho_A = \ker\psi$, pa prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da automat A/ϱ_A jeste A-izomorfan automatu $A'/\varrho_{A'}$.

Obrat sledi prema Teoremama 3.5.3 i 3.5.4. $\square$

Prethodne teoreme mogu sada biti sažete u sledeću teoremu:

Teorema 3.5.6. *Neka je A automat i $\mathfrak{E}_A$ je skup svih automata ekvivalentnih sa A. Tada su svi redukovani automati iz $\mathfrak{E}_A$ međusobno izomorfni i svaki od tih redukovanih automata je homomorfna slika svakog automata iz $\mathfrak{E}_A$.*

Literatura: Cadden [1959], Gécseg and Peák [1972], Ginsburg [1959c, 1960], Glushkov [1961a], Paull and Unger [1959]

3.6. Minimizacija automata sa izlazom

U prethodnom poglavlju videli smo da redukovani automat A/ϱ_A automata A jeste automat sa minimalnim brojem stanja među automatima ekvivalentnim sa A, tj. među automatima koji realizuju isti skup automatovnih preslikavanja. U ovom poglavlju govorimo o procesu *minimizacije automata A*, pod čime podrazumevamo svaki efektivni postupak kojim nalazimo njegov redukovani automat, odnosno kojim određujemo kongruenciju ϱ_A. Takav postupak nazivamo *algoritmom minimizacije*. Jedan takav algoritam biće dat u daljem tekstu.

Najpre dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 3.6.1. *Neka je na automatu $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ definisan niz relacija $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sa:*

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \{(a,b) \in A \times A \,|\, (\forall x \in X)\ \lambda(a,x) = \lambda(b,x)\} \\ \varrho_{k+1} &= \{(a,b) \in \varrho_k \,|\, (\forall x \in X)\,(ax, bx) \in \varrho_k\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\varrho_1 \supseteq \varrho_2 \supseteq \cdots \supseteq \varrho_k \supseteq \varrho_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq \varrho_A. \tag{3.32}$$

(b) *Ako je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ako je $\mathcal{A}$ konačan automat, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\varrho_k = \varrho_A$.*

Dokaz. Neposredno se proverava da je svaki ϱ_k relacija ekvivalencije na A i da je $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući niz sa donjom granicom ϱ_A, tj. da važi (a).

(b) Neka je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Indukcijom po m dokazaćemo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci, to važi za $m = 1$. Dalje, uzmimo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Prema (3.32) imamo da je $\varrho_{k+m+1} \subseteq \varrho_{k+m}$. Da bi dokazali obratnu inkluziju, razmotrimo proizvoljan par $(a,b) \in \varrho_{k+m}$. Kako je, prema indukcijskoj pretpostavci, $\varrho_{k+m} = \varrho_{k+m-1} = \varrho_k$, to iz $(a,b) \in \varrho_{k+m}$ sledi da je $(a,b) \in \varrho_{k+m-1}$ i $(ax,bx) \in \varrho_{k+m-1}$, za svaki $x \in X$. Međutim, iz $\varrho_{k+m} = \varrho_{k+m-1}$ sledi da je $(ax,bx) \in \varrho_{k+m}$, za svaki $x \in X$, pa prema (3.31) sledi da je $(a,b) \in \varrho_{k+m+1}$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, dokazali smo da je $\varrho_{k+m+1} = \varrho_{k+m} = \varrho_k$, pa indukcijom po m zaključujemo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.

(c) Kako za svaki konačan skup postoji konačno mnogo relacija na njemu, to je niz $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan, što znači da postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $\varrho_k = \varrho_{k+l}$. Tada prema (3.32) imamo da je

$$\varrho_{k+1} \subseteq \varrho_k = \varrho_{k+l} \subseteq \varrho_{k+1},$$

što znači da je $\varrho_{k+1} = \varrho_k$. Odavde i iz (b) dobijamo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Prema Teoremi 3.5.2 i (3.32), da bi smo dokazali da je $\varrho_k = \varrho_A$, dovoljno je dokazati da je ϱ_k kongruencija na $\mathcal{A}$. Zaista, neka je

$(a,b) \in \varrho_k$ i $x \in X$. Kako je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, to je $(a,b) \in \varrho_{k+1}$, pa prema (3.31) imamo da je $(ax,bx) \in \varrho_k$. Sa druge strane, iz $(a,b) \in \varrho_k \subseteq \varrho_1$ sledi da je $\lambda(a,x) = \lambda(b,x)$. Ovim smo dokazali da je ϱ_k zaista kongruencija na A, tj. da je $\varrho_k = \varrho_A$. $\square$

Koristeći prethodnu teoremu, možemo dati jedan *algoritam za minimizaciju automata sa izlazom*. Algoritam započinjemo formiranjem liste P svih parova stanja automata A. Ovu listu grafički predstavljamo tablicom, a zbog refleksivnosti i simetričnosti relacija koje konstruišemo, dovoljno je razmatrati samo parove koji leže ispod glavne dijagonale te tablice.

U prvom koraku algoritma određujemo relaciju ϱ_1 i sa liste P brišemo sve parove stanja koji nisu u toj relaciji. Neka su, posle k-tog koraka, na listi P ostali parovi koji čine relaciju ϱ_k. Tada u $k+1$-vom koraku gradimo relaciju ϱ_{k+1} na taj način što razmatramo sve parove (a,b) koji su na početku tog koraka bili na listi P, i ukoliko proverom ustanovimo da postoji $x \in X$ tako da par (ax,bx) na početku tog koraka nije bio na listi, onda sa liste brišemo parove (a,b) i (b,a). Algoritam se završava prvim korakom u kome nije bilo brisanja sa liste.

Princip rada ovog algoritma ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 3.6.1. Neka je automat $A = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ zadat tablicom

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	(a_2,y_1)	(a_1,y_1)	(a_3,y_1)	(a_4,y_1)	(a_2,y_1)
x_2	(a_1,y_2)	(a_3,y_1)	(a_4,y_2)	(a_4,y_2)	(a_2,y_1)

Kao što smo rekli, najpre formiramo listu P svih parova automata A. Zatim radimo sledeće:

1. korak: U ovom koraku formiramo relaciju ϱ_1. Iz tablice se vidi da ta relacija ima dve klase:

$$\{a_1,a_3,a_4\},\ \{a_2,a_5\}.$$

To znači da sa liste u ovom koraku brišemo sve parove iz skupa

$$\{a_1,a_3,a_4\} \times \{a_2,a_5\} \cup \{a_2,a_5\} \times \{a_1,a_3,a_4\}.$$

2. korak: Proveravamo parove ispod glavne dijagonale liste P koji su na njoj ostali posle prvog koraka:

$(a_3x_1, a_1x_1) = (a_3,a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_3,a_1) i (a_1,a_3) brišu;
$(a_4x_1, a_1x_1) = (a_4,a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_4,a_1) i (a_1,a_4) brišu;
$(a_4x_1, a_3x_1) = (a_4,a_3)$ – na listi je;

$(a_4x_2, a_3x_2) = (a_4, a_4)$ – na listi je;
$(a_5x_1, a_2x_1) = (a_2, a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_5, a_2) i (a_2, a_5) brišu.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		X			X
a_2	X		X	X	
a_3		X			X
a_4		X			X
a_5	X		X	X	

posle 1. koraka
pelacija ϱ_1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		X	X	X	X
a_2	X		X	X	X
a_3	X	X			X
a_4	X	X			X
a_5	X	X	X	X	

posle 2. i 3. koraka
relacije $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_A$

3. korak: U ovom koraku proverava se samo par (a_4, a_3) koji je jedini ostao ispod glavne dijagonale na listi posle 2. koraka. Kako je $(a_4x_1, a_3x_1) = (a_4, a_3)$ i $(a_4x_2, a_3x_2) = (a_4, a_4)$, i ova dva para se nalaze na listi, to se u ovom koraku ništa ne briše, pa je algoritam završen.

Dakle, $\varrho_A = \varrho_2 = \varrho_3$ i ϱ_A ima sledeće klase

$$\{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3, a_4\},\ \{a_5\}.$$

Prema tome, automat A/ϱ_A je dat tablicom

A/ϱ_A	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_5$
x_1	$(\overline{a}_2, y_1)$	$(\overline{a}_1, y_1)$	$(\overline{a}_3, y_1)$	$(\overline{a}_2, y_1)$
x_2	$(\overline{a}_1, y_2)$	$(\overline{a}_3, y_1)$	$(\overline{a}_3, y_2)$	$(\overline{a}_2, y_1)$

gde je sa $\overline{q}$ označena ϱ_A-klasa stanja $q \in A$.

Algoritam koji smo ovde prikazali dali su Aufenkamp i Hohn [1957]. On je dosta jednostavan, ali u pojedinim situacijama njegova realizacija može trajati znatno duže od, na primer, algoritma koji je dao Letičevskiĭ [1965b]. Više informacija o tome može se naći u knjizi Gécseg and Peák [1972].

Literatura: Aufenkamp and Hohn [1957], Gécseg and Peák [1972], Ginsburg [1959a, 1959b], Hartmanis and Stearns [1963], Letičevskiĭ [1965b].

3.7. Mooreovi automati

U ovom poglavlju govorićemo o automatima Mooreovog tipa, o njihovim specifičnostima i razlikama u odnosu na automate Mealyevog tipa.

Najpre dokazujemo sledeću zanimljivu teoremu:

Teorema 3.7.1. *Svaki automat $\mathcal{A}$ Mealyevog tipa ekvivalentan je nekom automatu $\mathcal{B}$ Mooreovog tipa.*

Pri tome, ako je $|A| = n$ i $|X| = m$, gde je X ulazni alfabet, tada se Mooreov automat $\mathcal{B}$ može izabrati tako da bude $|B| = n(m+1)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automat Mealyevog tipa. Stavimo da bude $B = A \cup A \times X$ i definišimo preslikavanja $\delta' : B \times X \to B$ i $\lambda' : B \times X \to Y$ sa:

$$
\begin{aligned}
\delta'(b,x) &= \begin{cases} (a,x) & \text{ako je } b = a \in A, \\ (\delta(a,x'),x) & \text{ako je } b = (a,x') \in A \times X, \end{cases} \\
\lambda'(b,x) &= \begin{cases} \lambda(a,x) & \text{ako je } b = a \in A, \\ \lambda(\delta(a,x'),x) & \text{ako je } b = (a,x') \in A \times X, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

gde su $b \in B$ i $x \in X$. Tada je $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ automat za koji ćemo dokazati da je ekvivalentan sa $\mathcal{A}$ i da je Mooreovog tipa.

Prvo ćemo dokazati da svako stanje $a \in A$ indukuje isto automatovno preslikavanje u automatu $\mathcal{A}$ i u automatu $\mathcal{B}$, odnosno da važi

$$\lambda(a,u) = \lambda'(a,u),$$

za svaku reč $u \in X^*$. Uzmimo da je $u = x_1x_2 \dots x_k$, za neke $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$. Tada je

$$\delta(a,u) = a_1a_2 \dots a_k \quad \text{i} \quad \lambda(a,u) = y_1y_2 \dots y_k,$$

za $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ i $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ određene sa

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \delta(a,x_1),\ a_2 = \delta(a_1,x_2),\ \dots,\ a_k = \delta(a_{k-1},x_k), \\
&y_1 = \lambda(a,x_1),\ y_2 = \lambda(a_1,x_2),\ \dots,\ y_k = \lambda(a_{k-1},x_k).
\end{aligned}
$$

Prema (3.33) imamo da je

$$
\begin{aligned}
&\delta'(a,x_1) = (a,x_1), \\
&\delta'((a,x_1),x_2) = (\delta(a,x_1),x_2) = (a_1,x_2), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\delta'((a_{k-2},x_{k-1}),x_k) = (\delta(a_{k-2},x_{k-1}),x_k) = (a_{k-1},x_k),
\end{aligned}
$$

što znači da je

$$\delta'(a,u) = b_1b_2 \dots b_k,$$

gde je

$$b_1 = (a,x_1),\ b_2 = (a_1,x_2),\ \dots,\ b_k = (a_{k-1},x_k).$$

Odavde dalje dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\lambda'(a, x_1) = \lambda(a, x_1) = y_1, \\
&\lambda'(b_1, x_2) = \lambda(\delta(a, x_1), x_2) = \lambda(a_1, x_2) = y_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\lambda'(b_{k-1}, x_k) = \lambda(\delta(a_{k-2}, x_{k-1}), x_k) = \lambda(a_{k-1}, x_k) = y_k,
\end{aligned}$$

pa je

$$\lambda'(a, u) = y_1 y_2 \dots y_k = \lambda(a, u),$$

što je i trebalo dokazati.

Na potpuno isti način se dokazuje da je svako stanje $(a, x) \in A \times X$ automata B ekvivalentno stanju $\delta(a, x)$ automata A. Prema tome, automati A i B su zaista ekvivalentni.

Da bi smo dokazali da je B automat Mooreovog tipa, razmotrimo $b, b' \in B$ i $x, x' \in X$ takve da je $\delta'(b, x) = \delta'(b', x')$. Moguća su četiri slučaja: (1) $b = a \in A$, $b' = a' \in A$, (2) $b = a \in A$, $b' = (a', x_1') \in A \times X$, (3) $b = (a, x_1) \in A \times X$, $b' = a' \in A$, (4) $b = (a, x_1) \in A \times X$, $b' = (a', x_1') \in A \times X$. U svakom od tih slučajeva, koristeći činjenicu da je $\delta'(b, x) = \delta'(b', x')$ i (3.33), dobijamo da je $\lambda'(b, x) = \lambda'(b', x')$. Time je dokazano da je automat B Mooreovog tipa.

Konačno, jasno je da iz $|A| = n$ i $|X| = m$ sledi da je $|B| = n + mn = n(m + 1)$. $\square$

Kao što smo videli u prethodnoj teoremi, za realizaciju automatovnih preslikavanja automatima dovoljni su nam samo automati Mooreovog tipa. Međutim, problem je u tome što će automati Mooreovog tipa koji realizuju izvesno automatovno preslikavanje u opštem slučaju imati veći broj stanja od automata Mealyevog tipa koji realizuju ta ista preslikavanja. To se vidi iz prethodne teoreme, a biće još jasnije posle narednog primera:

Primer 3.7.1. Razmotrimo automat $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ sa sledećom prelazno-izlaznom tablicom:

A	a	b	c	d
x_1	(a, y_1)	(c, y_2)	(a, y_1)	(b, y_1)
x_2	(b, y_1)	(c, y_2)	(b, y_1)	(b, y_1)

Iz tablice se jasno vidi da se radi o Mooreovom automatu koji se može predstaviti tablicom:

A	y_1	y_1	y_2	y_2
	a	b	c	d
x_1	a	c	a	b
x_2	b	c	b	b

Primenimo algoritam za minimizaciju automata A kao Mealyevog automata. Dakle, kreirajmo listu svih parova P i krenimo dalje sa algoritmom.

1. korak: Formirajmo relaciju ϱ_1. Ona ima dve klase:

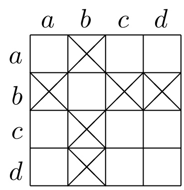
$$\{a, c, d\},\ \{b\}.$$

Prema tome, sa liste brišemo sve parove iz skupa

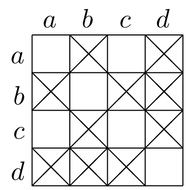
$$\{a, c, d\} \times \{b\} \cup \{b\} \times \{a, c, d\}.$$

2. korak: Proveravamo parove koji leže ispod glavne dijagonale u P posle 1. koraka:

$(cx_1, ax_1) = (a, a)$ – na listi je;
$(cx_2, ax_2) = (b, b)$ – na listi je;
$(dx_1, ax_1) = (b, a)$ – nije na listi, pa se parovi (d, a) i (a, d) brišu;
$(dx_1, cx_1) = (b, a)$ – nije na listi, pa se parovi (d, c) i (c, d) brišu.



posle 1. koraka
pelacija ϱ_1



posle 2. i 3. koraka
relacije $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_A$

3. korak: U ovom koraku ostaje da se proveri samo par (c, a). Kako je $(cx_1, ax_1) = (a, a)$ i $(cx_2, ax_2) = (b, b)$, i oba ova para su na listi, to se u ovom koraku ništa ne brise, što znači da se algoritm zaustavlja.

Dakle, dobili smo da je $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_A$ i ϱ_A-klase su

$$\{a, c\},\ \{b\},\ \{d\},$$

pa je automat A/ϱ_A zadat tablicom

A	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$
x_1	$(\overline{a}, y_1)$	$(\overline{a}, y_2)$	$(\overline{b}, y_1)$
x_2	$(\overline{b}, y_1)$	$(\overline{a}, y_2)$	$(\overline{b}, y_1)$

gde je sa $\overline{q}$ označena ϱ_A-klasa stanja $q \in A$.

Primetimo da automat A/ϱ_A iz prethodnog primera nije Mooreovog tipa jer, na primer, važi

$$\overline{\delta}(\overline{a}, x_1) = \overline{a} = \overline{\delta}(\overline{b}, x_1), \quad \overline{\lambda}(\overline{a}, x_1) = y_1 \neq y_2 = \overline{\lambda}(\overline{b}, x_1).$$

Imajući u vidu da je A automat Mooreovog tipa, možemo izvući dva zaključka. Prvo, homomorfna slika Mooreovog automata ne mora biti automat Mooreovog tipa. Drugo, minimizacijom Mooreovog automata, korišćenjem algoritma za automate Mealyevog tipa, ne dobijamo uvek Mooreov automat. To nas dalje navodi na zaključak da, kada radimo sa Mooreovim automatima, treba drugačije definisati pojmove homomorfizma i kongruencije i naći drugačiji algoritam za minimizaciju, koji bi kao rezultat dao Mooreov automat. To činimo u daljem tekstu.

Neka su $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ i $A' = (A', X, Y, \delta' \mu')$ dva Mooreova automata istog tipa. Preslikavanje $\varphi : A \to A'$ takvo da za svaki $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$(\delta(a, x))\varphi = \delta'(a\varphi, x) \qquad \text{i} \qquad \mu(a) = \mu'(a\varphi),$$

nazivamo *homomorfizmom Mooreovog automata* A u Mooreov automat A', ili *homomorfizmom Mooreovog tipa*. Sa druge strane, relaciju ekvivalencije τ na Mooreovom automatu $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ nazivamo *kongruencijom na Mooreovom automatu*, ili *kongruencijom Mooreovog tipa* na A, ako za sve $a, b \in A$ iz $(a, b) \in \tau$ sledi

(1) $\mu(a) = \mu(b)$;
(2) $(ax, bx) \in \tau$, za svaki $x \in X$.

Nije teško proveriti da homomorfna slika Mooreovog automata, u odnosu na homomorfizam Mooreovog tipa, takođe jeste Mooreov automat, i da jezgro homomorfizma Mooreovog tipa jeste kongruencija Mooreovog tipa. Obratno, ako je τ kongruencija Mooreovog tipa na Mooreovom automatu A, tada je faktor-skup A/τ i sam Mooreov automat sa funkcijama prelaza i znaka

$$\delta_\tau : (A/\tau) \times X \to A/\tau \qquad \text{i} \qquad \mu_\tau : A/\tau \to Y$$

definisanim sa:

$$\delta_\tau(a\tau, x) = (\delta(a, x))\tau \qquad \text{i} \qquad \mu_\tau(a\tau) = \mu(a),$$

za $a \in A$, $x \in X$. Lako se proverava da se i za homomorfizme i kongruencije Mooreovog tipa može formulisati i dokazati Teorema o homomorfizmu.

Odnos kongruencija Mealyevog i Mooreovog tipa prikazuje sledeća lema:

Lema 3.7.1. *Ako je ϱ kongruencija Mooreovog automata $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$, onda je ϱ takođe i kongruencija Mealyevog automata $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, gde je $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$, za $a \in A$ i $x \in X$.*

Dokaz. Razmotrimo $a, b \in A$ takve da je $(a, b) \in \varrho$ i $x \in X$. Tada je $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \varrho$, odakle sledi da je $\mu(\delta(a, x)) = \mu(\delta(b, x))$. To dalje znači da je $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$, čime smo dokazali da je ϱ kongruencija Mealyevog automata. □

Slično kao kod automata Mealyevog tipa dokazujemo sledeće:

Teorema 3.7.2. *Za proizvoljan Mooreov automat $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$, relacija τ_A na A definisana sa*

$$(a, b) \in \tau_A \;\Leftrightarrow\; (a, b) \in \varrho_A \;\; i \;\; \mu(a) = \mu(b),$$

je najveća kongruencija Mooreovog tipa na A.

Definišimo niz $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija na A sa

$$\tau_1 = \{(a, b) \in A \times A \mid \mu(a) = \mu(b)\}$$
$$\tau_{k+1} = \{(a, b) \in \tau_k \mid (\forall x \in X)\,(ax, bx) \in \tau_k\}.$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \cdots \supseteq \tau_k \supseteq \tau_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq \tau_A.$$

(b) *Ako je $\tau_k = \tau_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\tau_k = \tau_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ako je A konačan automat, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\tau_k = \tau_A$.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 3.6.1, pa će biti izostavljen. □

Ako je A automat Mooreovog tipa takav da je $\tau_A = \Delta_A$, tada ga nazivamo *Mooreovski redukovanim* automatom.

Algoritam za minimizaciju automata Mooreovog tipa, tj. za određivanje kongruencije τ_A, zasnovan na prethodnoj teoremi, analogan je algoritmu za minimizaciju automata Mealyevog tipa koji je dat u prethodnom poglavlju. To ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.7.2. Razmotrimo ponovo Mooreov automat A iz Primera 3.7.1. Podsetimo se da je on zadat tablicom

A	y_1	y_1	y_2	y_2
	a	b	c	d
x_1	a	c	a	b
x_2	b	c	b	b

Formirajmo najpre listu P svih parova stanja automata A, a potom krenimo sa formiranjem relacija τ_k.

1. korak: Formirajmo relaciju τ_1. Iz tablice se vidi da ona ima dve klase:

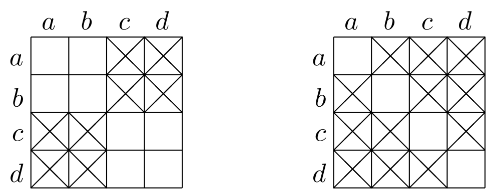
$$\{a, b\},\ \{c, d\}.$$

Prema tome, sa liste brišemo sve parove iz skupa

$$\{a, b\} \times \{c, d\} \cup \{c, d\} \times \{a, b\}.$$

2. korak: Proveravamo parove koji su posle 1. koraka ostali na listi P ispod njene glavne dijagonale:

$(bx_1, ax_1) = (c, a)$ – nije na listi, pa se brišu parovi (b, a) i (a, b);
$(dx_1, cx_1) = (b, a)$ – nije na listi, pa se brišu parovi (d, c) i (c, d).



posle 1. koraka
pelacija τ_1

posle 2. koraka
relacija $\tau_A = \tau_2 = \Delta_A$

Ovim su obrisani svi parovi, osim onih na glavnoj dijagonali, što znači da se algoritam zaustavio i da je $\tau_A = \tau_2 = \Delta_A$, odnosno da je automat A redukovan kao Mooreov automat. Međutim, kao što smo videli u Primeru 3.7.1, ovaj automat nije redukovan kao automat Mealyevog tipa, što znači da se minimizacijom Mooreovog automata algoritmom za automate Mealyevog tipa ne dobija automat Mooreovog tipa, ali se dobija ekvivalentan automat sa manjim brojem stanja od onog koji bi se dobio korišćenjem algoritma za minimizaciju automata Mooreovog tipa.

Na kraju ovog poglavlja dokazujemo još jednu zanimljivu teoremu koja kaže pod kojim uslovima za Mooreovski redukovani automat postoji ekvivalentan Mealyev automat sa manjim brojem stanja.

Teorema 3.7.3. *Neka je* $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ *Mooreovski redukovan konačan automat. Tada postoji njemu ekvivalentan automat Mealyevog tipa sa manjim brojem stanja ako i samo ako postoje dva različita stanja* $a, b \in A$ *takva da je* $\delta(a, x) = \delta(b, x)$*, za svaki* $x \in X$*.*

Dokaz. Neka postoji Mealyev automat $B = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ ekvivalentan sa A takav da je $|B| < |A|$. Odatle zaključujemo da A nije redukovan kao automat Mealyevog tipa, tj. da je $\varrho_A \neq \Delta_A$. Međutim, to znači da postoje bar dva različita stanja $a, b \in A$ takva da je $(a, b) \in \varrho_A$, što dalje povlači da je $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \varrho_A$ i $\mu(\delta(a, x)) = \mu(\delta(b, x))$, za svaki $x \in X$. Sa druge strane, prema definiciji kongruencije τ_A dobijamo da je $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \tau_A$, i kako je, prema pretpostavci, $\tau_A = \Delta_A$, to imamo da je $\delta(a, x) = \delta(b, x)$, za svaki $x \in X$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka postoje dva različita stanja $a, b \in A$ tako da je $\delta(a, x) = \delta(b, x)$, za svaki $x \in X$. To znači da je $(a, b) \in \varrho_A$, pa je, prema tome, $\Delta_A = \tau_A \subset \varrho_A$, što znači da je $|A/\varrho_A| < |A|$. $\square$

Iz prethodne teoreme sledi da je pre minimizacije Mooreovog automata neophodno proveriti da li je ispunjen uslov prethodne teoreme. Ako je ispunjen, tada je preporučljivo izvršiti minimizaciju tog automata kao automata Mealyevog tipa, jer će minimalni Mealyev automat A/ϱ_A imati manji broj stanja od minimalnog Mooreovog automata A/τ_A.

Literatura: Aufenkamp and Hohn [1957], Bloh [1960], Gécseg and Peák [1972], Gill [1960], Hartmanis [1963].

3.8. Kompozicija automata

Jedan od glavnih metoda koji se primenjuju u izučavanju matematičkih struktura je *metod kompozicije* (*slaganja*), koji se sastoji u tome da se od datih jednostavnijih struktura izgradi neka složenija struktura koja će te date strukture imati kao svoje komponente. Taj metod je veoma aktuelan i u teoriji automata. Ovde ćemo prikazati nekoliko najvažnijih metoda za kompoziciju automata. Više informacija o drugim kompozicionim metodima u teoriji automata, kao i o odgovarajućim dekompozicionim metodima, može se naći u literaturi navedenoj na kraju ovog odeljka.

Neka su dati automati

$$A_1 = (A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1) \qquad \text{i} \qquad A_2 = (A_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$$

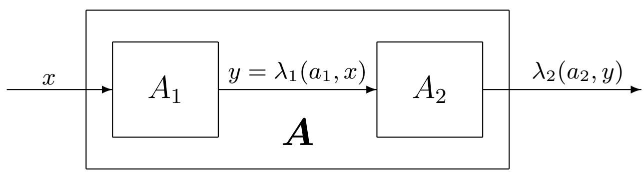
takvi da je $Y_1 \subseteq X_2$. Stavimo da je

$$A = A_1 \times A_2,\ X = X_1,\ Y = Y_2,$$

i definišimo preslikavanja $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\begin{aligned}\delta((a_1,a_2),x) &= (\delta_1(a_1,x),\delta_2(a_2,\lambda_1(a_1,x)))\\ \lambda((a_1,a_2),x) &= \lambda_2(a_2,\lambda_1(a_1,x))\end{aligned}$$

gde je $(a_1,a_2) \in A$ i $x \in X$. Tada automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ nazivamo *superpozicijom* (*nadovezivanjem*) *automata* $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Sličnu definiciju možemo dati za proizvoljan konačan skup automata $\mathcal{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i)$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ koji zadovoljava uslov: $Y_i \subseteq X_{i+1}$, za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Inače, superpozicija automata je algebarska interpretacija za takozvanu *serijsku vezu* realnih automata. Naime, ulazni signal prilikom ulaska u automat $\mathcal{A}$ biva najpre prihvaćen automatom $\mathcal{A}_1$, koji se nalazi u stanju a_1, posle čega automat $\mathcal{A}_1$ prelazi u stanje $\delta_1(a_1,x)$ a na izlaz tog automata se šalje izlazni signal $y = \lambda_1(a_1,x)$. Taj signal je istovremeno ulazni signal automata $\mathcal{A}_2$, jer je $Y_1 \subseteq X_2$, pa automat $\mathcal{A}_2$ prelazi iz stanja a_2 u stanje $\delta_2(a_2,y)$, a na njegov izlaz se šalje signal $\lambda_2(a_2,y)$, koji je istovremeno i izlazni signal automata $\mathcal{A}$. To je prikazano na Slici 3.8.1.



Slika 3.8.1

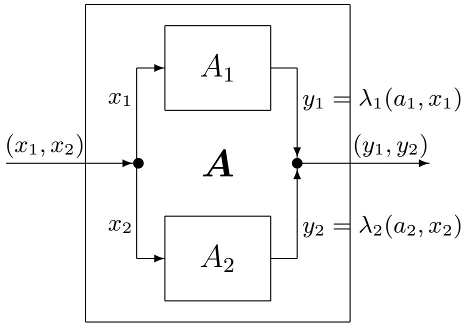
Polazeći od datih automata $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$, osim njihove superpozicije, možemo konstruisati i neke druge automate. Naime, stavimo da je

$$A = A_1 \times A_2,\ X = X_1 \times X_2,\ Y = Y_1 \times Y_2,$$

i definišimo preslikavanja $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\begin{aligned}\delta((a_1,a_2),(x_1,x_2)) &= (\delta_1(a_1,x_1),\delta_2(a_2,x_2))\\ \lambda((a_1,a_2),(x_1,x_2)) &= (\lambda_1(a_1,x_1),\lambda_2(a_2,x_2)),\end{aligned}$$

gde su $(a_1,a_2) \in A$, i $(x_1,x_2) \in X$. Tada automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ nazivamo *direktnim proizvodom automata* $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Slično definišemo direktan proizvod proizvoljne familije automata. Primetimo da direktan proizvod automata jeste matematička interpretacija *paralelne veze* realnih automata. Princip rada ovakvog automata prikazan je na Slici 3.8.2.



Slika 3.8.2

Kao što se vidi sa slike, ulazni signal automata A se cepa u dva signala x_1 i x_2, od kojih prvi ide kao ulazni signal u automat A_1, a drugi u A_2. Usled toga, automat A_1 prelazi iz stanja a_1 u stanje $\delta_1(a_1, x_1)$, pri čemu se emituje izlazni signal $y_1 = \lambda_1(a_1, x_1)$, dok automat A_2 iz stanja a_2 prelazi u stanje $\delta_2(a_2, x_2)$ i emituje se izlazni signal $y_2 = \lambda_2(a_2, x_2)$. Na kraju, izlazni signali y_1 i y_2 se spajaju i formira se izlazni signal (y_1, y_2) automata A.

Na kraju, dajemo još jedan metod za kompoziciju automata. Neka je data familija $A_i = (A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i)$, $i \in I$, automata istog tipa. Ne umanjujući opštost konstrukcije koju ćemo dati, možemo uzeti da su skupovi stanja A_i po parovima disjunktni, tj. da je $A_i \cap A_j = \varnothing$, kadgod je $i \neq j$. Naime, u suprotnom umesto sa skupovima A_i, $i \in I$, možemo raditi sa skupovima $A'_i, i \in I$, gde je za svaki $i \in I$ skup A'_i dat sa $A'_i = A_i \times \{i\}$. Dalje, stavimo da je

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

i definišimo preslikavanja $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\delta(a, x) = \delta_i(a, x)$$

$$\lambda(a, x) = \lambda_i(a, x)$$

ako je $a \in A_i$, za $i \in I$. Tada je $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automat i za svaki $i \in I$, A_i je podautomat od A. Automat A nazivamo *direktnom sumom* automata A_i, $i \in I$. O direktnim sumama automata bez izlaza biće više reči u narednoj glavi.

Literatura: Ćirić and Bogdanović [1999a], Dassow [1981], Eilenberg [1976], Gécseg [1976, 1986], Gécseg and Peák [1972], Ginzburg [1968], Glushkov [1961a], Hartmanis [1962], Hartmanis and Stearns [1966], Krohn and Rhodes [1962, 1965], Nelson [1968].

3.9. Zadaci

1. Konstruisati Mooreov automat koji određuje ostatak prilikom deljenja sa 3 broja datog u binarnom zapisu.

2. Konstruisati Mealyev automat koji za binarni broj x sa n cifara izračunava binarni broj $2^n - x$.

3. Konstruisati Mealyev (Mooreov) automat koji sabira dva binarna broja.

4. Konstruisati Mealyev automat čiji je ulazni i izlazni alfabet skup $\{x, y\}$ i koji na izlazu daje ulazni signal koji je učitan dva koraka ranije.

5. Konstruisati Mealyev automat sa ulaznim alfabetom $\{x, y\}$ i izlaznim $\{a, b, c\}$. Funkcija prelaza određena je na sledeći način: ako se ulazna reč završava sa xx izlaz je a, ako se ulazna reč završava sa yyy izlaz je b, u svim ostalim slučajevima izlaz je c.

6. Neka je A skup racionalnih brojeva, X je skup svih celih brojeva i preslikavanje $\delta : A \times X \to A$ je definisano sa $\delta(a, x) = ax$, gde ax označava proizvod brojeva a i x. Dokazati da automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ nije konačno generisan.

7. Da li je funkcija $\phi : X^* \to X^*$, gde je $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$, koja dekadnom zapisu broja a dodeljuje dekadni zapis broja a^2, automatovno preslikavanje?

8. Da li je funkcija $\phi : X^* \to X^*$, gde je $X = \{x, y\}$, data sa

$$(x_1 x_2 \cdots x_{2k})\phi = x_1 x_1 x_2 x_2 \cdots x_k x_k,$$
$$(x_1 x_2 \cdots x_{2k+1})\phi = x_1 x_1 x_2 x_2 \cdots x_k x_k x_{k+1}$$

automatovno preslikavanje?

9. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Dokazati da je relacija θ definisana na X^* sa

$$(u, v) \in \theta \Leftrightarrow \phi_u = \phi_v$$

kongruencija.

10. Neka su X i Y konačni skupovi. Ako je $|X| \geq 2$ tada postoji konačan automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ takav da za svako preslikavanje $\lambda : A \times X \to Y$ Mealyev automat $(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ nije redukovan.

11. Dokazati da za proizvoljan skup Φ automatovnih preslikavanja iz X^* u Y^*, gde su X i Y proizvoljni alfabeti, postoji automat $\mathcal{A}$ takav da je $\Phi \subseteq \Phi_{\mathcal{A}}$.

12. Pod *težinom* automatovnog preslikavanja ϕ, u oznaci $w(\phi)$, podrazumevamo kardinalni broj skupa stanja donjeg automata A_ϕ. Ukoliko je $w(\phi)$ konačan, za preslikavanje ϕ kažemo da je *konačne težine.*

Ako su ϕ' i ϕ'' automatovna preslikavanja konačnih težina, tada je i $\phi'\phi''$ automatovno preslikavanje konačne težine i važi $w(\phi'\phi'') \leq w(\phi')w(\phi'')$.

13. Dati su skupovi $V = \{x, y\}$, $W = \{0, 1\}$ i preslikavanje $f : V^* \to W$ na sledeći način

$$uf = \begin{cases} 1, & |u|_x = |u|_y \\ 0, & |u|_x \neq |u|_y \end{cases}, \text{ za } u \in V^*.$$

Definišemo preslikavanje $\alpha : V^* \to W^*$ sa $(a_1a_2 \cdots a_n)\alpha = f_1f_2 \cdots f_n$, gde je $f_i = (a_1a_2 \cdots a_i)f$, $a_i \in V$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

(a) Da li je α automatovno preslikavanje?
(b) Da li se α može realizovati konačnim Mealyevim automatom?

14. Konstruisati minimalni automat koji realizuje automatovno preslikavanje $\alpha : \{x, y\}^* \to \{x, y\}^*$ definisano sa

$$(x_1x_2 \ldots x_n)\alpha = \begin{cases} x_1x_2 \ldots x_n, & \text{ako je } x_1 = x; \\ x_1^cx_2^c \ldots x_n^c, & \text{ako je } x_1 = y, \text{ gde je } x_i^c = \begin{cases} x, & x_i = y; \\ y, & x_i = x. \end{cases} \end{cases}$$

Glava 4

Automati bez izlaza

Jedna od najznačajnijih karakteristika automata bez izlaza je to što postoje dva dobro poznata prirodna načina da se ti automati razmatraju kao algebarske strukture. Ako na nizove ulaznih simbola automata gledamo kao elemente slobodnog monoida generisanog alfabetom ulaznih simbola, tada je prirodno tretirati automat kao monoid transformacija skupa stanja automata. Takav pristup izučavanju automata pokazao se veoma uspešnim. Na primer, polugrupe i monoidi transformacija pridruženi automatima, koje nazivamo polugrupama i monoidima prelaza automata, predstavljaju polaznu tačku u elegantnoj teoriji Eilenberga [1976] koja daje klasifikaciju regularnih jezika baziranu na sintaksičkim monoidima i pseudo-varijetetima monoida, a takođe je i osnova čuvene teorije Khrona i Rhodesa [1962, 1965] o kaskadnim razlaganjima automata. Podjednako je prirodno tretirati te automate i kao algebre u kojima se svaki ulazni simbol realizuje kao unarna operacija. Ta interpretacija, koju su Büchi i Wright dali još pedesetih godina, povezala je automate sa univerzalnom algebrom i stvorila uslove da se u njihovom izučavanju koriste brojni koncepti, ideje i metodi univerzalne algebre.

U ovoj knjizi, a posebno u ovoj glavi, oba ova pristupa će biti intenzivno korišćena. U Odeljku 4.2 pokazuje se da postoji obostrano jednoznačna veza između povezanih inicijalnih X-automata i desnih kongruencija na slobodnom monoidu X^*, koju su prvi uočili Nerode [1958] i Myhill [1957], a u trećem odeljku ove glave razmatraju se osnovne osobine polugrupa prelaza automata. Verovatno najznačajnije mesto u ovoj glavi imaju razlaganja u direktnu sumu automata. Još od pedesetih godina dvadesetog veka, kada je pojam direktne sume uveden i izučavan u radu Huzinoa [1958], a potom i u radu Glushkova [1961a], one predstavljaju jedan od glavnih metoda za izučavanje strukture automata. Opšti rezultati koji se tiču tih razlaganja dati su nedavno, u radovima Ćirića i Bogdanovića [1999a] i Ćirića, Bogdanovića i Petković [1998]. Oni čine sadržaj Odeljka 4.4, u kome se, pored ostalog, dokazuje i teorema koja kaže da se svaki automat može razložiti u direktnu sumu automata koji su dalje nerazloživi u direktnu sumu. Razlaganja u direktnu sumu koriste se u Odeljcima 4.5 i 4.6 za izučavanje automata koji imaju izvesna zadata lokalna svojstva. Korišćenjem algebarskih pojmova varijeteta, uopštenog varijeteta i pseudovarijeteta, u Odeljku 4.7 izučava se veoma značajna klasa direktabilnih automata, kao i izvesna uopštenja i specijalizacije tih automata. Struktura tih automata opisana je u Odeljku 4.8 kombinovanjem raznih metoda razlaganja automata, kao što su ekstenzije automata, razlaganja u direktnu sumu i poddirektan proizvod, i paralelne kompozicije, a takođe je izvršena i klasifikacija tih automata prema osobinama njihovih polugrupa prelaza. U poslednjem odeljku izučava se jedan veoma zanimljiv pojam – pojam reverzibilnog stanja automata. Pored ostalog, daje se teorema koju su dokazali Kovačević, Ćirić, Petković i Bogdanović [2000], prema kojoj se svaki konačan automat može na jedinstven način predstaviti u obliku ekstenzije reverzibilnog automata pomoću trap-direktabilnog automata.

4.1. Automati kao unarne algebre

Kada smo u prethodnoj glavi govorili "automat", podrazumevali smo da se radi o Mealyevom automatu. Međutim, u ovoj i narednoj glavi, kada budemo tako govorili, podrazumavaćamo da se radi o automatu bez izlaza. Podsetimo se da se takav automat definiše kao uređena trojka (A, X, δ), gde je A skup stanja, X je ulazni alfabet i $\delta : A \times X \to A$ je funkcija prelaza. Osim u slučajevima kada bude drugačije naznačeno, automati koje ćemo razmatrati biće automati sa fiksiranim ulaznim alfabetom koji ćemo označavati sa X. Takođe, da bi pojednostavili oznake, često ćemo pisati "ax" umesto "$\delta(a, x)$". Kao i u prethodnoj glavi, automat i njegov skup stanja označavaćemo istim slovom. Ukoliko ne bude drugačije naznačeno, kada budemo radili sa inicijalnim automatom, njegovo inicijalno stanje označavaćemo sa a_0.

Alfabet X može se tretirati i kao skup unarnih operacijskih simbola, što znači da se svaki automat A sa ulaznim alfabetom X može tretirati kao unarna algebra tipa X kod koje svakom simbolu $x \in X$ odgovara fundamentalna unarna operacija x^A na A definisana sa

$$x^A : a \mapsto ax.$$

Za $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ i $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in X^+$, kompozicijom fundamentalnih operacija $x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A$, tim redom, dobijamo izvedenu operaciju u^A na A zadatu sa

$$u^A : a \mapsto au.$$

Primetimo da važi i obratno. Naime, svaka unarna algebra A tipa X se može tretirati kao automat, pri čemu se svaki operacijski simbol $x \in X$ tretira kao ulazni simbol automata, a funkcija prelaza $\delta : A \times X \to A$ se definiše sa

$$\delta(a, x) = x^A(a).$$

Inicijalni automati se takođe mogu tretirati kao univerzalne algebre kod kojih se, osim unarnih operacija koje odgovaraju ulaznim simbolima, javlja i jedna konstanta (nularna operacija) koja odgovara inicijalnom stanju automata.

Tretiranje automata kao unarnih algebri omogućuje nam da u njihovom izučavanju koristimo mnoštvo pojmova, ideja i metoda univerzalne algebre, što će i ovde biti činjeno. Pojmovi kao što su *podautomat*, *generatorni skup*, *homomorfizam*, *kongruencija*, *direktni* i *poddirektni proizvod* automata i drugi, imaće uobičajeno algebarsko značenje, i nije neophodno da se posebno definišu u slučaju automata. Ipak, u daljem tekstu ćemo se podsetiti nekih definicija.

Podskupom automata A nazivaćemo svaki podskup skupa stanja tog automata, i slično, relacijom na A nazivaćemo svaku relaciju na skupu stanja automata A. Preslikavanjem automata A u automat B nazivaćemo svako preslikavanje koje skup stanja automata A slika u skup stanja automata B.

Podskup B automata A nazivamo *podautomatom* od A ako za svaki $a \in A$ i $x \in X$, iz $a \in B$ sledi $ax \in B$, ili, ekvivalentno, ako za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$, iz $a \in B$ sledi $au \in B$. Ako je B podskup od A takav da za svaki $a \in A$ i $x \in X$, iz $ax \in B$ sledi $a \in B$, ili, ekvivalentno, ako za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$, iz $au \in B$ sledi $a \in B$, tada B nazivamo *dualnim podautomatom* od A. Prema ovim definicijama, prazan podskup automata je i podautomat i dualni podautomat. Nije teško proveriti da je podskup B automata A podautomat od A ako i samo ako je njegov skupovni komplement $A \setminus B$ u A dualni podautomat od A. Podautomat, odnosno dualni podautomat, B automata A nazivamo *pravim podautomatom*, odnosno *pravim dualnim podautomatom*, ako je $B \neq A$ i $B \neq \varnothing$.

Za podskup H automata A, najmanji podautomat od A koji sadrži H, tj. presek svih podautomata od A koji sadrže H, označavamo sa $S(H)$ i nazivamo *podautomatom generisanim* skupom H, dok najmanji dualni podautomat od A koji sadrži H, tj. presek svih dualnih podautomata od

A koji sadrže H, označavamo sa $D(H)$ i nazivamo *dualnim podautomatom generisanim* sa H. Nije teško proveriti da važi

$$S(H) = \{b \in A \mid (\exists a \in H)(\exists u \in X^*)\, b = au\} = \{au \mid a \in H,\, u \in X^*\},$$

$$D(H) = \{b \in A \mid (\exists a \in H)(\exists u \in X^*)\, a = bu\}.$$

Podautomat, odnosno dualni podautomat, generisan jednoelementnim skupom $\{a\}$ nazivamo *monogenim podautomatom*, odnosno *monogenim dualnim podautomatom*, generisanim stanjem a i označavamo ga sa $S(a)$, odnosno sa $D(a)$. Ukoliko je $S(H) = A$, tada kažemo da je automat A *generisan skupom* H i da je H *generatorni skup* automata A, a ako A ima konačan generatorni skup, tada ga nazivamo *konačno generisanim*.

Ako su A i B automati *istog tipa*, što ovde znači da imaju isti ulazni alfabet X, tada je preslikavanje $\varphi : A \to B$ *homomorfizam* iz A u B ako je $(ax)\varphi = (a\varphi)x$, za sve $a \in A$ i $x \in X$, ili, ekvivalentno, ako je $(au)\varphi = (a\varphi)u$, za sve $a \in A$ i $u \in X^*$. Sirjektivni homomorfizam i ovde nazivamo *epimorfizmom*, injektivni *monomorfizmom*, a bijektivni *izomorfizmom*. Relacija ϱ na automatu A je *kongruencija* na A ako za proizvoljne $a, b \in A$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi $(ax, bx) \in \varrho$, za svaki $x \in X$, ili, ekvivalentno, ako iz $(a, b) \in \varrho$ sledi $(au, bu) \in \varrho$, za svaki $u \in X^*$. Za relaciju ϱ na automatu A govorićemo da je *pozitivna* ako $(a, au) \in \varrho$, za svaki $a \in A$ i svaki $u \in X^*$. Jasno, prema ovoj definiciji, svaka pozitivna relacija je refleksivna.

Mnoga svojstva podautomata automata slična su svojstvima ideala polugrupa, tako da se i pojam Reesove kongruencije ideala može preneti na podautomate. Naime, ako je B podautomat automata A, tada relacija ϱ_B na A definisana sa

$$(a, b) \in \varrho_B \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } a, b \in B,$$

gde su $a, b \in A$, je kongruencija na A i nazivamo je *Reesovom kongruencijom* na A određenom podautomatom B ili *Reesovom kongruencijom podautomata* B. Faktor automat A/ϱ_B nazivamo *Reesovim faktor-automatom* od A određenim podautomatom B, i označavamo ga jednostavnije sa A/B. Za automat A kažemo da je *ekstenzija automata* B pomoću automata C ako je B podautomat od A i Reesov faktor-automat A/B je izomorfan sa C.

Ako je A inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, tada se *inicijalnim podautomatom* naziva svaki podautomat od A koji sadrži a_0, a ako su A i A' inicijalni automati sa inicijalnim stanjima a_0 i a_0', tim redom, i φ je preslikavanje iz A u A' takvo da je $(au)\varphi = (a\varphi)u$, za sve $a \in A$ i $u \in X^*$, i $a_0\varphi = a_0'$, tada φ nazivamo *homomorfizmom inicijalnih automata*.

Za stanje a automata A kažemo da je *trap* ako je $ax = a$, za svaki $x \in X$, ili ekvivalentno, ako je $au = a$, za svaki $u \in X^*$. Drugim rečima, a je trap automata A ako jednoelementni podskup $\{a\}$ jeste podautomat od A, odnosno, ako monogeni podautomat od A generisan sa a jeste jednoelementan. Skup svih trapova automata A označavaćemo sa $Tr(A)$. Automat čije je svako stanje trap nazivaćemo *diskretnim automatom*. Klasu svih diskretnih automata označavamo sa $\mathbf{D}$.

Kako smo već rekli, pojmovi *direktnog proizvoda*, *direktnog stepena* i *poddirektnog proizvoda automata* imaće svoje uobičajeno algebarsko značenje, a za automate A i B, svaki podautomat njihovog direktnog proizvoda nazivaćemo *paralelnom komozicijom* automata A i B.

Literatura: Babcsányi [1977], Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [1999, 2000], Büchi [1989], Burris and Sankappanavar [1981], Ćirić and Bogdanović [1999a], Ćirić, Bogdanović and Petković [1996, 1998], Ćirić, Imreh and Steinby [1999] Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Ésik [1992], Ésik and Imreh [1981], Gécseg and Peák [1972], Imreh [1981, 1984], Jónsson [1972], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Saliĭ [1988], Setoyanagi [1982], Smirnov [1978], Wenzel [1970], Yoeli [1967].

4.2. Relacije Nerodea i Myhilla

Veoma važnu ulogu u algebarskoj teoriji automata igraju veze koje postoje između automata i desnih kongruencija i kongruencija na slobodim polugrupama i monoidima. Tim vezama bavićemo se u ovom odeljku.

Najpre dokazujemo sledeće:

Teorema 4.2.1. *Neka je dat automat A i stanje $a \in A$. Definišimo relaciju ν_a na slobodnom monodu X^* sa:*

$$(u, v) \in \nu_a \;\Leftrightarrow\; au = av. \tag{4.1}$$

Tada je ν_a desna kongruencija na X^*.

Dokaz. Jasno je da je ν_a relacija ekvivalencije na X^*. Uzmimo proizvoljan par $(u, v) \in \nu_a$ i proizvoljnu reč $w \in X^*$. Tada je

$$\begin{aligned} a(uw) &= (au)w && \text{(prema Lemi 3.1.1)} \\ &= (av)w && \text{(jer je } (u,v) \in \nu_a) \\ &= a(vw) && \text{(prema Lemi 3.1.1)} \end{aligned}$$

što znači da je $(uw, vw) \in \nu_a$. Prema tome, ν_a je desno saglasna relacija. Ovim je teorema dokazana. □

Desnu kongruenciju ν_a nazivamo *Nerodeovom desnom kongruencijom* na X^* određenom stanjem a automata A, a restrikciju te desne kongruencije na slobodnoj polugrupi X^+ nazivamo *Nerodeovom desnom kongruencijom* na X^+ određenom sa a. Ako je A inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, tada ν_{a_0} nazivamo *Nerodeovom desnom kongruencijom automata* A i označavamo je sa ν_A.

Teorema 4.2.2. *Neka je dat automat A. Definišimo relaciju μ_A na slobodnom monoidu X^* sa*

$$(u,v) \in \mu_A \;\Leftrightarrow\; (\forall a \in A)\; au = av. \tag{4.2}$$

Tada je μ_A kongruencija na X^*.

Dokaz. Primetimo najpre da se relacija μ_A može izraziti i sa:

$$\mu_A = \bigcap_{a \in A} \nu_a.$$

To znači da, kao presek desnih kongruencija na X^*, relacija μ_A i sama jeste desna kongruencija na X^*. Prema tome, ostaje da se dokaže da je μ_A levo saglasna relacija. Da bi smo to dokazali, uzmimo proizvoljan par $(u,v) \in \mu_A$ i proizvoljnu reč $w \in X^*$. Uočimo takođe proizvoljno stanje $a \in A$. Tada je $(u,v) \in \mu_A \subseteq \nu_{aw}$, što znači da je $(aw)u = (aw)v$, tj. $a(wu) = a(wv)$, pa prema (4.2) dobijamo da je $(wu, wv) \in \mu_A$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Kongruenciju μ_A nazivamo *Myhillovom kongruencijom* na X^* automata A, a njenu restrikciju na slobodnoj polugrupi X^+ nazivamo *Myhillovom kongruencijom* na X^+ automata A. Kada govorimo o nekoj relaciji uvek naznačujemo na kom skupu je ona definisana, pa neće biti zabune ako za obe ove kongruencije koristimo istu oznaku μ_A.

Za proizvoljan alfabet X, označimo sa $X^*_@$ automat sa skupom stanja X^*, ulaznim alfabetom X i funkcijom prelaza $\delta : X^* \times X \to X^*$ definisanom sa $\delta(u,x) = ux$, gde je $u \in X^*$ i $x \in X$, a ux je njihov proizvod u slobodnom monoidu X^*. Podautomat od $X^*_@$ sa skupom stanja X^+ označavaćemo sa $X^+_@$. Drugim rečima, slobodni monoid X^* i slobodnu polugrupu X^+ možemo tretirati i kao automate, i u slučaju kada to činimo, to ističemo pišući $X^*_@$ i $X^+_@$ umesto X^* i X^+, tim redom.

Teorema 4.2.3. *Neka je θ relacija na X^+ (X^*). Tada je θ desna kongruencija na slobodnoj polugrupi X^+ (monoidu X^*) ako i samo ako je kongruencija na automatu $X^+_@$ ($X^*_@$).*

D o k a z . Dokazaćemo samo slučaj kada je θ relacija na X^+. Slučaj kada je θ relacija na X^* razmatra se analogno.

Uzmimo da je θ desna kongruencija na X^+. Jasno, θ je relacija ekvivalencije na $X^+_@$. Neka je $u, v \in X^+$ par stanja automata $X^+_@$ takav da je $(u, v) \in \theta$, i neka je $x \in X$ proizvoljan ulazni simbol. Tada je $(ux, vx) \in \theta$, tj. $(\delta(u, x), \delta(v, x)) \in \theta$, odakle sledi da je θ kongruencija na automatu $X^+_@$.

Obratno, neka je θ kongruencija na automatu $X^+_@$. Tada je θ relacija ekvivalencije na X^+. Ako su $u, v \in X^+$ reči takve da je $(u, v) \in \theta$ i $w \in X^+$ je proizvoljna reč, tada je $(uw, vw) \in \theta$, jer je θ kongruencija na automatu $X^+_@$. Prema tome, θ je desna kongruencija na slobodnoj polugrupi X^+. $\square$

Neka je θ desna kongruencija na slobodnoj polugrupi X^+ (slobodnom monoidu X^*), tj. kongruencija na automatu $X^+_@$ ($X^*_@$). Tada faktor-automat $X^+_@/\theta$ ($X^*_@/\theta$) automata $X^+_@$ ($X^*_@$) u odnosu na kongruenciju θ nazivamo *Nerodeovim automatom* desne kongruencije θ i označavamo ga sa A_θ. Podsetimo se da je funkcija prelaza $\delta_\theta : A_\theta \times X \to A_\theta$ automata A_θ definisana sa

$$\delta_\theta(u\theta, x) = (ux)\theta, \tag{4.3}$$

i da za proizvoljne $u\theta \in A_\theta$ i $v \in X^*$ u automatu A_θ važi

$$(u\theta)v = (uv)\theta. \tag{4.4}$$

U slučaju kada je θ kongruencija na X^+ (X^*), tada A_θ nazivamo *Myhillovim automatom* kongruencije θ.

Automat $X^*_@$ obično se razmatra kao inicijalni automat sa inicijalnim stanjem e, a ako je θ desna kongruencija na X^*, tj. kongruencija na $X^*_@$, automat A_θ se obično razmatra kao inicijalni automat sa inicijalnim stanjem $e\theta$. U tom slučaju automatu A_θ možemo ponovo pridružiti desnu kongruenciju ν_{A_θ}. Odnos između θ i ν_{A_θ} prikazuje sledeća teorema.

Teorema 4.2.4. *Za proizvoljnu desnu kongruenciju θ na slobodnom monoidu X^* važi $\theta = \nu_{A_\theta}$.*

D o k a z . Za proizvoljan par $u, v \in X^*$ važi sledeće:

$$\begin{aligned}
(u, v) \in \nu_{A_\theta} &\Leftrightarrow (e\theta)u = (e\theta)v && \text{(prema (4.1))} \\
&\Leftrightarrow (eu)\theta = (ev)\theta && \text{(prema (4.4))} \\
&\Leftrightarrow u\theta = v\theta \\
&\Leftrightarrow (u, v) \in \theta.
\end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da je $\nu_{A_\theta} = \theta$. $\square$

Teorema 4.2.5. *Proizvoljan povezan inicijalni automat A je izomorfan (kao inicijalni automat) automatu A_{ν_A}.*

D o k a z . Pojednostavimo pisanje stavljajući da je $\nu = \nu_A$.

Kako je A povezan inicijalni automat, to za proizvoljno stanje $a \in A$ postoji $u \in X^*$ tako da je $a = a_0 u$, pa definišemo preslikavanje $\varphi : A \to A_\nu$ sa:

$$a\varphi = u\nu,$$

gde je $u \in X^*$ proizvoljna reč za koju važi $a = a_0 u$. Ovakva definicija preslikavanja φ je korektna, jer ne zavisi od izbora reči u. Naime, ako su $u, v \in X^*$ reči za koje je $a = a_0 u = a_0 v$, tada je $(u, v) \in \nu$, prema (4.1), pa je $u\nu = v\nu$.

Proizvoljno stanje automata A_ν je klasa $u\nu$ neke reči $u \in X^*$, pa je $u\nu = (a_0 u)\varphi$. Prema tome, φ je sirjektivno preslikavanje. Uzmimo $a, b \in A$ takve da je $a\varphi = b\varphi$. Kako je $a\varphi = u\nu$ i $b\varphi = v\nu$, za neke reči $u, v \in X^*$ takve da je $a = a_0 u$ i $b = a_0 v$, to iz $a\varphi = b\varphi$ dobijamo da je $u\nu = v\nu$, odnosno $(u, v) \in \nu$, što prema definiciji relacije $\nu = \nu_A$ znači da je $a_0 u = a_0 v$. Dakle,

$$a = a_0 u = a_0 v = b,$$

što je i trebalo dokazati.

Na kraju, uzmimo proizvoljne $a \in A$, $x \in X$. Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč za koju je $a_0 u = a$. Tada je

$$\delta(a, x) = ax = (a_0 u)x = a_0(ux),$$

pa je

$$(\delta(a, x))\varphi = (a_0(ux))\varphi = (ux)\nu = \delta_\nu(u\nu, x) = \delta_\nu(a\varphi, x),$$

prema definiciji preslikavanja φ i (4.3). Prema tome, φ je homomorfizam. Jasno je da je $a_0\varphi = e\nu$, pa je φ homomorfizam inicijalnih automata. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Setimo se da je u algebri uobičajeno da se izomorfne algebarske strukture poistovećuju. Ako istu konvenciju primenimo i kod automata, tj. ako poistovetimo izomorfne automate, tada prema prethodnim dvema teoremama možemo reći da su

$$\nu \mapsto A_\nu \qquad \text{i} \qquad A \mapsto \nu_A$$

međusobno inverzne bijekcije iz skupa svih desnih kongruencija na slobodnom monoidu X^* na skup svih automata sa ulaznim alfabetom X, i obratno.

Odnos tih bijekcija prema parcijalnom uređenju na skupu desnih kongruencija na slobodnom monoidu X^* dat je sledećom teoremom:

Teorema 4.2.6. *Za povezane inicijalne automate A i A' važi $\nu_A \subseteq \nu_{A'}$ ako i samo ako postoji homomorfizam inicijalnih automata iz A na A'.*

D o k a z . Radi pojednostavljenja oznaka, uvedimo oznake $\nu = \nu_A$ i $\nu' = \nu_{A'}$.

Uzmimo da je $\nu \subseteq \nu'$. Kako su ν i ν' kongruencije na automatu $X^*_@$, to prema Drugoj teoremi o izomorfizmu (Teorema 1.3.3) imamo da postoji homomorfizam inicijalnih automata iz $X^*_@/\nu$ na $X^*_@/\nu'$, tj. iz A_ν na $A_{\nu'}$. Sa druge strane, prema Teoremi 4.2.5, automat A je izomorfan kao inicijalni automat automatu A_ν, a automat A' automatu $A_{\nu'}$. Prema tome, automat A' je homomorfna slika, kao inicijalni automat, automata A.

Obratno, uzmimo da postoji homomorfizam inicijalnih automata φ iz A na A'. Uzmimo proizvoljan par $(u, v) \in \nu$. Prema definiciji relacije $\nu = \nu_A$ imamo da je $a_0u = a_0v$, odakle prema činjenici da je $a_0' = a_0\varphi$ i Lemi 3.3.1 dobijamo da je

$$a_0'u = (a_0\varphi)u = (a_0u)\varphi = (a_0v)\varphi = (a_0\varphi)v = a_0'v.$$

Dakle, $(u, v) \in \nu' = \nu_{A'}$, čime smo dokazali da je $\nu \subseteq \nu'$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Literatura: Andréka, Horváth and Németi [1973], Arbib [1969], Fülöp and Vágvölgyi [1989], Gécseg and Peák [1972], Kozen [1992], Lallement [1979], Myhill [1957], Nerode [1958], Park [1994], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Rabin and Scott [1959], Steinby [1992b].

4.3. Polugrupa prelaza automata

Podsetimo se da smo u Odeljku 4.1. svakoj ulaznoj reči $u \in X^*$ automata A pridružili preslikavanje $u^A : A \to A$ definisano sa $u^A : a \mapsto au$. Radi veće jasnoće, to preslikavanje ćemo označavati sa η_u, a nazivaćemo ga *funkcijom prelaza* automata A *određenom ulaznom reči* u. Prema tome, $\eta_u : A \to A$ je preslikavanje definisano sa

$$a\eta_u = au, \tag{4.5}$$

za $a \in A$. Jasno, funkcija prelaza η_e određena praznom reči e je identičko preslikavanje skupa A.

Uvedimo sada oznake

$$S(A) = \{\eta_u \,|\, u \in X^+\},\ M(A) = \{\eta_u \,|\, u \in X^*\},\ T_X = \{\eta_x \,|\, x \in X\}.$$

Evidentno,

$$T_X \subset S(A) \subset M(A) \subseteq \mathcal{T}_r(A),$$

gde, potsetimo se, $\mathcal{T}_r(A)$ označava polugrupu (monoid) desnih transformacija skupa A. Štaviše, važi i sledeća teorema:

Teorema 4.3.1. *Za proizvoljan automat A, $S(A)$ je podpolugrupa, a $M(A)$ je podmonoid monoida $\mathcal{T}_r(A)$ generisan skupom T_X.*

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\varphi : X^+ \to \mathcal{T}_r(A)$ sa

$$u\varphi = \eta_u. \tag{4.6}$$

Jasno da je $\eta_u\eta_v = \eta_{uv}$, za sve $u, v \in X^+$, što znači da je $S(A)$ podpolugrupa od $\mathcal{T}_r(A)$ i φ je homomorfizam iz X^* u $\mathcal{T}_r(A)$. Ako je $\eta_u \in S(A)$, $u \in X^+$, proizvoljan element, i ako je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, tada je

$$\eta_u = \eta_{x_1x_2\cdots x_n} = \eta_{x_1}\eta_{x_2}\cdots\eta_{x_n},$$

što dokazuje da je $S(A)$ podpolugrupa od $\mathcal{T}_r(A)$ generisana skupom T_X. Kako je $M(A) = S(A) \cup \{\eta_e\}$ i η_e je identičko preslikavanje na A, tj. jedinica u $\mathcal{T}_r(A)$, to je $M(A)$ podmonoid od $\mathcal{T}_r(A)$ generisan skupom T_X. $\square$

Polugrupu $S(A)$ nazivamo *polugrupom prelaza*, dok monoid $M(A)$ nazivamo *monoidom prelaza* automata A.

Polugrupa i monoid prelaza automata mogu se definisati i na drugačiji način, pomoću Myhillovih kongruencija, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 4.3.2. *Za proizvoljan automat A, $S(A)$ je faktor-polugrupa slobodne polugrupe X^+ u odnosu na Myhillovu kongruenciju na X^+, a $M(A)$ je faktor-monoid slobodnog monoida X^* u odnosu na Myhillovu kongruenciju na X^*.*

Dokaz. Dokazaćemo samo tvrđenje koje se tiče polugrupe prelaza, jer se ono koje se tiče monoida prelaza dokazuje na isti način.

U prethodnoj teoremi dokazali smo da preslikavanje $\varphi : X^+ \to \mathcal{T}_r(A)$ definisano sa $u\varphi = \eta_u$ jeste homomorfizam iz X^+ u $\mathcal{T}_r(A)$, a slika polugrupe X^+ u odnosu na taj homomorfizam je upravo polugrupa prelaza $S(A)$.

Prema tome, φ je homomorfizam iz X^+ na $S(A)$, pa na osnovu Teoreme o homomorfizmu, da bi smo dokazali da je $S(A) \cong X^+/\mu_A$, gde je μ_A Myhillova kongruencija X^+, dovoljno je dokazati da je $\ker \varphi = \mu_A$. To dokazujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(u,v) \in \ker \varphi &\Leftrightarrow u\varphi = v\varphi \\
&\Leftrightarrow \eta_u = \eta_v && \text{(prema (4.6))} \\
&\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ a\eta_u = a\eta_v \\
&\Leftrightarrow (\forall a \in A)\ au = av && \text{(prema (4.5))} \\
&\Leftrightarrow (u,v) \in \mu(A) && \text{(prema (4.2)),}
\end{aligned}$$

pa je $\ker \varphi = \mu_A$. $\square$

Teoremom 4.2.4 pokazano je da se svaka desna kongruencija na slobodnom monoidu može predstaviti kao Nerodeova desna kongruencija Nerodeovog automata te desne kongruencije. Narednom teoremom dokazujemo da se na isti način i svaka kongruencija na slobodnom monoidu može predstaviti kao Myhillova kongruencija Myhillovog automata te kongruencije.

Teorema 4.3.3. *Za proizvoljnu kongruenciju θ na slobodnom monoidu X^* važi $\theta = \mu_{A_\theta}$.*

Dokaz. Razmotrimo proizvoljan par $u, v \in X^*$. Primetimo najpre da važi

$$(u,v) \in \theta \Leftrightarrow (\forall w \in X^*)\,(wu, wv) \in \theta.$$

Zaista, ova ekvivalencija sastoji se od dve implikacije, od kojih se jedna dobija neposredno, kada se uzme da je $w = e$, dok je obratna implikacija posledica činjenice da je θ kongruencija na X^*. Sa druge strane,

$$\begin{aligned}
(u,v) \in \mu_{A_\theta} &\Leftrightarrow (\forall w \in X^*)\,(w\theta)u = (w\theta)v && \text{(prema definiciji automata } A_\theta) \\
&\Leftrightarrow (\forall w \in X^*)\,(wu)\theta = (wv)\theta && \text{(prema (4.4))} \\
&\Leftrightarrow (\forall w \in X^*)\,(wu, wv) \in \theta.
\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali da je $\theta = \mu_{A_\theta}$. $\square$

Kao neposrednu posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeće:

Teorema 4.3.4. *Svaka polugrupa je polugrupa prelaza nekog automata, a svaki monoid je monoid prelaza nekog automata.*

D o k a z . Neka je S proizvoljan monoid. Kao što smo videli u Glavi 2, svaki monoid je faktor-monoid nekog slobodnog monoida X^*, tj. postoji kongruencija θ na X^* tako da je $X^*/\theta \cong S$. Prema Teoremi 4.3.3, $\theta = \mu_{A_\theta}$, pa je $S = M(A_\theta)$.

Sa druge strane, neka je S proizvoljna polugrupa. Tada je S faktor-polugrupa neke slobodne polugrupe X^+, tj. postoji kongruencija θ na X^+ tako da je $X^+/\theta \cong S$. Neka je $\theta^* = \theta \cup \{(e,e)\}$. Tada je θ^* kongruencija na X^*, i prema Teoremi 4.3.3, $\theta^* = \mu_{A_{\theta^*}}$, gde je $\mu_{A_{\theta^*}}$ Myhillova kongruencija na X^* automata A_{θ^*}. Jasno, Myhillova kongruencija na X^+ automata A_{θ^*}, tj. restrikcija Myhillove kongruencije $\mu_{A_{\theta^*}}$ na X^+, poklapa se sa kongruencijom θ. Dakle, $S = S(A_{\theta^*})$. $\square$

Kako se iz Teoreme 4.3.1 vidi, monoid prelaza automata je jedinično proširenje polugrupe prelaza tog automata, pa se mnoga svojstva monoida prelaza mogu ili izvesti iz odgovarajućih svojstava polugrupe prelaza ili su analogna tim svojstvima. Zbog toga ćemo se u daljem tekstu baviti samo polugrupama prelaza. Daćemo nekoliko rezultata koji pokazuju kako izvesni odnosi između automata utiču na odnose između njihovih polugrupa prelaza.

Teorema 4.3.5. *Ako je automat B podautomat automata A, tada je polugrupa $S(B)$ homomorfna slika polugrupe $S(A)$.*

D o k a z . Prema Drugoj teoremi o izomorfizmu, da bi smo dokazali da je $S(B)$ homomorfna slika polugrupe $S(A)$, dovoljno je dokazati da je $\mu_A \subseteq \mu_B$.

Zaista, ako je $(u,v) \in \mu_A$, tada za proizvoljno stanje $b \in B$ imamo da je $b \in A$, pa je $bu = bv$, što znači da je $(u,v) \in \mu_B$. $\square$

Teorema 4.3.6. *Ako je automat B homomorfna slika automata A, tada je polugrupa $S(B)$ homomorfna slika polugrupe $S(A)$.*

D o k a z . Neka je $\varphi : A \to B$ epimorfizam. Kao i u dokazu prethodne teoreme, dovoljno je dokazati da je $\mu_A \subseteq \mu_B$.

Neka je $(u,v) \in \mu_A$. Kako za proizvoljan $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $b = a\varphi$, to iz $(u,v) \in \mu_A$ sledi da je

$$bu = (a\varphi)u = (au)\varphi = (av)\varphi = (a\varphi)v = bv,$$

čime smo dobili da je $(u,v) \in \mu_B$. Dakle, $\mu_A \subseteq \mu_B$. $\square$

Teorema 4.3.7. *Ako je automat A poddirektan proizvod automata A_i, $i \in I$, tada je polugrupa $S(A)$ poddirektan proizvod polugrupa $S(A_i)$, $i \in I$.*

Dokaz. Neka je μ_A Myhillova kongruencija na X^+ automata A, i za svaki $i \in I$, neka je Myhillova kongruencija na X^+ automata A_i označana sa μ_i. Prema Posledici 1.7.3, da bi smo dokazali da je $S(A)$ poddirektan proizvod polugrupa $S(A_i)$, $i \in I$, dovoljno je dokazati da je

$$\mu_A = \bigcap_{i \in I} \mu_i.$$

Neka je $(u, v) \in \mu_A$. Razmotrimo proizvoljne $i \in I$ i $a_i \in A_i$. Kako je A poddirektan proizvod automata A_i, $i \in I$, to postoji $a \in A$ tako da je $a\pi_i = a_i$, gde je π_i projekcioni homomorfizam iz A na A_i. Sada iz $(u, v) \in \mu_A$ sledi $au = av$, što dalje daje

$$a_i u = (a\pi_i)u = (au)\pi_i = (av)\pi_i = (a\pi_i)v = a_i v.$$

Prema tome, $(u, v) \in \mu_i$, za svaki $i \in I$.

Obratno, neka je $(u, v) \in \mu_i$, za svaki $i \in I$, i neka je $a \in A$. Tada je $a = (a_i)_{i \in I}$, pa je

$$au = (a_i u)_{i \in I} = (a_i v)_{i \in I} = av,$$

čime smo dokazali da je $(u, v) \in \mu_A$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Literatura: Arbib [1969], Arbib (ed.) [1968], Burris and Sankappanavar [1981], Ésik [1992], Fleck [1965], Gécseg and Peák [1972], Glushkov [1961a, 1961b], Howie [1991], Krohn and Rhodes [1962, 1965], Lallement [1979], Myhill [1957], Nerode [1958], Oehmke [1963], Park [1994], Peák [1964, 1965], Perrin and Pin [1995], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Pin [1997], Rabin and Scott [1959], Redko [1965], Smirnov [1978].

4.4. Direktne sume automata

Ponovimo da smo za automat A rekli da je *direktna suma* automata A_α, $\alpha \in Y$, ako je A_α podautomat od A, za svaki $\alpha \in Y$, i važi

$$A = \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha \qquad \text{i} \qquad A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing, \text{ za } \alpha \neq \beta, \ \alpha, \beta \in Y.$$

U tom slučaju relaciju ekvivalencije čije klase su automati A_α, $\alpha \in Y$, nazivamo *direktno sumskom ekvivalencijom* na A, a odgovarajuće razbijanje nazivamo *direktno sumskim razlaganjem* ili *razlaganjem u direktnu* *sumu* automata A. Automate A_α nazivamo *direktnim sumandima* ili samo *sumandima* u tom razlaganju u direktnu sumu. Automat A nazivamo *nerazloživim u direktnu sumu* ako je univerzalna relacija ∇_A jedina direktno sumska ekvivalencija na A, tj. ako A ima samo jedno, trivijalno razlaganje u direktnu sumu.

Jasno je da relacija ekvivalencije θ na automatu A jeste direktno sumska ekvivalencija na A ako i samo ako svaka θ-klasa od A jeste podautomat od A. Još nekoliko važnih svojstava ovih relacija ekvivalencije dato je sledećom teoremom.

Teorema 4.4.1. *Sledeći uslovi za relaciju ekvivalencije θ na automatu A su ekvivalentni:*

(i) *θ je direktno sumska ekvivalencija na A;*

(ii) *θ je kongruencija na A i A/θ je diskretan automat;*

(iii) *θ je pozitivna relacija.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(iii). Neka je θ je direktno sumska ekvivalencija na A, tj. svaka θ-klasa podautomat od A. Tada za proizvoljno stanje $a \in A$ imamo da je $a\theta$ podautomat od A, odakle je $au \in a\theta$, tj. $(a, au) \in \theta$, za proizvoljnu reč $u \in X^*$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Uočimo stanja $a, b \in A$ takva da je $(a, b) \in \theta$ i proizvoljnu reč $u \in X^*$. Tada prema (iii) imamo da je $au\,\theta\, a\,\theta\, b\,\theta\, bu$, što znači da je $(au, bu) \in \theta$. Time smo dokazali da je θ kongruencija na A. Jasno je da svako stanje faktor-automata A/θ jeste trap, što znači da je A/θ diskretan automat.

(ii)$\Rightarrow$(i). Uočimo proizvoljno stanje $a \in A$. Tada za proizvoljne $b \in a\theta$ i $u \in X^*$ imamo da je $a\,\theta\, b$ i $b\,\theta\, bu$, jer je A/θ diskretan automat, što znači da je $a\,\theta\, bu$, tj. $bu \in a\theta$. Prema tome, klasa $a\theta$ je podautomat od A, što je i trebalo dokazati. $\square$

Prema Teoremi 4.4.1, svaka direktno sumska ekvivalencija na automatu A je kongruencija na A, pa ćemo umesto direktno sumska ekvivalencija nadalje govoriti *direktno sumska kongruencija* na A.

Kao neposrednu posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeće:

Posledica 4.4.1. *Svaki automat ima najmanju direktno sumsku kongruenciju.*

Dokaz. Neka je $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ familija svih direktno sumskih kongruencija na A i neka je σ presek te familije. Dokazaćemo da je i σ direktno sumska kongruencija na A, čime će biti dokazano da je to najmanja direktno sumska kongruencija na A.

Jasno, σ je relacija ekvivalencije na A. Sa druge strane, za proizvoljno stanje $a \in A$ i proizvoljnu reč $u \in X^*$, prema Teoremi 4.4.1 imamo da je $(a, au) \in \sigma_i$, za svaki $i \in I$, odakle sledi da je $(a, au) \in \sigma$, pa ponovo koristeći Teoremu 4.4.1 zaključujemo da je σ direktno sumska kongruencija na A. $\square$

U terminima razlaganja prethodna posledica može se formulisati na sledeći način.

Posledica 4.4.2. *Svaki automat ima najveće direktno sumsko razlaganje.*

Najmanju direktno sumsku kongruenciju na automatu A, čije postojanje je utvrđeno Posledicom 4.4.1, označavaćemo sa σ_A, ili samo sa σ, ako se podrazumeva o kom se automatu radi.

Ako su H i K skupovi, sa $H \between K$ ćemo označavati da ti skupoivi imaju neprazan presek, tj. da je $H \cap K \neq \varnothing$.

Neka je A proizvoljan automat. Definišimo relacije $\overline{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ na A na sledeći način: Za stanja $a, b \in A$ reći ćemo da je $(a, b) \in \overline{\sigma}$ ako postoji konačan niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da važi

$$S(a) \between S(c_1) \between S(c_2) \between \cdots \between S(c_n) \between S(b), \tag{4.7}$$

odnosno, reći ćemo da je $(a, b) \in \underline{\sigma}$ ako postoji konačan niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da važi

$$D(a) \between D(c_1) \between D(c_2) \between \cdots \between D(c_n) \between D(b). \tag{4.8}$$

Ukoliko je $n = 0$, što znači da je niz $\{c_i\}_{i=1}^n$ prazan, onda (4.7) postaje

$$S(a) \between S(b), \tag{4.9}$$

odnosno, (4.8) postaje

$$D(a) \between D(b). \tag{4.10}$$

Narednom teoremom dokazujemo da su obe ove relacije jednake najmanjoj direktno sumskoj kongruenciji na automatu, što nam zapravo daje dva načina za konstrukciju te kongruencije.

Teorema 4.4.2. *Na proizvoljnom automatu A je $\sigma = \overline{\sigma} = \underline{\sigma}$.*

Dokaz. Uočimo najpre da su $\overline{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ refleksivne i simetrične relacije na A. Dalje, neka je $(a,b) \in \overline{\sigma}$ i $(b,c) \in \overline{\sigma}$. Tada je

$$S(a) \between S(d_1) \between \cdots \between S(d_n) \between S(b) \between S(e_1) \between \cdots \between S(e_m) \between S(c),$$

za neke nizove $\{c_i\}_{i=1}^{n} \subseteq A$ i $\{e_j\}_{j=1}^{m} \subseteq A$, $n, m \in \mathbb{N}^0$, odakle je jasno da je $(a,c) \in \overline{\sigma}$. Prema tome, $\overline{\sigma}$ je tranzitivna relacija. Na isti način dokazujemo da je i $\underline{\sigma}$ tranzitivna relacija. Prema tome, $\overline{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ su relacije ekvivalencije na A. Konačno, za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$ imamo da je

$$au \in S(a) \cap S(au) \quad \text{i} \quad a \in D(a) \cap D(au),$$

što znači da je $(a, au) \in \overline{\sigma}$ i $(a, au) \in \underline{\sigma}$. Dakle, na osnovu Teoreme 4.4.1 dobijamo da su $\overline{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ direktno sumske kongruencije na A, odakle sledi da je $\sigma \subseteq \overline{\sigma}$ i $\sigma \subseteq \underline{\sigma}$.

Preostaje da se dokažu i obratne inkluzije. Da bi smo dokazali da je $\overline{\sigma} \subseteq \sigma$, najpre dokazujemo da važi

$$S(a) \between S(b) \;\Rightarrow\; (a,b) \in \sigma.$$

Zaista, ako je $S(a) \between S(b)$, tada postoje $c \in A$ i $u, v \in X^*$ tako da je $au = c = bv$, pa prema Teoremi 4.4.1 dobijamo da je

$$a \,\sigma\, au = c = bv \,\sigma\, b,$$

što zbog tranzitivnosti relacije σ daje $a \,\sigma\, b$. Dalje, ako je $(a,b) \in \overline{\sigma}$, za neka stanja $a, b \in A$, tj. ako postoji niz $\{c_i\}_{i=1}^{n} \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da važi

$$S(a) \between S(c_1) \between S(c_2) \between \cdots \between S(c_n) \between S(b),$$

tada iz prethodno dokazanog dobijamo da je

$$a \,\sigma\, c_1 \,\sigma\, c_2 \,\sigma\, \cdots \,\sigma\, c_n \,\sigma\, b,$$

pa ponovo zbog tranzitivnosti relacije σ zaključujemo da je $(a,b) \in \sigma$. Ovim smo dokazali da je $\overline{\sigma} \subseteq \sigma$, što sa prethodno dokazanim daje $\overline{\sigma} = \sigma$.

Sa druge strane, dokazaćemo i da za $a, b \in A$ važi

$$D(a) \between D(b) \;\Rightarrow\; (a,b) \in \sigma.$$

Zaista, ako je $D(a) \between D(b)$, to znači da postoji $c \in A$ i $u, v \in X^*$ tako da je $cu = a$ i $cv = b$, pa i u ovom slučaju, koristeći Teoremu 4.4.1, dobijamo da je

$$a = cu\,\sigma\, c\,\sigma\, cv = b,$$

što zbog tranzitivnosti relacije σ daje $(a,b) \in \sigma$. Dakle, ukoliko je $(a,b) \in \underline{\sigma}$, za neka stanja $a, b \in A$, tada postoji niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da važi

$$D(a) \between D(c_1) \between D(c_2) \between \cdots \between D(c_n) \between D(b),$$

odakle sledi da je

$$a\,\sigma\, c_1\,\sigma\, c_2 \cdots \sigma\, c_n\,\sigma\, b,$$

pa zaključujemo da je $(a,b) \in \sigma$. Ovim smo dokazali da je $\underline{\sigma} \subseteq \sigma$, odnosno da je $\underline{\sigma} = \sigma$. $\square$

Iz Teoreme 4.4.2 može se izvesti sledeća posledica, kojom su okarakterisani automati nerazloživi u direktnu sumu.

Posledica 4.4.3. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je nerazloživ u direktnu sumu;*

(ii) *za proizvoljan par stanja $a, b \in A$ postoji konačan niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da je*

$$S(a) \between S(c_1) \between S(c_2) \between \cdots \between S(c_n) \between S(b);$$

(iii) *za proizvoljan par stanja $a, b \in A$ postoji konačan niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da je*

$$D(a) \between D(c_1) \between D(c_2) \between \cdots \between D(c_n) \between D(b).$$

Naredna teorema pokazuje da ne samo što svaki automat ima najveće direktno sumsko razlaganje, već su i sumandi u tom razlaganju nerazloživi u direktnu sumu.

Teorema 4.4.3. *Svaki automat A se može predstaviti u obliku direktne sume automata nerazloživih u direktnu sumu.*

Dokaz. Predstavimo automat A u obliku direktne sume automata A_α, $\alpha \in Y$, pri čemu svaki A_α jeste σ-klasa automata A. Drugim rečima, ovo razlaganje je najveće razlaganje automata A u direktnu sumu. Dokazaćemo da je automat A_α nerazloživ u direktnu sumu, za svaki $\alpha \in Y$.

Razmotrimo proizvoljan $\alpha \in Y$. Ako je $a, b \in A_\alpha$ proizvoljan par stanja, tada je $(a, b) \in \sigma$, odakle, prema Teoremi 4.4.2, sledi da postoji konačan niz $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}^0$, tako da je

$$S(a) \between S(c_1) \between S(c_2) \between \cdots \between S(c_n) \between S(b).$$

Kao u dokazu Teoreme 4.4.2 dobijamo da je $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq A_\alpha$. Primetimo da su $S(a), S(c_1), \ldots, S(c_n), S(b)$ monogeni podautomati od A generisani stanjima $a, c_1, \ldots, c_n, b \in A$, tim redom. Međutim, proizvoljan podskup od A_α je podautomat od A ako i samo ako je podautomat od A_α, što znači da su $S(a), S(c_1), \ldots, S(c_n), S(b)$ takođe i monogeni podautomati od A_α generisani stanjima $a, c_1, \ldots, c_n, b \in A_\alpha$, tim redom. Dakle, prema Posledici 4.4.3 dobijamo da je A_α automat nerazloživ u direktnu sumu.

Prema tome, automat A je direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, nerazloživih u direktnu sumu. $\square$

Teoremom 4.4.2 pokazali smo kako se može konstruisati kongruencija koja daje najveće razlaganje automata u direktnu sumu. U daljem tekstu pokazaćemo kako se određuju sumandi u tom razlaganju. Najpre uvodimo sledeći pojam: Za podskup H automata A govorićemo da je *filter* ako je istovremeno i podautomat i dualni podautomat automata A, tj. ako za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$ važi

$$a \in H \;\Leftrightarrow\; au \in H.$$

Jasno, prema ovoj definiciji, i prazan skup je filter od A. Za proizvoljan podskup H automata A, presek svih filtera od A koji sadrže H je takođe filter koji označavamo sa $F(H)$ i nazivamo *filterom generisanim skupom* H. Očigledno, to je najmanji filter od A koji sadrži H. Filter generisan jednoelementnim skupom $\{a\}$ nazivamo *glavnim filtrom* generisanim stanjem a i označavamo ga sa $F(a)$.

Ulogu filtera u razlaganjima automata u direktnu sumu prikazuje nam sledeća teorema.

Teorema 4.4.4. *Podskup H automata A je filter od A ako i samo ako je direktni sumand od A.*

Štaviše, sumandi u najvećem razlaganju automata A u direktnu sumu upravo su glavni filtri od A.

Dokaz. Lako se proverava da je H podautomat od A ako i samo ako je njegov skupovni komplement $A \setminus H$ dualni podautomat od A, što znači da je H filter od A ako i samo ako je $A \setminus H$ filter od A. Prema tome, ako je H filter od A, tada je A direktna suma automata H i $A \setminus H$, tj. H je direktni sumand od A.

Obratno, ako je H direktni sumand od A, tada se A može predstaviti kao direktna suma automata H i $A \setminus H$. To znači da su H i $A \setminus H$ podautomati od A, odakle dalje sledi da je H dualni podautomat od A, pa je H filter od A.

Ako je H sumand u najvećem razlaganju automata A u direktnu sumu koji sadrži stanje $a \in A$, tada je H filter od A, pa je $F(a) \subseteq H$, jer je $F(a)$ najmanji filter od A koji sadrži a. Sa druge strane, $F(a)$ je filter i od H, pa je, prema prethodno dokazanom, i direktni sumand od H. Međutim, H je automat nerazloživ u direktnu sumu, što znači da mora biti $F(a) = H$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da se najmanja direktno sumska kongruencija σ na automatu može izraziti i na sledeći način:

Posledica 4.4.4. *Neka su a i b proizvoljna stanja automata A. Tada su a i b u relaciji σ ako i samo ako generišu isti glavni filter, tj. važi*

$$(a, b) \in \sigma \;\Leftrightarrow\; F(a) = F(b).$$

Naš naredni zadatak je da damo postupak za konstrukciju glavnih filtera automata. U tom cilju koristićemo pojmove podautomata i dualnog podautomata generisanog skupom, kao i pojam skupa $A(H)$ *susednih stanja* podskupa H automata A, koji definišemo sa:

$$A(H) = H \cup \{b \in A \,|\, (\exists a \in H)(\exists x \in X)\, ax = b \text{ or } bx = a\}.$$

Naime, dokazujemo sledeću teoremu:

Teorema 4.4.5. *Neka je A automat, neka je $a \in A$ proizvoljno stanje i neka su nizovi $\{D_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$, $\{S_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ i $\{A_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od A definisani sa:*

$$\begin{aligned} &D_0(a) = \{a\}, \qquad && D_{k+1}(a) = D(S(D_k(a))), \qquad && \textit{za svaki } k \in \mathbb{N},\\ &S_0(a) = \{a\}, && S_{k+1}(a) = S(D(S_k(a))), && \textit{za svaki } k \in \mathbb{N},\\ &A_0(a) = \{a\}, && A_{k+1}(a) = A(A_k(a)), && \textit{za svaki } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tada $\{D_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$, $\{S_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ i $\{A_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ jesu rastući nizovi skupova i važi

$$F(a) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} D_k(a) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} S_k(a) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a).$$

Dokaz. Označimo sa D uniju niza $\{D_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$. Prema definiciji tog niza, svaki njegov član je dualni podautomat od A, pa i njegova unija D jeste dualni podautomat od A. Sa druge strane, ako je $b \in D$ i $u \in X^*$, tada je $b \in D_k(a)$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, pa je $bu \in S(D_k(a)) \subseteq D(S(D_k(a))) = D_{k+1}(a) \subseteq D$. Prema tome, D je i podautomat od A, odnosno D je filter od A, odakle sledi da je $F(a) \subseteq D$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, da je $D \subseteq F(a)$, indukcijom ćemo dokazati da je $D_k(a) \subseteq F(a)$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$. Jasno je da to važi za $k = 0$. Pretpostavimo da je $D_k(a) \subseteq F(a)$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$. Kako je $F(a)$ i podautomat i dualni podautomat od A, to je $S(F(a)) = D(F(a)) = F(a)$, odakle je

$$D_{k+1}(a) = D(S(D_k(a))) \subseteq D(S(F(a))) = F(a),$$

što je i trebalo dokazati. Dakle, dokazali smo da je $D = F(a)$, tj. $F(a)$ je unija niza $\{D_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$. Na sličan način dokazujemo da je $F(a)$ unija niza $\{S_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$.

Dalje, indukcijom ćemo dokazati da je $A_k(a) \subseteq D_k(a)$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$. To je jasno za $k = 0$. Pretpostavimo da je $A_k(a) \subseteq D_k(a)$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, i uočimo proizvoljno stanje $c \in A_{k+1}(a)$. Razlikujemo sledeće tri mogućnosti: $c \in A_k(a)$, ili $c = bx$, za neke $b \in A_k(a)$ i $x \in X$, ili $cx = b$, za neke $b \in A_k(a)$ i $x \in X$. U prvom slučaju imamo da je $c \in A_k(a) \subseteq D_k(a) \subseteq D_{k+1}(a)$. U drugom slučaju je $b \in D_k(a)$, pa je $c \in S(D_k(a)) \subseteq D(S(D_k(a))) = D_{k+1}(a)$, dok u trećem slučaju dobijamo da je $b \in D_k(a) \subseteq S(D_k(a))$, odakle je $c \in D(S(D_k(a))) = D_{k+1}(a)$. Dakle, zaključujemo da je $A_k(a) \subseteq D_k(a)$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$, što daje $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a) \subseteq F(a)$.

Da bi dokazali i obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $D_i(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$ za svaki $i \in \mathbb{N}^0$. Jasno je da to važi za $i = 0$. Pretpostavimo sada da ta inkluzija važi za neki $i \in \mathbb{N}^0$ i uočimo proizvoljan $d \in D_{i+1}(a)$. Tada je $du = c$, za neke $c \in S(D_i(a))$ i $u \in X^*$, i dalje, $c = bv$, za neke $b \in D_i(a)$ i $v \in X^*$. Takođe imamo da je $u \in X^r$ i $v \in X^s$, za neke $r, s \in \mathbb{N}^0$, dok prema pretpostavci sledi da je $b \in A_t(a)$, za neki $t \in \mathbb{N}^0$, pa imamo da je $d \in A_{r+s+t}(a)$. Prema tome, $D_{i+1}(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$, pa indukcijom dobijamo da je $D_i(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$, za svaki $i \in \mathbb{N}^0$. To konačno daje $F(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

U slučaju konačnih automata prethodna teorema nam daje efektivan postupak za određivanje sumanada u najvećem razlaganju u direktnu sumu, što je prikazano sledećom posledicom:

Posledica 4.4.5. *Neka je A konačan automat. Tada postoje*

$$k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (\forall a \in A)\, A_i(a) = A_{i+1}(a)\},$$
$$m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (\forall a \in A)\, D_i(a) = D_{i+1}(a)\},$$
$$n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (\forall a \in A)\, S_i(a) = S_{i+1}(a)\},$$

za koje takođe važi da je $k, m, n \leq |A|$ i

$$F(a) = A_k(a) = D_m(a) = S_n(a),$$

za svaki $a \in A$.

Literatura: Ćirić and Bogdanović [1999a], Ćirić, Bogdanović and Kovačević [1998], Ćirić, Bogdanović and Petković [1996, 1998], Glushkov [1961a], Huzino [1958], Kovačević, Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Petković [1998], Thierrin [1972], Shevrin [1962].

4.5. Lokalno povezani automati

Kada automat A krene sa radom iz nekog svog stanja a, onda će sva stanja koje automat A koristi u tom radu pripadati monogenom podautomatu od A generisanom stanjem a. Drugim rečima, rad automata A je u tom slučaju lokalizovan samo na monogeni podautomat generisan stanjem a. Prema tome, ako želimo da znamo šta automat A može da uradi nezavisno od toga iz kog svog stanja je započeo rad, treba da znamo koje su to osobine koje imaju svi njegovi monogeni podautomati. To nas motiviše da se upustimo u izučavanje takozvanih lokalnih svojstava automata.

Kada govorimo o svojstvima automata, ili algebri uopšte, radije govorimo o klasama automata, jer obično sve automate sa datim svojstvom sakupimo u jednu klasu – klasu svih automata sa datim svojstvom. Tako ćemo pojam lokalnog svojstva automata ovde razmatrati kao pojam lokalne pripadnosti odgovarajućoj klasi automata, koji ćemo sada uvesti. Neka je, dakle, $\boldsymbol{K}$ proizvoljna klasa automata. Tada sa $L(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih automata A čiji svi monogeni podautomati pripadaju klasi $\boldsymbol{K}$, tj. $S(a) \in \boldsymbol{K}$, za svaki $a \in A$. Za automat iz klase $L(\boldsymbol{K})$ kažemo da *lokalno pripada klasi* $\boldsymbol{K}$, ili da je *lokalno* $\boldsymbol{K}$*-automat*. Prema tome, ovim smo definisali operator

$$L : \boldsymbol{K} \mapsto L(\boldsymbol{K})$$

na klasama automata koji svakoj klasi $\boldsymbol{K}$ automata pridružuje klasu $L(\boldsymbol{K})$. Operator L nazivaćemo *operatorom lokalizacije*, a $L(\boldsymbol{K})$ nazivaćemo *lokalizacijom klase* $\boldsymbol{K}$.

Osim ovog operatora, definišemo i operator

$$CL : \boldsymbol{K} \mapsto CL(\boldsymbol{K})$$

koji svakoj klasi automata $\boldsymbol{K}$ pridružuje klasu $CL(\boldsymbol{K})$ koju čine svi automati čiji svi konačno generisani podautomati pripadaju klasi $\boldsymbol{K}$. Operator CL nazivaćemo *operatorom potpune lokalizacije*, a $CL(\boldsymbol{K})$ nazivaćemo *potpunom lokalizacijom klase* $\boldsymbol{K}$. Za automat iz klase $CL(\boldsymbol{K})$ kažemo da *potpuno lokalno pripada klasi* $\boldsymbol{K}$, ili da je *potpuno lokalno* $\boldsymbol{K}$*-automat*.

Klasa od koje ćemo krenuti pri izučavanju operatora lokalizacije je klasa povezanih automata. Naime, za automat A kažemo da je *povezan* ako za proizvoljna dva stanja $a, b \in A$ postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $au = bv$, tj. ako je $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$, ili $S(a) \between S(b)$, kako smo to označavali u prethodnom odeljku. Klasu svih povezanih automata označavaćemo sa **Conn**. U skladu sa konceptom lokalne pripadnosti automata datoj klasi, automat A ćemo nazivati *lokalno povezanim* ako je svaki njegov monogeni podautomat povezan.

Narednom teoremom data je karakterizacija lokalno povezanih automata.

Teorema 4.5.1. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je lokalno povezan automat;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall p, q \in X^*)(\exists u, v \in X^*)\ apu = aqv$*;*

(iii) *A je direktna suma povezanih automata;*

(iv) *$D(H)$ je podautomat od A, za svaki podautomat H od A.*

Dokaz. (i)⇒(ii). Za proizvoljno stanje $a \in A$ i proizvoljne reči $p, q \in X^*$ imamo da $ap, aq \in S(a)$ i $S(a)$ je po pretpostavci povezan automat, odakle sledi da postoje $u, v \in X^*$ tako da je $apu = aqv$.

(ii)⇒(i). Neka je $a \in A$. Kako se proizvoljna dva stanja iz $S(a)$ mogu predstaviti u obliku ap i aq, za neke reči $p, q \in X^*$, to prema pretpostavci (ii) dobijamo da postoje reči $u, v \in X^*$ tako da je $(ap)u = (aq)v$, čime smo dokazali da je $S(a)$ povezan automat, odnosno da je A lokalno povezan automat.

(i)⇒(iii). Neka je A lokalno povezan automat. Definišimo relaciju ϱ na A na sledeći način:

$$a \, \varrho \, b \;\Leftrightarrow\; S(a) \between S(b),$$

gde su $a, b \in A$. Očigledno je da je ϱ refleksivna i simetrična relacija, a prema Teoremi 4.4.2, najmanja direktno sumska kongruencija σ na A jednaka je tranzitivnom zatvorenju relacije ϱ.

Dokazaćemo da je ϱ tranzitivna relacija. Uočimo stanja $a, b, c \in A$ takva da važi $a\,\varrho\, b$ i $b\,\varrho\, c$, tj. $S(a) \between S(b)$ i $S(b) \between S(c)$. Dakle, postoje reči $u_1, v_1, u_2, v_2 \in X^*$ takve da je $au_1 = bv_1$ i $bu_2 = cv_2$. Kako su $bv_1, bu_2 \in S(b)$, a po pretpostavci je $S(b)$ povezan automat, to imamo da postoje $u, v \in X^*$ tako da važi $bv_1u = bu_2v$. Međutim, onda je

$$au_1u = bv_1u = bu_2v = cv_2v,$$

što daje $S(a) \between S(c)$. Dakle, ϱ je tranzitivna relacija, što znači da je $\varrho = \sigma$, odnosno da je ϱ direktno sumska kongruencija na A.

Preostaje da se dokaže da je svaka ϱ-klasa povezan automat. Zaista, neka je B proizvoljna ϱ-klasa i neka su $a, b \in B$ proizvoljni elementi. Tada iz $a\varrho b$ sledi $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$, pa za proizvoljan $c \in S(a) \cap S(b)$ važi $au = c = bv$, za neke $u, v \in X^*$. Prema tome, B je povezan automat.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka je A direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada je $a \in A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa je i $S(a) \subseteq A_\alpha$. Kako je A_α povezan automat i kako je klasa **Conn** zatvorena za podautomate, to dobijamo da je i $S(a)$ povezan automat, odakle sledi da je automat A lokalno povezan.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Neka je H podautomat od A, $a \in D(H)$ je proizvoljno stanje i $q \in X^*$ je proizvoljna reč. Tada je $ap \in H$, za neki $p \in X^*$, pa prema (ii) dobijamo da je $apu = aqv$, za neke $u, v \in X^*$. Međutim, iz $ap \in H$ sledi $apu \in H$, tj. $aqv \in H$, pa je $aq \in D(H)$. Dakle, $D(H)$ je podautomat od A.

(iv)$\Rightarrow$(iii). Prema Teoremi 4.4.3, A se može razložiti u direktnu sumu automata A_α, $\alpha \in Y$, nerazloživih u direktnu sumu. Uočimo proizvoljne $\alpha \in Y$ i $a \in A_\alpha$. Prema Teoremi 4.4.4 je $A_\alpha = F(a)$, gde je $F(a)$ najmanji filter od A koji sadrži a. Međutim, $D(S(a))$ je podautomat, pa je i filter od A koji sadrži a. Prema tome, $A_\alpha = F(a) = D(S(a))$, pa za proizvoljne $a, b \in A_\alpha$ imamo da je $b \in D(S(a))$, odakle je $bv \in S(a)$, tj. $bv = au$, za neke $u, v \in X^*$. To znači da je A_α povezan automat, što je i trebalo dokazati. $\square$

Ako je A povezan automat sa trapom a_0, tada je taj trap jedinstven i za svako stanje $a \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = a_0$. Takav automat nazivaćemo *trap-povezanim automatom*. Takođe, ako je svaki monogeni podautomat automata A trap-povezan, tada ćemo A nazivati *lokalno trap-povezanim automatom*.

Kao što ćemo videti, trap-povezani automati igraće u ovoj knjizi veoma značajnu ulogu. Ovde najpre krećemo sa teoremom kojom se opisuje struktura lokalno trap-povezanih automata:

Teorema 4.5.2. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je lokalno trap-povezan automat;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall p, q \in X^*)(\exists u, v \in X^*)(\forall w \in X^*)\ apu = aqvw;$

(iii) *A je direktna suma trap-povezanih automata;*

(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog i trap-povezanog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog i trap-povezanog automata.*

Dokaz. (i)⇒(ii). Neka je $a \in A$. Prema (i), $S(a)$ je trap-povezan automat sa trapom a_0, i kako za proizvoljne $p, q \in X^*$ imamo da $ap, aq \in S(a)$, to postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $apu = aqv = a_0$. Sa druge strane, a_0 je trap, pa je $aqv = aqvw$, za svaki $w \in X^*$. Dakle, dokazali smo da važi (ii).

(ii)⇒(i). Prema Teoremi 4.5.1 sledi da je A lokalno povezan automat, pa ostaje da se dokaže da za proizvoljan $a \in A$, monogeni podautomat $S(a)$ ima trap. Zaista, za $a \in A$, prema (ii), imamo da postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $au = avw$, za svaku reč $w \in X^*$, odakle sledi da je $auw = avw^2 = au$, za proizvoljnu reč $w \in X^*$, što znači da je au trap automata $S(a)$.

(i)⇒(iii). Prema Teoremi 4.5.1, A je direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Sa druge strane, za proizvoljne $\alpha \in Y$ i $a \in A_\alpha$ imamo da je $S(a) \subseteq A_\alpha$, i $S(a)$ po pretpostavci ima trap, što znači da i A_α ima trap. Prema tome, A_α je trap-povezan automat.

(iii)⇒(iv). Neka je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je za svaki $\alpha \in Y$, A_α trap-povezan automat sa trapom a_α. Stavimo da je $B = \{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Tada je B podautomat od A i $\varrho_B \cap \sigma = \Delta_A$, gde je, podsetimo se, sa ϱ_B označena Reesova kongruencija na A određena podautomatom B a sa σ najmanja direktno sumska kongruencija na A, odnosno direktno sumska kongruencija koja daje razmatrano razlaganje automata A. Prema tome, automat A je poddirektan proizvod automata A/B i A/σ. Nije teško uočiti da je A/σ diskretan automat koji je izomorfan automatu B. Sa druge strane, s obzirom da je B skup svih trapova u A, A/B ima tačno jedan trap, i kako su A_α trap-povezani automati za svaki $\alpha \in Y$, to je i A/B trap-povezan. Time smo dokazali da važi (iv).

(iv)⇒(v). Ova implikacija je trivijalna.

(v)⇒(i). Neka je automat $A \subseteq B \times C$ paralelna kompozicija diskretnog automata B i trap-povezanog automata C. Za proizvoljno stanje $(b, c) \in A$, monogeni podautomat od A generisan sa (b, c) je dat sa $S((b, c)) = \{b\} \times S(c)$, pa je izomorfan monogenom podautomatu $S(c)$ automata C. Međutim, $S(c)$ je trap-povezan kao podautomat trap-povezanog automata C. Prema tome, $S((b, c))$ je trap-povezan automat, što znači da važi (i). □

Pored trap-povezanih automata, razmatraćemo još jedan specijalan slučaj povezanih automata. Automat A nazivaćemo *jako povezanim* ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = b$, odnosno, ako je $S(a) = A$, za svaki $a \in A$, ili, drugačije rečeno, ako A nema pravih podautomata. Osim ovog, u raznim izvorima se za ovakve automate koriste i nazivi *prost* ili *tranzitivan automat*. Ako je svaki monogeni podautomat od A jako povezan, tada kažemo da je A *lokalno jako povezan automat*. Ovi automati poznati su i kao *lokalno tranzitivni* i *invertibilni automati*. Jasno je da svaki jako povezan automat jeste povezan, a da svaki lokalno jako povezan automat jeste lokalno povezan.

Sledećom teoremom karakterišu se lokalno jako povezani automati.

Teorema 4.5.3. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je lokalno jako povezan automat;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall u \in X^*)(\exists v \in X^*)$ *$auv = a$;*

(iii) *A je direktna suma jako povezanih automata.*

Dokaz. (i)⇒(iii). Neka je γ relacija na A definisana sa

$$(a, b) \in \gamma \;\Leftrightarrow\; S(a) = S(b),$$

gde su $a, b \in A$. Jasno je da je γ relacija ekvivalencije na proizvoljnom automatu A, a dokazaćemo da pod pretpostavkom (i) ta relacija jeste direktno sumska kongruencija na A. Zaista, za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$, $S(au)$ je neprazan podautomat od $S(a)$, pa kako iz (i) sledi da je $S(a)$ jako povezan automat, to je $S(a) = S(au)$, čime smo dokazali da je $(a, au) \in \gamma$. Odatle prema Teoremi 4.4.1 dobijamo da je γ direktno sumska kongruencija na A. Jasno je da je γ-klasa proizvoljnog elementa $a \in A$ jednaka $S(a)$, što znači da svaka γ-klasa jeste jako povezan automat. Time je dokazano da važi (iii).

(iii)⇒(ii). Ako je A direktna suma jako povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$, tada za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$ imamo da $a, au \in A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa kako je A_α povezan automat, to postoji $v \in X^*$ tako da je $auv = a$, što je i trebalo dokazati.

(ii)⇒(i). Ova implikacija je jasna. □

Literatura: Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [1999, 2000], Bogdanović, Imreh, Ćirić and Petković [2000], Ćirić and Bogdanović [1999a], Ćirić, Bogdanović and Petković [1998], Gécseg and Thierrin [1987], Glushkov [1961a], Huzino [1958], Kovačević, Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Petković [1998], Steinby [1994], Thierrin [1972].

4.6. Lokalizacija varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta automata

S obzirom da automate sa ulaznim alfabetom X tretiramo kao unarne algebre tipa X, to možemo govoriti i o termima i identitetima tipa X kao o specijalnim slučajevima terma i identiteta uvedenih u Glavi 1. Međutim, u slučaju automata termi i identiteti imaju neke svoje specifičnosti, usled kojih pravimo i izvesne razlike u označavanju. Stoga ćemo najpre reći nešto o tome.

U slučaju automata, *term tipa* X nad skupom promenljivih G predstavlja svaki izraz oblika gu, gde je $g \in G$ promenljiva i $u \in X^*$ je ulazna reč. Prema tome, ovde termi imaju tu specifičnost da svaki od njih sadrži tačno jednu promenljivu. Na skupu $T(G, X)$, koji čine svi termi tipa X nad skupom promenljivih G, možemo definisati prelaze sa $(gu)v = g(uv)$, gde je $g \in G$ i $u, v \in X^*$, i u tom slučaju $T(G, X)$ postaje automat koji nazivamo *term automatom*. Ako sada pojam identiteta, uveden u Odeljku 1.8., primenimo na automate, dobijamo da *automatovni identitet* (tipa X nad skupom promenljivih G) jeste par (s, t), gde su $s, t \in T(G, X)$, koji, kao što je uobičajeno, zapisujemo kao formalnu jednakost $s = t$. To znači da automatovni identitet može biti ili oblika $gu = gv$, gde su $u, v \in X^*$, a to je zapravo *regularan automatovni identitet*, ili oblika $gu = hv$, gde je $g \neq v$ i $u, v \in X^*$, što predstavlja *neregularan automatovni identitet*. Pri tome, automat A zadovoljava identitet $gu = gv$ ako je $au = av$, za svako stanje $a \in A$, odnosno A zadovoljava $gu = hv$ ako je $au = bv$, za proizvoljna stanja $a, b \in A$. Skup svih identiteta nad $G = \{g, h\}$ zadovoljenih na A označavaćemo sa $\mathrm{Id}(A)$, a skup svih identiteta nad G zadovoljenih na svim automatima iz klase $\boldsymbol{K}$ označavaćemo sa $\mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$. Takođe, skupove svih regularnih, odnosno neregularnih identiteta nad G zadovoljenih na A i $\boldsymbol{K}$ označavamo sa $\mathrm{Id}_R(A)$, $\mathrm{Id}_R(\boldsymbol{K})$, $\mathrm{Id}_N(A)$ i $\mathrm{Id}_N(\boldsymbol{K})$, tim redom.

Ako svaki monogeni podautomat automata A zadovoljava identitet $s = t$, tj. $S(a) \models s = t$, za svaki $a \in A$, tada ćemo za A govoriti da *lokalno zadovoljava* automatovni identitet $s = t$, a za identitet $s = t$ da je *lokalno zadovoljen* na A, i pisaćemo $A \models_L s = t$. Neka je A automat i neka su $u, v \in X^*$. Tada definišemo relaciju $\varrho_{u,v}$ na A sa:

$$(a, b) \in \varrho_{u,v} \;\Leftrightarrow\; au = bv.$$

Relaciju $\varrho_{u,v}$ ćemo označavati i sa $\varrho^A_{u,v}$, u slučaju kada je potrebno naznačiti da je definisana na A.

U nastavku su prikazana neka svojstva relacije $\varrho_{u,v}$.

Teorema 4.6.1. *Neka je A automat i neka su $u, v \in X^*$. Tada*

(a) $A \models gu = gv$ *ako i samo ako je* $\varrho_{u,v}$ *refleksivna relacija. U tom slučaju* $\varrho_{u,v}$ *je relacija ekvivalencije na* A.

(b) $A \models_L gu = gv$ *ako i samo ako* $A \models gu = gv$.

(c) $A \models gu = hv$ *ako i samo ako je* $\varrho_{u,v} = \nabla_A$.

(d) $A \models_L gu = hv$ *ako i samo ako je* $\varrho_{u,v}$ *pozitivna relacija. U tom slučaju je* $\varrho_{u,v} = \sigma$.

Dokaz. Prvi deo tvrđenja (a) je očigledan. Preostaje da dokažemo drugi deo, tj. da je $\varrho_{u,v}$ simetrična i tranzitivna relacija.

Neka je $(a, b) \in \varrho_{u,v}$, tj. $au = bv$. S obzirom da $A \models gu = gv$, to imamo da je $au = av$ i $bu = bv$, pa je $bu = av$, odakle sledi da je $(b, a) \in \varrho_{u,v}$. Dakle, $\varrho_{u,v}$ je simetrična relacija. Neka je $(a, b) \in \varrho_{u,v}$ i $(b, c) \in \varrho_{u,v}$, tj. važi $au = bv$ i $bu = cv$. Tada $A \models gu = gv$ daje $bu = bv$, odakle je $au = cv$, što dalje povlači $(a, c) \in \varrho_{u,v}$. Prema tome, $\varrho_{u,v}$ je tranzitivna relacija, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenja (b) i (c) su jasna.

Preostaje da se dokaže (d). Pretpostavimo da $A \models_L gu = hv$. Tada $A \models gu = gv$, i prema (a) imamo da je $\varrho_{u,v}$ refleksivna relacija. Nije teško uočiti da je $\varrho_{u,v}$ i pozitivna. Obratno, pretpostavimo da je $\varrho_{u,v}$ pozitivna relacija. Prema (a) imamo da je $\varrho_{u,v}$ relacija ekvivalencije na A, a prema Teoremi 4.4.1, $\varrho_{u,v}$ je direktno sumska kongruencija na A. Međutim, iz $\varrho_{u,v} \subseteq \sigma$ i činjenice da je σ najmanja direktno sumska kongruencija na A, zaključujemo da je $\varrho_{u,v} = \sigma$. Da bi dokazali da $A \models_L gu = hv$, uočimo proizvoljne $a \in A$ i $b, c \in S(a)$. Tada je $b = au'$ i $c = av'$, za neke $u', v' \in X^*$, i kako je $\varrho_{u,v}$ direktno sumska kongruencija, to $(b, a) \in \varrho_{u,v}$ i $(a, c) \in \varrho_{u,v}$ daje $(b, c) \in \varrho_{u,v}$, tj. $bu = cv$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, $A \models_L gu = hv$. $\square$

Kao neposredna posledica Teoreme 4.6.1 dobija se da za svaki regularan varijetet automata $\boldsymbol{V}$ važi $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$. U slučaju kada je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata, takva jednakost neće važiti. Međutim, i u tom slučaju, $L(\boldsymbol{V})$ je varijetet automata, što će biti dokazano narednom teoremom. Tom teoremom daje se i efektivan postupak pomoću koga se, polazeći od skupa identiteta kojim je definisan varijetet $\boldsymbol{V}$, može odrediti skup regularnih identiteta koji definišu regularni varijetet $L(\boldsymbol{V})$. Pređimo sada na formulaciju i dokaz te teoreme.

Teorema 4.6.2. *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *neregularan varijetet automata određen skupom identiteta* Σ *i označimo sa* Σ' *skup identiteta koji čine:*

1° *svi identiteti iz* Σ_R*;*

2° *identitet* $gu = gv$ *i svi identiteti oblika* $gxu = gv$ *za* $x \in X$*, koji odgovaraju proizvoljnom fiksiranom identitetu* $gu = hv \in \Sigma_N$*;*

3° *svi identiteti oblika* $gu' = guu'$*,* $guu' = gvv'$ *i* $gv' = gvv'$*, koji odgovaraju identitetima* $gu' = hv' \in \Sigma_N \setminus \{gu = hv\}$*.*

Tada je $L(\boldsymbol{V})$ *varijetet automata određen skupom identiteta* Σ'*.*

Dokaz. Dokazaćemo da $A \models_L \Sigma$ ako i samo ako $A \models \Sigma'$, za proizvoljan automat A. Pretpostavimo najpre da $A \models_L \Sigma$. Tada $A \models \Sigma_R$, prema delu (b) Teoreme 4.6.1. Fiksirajmo proizvoljan identitet $gu = hv \in \Sigma_N$. Jasno je da onda $A \models gu = gv$ i $gxu = gv$, za svaki $x \in X$. Uočimo proizvoljan identitet $gu' = hv' \in \Sigma_N$ različit od $gu = hv$. Ako je B automat takav da $B \models gu' = hv'$, lako se proverava da $B \models gu' = hu'$ i $B \models gv' = hv'$. Prema tome, $A \models_L gu' = hv'$ daje $A \models_L gu' = hu'$ i $A \models_L gv' = hv'$. Međutim, odavde je $A \models gu' = guu'$ i $A \models gv' = gvv'$. Štaviše, iz $A \models_L gu' = hv'$ sledi $A \models guu' = gvv'$. Dakle, dokazali smo da $A \models \Sigma'$.

Obratno, pretpostavimo da $A \models \Sigma'$. Tada $A \models \Sigma_R$, što neposredno daje $A \models_L \Sigma_R$, pa preostaje da se dokaže da $A \models \Sigma_N$. Iz $A \models gu = gv$ i tvrđenja (a) Teoreme 4.6.1 imamo da je $\varrho_{u,v}$ kongruencija na A, i $A \models gxu = gv$, za svaki $x \in X$, što dalje, prema tvrđenju (d) Teoreme 4.6.1, povlači da $A \models_L gu = hv$. Uočimo proizvoljan identitet $gu' = hv' \in \Sigma_N$ različit od $gu = hv$, i proizvoljne $a \in A$ i $b, c \in S(a)$. Kao što smo dokazali, $A \models_L gu = hv$, odakle je $bu = cv$, pa iz $A \models gu' = guu'$, $A \models guu' = gvv'$ i $A \models gv' = gvv'$ sledi $bu' = buu' = cvv' = cv'$. Prema tome, $A \models_L gu' = hv'$. Time smo dokazali da $A \models_L \Sigma$, što nam je i bio cilj. □

Podsetimo se da smo u Glavi 1 za klase $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ algebri, u ovom slučaju automata, njihov *Maljcevljev proizvod* $\boldsymbol{K}_1 \circ \boldsymbol{K}_2$ definisali kao klasu svih automata A na kojima postoji kongruencija θ takva da faktor-automat A/θ pripada klasi $\boldsymbol{K}_2$ a svaka θ-klasa od A koja je podautomat od A pripada klasi $\boldsymbol{K}_1$. Jednostavno se pokazuje da za varijetet $\mathbf{D}$ diskretnih automata i proizvoljnu klasu $\boldsymbol{K}$ automata, Maljcevljev proizvod $\boldsymbol{K} \circ \mathbf{D}$ predstavlja klasu svih direktnih suma automata iz $\boldsymbol{K}$. Takve proizvode razmatraćemo u daljem tekstu.

Treba istaći i to da u slučaju automata sa ulaznim alfabetom X, razmatranih kao algebri unarnog tipa $\tau = X$, varijetet $\mathbf{S}_\tau$ svih τ-polumreža predstavlja zapravo varijetet $\mathbf{D}$ diskretnih automata. Prema tome, $\mathbf{D}$ je najmanji regularan varijetet automata. To svojstvo diskretnih automata će takođe igrati značajnu ulogu u daljim razmatranjima.

U narednoj teoremi se dokazuje da se operatori regularizacije i lokalizacije poklapaju na varijetetima automata, kao i da se automati koji pripadaju lokalizaciji varijeteta mogu predstaviti kao direktne sume automata iz razmatranog varijeteta.

Teorema 4.6.3. *Neka je $\boldsymbol{V}$ varijetet automata. Tada je*

$$L(\boldsymbol{V}) = R(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V} \circ \mathbf{D}.$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{V}$ regularan varijetet. Tada je $R(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$, dok prema Teoremi 4.6.1 imamo da je i $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$.

Uzmimo sada da je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet. Dokazaćemo da važi sledeći niz inkluzija

$$L(\boldsymbol{V}) \subseteq \boldsymbol{V} \circ \mathbf{D} \subseteq R(\boldsymbol{V}) \subseteq L(\boldsymbol{V}).$$

Uočimo proizvoljan automat $A \in L(\boldsymbol{V})$. Prema Teoremi 4.4.3, automat A se može predstaviti u obliku direktne sume automata A_α, $\alpha \in Y$, nerazloživih u direktnu sumu, pri čemu svaki A_α jeste σ-klasa od A. Sa druge strane, prema uslovu (d) iz Teoreme 4.6.1 je $\sigma = \varrho_{u,v}$ za svaki par $(u,v) \in X^* \times X^*$ takav da je $gu = hv$ identitet iz $\mathrm{Id}_N(\boldsymbol{V})$. Odavde neposredno sledi da $A_\alpha \models \mathrm{Id}_N(\boldsymbol{V})$, za svaki $\alpha \in Y$. Sa druge strane, prema uslovu (b) iz Teoreme 4.6.1 imamo da $A_\alpha \models \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, za svaki $\alpha \in Y$. Prema tome, $A_\alpha \models \mathrm{Id}(\boldsymbol{V})$, pa je $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, za svaki $\alpha \in Y$, što znači da $A \in \boldsymbol{V} \circ \mathbf{D}$. Time smo dokazali da je $L(\boldsymbol{V}) \subseteq \boldsymbol{V} \circ \mathbf{D}$.

Razmotrimo dalje proizvoljan automat $A \in \boldsymbol{V} \circ \mathbf{D}$, tj. automat A koji je direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, za svaki $\alpha \in Y$. Neka je $gu = gv$ proizvoljan regularni identitet zadovoljen na $\boldsymbol{V}$. Tada za proizvoljan $a \in A$ imamo da je $a \in A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa iz činjenice da je $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$ i $gu = gv$ je iz $\mathrm{Id}(\boldsymbol{V})$ sledi da je $au = av$. Prema tome, A zadovoljava $gu = gv$, za svaki identitet $gu = gv$ iz $\mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, što prema Teoremi 1.10.3 povlači da je $A \in R(\boldsymbol{V})$. Dakle, dokazali smo da je $\boldsymbol{V} \circ \mathbf{D} \subseteq R(\boldsymbol{V})$.

Na kraju, prema Teoremi 4.6.2 imamo da je $L(\boldsymbol{V})$ regularan varijetet automata, što znači da je $R(\boldsymbol{V}) \subseteq L(\boldsymbol{V})$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primerimo da operator CL u izučavanju varijeteta ne igra neku značajnu ulogu, jer je $CL(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$, za svaki varijetet automata $\boldsymbol{V}$. Naime, kao što smo videli i u Glavi 1, svaki identitet koji je zadovoljen na svim konačno generisanim podautomatima automata A zadovoljen je i na celom automatu A, što je neposredna posledica Teoreme 1.7.5 prema kojoj se svaki automat može predstaviti kao direktan limit svojih konačno generisanih podautomata. Odatle sledi i gornja jednakost.

Lokalizaciju neregularnog uopštenog varijeteta automata preciznije opisuje sledeća teorema.

Teorema 4.6.4. *Neka je $\boldsymbol{G}$ uopšteni varijetet automata.*

(a) *Ako je $\boldsymbol{G}$ neregularan, tada je $CL(\boldsymbol{G}) = L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn}$, pri čemu je*

$$L(\boldsymbol{G}) = CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D} = CL(\boldsymbol{G} \circ \mathbf{D}). \tag{4.11}$$

(b) *Ako je $\boldsymbol{G}$ regularan, tada je $L(\boldsymbol{G}) = CL(\boldsymbol{G})$.*

Dokaz. (a) Kao što je ranije rečeno, $CL(\boldsymbol{G}) \subseteq L(\boldsymbol{G})$. Sa druge strane, ako je $A \in CL(\boldsymbol{G})$, tada za proizvoljne $a, b \in A$ imamo da je $S(a,b) \in \boldsymbol{G}$, i prema Posledici 1.10.3, $S(a,b)$ zadovoljava neki neregularni identitet $gu = hv$, za $u, v \in X^*$, što znači da je $au = bv$. Prema tome, $A \in \mathbf{Conn}$. Time smo dokazali da važi

$$CL(\boldsymbol{G}) \subseteq L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn}.$$

Obratno, pretpostavimo da je $A \in L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn}$ i uočimo proizvoljan konačno generisani podautomat B od A. Tada je

$$B = S(a_1, \dots, a_n) = \bigcup_{m=1}^{n} S(a_m),$$

za neki $n \in \mathbb{N}$ i neke $a_1, \dots, a_n \in B$. Uzmimo da je uopšteni varijetet $\boldsymbol{G}$ ultimativno definisan usmerenim skupom identiteta $\{s_i = t_i\}_{i \in I}$. Za svaki $m \in [1,n]$ imamo da je $S(a_m) \in \boldsymbol{G}$, jer je $A \in L(\boldsymbol{G})$, pa postoji $k_m \in I$ tako da $S(a_m) \models s_i = t_i$, za svaki $i \succcurlyeq k_m$. Kako je I usmeren kvazi-uređen skup, to postoji $k \in I$ tako da je $k \succcurlyeq k_m$, za svaki $m \in [1,n]$. Uočimo proizvoljan $i \succcurlyeq k$. Tada je $i \succcurlyeq k_m$, pa $S(a_m) \models s_i = t_i$, za svaki $m \in [1,n]$.

Ako je $s_i = t_i$ regularan identitet, tada jasno da $B \models s_i = t_i$. Pretpostavimo da je $s_i = t_i$ neregularan identitet, tj. da je oblika $gu_i = hv_i$, za neke $u_i, v_i \in X^*$. To znači da $S(a_m) \models gu_i = hv_i$, za svaki $m \in [1,n]$. Uočimo proizvoljne elemente $b, c \in B$. Tada je $b = a_l p$ i $c = a_m q$, za neke $l, m \in [1,n]$ i $p, q \in X^*$. Sa druge strane, prema pretpostavci je $A \in \mathbf{Conn}$, to je $a_l u = a_m v$, za neke $u, v \in X^*$. Primetimo sada da

$$a_l u = a_m v \in S(a_l) \cap S(a_m), \;\; a_l p, a_l u \in S(a_l) \;\text{ i }\; a_m q, a_m v \in S(a_m),$$

pa kako $S(a_l), S(a_m) \models gu_i = hv_i$, to imamo da je

$$(a_m u)u_i = (a_l v)v_i,\ (a_l p)u_i = (a_l u)v_i \text{ i } (a_m v)u_i = (a_m q)v_i,$$

odakle sledi da je

$$bu_i = a_l p u_i = a_l u v_i = a_m v u_i = a_m q v_i = c v_i.$$

Ovim smo dokazali da $B \models gu_i = hv_i$, pa zaključujemo da $B \models s_i = t_i$, za svaki $i \succcurlyeq k$, odnosno da je $B \in \boldsymbol{G}$. Konačno, to znači da je $A \in CL(\boldsymbol{G})$ i, kako smo već dokazali da je $L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn} \subseteq CL(\boldsymbol{G})$, to je $L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn} = CL(\boldsymbol{G})$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada jednakosti (4.11). Pretpostavimo da je $A \in L(\boldsymbol{G})$. Tada je A lokalno povezan, pa je, prema Teoremi 4.5.1, A direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Za svaki $\alpha \in Y$, svaki monogeni podautomat od A_α je i monogeni podautomat od A, pa $A \in L(\boldsymbol{G})$ daje $A_\alpha \in L(\boldsymbol{G})$. Dakle, $A_\alpha \in L(\boldsymbol{G}) \cap \mathbf{Conn} = CL(\boldsymbol{G})$, prema napred dokazanom. Prema tome, dokazali smo da je $A \in CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D}$, pa dakle, važi

$$L(\boldsymbol{G}) \subseteq CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D}.$$

Uočimo proizvoljan automat $A \in CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D}$. Tada je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, i $A_\alpha \in CL(\boldsymbol{G})$, za svaki $\alpha \in Y$. Neka je B proizvoljan konačno generisani podautomat od A, neka je $Z = \{\alpha \in Y \mid B \cap A_\alpha \neq \varnothing\}$, i za svaki $\alpha \in Z$ stavimo da je $B_\alpha = B \cap A_\alpha$. Tada je B direktna suma automata B_α, $\alpha \in Z$, i za svaki $\alpha \in Z$, B_α je konačno generisan podautomat od A_α. Imajući u vidu da je $A_\alpha \in CL(\boldsymbol{G})$, to dobijamo da je $B_\alpha \in \boldsymbol{G}$, za svaki $\alpha \in Z$. Prema tome, $B \in \boldsymbol{G} \circ \mathbf{D}$, odakle je $A \in CL(\boldsymbol{G} \circ \mathbf{D})$, što znači da je

$$CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D} \subseteq CL(\boldsymbol{G} \circ \mathbf{D}).$$

Konačno, uočimo proizvoljan automat $A \in CL(\boldsymbol{G} \circ \mathbf{D})$ i stanje $a \in A$. Tada je $S(a) \in \boldsymbol{G} \circ \mathbf{D}$, i kako je svaki monogeni automat nerazloživ u direktnu sumu, to je $S(a) \in \boldsymbol{G}$. Dakle, $A \in L(\boldsymbol{G})$, pa je

$$CL(\boldsymbol{G} \circ \mathbf{D}) \subseteq L(\boldsymbol{G}),$$

čime je dokazano da važi 4.11.

(b) Jasno je da $CL(\boldsymbol{K}) \subseteq L(\boldsymbol{K})$ važi za proizvoljnu klasu automata $\boldsymbol{K}$. Dokaz obratne inkluzije je sadržan u dokazu dela (a) koji razmatra slučaj kada su svi identiteti $s_i = t_i$ regularni. $\square$

Za varijetet automata $\boldsymbol{V}$, kao što smo videli, je $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{V}$ regularan. Uslove pod kojima za uopšteni varijetet automata $\boldsymbol{G}$ važi $L(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}$ opisuje naredna teorema.

Teorema 4.6.5. *Neka je $\boldsymbol{G}$ uopšteni varijetet automata. Tada važi*

$$L(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{D} \circ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $L(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}$ i razmotrimo proizvoljan automat $A \in \mathbf{D} \circ \boldsymbol{G}$. To znači da je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je $A_\alpha \in \boldsymbol{G}$, za svaki $\alpha \in Y$. Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Tada je $a \in A_\alpha$, a takođe je i $S(a) \subseteq A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa $A_\alpha \in \boldsymbol{G}$ daje $S(a) \in \boldsymbol{G}$. Prema tome, dokazali smo da je $A \in L(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}$, pa je $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{G}$. Kako je obratna inkluzija trivijalna, to dobijamo da je $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, uzmimo da je $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}$ i razmotrimo proizvoljan automat $A \in L(\boldsymbol{G})$. To znači da $S(a) \in \boldsymbol{G}$, za svaki $a \in A$. Svakom $a \in A$ pridružimo automat B_a takav da je B_a izomorfan sa $S(a)$ i $B_a \cap B_b = \varnothing$, za $a \neq b$, $a, b \in A$, i neka je $\varphi_a : B_a \to S(a)$ proizvoljan izomorfizam. Takođe, neka je B direktna suma automata B_a, $a \in A$, i definišimo preslikavanje $\varphi : B \to A$ sa: za $c \in B$, ako je $c \in B_a$, za neki $a \in A$, tada stavljamo da je $c\varphi = c\varphi_a$. Jednostavno se proverava da je φ homomorfizam iz B na A. Dalje imamo da je $B_a \in \boldsymbol{G}$, za svaki $a \in A$, kao izomorfna kopija od $S(a)$, pa iz $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}$ sledi da je $B \in \boldsymbol{G}$. Međutim, uopšteni varijetet $\boldsymbol{G}$ je zatvoren za homomorfne slike, odakle je $A \in \boldsymbol{G}$, kao homomorfna slika od B. Dakle, dokazali smo da je $L(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}$, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Kada je $\boldsymbol{K}$ klasa konačnih automata, tada takvu osobinu ne mora da ima i klasa $L(\boldsymbol{K})$. Na primer, za varijetet $\mathbf{O}$ svih trivijalnih automata, koji se očigledno sastoji od konačnih automata, imamo da je $L(\mathbf{O}) = \mathbf{D}$, pri čemu u varijetetu $\mathbf{D}$ diskretnih automata ima i beskonačnih automata. Zbog toga za rad sa klasama konačnih automata definišemo operator $\underline{L} : \boldsymbol{K} \mapsto \underline{L}(\boldsymbol{K})$ koji klasi $\boldsymbol{K}$ konačnih automata pridružuje klasu $\underline{L}(\boldsymbol{K}) = \underline{L(\boldsymbol{K})}$ svih konačnih automata iz $L(\boldsymbol{K})$. Primetimo da slična modifikacija operatora CL nema smisla, jer je svaki podautomat konačnog automata konačno generisan.

Kada operator $\underline{L}$ primenimo na pseudovarijetete automata, dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 4.6.6. *Neka je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet automata. Tada važi*

$$\underline{L}(\boldsymbol{P}) = R(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} \circ \underline{\mathbf{D}}.$$

Dokaz. Prema Teoremi 1.9.3, $\boldsymbol{P} = \underline{\boldsymbol{G}}$, gde je $\boldsymbol{G}$ neki uopšteni varijetet automata, odakle prema Teoremi 4.6.4 sledi da je

$$\underline{L}(\boldsymbol{P}) = \underline{L(\underline{\boldsymbol{G}})} = \underline{L(\boldsymbol{G})} = \underline{CL(\boldsymbol{G}) \circ \mathbf{D}} = \underline{\boldsymbol{G}} \circ \underline{\mathbf{D}} = \boldsymbol{P} \circ \underline{\mathbf{D}}.$$

Neka je $R(\boldsymbol{P}) = [gu_n = gv_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$ i neka je $A \in \underline{L}(\boldsymbol{P})$. Tada za svaki $a \in A$ imamo da je $S(a) \in \boldsymbol{P} \subseteq R(\boldsymbol{P})$, odakle sledi da postoji $n_a \in \mathbb{N}$ tako da $S(a) \models gu_n = gv_n$, za svaki $n \geq n_a$. Kako je A konačan automat, to postoji $m = \max\{n_a \,|\, a \in A\}$, pa za svaki $n \geq m$ imamo da $S(a) \models gu_n = gv_n$, za svaki $a \in A$, što znači da važi i $A \models gu_n = gv_n$. Prema tome, dokazali smo da je $A \in R(\boldsymbol{P})$, pa zaključujemo da je $\underline{L}(\boldsymbol{P}) \subseteq R(\boldsymbol{P})$.

Sa druge strane, neposrednom proverom može se ustanoviti da je klasa $\underline{L}(\boldsymbol{P})$ zatvorena za homomorfizme, podautomate i konačne direktne proizvode, tj. da je pseudovarijetet, i kako je $\underline{\mathbf{D}} \subseteq \underline{L}(\boldsymbol{P})$, to prema Teoremi 1.10.5 sledi da je $\underline{L}(\boldsymbol{P})$ regularan pseudovarijetet, što znači da je $R(\boldsymbol{P}) \subseteq \underline{L}(\boldsymbol{P})$. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. □

Literatura: Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [2000], Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Bogdanović, Imreh, Ćirić and Petković [2000], Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Graczyńska [1983a], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Płonka [1982, 1985].

4.7. Uopšteno direktabilni automati

Sada krećemo sa uvođenjem nekih važnih klasa automata. Neka je $u \in X^*$ reč takva da za proizvoljna dva stanja a i b automata A važi $au = bu$. Tada za automat A kažemo da je *u-direktabilan*, a reč u nazivamo *usmeravajućom reči* automata A. Drugim rečima, $u \in X^*$ je usmeravajuća reč automata A ako sva stanja automata A vodi u jedno isto stanje koje će biti označeno sa d_u i koje ćemo nazivati *u-vratom* automata A. Automat A nazivaćemo *direktabilnim* ako postoji reč $u \in X^*$ takva da A jeste u-direktabilan automat, a stanje d automata A nazivaćemo *vratom* tog automata ako postoji reč $u \in X^*$ takva da d jeste u-vrat od A. Za $u \in X^*$, klasu svih u-direktabilnih automata označavaćemo sa $\mathbf{Dir}_u$, klasu svih direktabilnih automata sa $\mathbf{Dir}$, a skup svih usmeravajućih reči automata A označavaćemo sa $DW(A)$. Primetimo još da su u raznim izvorima direktabilni automati poznati i pod nazivima *sinhronizabilni*, *kofinalni* ili *reset* automati[1].

[1] Dovodeći sva stanja automata u jedno stanje, usmeravajuće reči vrše neku vrstu sinhronizacije rada automata, odakle potiče prvi od ova tri naziva. Sa druge strane, usmeravajuće reči u nekom smislu ponovno startuju (resetuju, restartuju) automat, pa je to razlog zbog čega se koristi treći od ta tri naziva.

Ukoliko za prirodan broj $k \in \mathbb{N}^0$ svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste usmeravajuća reč automata A, tj. $X^{\geq k} \subseteq DW(A)$, tada za automat A kažemo da je *k-definitan*, dok za A kažemo da je *definitan* ako postoji broj $k \in \mathbb{N}^0$ takav da A jeste k-definitan automat. Najmanji broj $k \in \mathbb{N}^0$ za koji A jeste k-definitan automat nazivamo *stepenom definitnosti* automata A. Specijalno, 1-definitni automati nazivaju se *reset automatima*. Jasno, 0-definitni automati jesu zapravo trivijalni automati. Za $k \in \mathbb{N}^0$, klasu svih k-definitnih automata označavamo sa $\mathbf{Def}_k$, a klasu svih definitnih automata sa $\mathbf{Def}$.

Sa druge strane, ako A jeste direktabilan automat sa trapom a_0, tada je a_0 i jedini trap, i jedini vrat od A. Drugim rečima, svaka usmeravajuća reč automata A vodi sva stanja tog automata u trap a_0. To je razlog zbog čega za reč $u \in X^*$, u-direktabilan automat sa trapom nazivamo *trap-u-direktabilnim*, a u u tom slučaju nazivamo *trap-usmeravajućom reči* automata A. Za automat A kažemo da je *trap-direktabilan* ako postoji ulazna reč $u \in X^*$ takva da A jeste trap-u-direktabilan automat. Za $u \in X^*$, klasu svih trap-u-direktabilnih automata označavaćemo sa $\mathbf{TDir}_u$, klasu svih trap-direktabilnih automata sa $\mathbf{TDir}$, a skup svih trap-usmeravajućih reči automata A označavaćemo sa $TDW(A)$.

Za prirodan broj $k \in \mathbb{N}^0$, automat A nazivaćemo *k-nilpotentnim* ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste trap-usmeravajuća reč od A, tj. $X^{\geq k} \subseteq TDW(A)$, ili, ekvivalentno, ako A jeste k-definitni automat sa trapom. Takođe, za A kažemo da je *nilpotentan automat* ako je k-nilpotentan, za neki broj $k \in \mathbb{N}^0$. Najmanji broj $k \in \mathbb{N}^0$ za koji A jeste k-nilpotentan automat nazivamo *stepenom nilpotentnosti* automata A. Za $k \in \mathbb{N}^0$, klasu svih k-nilpotentnih automata označavamo sa $\mathbf{Nilp}_k$, a klasu svih nilpotentnih automata sa $\mathbf{Nilp}$.

Napred uvedeni pojmovi mogu se uopštiti na više načina. Jedan od njih je upotreba operatora lokalizacije. Naime, za reč $u \in X^*$, svaki automat A iz klase $\mathbf{LDir}_u = L(\mathbf{Dir}_u)$ nazivaćemo *lokalno u-direktabilnim automatom*. Kako je u zajednička usmeravajuća reč za sve monogene podautomate od A, odnosno usmerava podjednako sve monogene podautomate, to ćemo je zvati *uniformno lokalno usmeravajućom reči* automata A, dok ćemo automat A nazivati *uniformno lokalno direktabilnim* ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je A lokalno u-direktabilan, pri čemu ćemo sa $\mathbf{ULDir}$ označavati klasu svih takvih automata, a sa $ULDW(A)$ ćemo označavati skup svih uniformno lokalno usmeravajućih reči automata A.

Na potpuno isti način, stavljajući redom $\mathbf{TDir}$, $\mathbf{Def}$ ili $\mathbf{Nilp}$ umesto $\mathbf{Dir}$, za reč $u \in X^*$, odnosno prirodan broj $k \in \mathbb{N}^0$, definišemo klase

LTDir$_u$ – *lokalno trap-u-direktabilnih automata*,
ULTDir – *uniformno lokalno trap-direktabilnih automata*,
LDef$_k$ – *lokalno k-definitnih automata*,
ULDef – *uniformno lokalno definitnih automata*,
LNilp$_k$ – *lokalno k-nilpotentnih automata*, i
ULDef – *uniformno lokalno nilpotentnih automata*,

kao i skup $ULTDW(A)$ svih *uniformno lokalno trap-usmeravajućih reči* automata A.

Osim ovih, daćemo i druga uopštenja napred razmatranih pojmova. Za reč $u \in X^*$, automat A nazivaćemo *uopšteno u-direktabilnim* ako za svako stanje $a \in A$ i svaku reč $w \in A$ važi $auwu = au$, klasu svih takvih automata označavaćemo sa $\mathbf{GDir}_u$ a reč u nazivaćemo *uopšteno usmeravajućom reči* automata A. Skup svih uopšteno usmeravajućih reči automata A označavaćemo sa $GDW(A)$. Za automat A govorićemo da je *uopšteno direktabilan* ako postoji neka reč $u \in X^*$ tako da je A uopšteno u-direktabilan automata, a klasu svih uopšteno direktabilnih automata označavaćemo sa **GDir**. Za $k \in \mathbb{N}^0$, automat A ćemo nazivati *uopšteno k-definitnim* ako je $X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$, pri čemu ćemo klasu svih takvih automata označavati sa $\mathbf{GDef}_k$, dok ćemo A nazivati *uopšteno definitnim* ako je A uopšteno k-definitan, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, a klasu svih uopšteno definitnih automata označavaćemo sa **GDef**.

Sa druge strane, za $u \in X^*$, automat A nazivaćemo *u-utrapljivim* ako $au \in Tr(A)$, za svako stanje $a \in A$, pri čemu ćemo klasu svih takvih automata označavati sa $\mathbf{Trap}_u$ a reč u nazivati *utrapljujućom reči* automata A. Skup svih utrapljujućih reči automata A označavaćemo sa $TW(A)$. Za automat A govorićemo da je *utrapljiv* ako postoji neka reč $u \in X^*$ tako da A jeste u-utrapljiv, pri čemu ćemo klasu takvih automata označavati sa **Trap**. Ako za $k \in \mathbb{N}^0$ važi da je $X^{\geq k} \subseteq TW(A)$, tada automat A nazivamo *reverzno k-definitnim*, pri čemu klasu takvih automata označavamo sa $\mathbf{RDef}_k$, dok ćemo A nazivati *reverzno definitnim* automatom ako postoji $k \in \mathbb{N}^0$ tako da je A reverzno k-definitan, i sa **RDef** ćemo označavati klasu svih takvih automata.

Pošto smo završili sa definicijama, možemo preći na opisivanje osnovnih osobina uvedenih klasa automata.

Teorema 4.7.1. *Za proizvoljan $u \in X^*$ i $k \in \mathbb{N}$, klase*

$$\mathbf{Dir}_u,\ \mathbf{TDir}_u,\ \mathbf{Def}_k\ \ i\ \ \mathbf{Nilp}_k$$

su neregularni varijeteti automata koji se mogu predstaviti identitetima na *sledeći način:*

$$\begin{aligned}\mathbf{Dir}_u &= [gu = hu]\\ \mathbf{TDir}_u &= [guw = hu \,|\, w \in X^*]\\ \mathbf{Def}_k &= [gu = hu \,|\, u \in X^{\geq k}]\\ \mathbf{Nilp}_k &= [guw = hu \,|\, u \in X^{\geq k},\ w \in X^*].\end{aligned}$$

Štaviše, varijetet automata $\boldsymbol{V}$ je neregularan ako i samo ako je

$$\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}_u,$$

za neku reč $u \in X^*$.

Dokaz. Jasno da je $\mathbf{Dir}_u = [gu = hu]$ i $\mathbf{Def}_k = [gu = hu \,|\, u \in X^{\geq k}]$. Dokažimo ostale dve jednakosti.

Neka je $A \in \mathbf{TDir}_u$, neka je a_0 jedinstveni trap od A, neka su $a, b \in A$ proizvoljna stanja i $w \in X^*$ je proizvoljna reč. Tada je $au = a_0 = bu$, odakle je $auw = a_0 w = a_0 = bu$. Prema tome, $A \in [guw = hu \,|\, w \in X^*]$. Obratno, neka je $A \in [guw = hu \,|\, w \in X^*]$. Uzmimo proizvoljno stanje $a \in A$. Tada je $auw = au$, za svaki $w \in X^*$, što znači da je au trap automata A. Sa druge strane, za proizvoljne $a, b \in A$, uzimajući da je $w = e$, dobijamo da je $au = bu$, čime smo dokazali da A jeste u-direktabilan automat. Dakle, $A \in \mathbf{TDir}_u$. Sve ovo dokazuje da je $\mathbf{TDir}_u = [guw = hu \,|\, w \in X^*]$.

Slično dokazujemo da je $\mathbf{Nilp}_k = [guw = hu \,|\, u \in X^{\geq k},\ w \in X^*]$. Jasno je i da su svi navedeni varijeteti neregularni.

Neka je sada $\boldsymbol{V}$ proizvoljan neregularan varijetet automata. Prema Teoremi 1.10.2, postoji neregularan identitet $gu = hv$ koji je zadovoljen na $\boldsymbol{V}$. Jasno je da je tada na $\boldsymbol{V}$ zadovoljen i identitet $hu = hv$, pa dakle i identitet $gu = hu$. Prema tome, $\boldsymbol{V} \subseteq [gu = hu] = \mathbf{Dir}_u$. □

Teorema 4.7.2. *Za proizvoljan $u \in X^*$ i $k \in \mathbb{N}$, klase*

$$\mathbf{LDir}_u,\ \mathbf{LTDir}_u,\ \mathbf{LDef}_k,\ \mathbf{LNilp}_k,\ \mathbf{GDir}_u,\ \mathbf{Trap}_u,\ \mathbf{GDef}_k\ \ i\ \ \mathbf{RDef}_k$$

su regularni varijeteti automata koji se mogu predstaviti identitetima na *sledeći način:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{LDir}_u &= [gwu = gu \mid w \in X^*];\\
\mathbf{LTDir}_u &= [gpuq = gu \mid p, q \in X^*];\\
\mathbf{LDef}_k &= [gwu = gu \mid u \in X^{\geq k},\ w \in X^*];\\
\mathbf{LNilp}_k &= [gpuq = gu \mid u \in X^{\geq k},\ p, q \in X^*];\\
\mathbf{GDir}_u &= [guwu = gu \mid w \in X^*];\\
\mathbf{Trap}_u &= [guw = gu \mid w \in X^*];\\
\mathbf{GDef}_k &= [guwu = gu \mid u \in X^{\geq k},\ w \in X^*];\\
\mathbf{RDef}_k &= [guw = gu \mid u \in X^{\geq k},\ w \in X^*].
\end{aligned}$$

Dokaz. Klase $\mathbf{LDir}_u$, $\mathbf{LTDir}_u$, $\mathbf{LDef}_k$ i $\mathbf{LNilp}_k$ su regularni varijeteti prema Teoremama 4.7.1 i 4.6.1. Da bi dokazali da su i ostale klase regularni varijeteti, dovoljno je da dokažemo gornje jednakosti. Dokazaćemo samo jednakost za $\mathbf{LTDir}_u$, jer se jednakost za $\mathbf{LNilp}_k$ slično dokazuje, a ostale jednakosti su jasne.

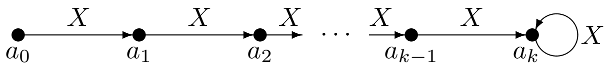
Uočimo proizvoljne $A \in \mathbf{LTDir}_u$, $a \in A$ i $p, q \in X^*$. Tada imamo da je $S(a) \in \mathbf{TDir}_u$, pa iz $a, ap \in S(a)$ sledi da je $apu = a_0 = au$, gde je a_0 jedinstveni trap od $S(a)$, pa dalje zaključujemo da je $apuq = a_0q = a_0 = au$. Time smo dokazali da je $A \in [gpuq = gu \,|\, p, q \in X^*]$, tj. da je $\mathbf{LTDir}_u \subseteq [gpuq = gu \,|\, p, q \in X^*]$. Obratno, razmotrimo proizvoljne $A \in [gpuq = gu \,|\, p, q \in X^*]$, $a \in A$, $b, c \in S(a)$ i $w \in X^*$. Tada je $b = ap$ i $c = ap'$, za neke $p, p' \in X^*$, pa kako, prema pretpostavci, A zadovoljava identitete $gpuw = gu$ i $gp'u = gu$, to imamo da je $apuw = au$ i $ap'u = au$, pa je $buw = apuw = au = ap'u = cu$, što znači da $S(a)$ zadovoljava identitet $guw = hu$, za svaki $w \in X^*$, odakle prema Teoremi 4.7.1 sledi da je $S(a) \in \mathbf{TDir}_u$, odnosno da $A \in \mathbf{LTDir}_u$. Prema tome, $[gpuq = gu \,|\, p, q \in X^*] \subseteq \mathbf{LTDir}_u$, pa smo time dokazali jednakost $\mathbf{LTDir}_u = [gpuq = gu \,|\, p, q \in X^*]$. $\square$

Pre no što pređemo na naredne teoreme, daćemo dva važna primera.

Primer 4.7.1. Neka je A_k automat sa skupom stanja $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, gde je $k \in \mathbb{N}$, i funkcijama prelaza određenim sa:

$$\begin{aligned}
&a_i x = a_{i+1}, \quad \text{za } i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\\
&a_k x = a_k,
\end{aligned}$$

za svaki $x \in X$. Drugim rečima, to je automat zadat sledećim grafom prelaza



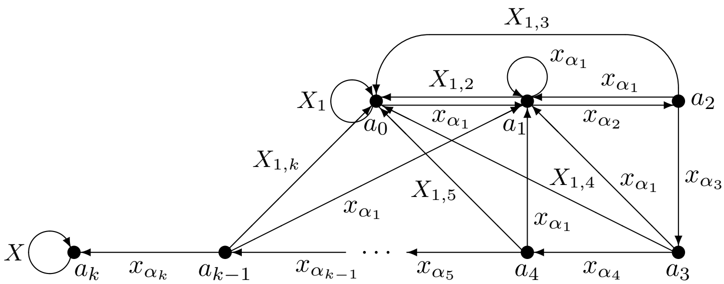
Jednostavno se dokazuje da je $A_k \in \mathbf{Nilp}_k \setminus \mathbf{Nilp}_{k-1}$.

Primer 4.7.2. Neka je $u = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_k} \in X^*$ proizvoljna reč i A_u je automat sa skupom stanja $A_u = \{a_0, a_1 \dots, a_k\}$ i prelazima određenim sa

$$a_k x = a_k, \quad \text{za svaki } x \in X,$$

$$a_i x = \begin{cases} a_1, & x = x_{\alpha_1}; \\ a_{i+1}, & x = x_{\alpha_{i+1}}; \\ a_0, & x \notin \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_{i+1}}\}, \end{cases} \qquad \text{za } i \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

Automat A_u je prikazan na sledećoj slici. Pri tome su na slici sa X_i i $X_{i,j}$, označeni skupovi $X_i = X \setminus \{x_{\alpha_i}\}$ i $X_{i,j} = X \setminus \{x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}\}$.



Za ovaj automat važi da je $A_u \in \mathbf{TDir}_u \setminus \mathbf{TDir}_v$, za svaku reč v koja ne sadrži u kao svoju podreč.

Naredne dve teoreme opisuju neke inkluzivne odnose između varijeteta razmatranih u Teoremama 4.7.1 i 4.7.2.

Teorema 4.7.3. *Neka su $u, v \in X^*$ proizvoljne reči. Tada za bilo koje* $\mathbf{E}$ *iz skupa*

$$\{\mathbf{Dir}, \mathbf{TDir}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LTDir}, \mathbf{GDir}, \mathbf{Trap}\}$$

važi sledeće:

(a) $\mathbf{E}_u \subseteq \mathbf{E}_v$ *ako i samo ako u jeste podreč od v;*
(b) $\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_v$ *ako i samo ako je $u = v$;*
(c) $\mathbf{E}_u \cup \mathbf{E}_v \subseteq \mathbf{E}_{uv}$*;*

Osim toga, za praznu reč e važi:

$$\mathbf{E}_e = \begin{cases} \mathbf{O}, & za \;\; \mathbf{E} \in \{\mathbf{Dir}, \mathbf{TDir}\} \\ \mathbf{D}, & za \;\; \mathbf{E} \in \{\mathbf{Trap}, \mathbf{GDir}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LTDir}\} \end{cases}$$

Dokaz. (a) Uzmimo da je $\mathbf{E} = \mathbf{Dir}$. Neka je reč v oblika $v = u'uu''$, za neke $u', u'' \in X^*$ i neka je $A \in \mathbf{Dir}_u$. Tada za proizvoljne $a, b \in A$ važi $av = au'uu'' = auu'' = buu'' = bu'uu'' = bv$, pa je $A \in \mathbf{Dir}_v$, što je i trebalo dokazati. Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{Dir}_u \subseteq \mathbf{Dir}_v$. Ako u ne bi bila podreč od v, tada bi za automat A_u iz Primera 4.7.2 važilo $A_u \in \mathbf{TDir}_u \setminus \mathbf{TDir}_v$, što bi značilo i da je $A_u \in \mathbf{Dir}_u \setminus \mathbf{Dir}_v$, a to je u suprotnosti sa našom polaznom pretpostavkom. Prema tome, zaključujemo da u mora biti podreč od v.

Na sličan način se razmatraju i slučajevi kada je $\mathbf{E}$ neka od oznaka iz skupa $\{\mathbf{TDir}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LTDir}, \mathbf{Trap}\}$.

Uzmimo, na kraju, da je $\mathbf{E} = \mathbf{GDir}$. Uzmimo da je $v = u'uu''$, za neke $u', u'' \in X^*$. Neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Tada je za proizvoljan automat $A \in \mathbf{GDir}_u$ i svako stanje $a \in A$ zadovoljeno $avwv = au'uu''wu'uu'' = au'uu'' = av$, tj. $A \in \mathbf{GDir}_v$, čime smo dokazali da je $\mathbf{GDir}_u \subseteq \mathbf{GDir}_v$. Obratno, neka je $\mathbf{GDir}_u \subseteq \mathbf{GDir}_v$. Ako reč u ne bi bila podreč od v, tada bi za automat A_u iz Primera 4.7.2 imali da je $A_u \in \mathbf{TDir}_u \setminus \mathbf{TDir}_v$, što bi značilo i da je $A_u \in \mathbf{GDir}_u \setminus \mathbf{GDir}_v$, a to je u suprotnosti sa našom polaznom pretpostavkom. Zbog toga zaključujemo da je u podreč od v.

(b) i (c) Ova tvrđenja slede neposredno iz (a). □

Teorema 4.7.4. *Za proizvoljan* $\mathbf{E}$ *iz skupa*

$$\{\mathbf{Def}, \mathbf{RDef}, \mathbf{Nilp}, \mathbf{GDef}, \mathbf{LDef}, \mathbf{LNilp}\}$$

važi

$$\mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{E}_k \subset \mathbf{E}_{k+1} \subset \ldots \mathbf{E}.$$

Osim toga,

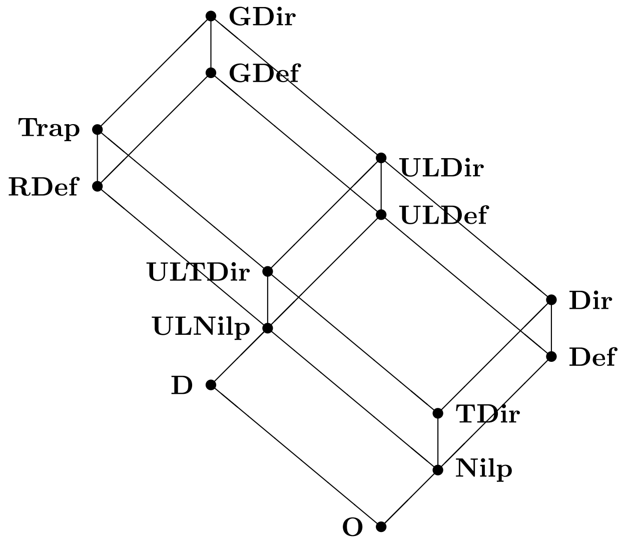
$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} \mathbf{O}, & \text{za } \ \mathbf{E} \in \{\mathbf{Def}, \mathbf{Nilp}\} \\ \mathbf{D}, & \text{za } \ \mathbf{E} \in \{\mathbf{RDef}, \mathbf{GDef}, \mathbf{LDef}, \mathbf{LNilp}\} \end{cases}$$

Dokaz. Gornje inkluzije slede neposredno iz definicija navedenih klasa i iz osobine operatora L da iz $\boldsymbol{K}_1 \subseteq \boldsymbol{K}_2$ sledi $L(\boldsymbol{K}_1) \subseteq L(\boldsymbol{K}_2)$, za proizvoljne klase $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ automata. Te inkluzije su prave jer za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ i proizvoljan $\mathbf{E}$ iz skupa

$$\{\mathbf{Def}, \mathbf{RDef}, \mathbf{Nilp}, \mathbf{GDef}, \mathbf{LDef}, \mathbf{LNilp}\},$$

za automat A_k dat u Primeru 4.7.1 važi $A \in \mathbf{E}_k \setminus \mathbf{E}_{k-1}$. □

Teorema 4.7.5. *Za automate sa ulaznim alfabetom X, gde je $|X| \geq 2$, sve klase prikazane na Slici* 4.7.1 *su međusobno različiti uopšteni varijeteti automata i Slika* 4.7.1 *predstavlja njihov inkluzioni dijagram. Štaviše, prikazane klase čine polumrežu u odnosu na presek.*



Slika 4.7.1

Dokaz. Kao što znamo, **D** i **O** su varijeteti, dok za bilo koje **E** iz skupa {**Dir**, **TDir**, **GDir**, **Trap**} i **F** iz skupa {**LDir**, **LTDir**} imamo da je

$$\mathbf{E} = \bigcup_{u \in X^*} \mathbf{E}_u \qquad \text{i} \qquad \mathbf{UF} = \bigcup_{u \in X^*} \mathbf{F}_u,$$

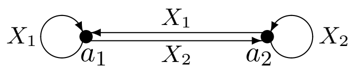
i slično, za bilo koje **E** iz skupa {**Def**, **RDef**, **Nilp**, **GDef**} i **F** iz skupa {**LDef**, **LNilp**} važi

$$\mathbf{E} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_k \qquad \text{i} \qquad \mathbf{UF} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{F}_k.$$

Prema Teoremama 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3 i 4.7.4, obe ove unije su unije usmerenih familija varijeteta, pa prema Teoremi 1.9.1 imamo da **E**, odnosno **UF**, jeste uopšteni varijetet, za svaki **E**, odnosno **F** iz napred navedenih skupova.

Nije teško proveriti da su Slikom 4.7.1 dati inkluzioni odnosi između datih klasa, s tim što ćemo sada dokazati da su te inkluzije prave. Daćemo nekoliko primera koji to potvrđuju.

Predstavimo ulazni alfabet X u obliku $X = X_1 \cup X_2$, gde je $X_1 \neq \varnothing$, $X_2 \neq \varnothing$ i $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Ovo je moguće, jer smo pretpostavili da je $|X| \geq 2$. Posmatrajmo automat dat na sledećoj slici:

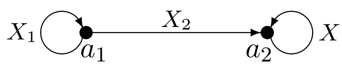


Slika 4.7.2

Automat dat na Slici 4.7.2 je dvoelementni reset automat i on pripada klasi **Def** $\setminus$ **Trap** jer nema trapova, što dalje daje inkluzije

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{Def}, \qquad \mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{ULDef}, \qquad \mathbf{RDef} \subset \mathbf{GDef}$$
$$\mathbf{TDir} \subset \mathbf{Dir}, \qquad \mathbf{ULTDir} \subset \mathbf{ULDir}, \qquad \mathbf{Trap} \subset \mathbf{GDir}.$$

Razmotrimo sada sledeći automat:

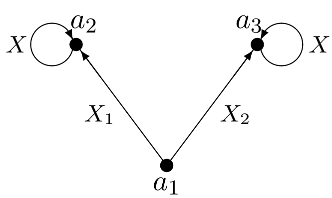


Slika 4.7.3

Automat prikazan na Slici 4.7.3 pripada klasi **TDir** $\setminus$ **GDef**, odakle sledi

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{TDir}, \qquad \mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{ULTDir}, \qquad \mathbf{RDef} \subset \mathbf{Trap}$$
$$\mathbf{Def} \subset \mathbf{Dir}, \qquad \mathbf{ULDef} \subset \mathbf{ULDir}, \qquad \mathbf{GDef} \subset \mathbf{GDir}.$$

Dalje, neka je dat sledeći automat:



Slika 4.7.4

Automat prikazan na Slici 4.7.4, je monogen sa dva trapa, pa se nalazi u klasi **RDef** $\setminus$ **ULDir**, odakle sledi da važi

$$\mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{RDef},\ \mathbf{ULTDir} \subset \mathbf{Trap},\ \mathbf{ULDef} \subset \mathbf{GDef},\ \mathbf{ULDir} \subset \mathbf{GDir}.$$

Uočimo proizvoljan $B \in$ **Nilp**. Neka je A direktna suma najmanje dve izomorfne kopije automata B. Tada A pripada klasi **ULNilp** $\setminus$ **Dir**, što daje inkluzije

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{ULNilp},\ \mathbf{TDir} \subset \mathbf{ULTDir},\ \mathbf{Def} \subset \mathbf{ULDef},\ \mathbf{Dir} \subset \mathbf{ULDir}.$$

Inkluzije $\mathbf{O} \subset \mathbf{Nilp}$, $\mathbf{O} \subset \mathbf{D}$ i $\mathbf{D} \subset \mathbf{ULNilp}$ su očigledne. Time smo dokazali da su sve prikazane inkluzije prave.

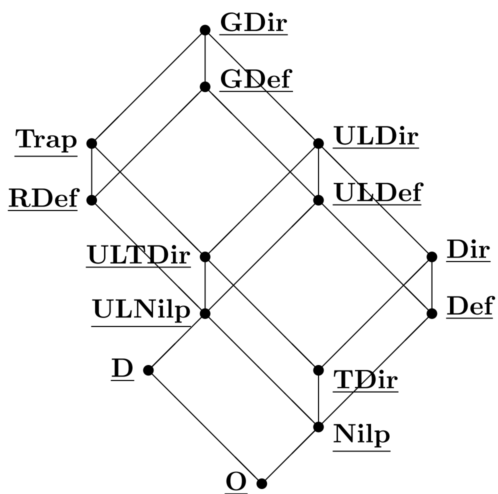
Dokažimo da date klase čine polumrežu u odnosu na presek, tj. da je skup tih klasa zatvoren za preseke, i odredimo te preseke. Uočimo najpre $A \in \mathbf{Trap} \cap \mathbf{Dir}$. Kako je A direktabilan, to A ima najviše jedan trap, pa je $A \in \mathbf{TDir}$. Dakle, $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{Dir} = \mathbf{TDir}$. Odavde takođe sledi da je $\mathbf{ULTDir} \cap \mathbf{Dir} = \mathbf{TDir}$.

Neka je $A \in \mathbf{Trap} \cap \mathbf{Def}$. Tada je jasno da je $A \in \mathbf{TDir}$, pa je $DW(A) = TDW(A) \neq \varnothing$. Sa druge strane, iz $A \in \mathbf{Def}$ sledi da je $X^{\geq k} \subseteq DW(A) = TDW(A)$, za neki $k \in \mathbb{N}$, što znači da je $A \in \mathbf{Nilp}$. Dakle, dokazali smo da je $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{Def} = \mathbf{Nilp}$, što povlači i da je $\mathbf{K} \cap \mathbf{Def} = \mathbf{Nilp}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike takvu da je $\mathbf{Nilp} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Trap}$.

Slično dokazujemo da je $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{ULDir} = \mathbf{ULTDir}$ i $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULNilp}$, što daje $\mathbf{K} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULNilp}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike za koju važi $\mathbf{ULNilp} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Trap}$. Konačno, jasno da je $\mathbf{D} \cap \mathbf{K} = \mathbf{O}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike takvu da je $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Dir}$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Iz prethodne teoreme neposredno dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 4.7.1. *Za automate sa ulaznim alfabetom X, gde je $|X| \geq 2$, sve klase prikazane na sledećoj slici su međusobno različiti pseudovarijeteti automata i slika predstavlja njihov inkluzioni dijagram.*



Napomena 4.7.1. Primetimo još jednom da smo u Teoremi 4.7.5 razmatrali samo automate sa ulaznim alfabetom koji sadrži bar dva različita ulazna slova. Razlog

za to je činjenica da, ukoliko radimo sa automatom sa jednoelementnim ulaznim alfabetom X, onda na Slici 4.7.1 imamo samo četiri međusobno različite klase. To su klase **O**, **D**, **Nilp** i **ULNilp**.

Literatura: Bogdanović, Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [2000], Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Bogdanović, Imreh, Ćirić and Petković [2000], Brzozowski [1962a], Černý [1964], Černý, Pirická and Rosenauerová [1971], Ćirić, Imreh and Steinby [1999], Dubuc [1996], Ginzburg [1966], Imreh [1981, 1984], Imreh and Ito [1999a, 1999b], Imreh, Ito and Steinby [1999a], Imreh and Steinby [1995, 1999], Ito and Duske [1983], Kleene [1956], Kljachko, Rystsov and Spivak [1987], Niemely [1989], Perles, Rabin and Shamir [1963], Perin and Schützenberger [1992], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Pin [1978, 1979], Popović, Bogdanović, Petković and Ćirić [2000a, 2000b], Rystsov [1992a, 1992b, 1994, 1995a, 1995b, 1996, 1997], Shevrin [1962], Starke [1969], Steinby [1969], Székely [1998].

4.8. Strukturna svojstva i polugrupe prelaza uopšteno direktabilnih automata

U poslednjem odeljku ove glave daćemo razne strukturne karakterizacije i opisati svojstva polugrupa prelaza automata razmatranih u prethodnom odeljku. Dokazaćemo da su to upravo klase automata čije polugrupe prelaza imaju nulu, levu, desnu ili bi-nulu, ili su nilpotentne ili nilpotentne ekstenzije levo nultih, desno nultih ili pravougaonih traka.

Pre nego što pristupimo karakterizaciji polugrupa prelaza automata iz navedenih klasa daćemo par korisnih veza između jezika koji odgovaraju ovim automatima.

Teorema 4.8.1. *Za proizvoljan automat A važe sledeći uslovi:*

(1) $TW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $TW(A) = GDW(A)$*;*

(2) $ULDW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $ULDW(A) = GDW(A)$*;*

(3) $ULTDW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$ULTDW(A) = ULDW(A) = TW(A) = GDW(A);$$

(4) $DW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$DW(A) = ULDW(A) = GDW(A);$$

(5) $TDW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$\begin{aligned} TDW(A) = ULTDW(A) = TW(A) = \\ DW(A) = ULDW(A) = GDW(A); \end{aligned}$$

(6) $TW(A) \neq \varnothing$ *i* $ULDW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $ULTDW(A) \neq \varnothing$*;*

(7) $TW(A) \neq \varnothing$ *i* $DW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $TDW(A) \neq \varnothing$*.*

Dokaz. (1) Ako je $u \in TW(A)$, tada za proizvoljne $a \in A$ i $v \in X^*$ imamo da je $auvu = (au)vu = au$, jer je $au \in Tr(A)$. Prema tome, $u \in GDW(A)$, čime smo dokazali da je $TW(A) \subseteq GDW(A)$.

Obratno, neka je $u \in GDW(A)$. Takođe, neka je $v \in TW(A)$ proizvoljna reč i $a \in A$ je proizvoljno stanje. Tada imamo da je $auvu = au$, jer je $u \in GDW(A)$ i, sa druge strane, $auv \in Tr(A)$, jer je $v \in TW(A)$, pa imamo da je

$$au = auvu = (auv)u = auv \in Tr(A).$$

Prema tome, $au \in Tr(A)$, što znači da je $u \in TW(A)$, čime smo dokazali da je $GDW(A) = TW(A)$.

(2) Ovo tvrđenje se dokazuje slično kao tvrđenje (1).

(3) Jasno je da važi

$$ULTDW(A) \subseteq ULDW(A) \cap TW(A),$$

pa u slučaju da je $ULTDW(A) \neq \varnothing$, prema (1) i (2) dobijamo da je

$$ULDW(A) = TW(A) = GDW(A).$$

Ostaje, dakle, da se dokaže da je $ULTDW(A) = TW(A)$, tj. da je $TW(A) \subseteq ULTDW(A)$. Zaista, neka je $u \in TW(A)$. Uzmimo proizvoljan $a \in A$. Tada je $au \in Tr(A) \cap S(a) = Tr(S(a))$, što znači da $S(a)$ jeste u-utrapljiv automat. Sa druge strane, iz $TW(A) = ULDW(A)$ sledi da je $u \in ULDW(A)$, što znači da $S(a)$ jeste u-direktabilan automat, što sve zajedno povlači da $S(a)$ jeste trap-u-direktabilan automat, tj. $u \in ULTDW(A)$, što je i trebalo dokazati.

(4) i (5) Ova dva tvrđenja se dokazuju slično kao (3).

(6) Ako je $u \in TW(A)$ i $v \in ULDW(A)$, tada je $uv \in ULTDW(A)$. Zaista, za proizvoljno stanje $a \in A$ imamo da je $auv = au \in Tr(A)$, što znači da monogeni podautomat $S(a)$ jeste uv-utrapljiv. Sa druge strane, podautomat $S(a)$ je v-direktabilan, pa može imati samo jedan trap. Dakle, $S(a)$ je trap-uv-direktabilan automat, pa $uv \in ULTDW(A)$, što je i trebalo dokazati.

(7) Ovo tvrđenje se dokazuje na sličan način kao (6). $\square$

Narednom teoremom dokazujemo da razmatrani jezici nisu ništa drugo do ideali slobodnog monoida X^*.

Teorema 4.8.2. *Neka je $L \subseteq X^*$ neprazan jezik. Tada postoji automat A tako da je jezik L jednak jednom od jezika*

$$TDW(A),\ ULTDW(A),\ TW(A),\ DW(A),\ ULDW(A)\ \ i\ \ GDW(A)$$

ako i samo ako L jeste ideal od X^*.

Dokaz. Uzmimo najpre da je $L = GDW(A)$, za neki automat A, i razmotrimo proizvoljne $u \in GDW(A)$ i $v, w \in X^*$. Tada je

$$a(uw)v(uw) = (au(wv)u)w = (au)w = a(uw),$$

i, sa druge strane,

$$a(wu)v(wu) = (aw)(u(vw)u) = (aw)u = a(wu),$$

čime smo dokazali da $uw, wu \in GDW(A)$, što znači da je $GDW(A)$ ideal od X^*. Ako je pak jezik L jednak jednom od ostalih jezika sa spiska, pridruženom nekom automatu A, tada je, prema Teoremi 4.8.1, taj jezik jednak jeziku $GDW(A)$, tj. $L = GDW(A)$, pa prema prethodno dokazanom, i u tom slučaju dobijamo da je L ideal od X^*.

Obratno, neka je L ideal slobodnog monoida X^*. Neka je sa ϱ označena Reesova kongruencija na X^* određena sa L. Razmotrimo automat $A = A^*(\varrho)$. Neka je $\varphi : A^*_{@} \to A$ prirodni homomorfizam koji odgovara kongruenciji ϱ.

Kako L jeste ϱ-klasa od $X^*_{@}$, to je $L\varphi = \{a_0\}$, za neko stanje a_0 automata A. Za proizvoljne $x \in X$ i $u \in L$ imamo da je $ux \in L$, odakle je

$$a_0x = (u\varphi)x = (ux)\varphi = a_0,$$

jer je $ux \in L$, budući da je L desni ideal od X^*. To znači da a_0 jeste trap u A. Pretpostavimo da automat A ima još neki trap a_1. Tada je $a_1 = w\varphi$, za neki $w \in X^*$. Sa druge strane, za proizvoljan $u \in L$ imamo da je $a_1u = a_1$, jer je a_1 trap u A, odakle sledi da je

$$a_1 = a_1u = (w\varphi)u = (wu)\varphi = a_0,$$

jer je $wu \in L$, budući da je L levi ideal od X^*. Prema tome, A ima jedinstveni trap a_0.

Nadalje dokazujemo da je A trap-direktabilan automat i $TDW(A) = L$. Zaista, uzmimo proizvoljne $a \in A$ i $u \in L$. Tada je $a = w\varphi$, za neki $w \in X^*$, odakle imamo da je

$$au = (w\varphi)u = (wu)\varphi = a_0,$$

jer je $wu \in L$. Prema tome, A je trap-direktabilan automat i $L \subseteq TDW(A)$. Sa druge strane, uzmimo proizvoljnu reč $u \in TDW(A)$. Tada za stanje $e\varphi$ automata A, gde je e prazna reč u X^*, imamo da važi

$$a_0 = (e\varphi)u = (eu)\varphi = u\varphi.$$

Međutim, to znači da je $u \in L$, čime smo dokazali da je $TDW(A) \subseteq L$. Dakle, dokazali smo da je $L = TDW(A)$. Na kraju, prema Teoremi 4.8.1, tačka (5), sledi da je

$$\begin{aligned} L &= TDW(A) = ULTDW(A) = TW(A) \\ &= DW(A) = ULDW(A) = GDW(A). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Teorema 4.8.3. *Za proizvoljan automat A važi sledeće:*

(1) $GDW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je bi-nula u* $S(A)\}$;
(2) $TW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je leva nula u* $S(A)\}$;
(3) $ULDW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je desna nula u* $S(A)\}$;
(4) $ULTDW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je nula u* $S(A)\}$.

Dokaz. (1) Neka je A proizvoljan automat i neka je $u \in GDW(A)$ proizvoljna reč. Uočimo proizvoljnu reč $v \in X^*$. Tada iz $auvu = au$, za svaki $a \in A$, sledi da je $\eta_u\eta_v\eta_u = \eta_u$, tj. η_u je bi-nula u $S(A)$.

Obratno, pretpostavimo da je η_u bi-nula u $S(A)$. To znači da je za svaki $\eta_v \in S(A)$ zadovoljeno $\eta_u\eta_v\eta_u = \eta_u$, a odatle za svaki $a \in A$ važi $auvu = au$, pa je $u \in GDW(A)$, što je i trebalo dokazati.

(2), (3), (4) Ove relacije se dokazuju na sličan način. □

Narednom teoremom strukturnu karakterizaciju i karakterizaciju u terminima polugrupa prelaza uopšteno direktabilnih automata.

Teorema 4.8.4. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima bi-nulu;*
(ii) *A je ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata pomoću jed-no-utrapljivog automata;*
(iii) *A je uopšteno direktabilan automat.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(iii). Sledi prema Teoremi 4.8.3.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Stavimo da je

$$B = \{au \,|\, a \in A,\, u \in GDW(A)\}.$$

Kako je $GDW(A)$ ideal u X^*, to je B podautomat od A. Neka je a_0 trap automata A/B koji je slika automata B u odnosu na prirodni epimorfizam iz A na A/B. Za proizvoljan $a \in A \setminus B$ i proizvoljnu reč $u \in GDW(A)$ imamo da je $au \in B$ u A, tj. $au = a_0$ u A/B, pa je A/B trap-direktabilan automat.

Uočimo proizvoljne $b \in B$, $v \in X^+$ i $w \in GDW(A)$. Tada je $b = au$, za neke $a \in A$ i $u \in GDW(A)$, pa je $(bv)w = auvw = auw = bw$, prema Teoremi 1.4.2. Ovim je dokazana implikacija (iii)$\Rightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je A ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata A/B. Uočimo reči $v \in ULDW(B)$ i $u \in TW(A/B)$. Neka su $a \in A$ i $w \in X^*$ proizvoljni. Tada $au \in B$, i kako je podautomat $S(au)$ automata B generisan sa au direktabilan, gde je v jedna od njegovih usmeravajućih reči, i au, $auvwu \in S(au)$, to je $auv = auvwuv$. Prema tome, $uv \in GDW(A)$ i A je uopšteno direktabilan automat. □

Uniformno lokalno direktabilni automati, koji se javljaju u prethodnoj teoremi, detaljnije su opisani u narednoj teoremi.

Teorema 4.8.5. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima desnu nulu;*
(ii) *A je direktna suma direktabilnih automata sa istom usmeravajućom reči;*
(iii) *A je uniformno lokalno direktabilan automat.*

Ako je A konačan automat, tada uslov (ii) *može biti zamenjen uslovom:*

(ii') *A je direktna suma direktabilnih automata.*

Dokaz. (i)⇔(iii). Sledi prema Teoremi 4.8.3.

(iii)⇒(ii). Uočimo proizvoljnu reč $u \in ULDW(A)$ i definišimo relaciju ϱ na A sa: $(a,b) \in \varrho \;\Leftrightarrow\; au = bu$. Očigledno, ϱ jeste relacija ekvivalencije na A i $(av, a) \in \varrho$, za svaki $a \in A$ i svaki $v \in X^*$. Odatle, prema Teoremi 4.4.1 sledi da je ϱ direktno sumska kongruencija na A.

Neka je B proizvoljna ϱ-klasa na A. Uočimo proizvoljne $a, b \in B$. Tada $au = bu$, pa je B direktabilan automat, sa usmeravajućom reči u. Ovim je implikacija (iii)⇒(ii) dokazana.

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je automat A direktna suma direktabilnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka postoji reč $u \in X^*$ koja je usmeravajuća reč za sve A_α, $\alpha \in Y$. Uočimo proizvoljan $a \in A$ i $v \in X^*$. Tada $a, av \in A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i kako je A_α direktabilan i $u \in DW(A_\alpha)$, to je $avu = au$, što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo da je A konačan automat i da važi (ii'). Tada je A direktna suma konačnog broja direktabilnih automata $A_1, \dots, A_k$, i ako uočimo proizvoljne reči $u_i \in DW(A_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, tada je $u = u_1 \cdots u_k \in DW(A_i)$, jer je $DW(A_i)$ ideal u X^*, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$, prema Teoremi 4.8.2. □

Kako smo već dali karakterizacije automata čije polugrupe prelaza imaju desnu nulu, sada ćemo to učiniti i za automate čije polugrupe prelaza imaju levu nulu.

Teorema 4.8.6. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima levu nulu;*

(ii) *A je ekstenzija diskretnog automata pomoću trap-direktabilnog automata;*

(iii) *A je utrapljiv automat.*

Dokaz. (i)⇔(iii). Sledi prema Teoremi 4.8.3.

(iii)⇒(ii). Iz (i)⇔(iii) i Teoreme 4.8.1, svaki utrapljiv automat A je uopšteno direktabilan automat i $TW(A) = GDW(A)$. Kao što je dokazano u delu (iii)⇒(ii) dokaza Teoreme 4.8.4, A je ekstenzija automata

$$B = \{au \,|\, a \in A,\, u \in GDW(A)\}$$

pomoću trap-direktabilnog automata, i kako je $GDW(A) = TW(A)$, to je B diskretan automat.

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je automat A ekstenzija diskretnog automata B pomoću trap-direktabilanog automata A/B i neka je $u \in Tr(A/B)$ proizvoljna reč. Tada za svaki $a \in A$ imamo $au \in B = Tr(A)$, pa smo dokazali da je A utrapljiv. □

Sada ćemo opisati strukturu automata čije polugrupe prelaza imaju nulu.

Teorema 4.8.7. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima nulu;*

(ii) *A je retraktivna ekstenzija diskretnog automata pomoću trap-direktabilnog automata;*

(iii) *A je direktna suma trap-direktabilnih automata sa istom utrapljujućom reči;*

(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog automata i trap-direktabilnog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog automata i trap-direktabilnog automata;*

(vi) *A je uniformno lokalno trap-direktabilan automat;*

Ako je A konačan automat, tada uslov (iii) *može biti zamenjen uslovom:*

(iii') *A je direktna suma trap-direktabilnih automata.*

Dokaz. (i)⇔(vi). Sledi neposredno na osnovu Teoreme 4.8.3.

(vi)⇒(ii). Pretpostavimo da je A uniformno lokalno trap-direktabilan automat. Uočimo proizvoljnu reč $u \in ULTDW(A)$. Tada je A utrapljiv, i prema Teoremi 4.8.6, A je ekstenzija diskretnog automata $B = Tr(A)$ pomoću trap-direktabilnog automata A/B. Definišimo preslikavanje φ iz A u B sa: za $a \in A$, $a\varphi = au$. Kako je $au \in Tr(A)$ i A je uniformno lokalno trap-direktabilan, sledi da za svaki $v \in X^*$ važi $(av)\varphi = avu = au = auv = (a\varphi)v$, pa je φ homomorfizam. Sa druge strane, ako je $a \in B$, onda je a trap i $a\varphi = au = a$. Prema tome, φ jeste retrakcija A na B, što je i trebalo dokazati.

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je automat A retraktivna ekstenzija diskretnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata A/B. Neka je φ retrakcija A na B i neka je u proizvoljna utrapljujuća reč automata A/B. Za $b \in B$, neka je $A_b = b\varphi^{-1}$. Kako je inverzna homomorfna slika podautomata takođe podautomat, to su A_b, $b \in B$, podautomati automata A i A je direktna suma ovih automata. Jasno, b je jedinstven trap automata A_b i u je utrapljujuća reč za A_b. Time smo dokazali (iii).

(iii)⇒(iv). Pretpostavimo da je automat A direktna suma trap-direktabilnih automata A_α, $\alpha \in Y$, koji imaju istu utrapljujuću reč u. Označimo sa σ odgovarajuću direktno sumsku kongruenciju na A. Kao što znamo, A/σ je diskretan automat. Sa druge strane, $B = Tr(A)$ jeste podautomat od A. Neka je ϱ Reesova kongruencija na A određena sa B. Jasno, A/ϱ je trap-direktabilan automat sa utrapljujućom reči u. Konačno, $\sigma \cap \varrho = \Delta$, pošto svaka σ-klasa sadrži tačno jedan trap iz A. Ovde Δ označava relaciju jednakosti na A. Prema tome, A je poddirektan proizvod automata A/σ i A/ϱ, čime je (iv) dokazano.

(iv)⇒(v). Ova implikacija je očigledna.

(v)⇒(vi). Neka je A paralelna kompozicija diskretnog automata B i trap-direktabilnog automata C. Neka je ϕ potapanje automata A u $B \times C$, i neka je u proizvoljna trap-usmeravajuća reč automata C. Uočimo proizvoljno $a \in A$ i $p, q \in X^*$. Tada je $a\phi = (b, c)$ za neke $b \in B$ i $c \in C$, pa je

$$\begin{aligned}(apuq)\phi &= (a\phi)puq = (bpuq, cpuq) \\ &= (b, cu) = (bu, cu) \\ &= (a\phi)u = (au)\phi,\end{aligned}$$

odakle je $apuq = au$, što je i trebalo dokazati.

Ako je A konačan i ako važi (iii'), tada je A direktna suma konačnog broja trap-direktabilnih automata $A_1, \dots, A_k$, i ako uočimo proizvoljne $u_i \in TW(A_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, tada je $u = u_1 \cdots u_k \in TW(A_i)$, za sve $i \in \{1, \dots, k\}$, prema Teoremi 4.8.2. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Nadalje će biti izučavana klasa uopšteno definitnih automata i neke njene značajne podklase sa aspekta odgovarajućih polugrupa prelaza. Najpre dokazujemo teoremu u kojoj je opisana struktura polugrupe prelaza uopšteno definitnog automata.

Teorema 4.8.8. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija pravougaone trake;*

(ii) *A je nilpotentna ekstenzija uniformno lokalno definitnog automata;*

(iii) $(\exists m, n \in \mathbb{N})(\forall u \in X^{\geq m}, \forall v \in X^{\geq n})(\forall a \in A)(\forall p, q \in X^*)$ $aupv = auqv$;

(iv) *A je uopšteno definitan automat.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je polugrupa $S(A)$ nilpotentna ekstenzija pravougaone trake E, tj. $S(A)^k = E$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Uočimo proizvoljne $u, v \in X^{\geq k}$, $p, q \in X^*$ i $a \in A$. Tada $\eta_u, \eta_v \in E$, odakle je

$$\eta_{upv} = \eta_u \eta_p \eta_v = \eta_u \eta_v = \eta_u \eta_q \eta_v = \eta_{uqv},$$

odnosno $aupv = auqv$, što je i trebalo dokazati.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $aupv = auqv$, za sve $a \in A$, $p, q \in X^*$, gde je $u \in X^{\geq m}$ i $v \in X^{\geq n}$. Stavimo $k = m + n$, $w \in X^{\geq k}$, $a \in A$ i $p \in X^*$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in X^{\geq m}$ i $v \in X^{\geq n}$, odakle je $awpw = au(vpu)v = auv = aw$. Prema tome, važi (iv).

(iv)$\Rightarrow$(i). Jasno je da je A uopšteno direktabilan automat. Tada je $S(A)$ idealska ekstenzija pravougaone trake E koju čine sve bi-nule iz $S(A)$. Štaviše, uslov (iv) daje $X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$, za neki $k \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo sledeće: ako je $s \in S(A)^k$, tada je $s = \eta_u$, gde u može biti izabran tako da pripada $X^{\geq k}$, tj. da pripada $GDW(A)$. Sada prema Lemi 1.4.2 i Teoremama 4.8.3 i 4.8.1, imamo da je $s = \eta_u \in E$. Prema tome, $S(A)^k = E$, što je i trebalo dokazati.

(iv)$\Rightarrow$(ii). Kako je A uopšteno direktabilan automat, to prema Teoremi 4.8.4, A jeste ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata $B = \{au \,|\, a \in A,\, u \in GDW(A)\}$ pomoću trap-direktabilnog automata A/B. Međutim, prema (iv) imamo da je $X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$, za neki $k \in \mathbb{N}$, pa je $au \in B$, za svaki $a \in A$ i svaku reč $u \in X^{\geq k}$. Dakle, A/B je nilpotentan automat. Uočimo proizvoljne $b \in B$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Tada $b = aw$, za neki $w \in X^{\geq k}$, pa na osnovu Leme 1.4.2 i Teoreme 4.8.1 sledi da je $bvu = awvu = awu = bu$, jer $u, w \in X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$. Dakle, B je uniformno lokalno definitan.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je automat A nilpotentna ekstenzija uniformno lokalno definitnog automata B. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $au \in B$, za svaki $a \in A$ i svaku reč $u \in X^{\geq k}$, i postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $bwv = bv$, za sve $b \in B$, $w \in X^*$ i $v \in X^{\geq m}$. Uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $v \in X^{\geq m}$, $a \in A$ i $p, q \in X^*$. Tada $au \in B$ daje $aupv = (au)pv = (au)v = (au)qv = auqv$. Prema tome, važi (iii). $\square$

Napomenimo da se ekvivalent (iii) teoreme 4.8.8 u literaturi često uzima za definiciju uopšteno direktabilnog automata.

Sada ćemo dati malo podrobnije strukturu uniformno lokalno definitnih automata, koje smo koristili u prethodnoj teoremi.

Teorema 4.8.9. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija desno nulte trake;*

(ii) *A je direktna suma definitnih automata sa ograničenim stepenom definitnosti;*

(iii) *A je uniformno lokalno definitan automat.*

Ako je A konačan automat, tada uslov (ii) *može biti zamenjen uslovom:*

(ii') *A je direktna suma definitnih automata.*

Dokaz. (i)⇒(iii). Pretpostavimo da je $S(A)$ nilpotentna ekstenzija desno nulte trake E. Neka je $k \in \mathbb{N}$ tako da je $S(A)^k = E$. S obzirom na Lemu 1.4.2 i Teoreme 4.8.1, $S^k = E$ povlači $X^{\geq k} \subseteq ULDW(A)$, što je očigledno ekvivalentno uslovu (iii).

(iii)⇒(i). Jasno, A je uopšteno definitan, pa prema Teoremi 4.8.8 sledi da je $S(A)$ nilpotentna ekstenzija pravougaone trake E koju čine sve bi-nule iz $S(A)$. Sa druge strane, A je uniformno lokalno direktabilan, pa prema Teoremi 4.8.5 i Lemama 1.4.2 i 1.4.1 dobijamo da je E takođe skup svih desnih nula iz $S(A)$, tj. E je desno nulta traka.

(iii)⇒(ii). Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $avu = au$, za sve $a \in A$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Definišimo relaciju ϱ na A na sledeći način:

$$(a, b) \in \varrho \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in X^{\geq k})\; au = bu.$$

Nije teško uočiti da je ϱ relacija ekvivalencije na A. Sa druge strane, iz definicije uniformne lokalne definitnosti sledi da je ϱ direktno sumska kongruencija na A. Neka je B proizvoljna ϱ-klasa na A i $a, b \in B$ proizvoljni elementi. Tada je $au = bu$, za svaki $u \in X^{\geq k}$, pa je B definitan automat čiji stepen definitnosti ne prelazi k. Dakle, važi (ii).

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je A direktna suma definitnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je k granica stepena definitnosti ovih automata. Uočimo proizvoljne $a \in A$, $v \in X^*$ i $u \in X^{\geq k}$. Tada $a, av \in A_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa je $avu = au$, jer je $u \in DW(A_\alpha)$. Time je dokazano (iii).

Kao u dokazu Teoreme 4.8.5 dokazujemo da je (ii) ekvivalentno sa (ii') u slučaju kada je A konačan automat. □

U skladu sa definicijom operatora lokalnog zatvorenja, ako svaki monogeni podautomat datog automata A jeste reset automat, onda kažemo da je A *lokalno reset automat*. Drugim rečima, A je lokalno reset automat ako i samo ako je $aux = ax$, za sve $a \in A$, $x \in X$ i $u \in X^*$. Neposredna posledica prethodne teoreme je sledeći rezultat:

Posledica 4.8.1. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je desno nulta traka;*
(ii) *A je direktna suma reset automata;*
(iii) *A je lokalno reset automat.*

U nastavku posmatramo automate čije su polugrupe prelaza nilpotentne ekstenzije levo nultih traka.

Teorema 4.8.10. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija levo nulte trake;*
(ii) *A je nilpotentna ekstenzija diskretnog automata;*
(iii) *A je reverzno definitan automat.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(iii). Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $S(A)^k = E$ levo nulta traka. Tada je $s \in E$ ako i samo ako je $s = \eta_u$, za neki $u \in X^{\geq k}$, i, sa druge strane, $\eta_u \in E$ ako i samo ako je $u \in TW(A)$. Prema tome, $S(A)^k$ je levo nulta traka, za neki $k \in \mathbb{N}$, ako i samo ako je A reverzno definitan.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Prema Teoremi 4.8.9, A je ekstenzija diskretnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata A/B, i tada je $B = Tr(A)$. Sa druge strane, prema (iii) sledi da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $au \in B$, za svaki $u \in X^{\geq k}$. Dakle, A/B je nilpotentan automat, što je i trebalo dokazati.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je automat A nilpotentna ekstenzija diskretnog automata B. Jasno, $B = Tr(A)$. Neka je k stepen nilpotentnosti automata A/B, i uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $a \in A$ i $v \in X^*$. Tada $au \in B$, odakle je $auv = au$. Prema tome, A je reverzno definitan. $\square$

Na kraju, koristeći prethodne rezultate karakterišemo klasu uniformno lokalno nilpotentnih automata. Naravno, jedan od ekvivalenata u toj karakterizaciji razmatra polugrupe prelaza ovakvih automata.

Teorema 4.8.11. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna polugrupa;*
(ii) *A je retraktivna nilpotentna ekstenzija diskretnog automata;*
(iii) *A je direktna suma nilpotentnih automata sa ograničenim stepenom nilpotentnosti;*
(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog automata i nilpotentnog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog automata i nilpotentnog automata;*

(vi) *A je uniformno lokalno nilpotentan automat;*

Ako je A konačan automat, tada uslov (iii) *može biti zamenjen uslovom:*

(iii') *A je direktna suma nilpotentnih automata.*

Dokaz. (i)⇔(vi). Jasno je da je A uniformno lokalno nilpotentan ako i samo ako $X^{\geq k} \subseteq ULTDW(A)$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Međutim, ovo važi ako i samo ako $S(A)$ ima nulu 0 i $S(A)^k = \{0\}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, prema Teoremi 4.8.1.

(vi)⇒(ii). Prema Teoremi 4.8.7, A je retraktivna ekstenzija diskretnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata. Sa druge strane, prema Teoremi 4.8.10, A je nilpotentna ekstenzija diskretnog automata C. Jasno da je $B = C$, pa smo dokazali (ii).

(ii)⇒(iii). Ovaj deo se dokazuje slično odgovarajućem delu dokaza Teoreme 4.8.7.

(iii)⇒(iv). Pretpostavimo da je automat A direktna suma nilpotentnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je k gornja granica stepena nilpotentnosti automata A_α, $\alpha \in Y$. Prema dokazu Teoreme 4.8.7, A je poddirektan proizvod diskretnog automata A/σ i trap-direktabilanog automata A/ϱ, gde su σ i ϱ kongruencije na A definisane u dokazu Teoreme 4.8.7. Nije teško proveriti da je A/ϱ nilpotentan automat sa stepenom nilpotentnosti koji ne prelazi k.

(iv)⇒(v). Ova implikacija važi očigledno.

(v)⇒(vi). Pretpostavimo da je A paralelna kompozicija diskretnog automata B i nilpotentnog automata C. Tada je $X^{\geq k} \subseteq ULTDW(C)$, za neki $k \in \mathbb{N}$, i ako uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $a \in A$ i $p, q \in X^*$, kao u dokazu Teoreme 4.8.7 dobijamo da je $apuq = au$, što je i trebalo dokazati.

Ostatak dokaza može biti izveden slično odgovarajućim delovima dokaza Teorema 4.8.7 i 4.8.9. □

Literatura: Bogdanović, Bogdanović, Ćirić and Petković [2000], Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [2000], Bogdanović, Imreh, Ćirić and Petković [2000], Ginzburg [1966], Imreh and Ito [1999a], Imreh and Steinby [1995], Kovačević, Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Perles, Rabin and Shamir [1963], Petković [1998], Petković, Ćirić and Bogdanović [1998, 2000a, 2000b], Pin [1984], Popović, Bogdanović, Petković and Ćirić [2000a, 2000b], Shevrin [1962], Starke [1969].

4.9. Reverzibilna stanja automata

Stanje a automata A nazivaćemo *reverzibilnim* ako za svaku ulaznu reč $u \in X^*$ postoji ulazna reč $v \in X^*$ takva da je $auv = a$. Drugim rečima, a je reverzibilno stanje ako se automat A može vratiti u njega iz svakog stanja automata A u koje se može stici iz a. U ovom odeljku prikazaćemo vrlo zanimljive osobine reverzibilnih stanja automata.

Najpre dokazujemo sledeću lemu:

Lema 4.9.1. *Sledeći uslovi za stanje a automata A su ekvivalentni:*

(i) *a je reverzibilno stanje od A;*
(ii) *$S(a)$ je jako povezan podautomat od A;*
(iii) *$S(a)$ je atom u mreži* $\mathrm{Sub}\,(A)$ *podautomata od A;*
(iv) *$S(a) \subseteq D(a)$.*

Dokaz. (i)⇒(iv). Ako je $b \in S(a)$, tada je $b = au$, za neki $u \in X^*$, pa iz reverzibilnosti stanja a sledi da je $bv = auv = a$, za neki $v \in X^*$. Dakle, $b \in D(a)$, što je trebalo dokazati.

(iv)⇒(ii). Neka je B podautomat od $S(a)$ i $b \in B$. Tada je $b \in D(a)$, pa je $bv = a$, za neki $v \in X^*$. Međutim, sada imamo da je $a = bv \in B$, pa zaključujemo da je $S(a) = B$. Prema tome, $S(a)$ je jako povezan automat.

(ii)⇒(i). Za svaki $u \in X^*$ imamo da je $S(au)$ podautomat od $S(a)$, pa kako je $S(a)$ jako povezan automat, to je $S(a) = S(au)$. Prema tome, $a \in S(au)$, što znači da postoji $v \in X^*$ tako da je $a = auv$, što je i trebalo dokazati.

(ii)⇒(iii). Neka je B podautomat od A takav da je $\varnothing \subset B \subseteq S(a)$. Tada je B takođe podautomat od $S(a)$, pa kako je $S(a)$ jako povezan, tj. nema pravih podautomata, to zaključujemo da je $S(a) = B$, Time smo dokazali da je $S(a)$ atom u $\mathrm{Sub}\,(A)$.

(iii)⇒(ii). Neka je $B \neq \varnothing$ podautomat od $S(a)$. Tada je B takođe i podautomat od A, pa kako je $S(a)$ atom od $\mathrm{Sub}\,(A)$, to mora biti $B = S(a)$. Time smo dokazali da $S(a)$ nema pravih podautomata, što znači da je jako povezan automat. □

Skup svih reverzibilnih stanja automata A označavaćemo sa $R(A)$ i nazivaćemo ga *reverzibilnim delom* od A. Ako je $A = R(A)$, automat A ćemo nazivati *reverzibilnim automatom*. Važi sledeće:

Lema 4.9.2. *Ako je za automat A skup $R(A)$ neprazan, tada je $R(A)$ reverzibilan podautomat od A.*

Dokaz. Neka je $R(A)$ neprazan skup. Ako je $a \in R(A)$, tada prema Lemi 4.9.1 sledi da je $S(a)$ jako povezan automat i $S(a) \subseteq R(A)$. Prema tome, $R(A)$ je unija jako povezanih podautomata $S(a)$, $a \in R(A)$, pa je $R(A)$ takođe podautomat od A. Jasno da je $R(A)$ reverzibilan automat. □

Primetimo da je automat A reverzibilan ako i samo ako važi uslov (ii) Teoreme 4.5.3, što znači da je automat A reverzibilan ako i samo ako je lokalno jako povezan, odnosno ako je direktna suma jako povezanih automata. Narednom teoremom opisujemo još neke osobine reverzibilnih automata:

Teorema 4.9.1. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je reverzibilan automat;*
(ii) *$S(a) = D(a)$, za svako stanje $a \in A$;*
(iii) $\mathrm{Sub}\,(A)$ *je Booleova algebra;*
(iv) $\mathrm{Sub}\,(A)$ *je atomistična mreža.*

Dokaz. (i)⇔(ii). Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Prema Lemi 4.9.1, $S(a) \subseteq D(a)$. Neka je $b \in D(a)$, tj. $bv = a$, za neku reč $v \in X^*$. Kako je b takođe reverzibilno stanje, to je $bvu = b$, za neku reč $u \in X^*$, odakle dobijamo da je $b = bvu = au \in S(a)$. Time smo dokazali da je $S(a) = D(a)$.

(ii)⇒(i). Ova implikacija je neposredna posledica Leme 4.9.1.

(i)⇒(iii). Neka je B proizvoljan podautomat od A, C je njegov komplement u A, $a \in C$ i $u \in X^*$. Tada postoji $v \in X^*$ tako da je $auv = a$, pa bi u slučaju da je $au \in B$ dobili da je $a = (au)v \in B$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a \in C$. Prema tome, $au \in C$, čime smo dokazali da je C podautomat od A, a odatle dalje zaključujemo da $\mathrm{Sub}\,(A)$ jeste Booleova algebra.

(iii)⇒(i). Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Kako komplement dualnog podautomata jeste podautomat, to imamo da je $A \setminus D(a)$ podautomat od A. Međutim, kako je $\mathrm{Sub}\,(A)$ Booleova algebra, to dobijamo da je i $D(a)$ podautomat od A, kao komplement od $A \setminus D(a)$. Odavde neposredno sledi da je $S(a) \subseteq D(a)$, što na osnovu Leme 4.9.1 povlači da je a reverzibilno stanje. Dakle, dokazali smo da je A reverzibilan automat.

(i)⇒(iv). Neka je $B \neq \varnothing$ proizvoljan podautomat od A. Tada je $B = \bigcup\{S(a) \mid a \in B\}$, a prema Lemi 4.9.1, $S(a)$ je atom od A, za svaki $a \in B$. Dakle, dokazali smo da je $\mathrm{Sub}\,(A)$ atomistična mreža.

(iv)⇒(i). Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Prema pretpostavci,

$$S(a) = \bigcup\{A_i \mid i \in I\},$$

gde je A_i atom u $\mathrm{Sub}\,(A)$, za svaki $i \in I$. To znači da je $a \in A_i$, za neki $i \in I$, odakle zaključujemo da je $S(a) \subseteq A_i$, jer je $S(a)$ najmanji podautomat koji sadrži a, i $S(a) = A_i$, jer je A_i atom od $\mathrm{Sub}\,(A)$. Dakle, $S(a)$ je atom od $\mathrm{Sub}\,(A)$, pa prema Lemi 4.9.1 dobijamo da je a reverzibilno stanje, i dalje da je A reverzibilan automat. $\square$

Ako automat A ima reverzibilna stanja, tada prema Lemi 4.9.2 on jeste ekstenzija reverzibilnog automata $R(A)$, ali u opštem slučaju ne znamo ništa o strukturi faktor-automata $A/R(A)$. U narednoj teoremi razmotrićemo zanimljiv slučaj kada je faktor-automat $A/R(A)$ trap-povezan.

Teorema 4.9.2. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je ekstenzija reverzibilnog pomoću trap-povezanog automata;*
(ii) *svaki monogeni podautomat od A ima reverzibilno stanje;*
(iii) $\mathrm{Sub}\,(A)$ *je atomična mreža;*
(iv) $(\forall a \in A)(\exists u \in X^*)(\forall v \in X^*)(\exists w \in X^*)\ auvw = au$.

Dokaz. (i)⇒(iv). Neka je A ekstenzija reverzibilnog automata B pomoću trap-povezanog automata i razmotrimo proizvoljno stanje $a \in A$. Budući da je A/B trap-povezan automat, imamo da je $au \in B$, za neku reč $u \in X^*$. To znači da je au reverzibilno stanje, odakle sledi da za svaku reč $v \in X^*$ postoji $w \in X^*$ tako da je $auvw = au$.

(iv)⇒(ii). Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Prema (iv) imamo da postoji reč $u \in X^*$ tako da je au reverzibilno stanje iz $S(a)$.

(ii)⇒(i). Prema Lemi 4.9.2, A je ekstenzija reverzibilnog automata $R(A)$. Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje. Tada $S(a)$ sadrži reverzibilno stanje au, za neku reč $u \in X^*$, što znači da je $au \in R(A)$. Prema tome, $A/R(A)$ je trap-povezan automat.

(ii)⇒(iii). Neka je B proizvoljan podautomat od A. Tada B ima reverzibilno stanje a i prema Lemi 4.9.1, $S(a)$ je jako povezan podautomat od B, odakle zaključujemo da svaki podautomat od A sadrži jako povezan podautomat. Međutim, svaki jako povezan podautomat od A je, prema Lemi

4.9.1, atom mreže Sub (A). Dakle, zaključujemo da svaki podautomat od A sadrži atom od Sub (A), što znači da je mreža Sub (A) atomična.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Ako je Sub(A) atomična mreža, tada svaki podautomat B od A sadrži atom, tj. jako povezan podautomat C od A, a prema Lemi 4.9.1, svako stanje $c \in C$ je reverzibilno stanje od B. Time smo dokazali (ii). $\square$

Prethodna teorema daje veoma važnu posledicu koja se tiče konačnih automata.

Teorema 4.9.3. *Svaki konačan automat A se može na jedinstven način predstaviti kao ekstenzija reverzibilnog automata pomoću trap-direktabilnog automata.*

Dokaz. Kako je A konačan automat, to je Sub (A) konačna mreža, pa je jasno da je ta mreža atomična. Dakle, prema Teoremi 4.9.2, A je ekstenzija reverzibilnog automata B pomoću trap-povezanog automata C. Ostaje da se dokaže da je C trap-direktabilan automat.

Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup svih stanja automata C. Dokazaćemo da za svaki $k \in [2, n]$ postoji reč $u_k \in X^*$ takva da je $a_i u_k = a_j u_k$, za sve $i, j \in [1, k]$. To očigledno važi za $k = 2$, jer je C trap-povezan automat. Pretpostavimo da to tvrđenje važi za neki $k \in [2, n-1]$. Razmotrimo stanja $a_k u_k$ i $a_{k+1} u_k$. Zbog trap-povezanosti automata C imamo da je $a_k u_k u = a_{k+1} u_k u$, za neku reč $u \in X^*$. Stavimo $u_{k+1} = u_k u$. Tada za svaki $i \in [1, k]$ imamo da važi

$$a_i u_{k+1} = a_i u_k u = a_k u_k u = a_k u_{k+1} = a_{k+1} u_{k+1}.$$

Prema tome, $a_i u_{k+1} = a_j u_{k+1}$, za sve $i, j \in [1, k+1]$, što je i trebalo dokazati. Sada indukcijom zaključujemo da postoji reč $u_n \in X^*$ takva da je $a u_n = b u_n$, za svaka dva stanja $a, b \in C$. To znači da je C direktabilan automat, pa kako C ima trap, to C jeste trap-direktabilan automat.

Jasno je da se radi o jedinstvenom predstavljanju automata A kao ekstenzije reverzibilnog pomoću trap-direktabilnog automata. $\square$

Ako automat A sadrži najmanji podautomat B, onda ćemo taj podautomat nazivati *jezgrom* automata A. Jasno, automat A ima jezgro ako i samo ako je presek svih nepraznih podautomata od A neprazan, i tada je jezgro jednako upravo tom preseku. Narednom teoremom automati sa jezgrom karakterišu se kao ekstenzije jako povezanih automata pomoću trap-povezanih automata.

Teorema 4.9.4. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A je ekstenzija jako povezanog pomoću trap-povezanog automata;*

(ii) *A ima jezgro;*

(iii) *A je povezan i $R(A) \neq \varnothing$.*

Dokaz. (i)⇒(ii). Neka je A ekstenzija jako povezanog automata B pomoću trap-povezanog automata. Prema Teoremi 4.9.2, mreža $\mathrm{Sub}\,(A)$ je atomična i njeni atomi su jako povezani podautomati od A. Međutim, B je jedini jako povezan podautomat od A, pa zaključujemo da $\mathrm{Sub}\,(A)$ ima jedinstven atom B, odnosno da je B jezgro od A.

(ii)⇒(iii). Neka je B jezgro od A. Tada je B jako povezan automat i $B \subseteq R(A)$. Dakle, $R(A) \neq \varnothing$. Sa druge strane, za proizvoljne $a, b \in A$ imamo da je $B \subseteq S(a) \cap S(b)$, što znači da je $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$, tj. $au = bv$, za neke $u, v \in X^*$. Prema tome, A je povezan automat.

(iii)⇒(i). Kako je svaki podautomat povezanog automata takođe povezan, to imamo da je $R(A)$ povezan automat, pa je nerazloživ u direktnu sumu. Međutim, s obzirom da $R(A)$ jeste reverzibilan automat, on je direktna suma jako povezanih automata. Iz svega ovog zaključujemo da $R(A)$ jeste jako povezan automat. Neka je $a \in A$ i $b \in R(A)$. Tada postoje $u, v \in X^*$ tako da je $au = bv$, i $bv \in R(A)$ povlači $au \in R(A)$. Dakle, $A/R(A)$ je trap-povezan automat, što je i trebalo dokazati. □

Ekstenziju A automata B nazivamo *retraktivnom* ekstenzijom od B ako postoji homomorfizam φ iz A na B takav da je $b\varphi = b$, za svaki $b \in B$, i u tom slučaju φ nazivamo *retrakcijom* iz A na B. Zanimljivu osobinu retraktivnih ekstenzija reverzibilnih automata pomoću trap-povezanih automata daje sledeća teorema:

Teorema 4.9.5. *Automat A je retraktivna ekstenzija reverzibilnog automata B pomoću trap-povezanog automata ako i samo ako A jeste poddirektan proizvod automata B i trap-povezanog automata.*

Dokaz. Neka je A retraktivna ekstenzija reverzibilnog automata B pomoću trap-povezanog automata i neka je φ odgovarajuća retrakcija iz A na B. Neka je sa ϱ_B označena Reesova kongruencija na A određena podautomatom B, a sa θ jezgro retrakcije φ. Tada se jednostavno proverava da je $\varrho_B \cap \theta = \Delta$, što prema Teoremi 1.7.1 znači da je A poddirektan proizvod od A/ϱ_B i A/θ. Prema pretpostavci, $A/\varrho_B = A/B$ je trap-povezan automat.

Sa druge strane, prema Teoremi o homomorfizmu, faktor-automat A/θ je izomorfan sa B. Dakle, A je poddirektan proizvod automata B i trap-povezanog automata.

Obratno, neka $A \subseteq B \times C$ jeste poddirektan proizvod reverzibilnog automata B i trap-povezanog automata C. Neka je c_0 jedinstveni trap automata C. Dokazaćemo da je $B' = B \times \{c_0\} \subseteq A$. Razmotrimo proizvoljan $a \in B$. Kako je A poddirektan proizvod od B i C, to postoji $c \in C$ tako da je $(a,c) \in A$. S obzirom da je C trap-povezan, imamo da je $cu = c_0$, za neku reč $u \in X^*$, a s obzirom da je B reverzibilan, postoji $v \in X^*$ tako da je $auv = a$. Odavde sledi da je

$$(a, c_0) = (auv, cuv) = (a, c)uv \in A.$$

Dakle, B' je podautomat od A izomorfan sa B, i jasno je da Reesov faktor-automat A/B' jeste trap-povezan. Konačno, preslikavanje $(a, c) \mapsto (a, c_0)$ je retrakcija iz A na B'. $\square$

Ovaj odeljak završićemo zanimljivom teoremom kojom se karakterišu automati bez reverzibilnih stanja.

Teorema 4.9.6. *Sledeći uslovi za automat A su ekvivalentni:*

(i) *A nema nijedno reverzibilno stanje;*

(ii) *Za svaki $a \in A$ važi $\bigcap_{u \in X^*} S(au) = \varnothing$;*

(iii) *A nema trap i poddirektan je proizvod trap-povezanih automata.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da (ii) ne važi, tj. da postoji $a \in A$ tako da je

$$\bigcap_{u \in X^*} S(au) \neq \varnothing,$$

i razmotrimo proizvoljan $b \in \bigcap_{u \in X^*} S(au)$. Iz $b \in S(a)$ sledi da je $b = au$, za neki $u \in X^*$, i za svaki $v \in X^*$ imamo da je $b \in S(auv) = S(bv)$. Sada, prema Lemi 4.9.1, imamo da je b reverzibilno stanje, što je u suprotnosti sa (i). Dakle, zaključujemo da važi (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ako A ima trap a, tada je

$$\bigcap_{u \in X^*} S(au) = \{a\},$$

što je u suprotnosti sa (ii). Prema tome, A nema trap.

Za svaki $a \in A$ neka je $A_a = \{b \in A \,|\, a \notin S(b)\}$. Ako uzmemo proizvoljne $b \in A$ i $u \in X^*$, tada je $S(bu) \subseteq S(b)$, pa $a \notin S(b)$ daje $a \notin S(bu)$. Dakle, $bu \in A_a$, pa smo dokazali da je A_a podautomat od A. Iz $a \notin A_a$, za svaki $a \in A$, sledi da je

$$\bigcap_{a\in A} A_a = \varnothing,$$

pa imamo da je A poddirektan proizvod automata A/A_a, $a \in A$. Preostaje da se dokaže da je svaki A/A_a trap-povezan. Iz tog razloga razmotrimo proizvoljan $b \in A$. Kako $a \notin \bigcap_{u\in X^*} S(bu)$, to postoji $u \in X^*$ tako da je $a \notin S(bu)$, tj. $bu \in A_a$, pa zaključujemo da je A/A_a zaista trap-povezan automat.

(iii)⇒(i). Neka A nema trap i poddirektan je proizvod trap-povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je

$$A \subseteq \prod_{\alpha\in Y} A_\alpha.$$

Za svaki $\alpha \in Y$, neka je φ_α projekcioni homomorfizam iz A na A_α. Ako je b reverzibilno stanje od A, tada je svaki $b\varphi_\alpha$ reverzibilno stanje od A_α, i kako jedinstveni trap od A_α takođe jeste i jedinstveno reverzibilno stanje od A_α, to imamo da je $b\varphi_\alpha$ trap. Međutim, odatle sledi da je b trap automata A, što je u suprotnosti sa (iii). Prema tome, zaključujemo da A nema reverzibilnih stanja. □

Literatura: Bogdanović, Ćirić, Petković, Imreh and Steinby [1999], Ćirić and Bogdanović [1999a], Ćirić, Bogdanović and Petković [1998], Gécseg and Thierrin [1987], Glushkov [1961a], Huzino [1958], Kovačević, Ćirić, Petković and Bogdanović [2000], Saliĭ [1988], Starke [1969], Thierrin [1972].

4.10. Zadaci

1. Dokazati sledeće jednakosti:

(a) $\mathbf{ULDir} = \mathbf{GDir} \cap L(\mathbf{Dir})$;
(b) $\mathbf{ULDef} = \mathbf{GDef} \cap L(\mathbf{Def}) = \mathbf{ULDir} \cap L(\mathbf{Def}) = \mathbf{GDef} \cap \mathbf{ULDir} =$ $= \mathbf{GDir} \cap L(\mathbf{Def}) = \mathbf{GDef} \cap L(\mathbf{Dir})$;
(c) $\mathbf{ULTrap} = \mathbf{TrapULDir} = \mathbf{ULDir} \cap \mathcal{L}(\mathbf{TDir}) = \mathbf{Trap} \cap L(\mathbf{TDir}) =$ $\mathbf{Trap} \cap L(\mathbf{Dir}) = \mathbf{GDir} \cap L(\mathbf{TDir})$;
(d) $\mathbf{ULNilp} = \mathbf{RDef} \cap \mathbf{ULTDir} = L(\mathbf{Nilp}) \cap \mathbf{ULTDir} = \mathbf{RDef} \cap L(\mathbf{Nilp}) =$ $= \mathbf{RDef} \cap L(\mathbf{Def}) = \mathbf{GDef} \cap L(\mathbf{Nilp})$.

2. Dati primer automata koji je

(a) lokalno direktabilan, a nije uniformno lokalno direktabilan;
(b) lokalno trap-direktabilan, a nije uniformno lokalno nilpotentan.

3. Da li su klase $L(\mathbf{Dir})$, $L(\mathbf{TDir})$, $L(\mathbf{Def})$ i $L(\mathbf{Nilp})$ (uopšteni) varijeteti?

4. Dokazati da je proizvoljan konačan automat u klasi $L(\mathbf{K})$ ako i samo ako je u klasi **ULK**, gde je $\mathbf{K} \in \{\mathbf{Dir}, \mathbf{TDir}, \mathbf{Def}, \mathbf{Nilp}\}$.

5. Konstrusati automat čija je polugrupa prelaza nilpotentna ekstenzija desno nulte trake.

6. Dokazati da za svaki uopšteno direktabilan automat A važi sledeće:

(a) A ima bar jedno reverzibilno stanje;
(b) A ima bar jedan jako povezan podautomat;
(c) A ima tačno jedan jako povezan podautomat ako i samo ako je direktabilan.

7. Dokazati da je konačan automat A uopšteno direktabilan ako i samo ako svaki njegov jako povezan podautomat jeste direktabilan.

8. Dokazati da je konačan automat A utrapljiv ako i samo ako svaki njegov jako povezan podautomat jeste trivijalan.

9. Neka je A konačan automat. Prema Teoremi 4.9.3, A se može na jedinstven način predstaviti u obliku ekstenzije reverzibilnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata, a prema Teoremi 4.4.3, B se može na jedinstven način predstaviti kao direktna suma jako povezanih automata $B_\alpha, \alpha \in Y$.

(a) Neka je τ relacija na A definisana sa

$$(a,b) \in \tau \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } a, b \in B_\alpha, \text{ za neki } \alpha \in Y.$$

Dokazati da je τ najmanja **Trap**-kongruencija na A.

(b) Dokazati da je Reesova kongruencija ρ_B podautomata B od A najmanja **TDir**-kongruencija na A.

(c) Neka za svaki $\alpha \in Y$, relacija θ_α jeste najmanja **Dir**-kongruencija na B_α, i neka je θ relacija na A definisana sa

$$(a,b) \in \theta \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } (a,b) \in \theta_\alpha, \text{ za neki } \alpha \in Y.$$

Dokazati da je θ najmanja **GDir**-kongruencija na A.

10. Neka je A konačan automat, neka je A predstavljen u obliku direktne sume automata $A_\alpha, \alpha \in Y$, nerazloživih u direktnu sumu, neka je $\boldsymbol{P} \subseteq \mathbf{Dir}$ proizvoljan pseudovarijetet i za svaki $\alpha \in Y$ neka je θ_α najmanja $\boldsymbol{P}$-kongruencija na A_α. Tada relacija θ na A definisana sa

$$(a,b) \in \theta \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in \theta_\alpha, \text{ za neki } \alpha \in Y,$$

jeste najmanja $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A. Dokazati.

11. Neka je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}$;
(ii) $\boldsymbol{V}$ ne sadrži nijedan netrivijalan jako povezan automat;
(iii) $\boldsymbol{V}$ ne sadrži nijedan poddirektno nerazloživ jako povezan automat.

12. Neka je A automat sa ulaznim alfabetom X, neka je sa $\mathcal{P}(A)$ označen skup svih podskupova od A a sa $\mathcal{P}'(A)$ skup svih nepraznih podskupova od A. Dokazati da je $\mathcal{P}(A)$ takođe automat sa ulaznim alfabetom X u kome su prelazi definisani sa $H \mapsto Hx$, gde je $Hx = \{ax \mid a \in H\}$, za $x \in X$ i $H \in \mathcal{P}(A)$. Dokazati i da je $\mathcal{P}'(A)$ podautomat od $\mathcal{P}(A)$. (Automate $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}'(A)$ nazivamo *partitivnim automatima* automata A).

13. Neka je $\{A_\alpha\}_{\alpha \in Y}$, proizvoljna familija automata. Dokazati da je automat B je izomorfan direktnom proizvodu partitivnih automata $\mathcal{P}(A_\alpha)$, $\alpha \in Y$, ako i samo ako je izomorfan partitivnom automatu $\mathcal{P}(A)$, gde je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$.

14. Dokazati da za proizvoljan automat A važi:

(a) automatovni identitet $s = t$ je zadovoljen na $\mathcal{P}(A)$ ako i samo ako je zadovoljen na A;
(b) automatovni identitet $s = t$ je zadovoljen na $\mathcal{P}(A)$ ako i samo ako je regularan i zadovoljen na A.

15. Dokazati da ako je skup $N(A)$ svih vratova automata A neprazan, onda je $N(A)$ podautomat od A.

16. Stanje a automata A nazivamo *lokalnim vratom* automata A ako je a vrat nekog podautomata od A. Dokazati da ako je skup $LN(A)$ svih lokalnih vratova neprazan, onda je on podautomat od A.

17. Mreža $\mathrm{Sub}\,(A)$ svih podautomata automata A je direktan proizvod mreža $L_\alpha, \alpha \in Y$, ako i samo ako A jeste direktna suma automata $A_\alpha, \alpha \in Y$, i $L_\alpha \cong \mathrm{Sub}\,(A_\alpha)$, za svaki $\alpha \in Y$.

18. Neka je A automat i neka je automat A^t definisan kao direktna suma automata A i jednoelementnog automata $\{t\}$. Dokazati da ako automat A jeste direktna suma automata $A_\alpha, \alpha \in Y$, onda je A poddirektan proizvod automata $A_\alpha^t, \alpha \in Y$.

19. Neka je A konačan automat. Dokazati da važi sledeće:

(a) A je trap-povezan ako i samo ako je trap-direktabilan.
(b) Za proizvoljne $a, b \in A$ postoji $u \in X^*$ tako da je $au = bu$ ako i samo ako A jeste direktabilan automat.

Glava 5

Raspoznavanje jezika automatima

Glavni zadatak automata bez izlaza svakako je raspoznavanje jezika, a problem opisivanja jezika koji se mogu raspoznati konačnim automatima, takozvanih raspoznatljivih jezika, jedan je od najvažnijih u Teoriji automata. Prvi korak u izučavanju takvih jezika predstavlja rad Kleenea [1956], u kome su raspoznatljivi jezici okarakterisani kao jezici koji se mogu dobiti iz elementarnih jezika upotrebom operacija unije, množenja i zvezda operacije, konačan broj puta, odnosno, kao jezici koji se mogu predstaviti takozvanim regularnim izrazima. Veoma važnu ulogu u razvoju teorije raspoznatljivih jezika igrali su i rezultati Myhilla [1957] i Nerodea [1958], koji su pokazali da se raspoznatljivost može efikasno izučavati i preko kongruencija, odnosno desnih kongruencija, na odgovarajućim slobodnim monoidima. Zahvaljujući tome, dokazano je postojanje automata sa minimalnim brojem stanja koji raspoznaje dati jezik, i dati algoritmi za konstrukciju minimalnog automata jezika i minimizaciju automata. Rezultati Myhilla i Nerodea poslužili su i kao osnova za uvođenje ekvivalentnog koncepta raspoznavanja jezika monoidom i pojma sintaksičkog monoida jezika, koji su, radom Schützenbergera [1965] i knjigom Eilenberga [1976], inicirali razvoj teorije varijeteta jezika.

Tema ove glave biće problem raspoznavanja jezika automatima, posebno onim konačnim. Kao što ćemo videti, u raspoznavanju jezika automatom, izlazni deo automata (tj. izlazna polugrupa i funkcija izlaza) ne igra nikakvu ulogu, pa će svi automati razmatrani u ovoj glavi biti automati bez izlaza. Jednostavnosti radi, pod pojmom automata ćemo u ovoj glavi podrazumevati automat bez izlaza. U slučaju da nije drugačije naznačeno, automat i njegov skup stanja označavaćemo istim slovom A, ulazni alfabet sa X, sa δ označavamo funkciju prelaza $\delta : A \times X \to A$, a ukoliko se radi o inicijalnom automatu, njegovo inicijalno stanje ćemo označavati sa a_0.

5.1. Minimalni automat jezika

Neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ inicijalni automat i $T \subseteq A$. Kažemo da automat $\mathcal{A}$ *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* stanja T ako je

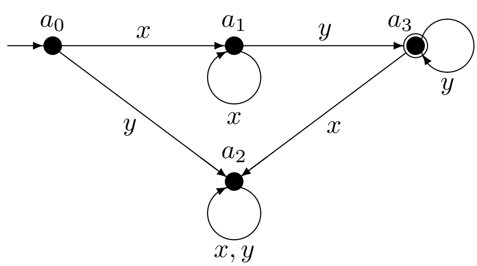
$$L = \{w \in X^* \mid a_0 w \in T\},$$

ili, što je ekvivalentno, ako važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; a_0 u \in T,$$

a za jezik L kažemo da *može biti raspoznat automatom* $\mathcal{A}$. Često se kaže i da automat $\mathcal{A}$ *prihvata* jezik L. Stanja iz skupa T se u tom slučaju nazivaju *završnim*, *terminalnim* ili *finalnim stanjima*.

Primer 5.1.1. Automat $\mathcal{A}$ sa inicijalnim stanjem a_0 dat sledećim grafom prelaza



raspoznaje jezik $L = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ skupom stanja $T = \{a_3\}$.

Kada govorimo o raspoznavanju jezika automatom $\mathcal{A}$, neophodno je da se precizira koje se stanje automata $\mathcal{A}$ uzima za inicijalno stanje i kojim skupom stanja se raspoznaje taj jezik, odnosno koja su stanja završna. Kada taj automat zadajemo njegovim grafom prelaza, u nekim slučajevima inicijalno stanje i završna stanja nećemo posebno isticati u tekstu, već ćemo ih označiti na samom grafu prelaza. Inicijalno stanje označićemo ulazećom strelicom, kao što smo u prethodnom primeru označili stanje a_0, a završna stanja označićemo dvostrukim kružićima, kao što smo u prethodnom primeru učinili za stanje a_3.

Uočimo da se raspoznavanje jezika L automatom A vrši unutar stabla automata A, tj. njegovog podautomata generisanog inicijalnim stanjem a_0, dok stanja automata A van njegovog stabla ne učestvuju u raspoznavanju jezika L. Preciznije, ako stablo automata A označimo sa A', tada automat A' raspoznaje jezik L skupom $T' = A' \cap T$. Prema tome, kada govorimo o raspoznavanju jezika automatima, možemo se slobodno ograničiti na raspoznavanje jezika povezanim inicijalnim automatima. Zbog korespodencije koju smo u prethodnom poglavlju uspostavili između povezanih inicijalnih automata i desnih kongruencija na slobodnom monoidu X^*, problem raspoznavanja jezika automatima može se razmatrati i sa aspekta desnih kongruencija na slobodnom monoidu, kao što je učinjeno u sledećoj teoremi:

Teorema 5.1.1. *Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik i neka je σ proizvoljna desna kongruencija na X^*. Automat A_σ raspoznaje L ako i samo ako σ zasićuje L.*

Dokaz. Uzmimo da automat $A_\sigma = (A_\sigma, e\sigma, X, \delta_\sigma)$ raspoznaje L nekim skupom stanja T. To znači da je

$$L = \{u \in X^* \,|\, (e\sigma)u \in T\} = \{u \in X^* \,|\, u\sigma \in T\} = \bigcup_{u\sigma \in T} u\sigma,$$

pa, prema tome, σ zasićuje L.

Obratno, neka σ zasićuje L, tj. neka je L unija nekih σ-klasa. Označimo sa T skup svih σ-klasa sadržanih u L. Tada je

$$L = \{u \in X^* \,|\, u\sigma \in T\} = \{u \in X^* \,|\, (e\sigma)u \in T\},$$

pa A_σ raspoznaje L skupom stanja T. $\square$

Posledica 5.1.1. *Proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$ moguće je raspoznati nekim automatom.*

Dokaz. Prema Teoremi 1.5.5, glavna desna kongruencija R_L na X^* određena sa L, zasićuje L, pa na osnovu prethodne teoreme dobijamo da automat A_{R_L} raspoznaje L. $\square$

Primetimo takođe da prema Teoremi 1.5.5 i prethodnoj teoremi, i za glavnu kongruenciju P_L na X^* određenu sa L važi da automat A_{P_L} raspoznaje L. Međutim, automat A_{R_L} određen glavnom desnom kongruencijom R_L jezika L je posebno zanimljiv jer ima veoma važnu osobinu da je automat sa najmanjim brojem stanja među automatima koji raspoznaju L. Ta osobina data je sledećom teoremom:

Teorema 5.1.2. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, automat A_{R_L} je automat najmanje kardinalnosti koji raspoznaje L.*

Dokaz. Neka je A proizvoljan automat koji raspoznaje L. Označimo sa A' stablo automata A. Prema napred rečenom, A' takođe raspoznaje L. Kako je A' povezan inicijalni automat, to prema Teoremi 4.2.5 imamo da je $A' = A_\sigma$, za neku desnu kongruenciju σ na X^*. Prema prethodnoj teoremi, σ zasićuje L, dok prema Teoremi 1.5.5, glavna desna kongruencija R_L je najveća desna kongruencija na X^* koja zasićuje L, pa je, prema tome, $\sigma \subseteq R_L$. Sada prema Teoremi 4.2.6 imamo da je automat A_{R_L} homomorfna slika automata $A' = A_\sigma$, odakle dobijamo da je

$$|A_{R_L}| \leq |A'| \leq |A|,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

U skladu sa prethodnom teoremom, automat A_{R_L} nazivaćemo *minimalnim automatom* jezika L.

Postoji više algoritama za nalaženje minimalnog automata datog jezika $L \subseteq X^*$. O nekim od njih biće reči u daljem tekstu.

Ako je H podskup polugrupe S, *desnim razlomkom skupa H* u odnosu na element $a \in S$ nazivaćemo skup $a^{-1}H$ definisan sa

$$a^{-1}H = \{x \in S \,|\, ax \in H\}. \tag{5.1}$$

Slično, *levim razlomkom skupa H* u odnosu na a nazivaćemo skup

$$Ha^{-1} = \{x \in S \,|\, xa \in H\}.$$

Jasno, glavna desna kongruencija R_H na S određena sa H može biti definisana pomoću desnih razlomaka skupa H na sledeći način:

$$(a, b) \in R_H \;\Leftrightarrow\; a^{-1}H = b^{-1}H. \tag{5.2}$$

Slično se mogu definisati i glavne leve kongruencije.

Lako se može dokazati da za proizvoljan podskup H polugrupe S i proizvoljne $a, b \in S$ važi

$$(ab)^{-1}H = b^{-1}(a^{-1}H), \qquad \text{i} \qquad H(ab)^{-1} = (Hb^{-1})a^{-1}. \tag{5.3}$$

Ako je S monoid sa jedinicom e, tada važi i

$$e^{-1}H = H, \qquad \text{i} \qquad He^{-1} = H. \tag{5.4}$$

U daljem tekstu ćemo se zadržati na desnim razlomcima. Radi pojednostavljenja oznaka, pisaćemo

$$a^{-1}H = H.a$$

i u tom slučaju prve jednakosti iz (5.3) i (5.4) postaju

$$H.ab = (H.a).b \qquad \text{i} \qquad H.e = H\ .$$

Koristeći desne razlomke datog jezika $L \subseteq X^*$, minimalni automat jezika L može biti konstruisan i na sledeći način:

Teorema 5.1.3. *Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik. Označimo sa A_L skup svih desnih razlomaka jezika L i za $L.u \in A_L$ i $x \in A$ stavimo da je*

$$\delta_L(L.u, x) = L.ux. \tag{5.5}$$

Tada je δ_L preslikavanje iz $A_L \times A$ u A_L i $\mathcal{A}_L = (A_L, L, X, \delta_L)$ je inicijalni automat izomorfan minimalnom automatu jezika L.

Dokaz. Radi pojednostavljenja oznaka, stavimo $R_L = \sigma$.

Najpre treba dokazati da je δ_L dobro definisano preslikavanje. Da bi smo to dokazali, uzmimo reči $u, v \in X^*$ takve da je $L.u = L.v$. Prema (5.2), $(u, v) \in \sigma$, odakle je $(ux, vx) \in \sigma$, jer je σ desna kongruencija, pa opet prema (5.2) dobijamo da je $L.ux = L.vx$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, δ_L je dobro definisano preslikavanje i $\mathcal{A}_L$ je automat.

Dalje treba dokazati da je automat $\mathcal{A}_L$ izomorfan kao inicijalni automat minimalnom automatu $\mathcal{A}_\sigma$ jezika L. Definišimo preslikavanje $\varphi : A_L \to A_\sigma$ sa:

$$(L.u)\varphi = u\sigma. \tag{5.6}$$

Za proizvoljne reči $u, v \in X^*$, prema (5.2) imamo da je

$$L.u = L.v \;\Leftrightarrow\; u\sigma = v\sigma,$$

pa je φ dobro definisano i injektivno preslikavanje. Takođe je jasno da je φ i sirjektivno preslikavanje.

Dalje, uzmimo proizvoljne $L.u \in A_L$ i $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned}
(\delta_L(L.u, x))\varphi &= (L.ux)\varphi && \text{(prema (5.5))} \\
&= (ux)\sigma && \text{(prema (5.6))} \\
&= \delta_\sigma(u\sigma, x) && \text{(prema (4.3)).}
\end{aligned}$$

Prema tome, φ je homomorfizam automata A_L u automat A_σ, i dakle, to je izomorfizam iz A_L na A_σ. Jasno, inicijalno stanje $L = L.e$ automata A_L se slika u inicijalno stanje $e\sigma$ automata A_σ, pa je φ izomorfizam inicijalnih automata. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Napomena 5.1.1. Primetimo da minimalni automat A_L jezika L raspoznaje L podskupom T_L od A_L datim sa

$$T_L = \{L.u \mid u \in L\}.$$

Alternativna karakterizacija skupa T_L data je sa

$$T_L = \{H \in A_L \mid e \in H\}. \tag{5.7}$$

Ovakva karakterizacija minimalnog automata A_L jezika $L \subseteq X^*$ daje nam i jedan metod za konstrukciju tog automata. Metod je zasnovan na sledećoj teoremi:

Teorema 5.1.4. *Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik. Definišimo induktivno niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od A_L sa:*

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{L\}, \\
A_{k+1} &= A_k \cup \{H.x \mid H \in A_k,\, x \in X\}, \qquad k \in \mathbb{N}^0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Tada:

(a) *Niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je rastući.*
(b) *Ako postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_{k+1}$, tada je $A_k = A_L$.*
(c) *Ako je A_L konačan skup, tada postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_L$.*

Dokaz. Tvrđenje (a) sledi neposredno iz (5.8).

(b) Podskup $A' \subseteq A_L$ koji sadrži L nazvaćemo *zatvorenim za slovo* $u \in X^*$ ako je $H.u \in A'$, za svaki element $H \in A'$. Kako je svaki element iz A_L oblika $L.u$, za neku reč $u \in X^*$, i A' sadrži L, to je A' zatvoren za sve reči iz X^* ako i samo ako je $A' = A_L$. Drugim rečima, A_L je jedini podskup od A_L zatvoren za sve reči iz X^*. Sa druge strane, nije teško dokazati da je A' zatvoren za sve reči iz X^* ako i samo ako je zatvoren za sva slova iz X. Kako jednakost $A_k = A_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$ u stvari znači da je

$$\{H.x \mid H \in A_k,\ x \in X\} \subseteq A_k,$$

odnosno da je skup A_k zatvoren za sva slova iz X, to prema napred ustanovljenom imamo da je $A_k = A_L$, što je i trebalo dokazati.

(c) Kako je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući, to je

$$|A_0| \le |A_1| \le \cdots \le |A_k| \le |A_{k+1}| \le \cdots \le |A_L|,$$

pa u slučaju da je A_L konačan skup dobijamo da je $|A_k| = |A_{k+1}|$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, i u tom slučaju je $A_k = A_{k+1}$, ponovo zbog toga što je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući. Prema tome, tada je $A_k = A_L$. $\square$

U slučaju kada su alfabet X i minimalni automat A_L jezika $L \subseteq X^*$ konačni, prethodna teorema nam daje algoritam za konstrukciju minimalnog automata A_L.

Primer 5.1.2. Neka je $X = \{x, y\}$ i $L = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Tada je

$$\begin{aligned} L.x &= \{u \in X^* \mid xu \in L\} = L \cup \{y\}^+, \\ L.y &= \{u \in X^* \mid yu \in L\} = \varnothing, \end{aligned}$$

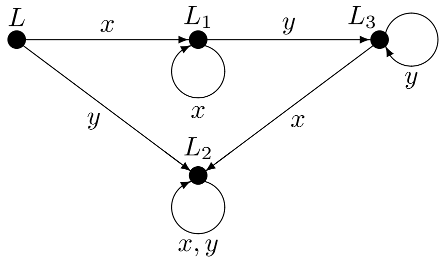
pa je $A_1 = \{L, L_1, L_2\}$, gde je $L_1 = L.x = L \cup \{y\}^+$ i $L_2 = L.y = \varnothing$. Dalje je

$$\begin{aligned} L_1.x &= L.x^2 = \{u \in X^* \mid x^2u \in L\} = L \cup \{y\}^+ = L_1, \\ L_1.y &= L.xy = \{u \in X^* \mid xyu \in L\} = \{y\}^*, \\ L_2.x &= \varnothing.x = \varnothing = L_2, \\ L_2.y &= \varnothing.y = \varnothing = L_2, \end{aligned}$$

pa je $A_2 = \{L, L_1, L_2, L_3\}$, gde je $L_3 = L.xy = \{y\}^*$. Nastavljajući isti postupak dobijamo

$$\begin{aligned} L_3.x &= L.xyx = \{u \in X^* \mid xyxu \in L\} = \varnothing = L_2, \\ L_3.y &= L.xy^2 = \{u \in X^* \mid xy^2u \in L\} = \{y\}^* = L_3, \end{aligned}$$

pa je $A_3 = A_2$. Prema tome, $A_L = A_2 = \{L, L_1, L_2, L_3\}$, i minimalni automat A_L jezika L je zadat sledećim grafom:



Primetimo da je $L_3 = \{y\}^*$ jedini element iz A_L koji sadrži praznu reč e, pa prema (5.7) imamo da automat A_L raspoznaje L skupom $T_L = \{L_3\}$, tj. stanjem L_3.

Literatura: Arbib [1969], Brzozowski [1962a], Elgot and Rutledge [1961], Gécseg and Peák [1972], Ginsburg and Spanier [1963], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Myhill [1957], Nerode [1958], Pippenger [1997], Rabin and Scott [1959], Raney [1958], Stearns and Hartmanis [1963].

5.2. Minimizacija automata bez izlaza

U prethodnom odeljku videli smo kako se nalazi minimalni automat datog jezika. U ovom odeljku razmatraćemo drugačiju situaciju, kada je dat automat A koji raspoznaje jezik L nekim podskupom $T \subseteq A$ i kada minimalni automat jezika L treba konstruisati polazeći od datog automata A. Drugim rečima, za dati automat A treba odrediti minimalni automat koji raspoznaje isti jezik kao i automat A. Postupak konstrukcije minimalnog automata A_L jezika L, polazeći od automata A koji raspoznaje L, naziva se *minimizacijom automata* A. Podsetimo se da smo o minimizaciji automata već govorili ranije, kada je bilo reči o minimizaciji automata sa izlazom. Za razliku od takve minimizacije, kod koje je glavna ideja bila da se konstruiše automat sa najmanjim brojem stanja koji realizuje zadato automatovno preslikavanje, ovde se glavna ideja sastoji u tome da se konstruiše automat sa najmanjim brojem stanja koji raspoznaje zadati jezik.

Prvi algoritam koji dajemo blizak je algoritmu za određivanje minimalnog automata datog jezika. Krenimo od proizvoljnog automata $A = (A, X, \delta)$ i proizvoljnog podskupa $T \subseteq A$. Za $a \in A$, sa $a^{-1}T$ označavaćemo skup

(5.9) $$a^{-1}T = \{u \in X^* \mid au \in T\}.$$

Po analogiji sa desnim razlomcima podskupa polugrupe, i skup $a^{-1}T$ ćemo nazivati *razlomkom podskupa* T automata A određenim stanjem a tog automata. Primetimo da kod automata postoji samo jedan način definisanja razlomka, i to je desni razlomak, jer nemamo prefiks za razliku od polugrupa, gde se može definisati i levi razlomak skupa. Kao i kod polugrupa, koristimo takođe i sledeću oznaku:

$$a^{-1}T = T.a\,.$$

Glavne osobine razlomaka podskupa automata i veze sa desnim razlomcima jezika, date su sledećom teoremom

Teorema 5.2.1. *Neka je dat automat A i proizvoljan podskup $T \subseteq A$. Tada za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$ važi*

$$T.au = (T.a).u\,. \tag{5.10}$$

Osim toga, ako je A povezan inicijalni automat i L je jezik koji automat A raspoznaje podskupom $T \subseteq A$, tj.

$$L = \{u \in X^* \mid a_0u \in T\},$$

tada je skup A_L svih desnih razlomaka jezika L jednak skupu A_T svih razlomaka skupa T.

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $a \in A$, $u \in X^*$. Tada za proizvoljnu reč $v \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned} v \in T.au &\Leftrightarrow (au)v \in T && \text{(prema (5.9))}\\ &\Leftrightarrow a(uv) \in T && \text{(jer je } (au)v = a(uv)\text{)}\\ &\Leftrightarrow uv \in T.a && \text{(prema (5.9))}\\ &\Leftrightarrow v \in (T.a).u && \text{(prema (5.1)),}\end{aligned}$$

što dokazuje (5.10).

Uzmimo dalje da je $A = (A, a_0, X, \delta)$ povezan inicijalni automat koji raspoznaje jezik L podskupom $T \subseteq A$. Jasno da je $L = T.a_0$. Prema (5.10), za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je

$$L.u = (T.a_0).u = T.a_0u,$$

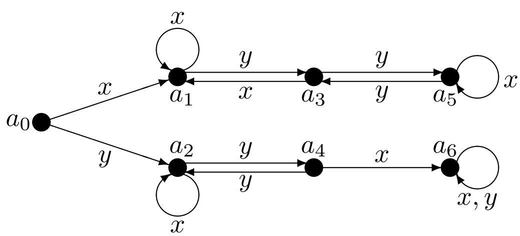
pa je $A_L \subseteq A_T$ podskup skupa razlomaka skupa T. Obratno, za proizvoljno stanje $a \in A$ je $a = a_0u$, za neku reč $u \in X^*$, jer je A povezan inicijalni automat, pa opet prema (5.10) dobijamo da je

$$T.a = T.a_0u = (T.a_0).u = L.u,$$

pa je dakle $A_T \subseteq A_L$. Time je dokaz teoreme završen. $\square$

Podsetimo se da se algoritam za konstrukciju minimalnog automata datog jezika $L \subseteq X^*$ zasnivao na nalaženju svih desnih razlomaka jezika L. Taj algoritam bi se u istom obliku mogao primeniti i za minimizaciju automata $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ koji raspoznaje jezik L podskupom $T \subseteq A$. Naime, najpre bi bio određen jezik L, a zatim i njegovi desni razlomci. Međutim, u slučaju kada je jezik zadat na gornji način, preko automata $\mathcal{A}$, često može biti mnogo lakše nalaziti njegove desne razlomke kao razlomke podskupa T, korišćenjem prethodne teoreme. Prema tome, postupak za konstrukciju minimalnog automata jezika L polazeći od automata $\mathcal{A}$ sastoji se u sledećem: Najpre ćemo naći stablo $\mathcal{A}'$ automata $\mathcal{A}$. Kao što je napred rečeno, automat $\mathcal{A}'$ raspoznaje L skupom $T' = T \cap A'$. Zatim ćemo u automatu $\mathcal{A}'$ naći skup razlomaka skupa T', koji je, prema prethodnoj teoremi, jer je automat $\mathcal{A}'$ povezan inicijalni automat, jednak skupu A_L desnih razlomaka jezika L.

Primer 5.2.1. Neka je $X = \{x, y\}$, $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, neka je automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ zadat grafom



i neka je $T = \{a_2, a_4, a_6\}$. Jasno da je $\mathcal{A}$ povezan inicijalni automat. Jezik L koji automat raspoznaje podskupom T je $L = yX^*$. Zaista, ako je $u \in L = T.a_0$, tj. $a_0 u \in T$, tada je jasno da mora biti $u = yv$, za neki $v \in X^*$. Prema tome, $L \subseteq yX^*$. Sa druge strane, za proizvoljnu reč $v \in X^*$ imamo da je

$$a_0 yv = a_2 v \in T,$$

jer je (T, X, δ'), gde je δ' restrikcija od δ na $T \times A$, podautomat automata (A, X, δ). Prema tome, $yv \in L$, što znači da je $ya^* \subseteq L$. Time smo dokazali da je zaista $L = yX^*$.

Dalje treba uočiti da je

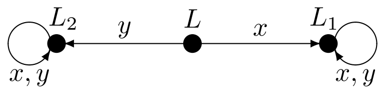
$$T.a_2 = T.a_4 = T.a_6 = X^* \qquad \text{i} \qquad T.a_1 = T.a_3 = T.a_5 = \varnothing.$$

Dakle, $A_L = A_T = \{L, L_1, L_2\}$, gde je $L_1 = \varnothing = T.a_1 = T.a_3 = T.a_5$ i $L_2 = X^* =$

$T.a_2 = T.a_4 = T.a_6$. Takođe imamo da je

$$\begin{aligned} L.x &= (T.a_0).x = T.a_0x = T.a_1 = L_1, \\ L.y &= (T.a_0).y = T.a_0y = T.a_2 = L_2, \\ L_1.x &= (T.a_1).x = T.a_1x = T.a_1 = L_1, \\ L_1.y &= (T.a_1).y = T.a_1y = T.a_3 = L_1, \\ L_2.x &= (T.a_2).x = T.a_2x = T.a_2 = L_2, \\ L_2.y &= (T.a_2).y = T.a_2y = T.a_4 = L_2, \end{aligned}$$

Prema tome, minimalni automat A_L jezika L je automat zadat grafom



Kako je $L_2 = X^*$ jedini element iz A_L koji sadrži praznu reč e, to prema (5.7) imamo da automat A_L raspoznaje L skupom $T_L = \{L_2\}$, tj. stanjem L_2.

Drugi algoritam koji ćemo prikazati sličan je algoritmu za minimizaciju automata sa izlazom koji smo dali u Glavi 3. Za automat $A = (A, X, \delta)$ i podskup $T \subseteq A$, relaciju π_T na A određenu sa T definišemo sa:

$$(a, b) \in \pi_T \;\Leftrightarrow\; T.a = T.b \;, \tag{5.11}$$

za $a, b \in A$. S obzirom na definiciju razlomaka podskupa automata, (5.11) je ekvivalentno sa

$$(a, b) \in \pi_T \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in X^*)\; (au, bu) \in \varepsilon_T \;, \tag{5.12}$$

gde je, podsetimo se, ε_T glavna ekvivalencija na A određena skupom T.

Najpre dokazujemo sledeće:

Teorema 5.2.2. *Neka je dat automat $A = (A, X, \delta)$ i podskup $T \subseteq A$. Tada*

(a) *π_T je najveća kongruencija na A sadržana u ε_T.*
(b) *π_T je najveća kongruencija na A koja zasićuje skup T.*

Dokaz. (a) Najpre dokazujemo da je π_T kongruencija na A. Jasno da je π_T relacija ekvivalencije. Uzmimo $a, b \in A$ takve da je $(a, b) \in \pi_T$ i uzmimo proizvoljno slovo $x \in X$. Tada za proizvoljnu reč $u \in X^*$ važi sledeće

$$\begin{aligned} u \in T.ax &\Leftrightarrow axu \in T \\ &\Leftrightarrow xu \in T.a \\ &\Leftrightarrow xu \in T.b && \text{(jer je } T.a = T.b) \\ &\Leftrightarrow bxu \in T \\ &\Leftrightarrow u \in T.bx \;. \end{aligned}$$

Prema tome, $T.ax = T.bx$, čime je dokazano da je π_T kongruencija na A. Iz (5.12) neposredno sledi da je $\pi_T \subseteq \varepsilon_T$, pa preostaje da se za proizvoljnu kongruenciju θ na A dokaže da iz $\theta \subseteq \varepsilon_T$ sledi $\theta \subseteq \pi_T$. Uzmimo da je $(a,b) \in \theta$. Kako je θ kongruencija na A, to za proizvoljnu reč $u \in X^*$ imamo da je $(au, bu) \in \theta \subseteq \varepsilon_T$, pa prema (5.12) sledi da je $(a,b) \in \pi_T$. Dakle, $\theta \subseteq \pi_T$, što je i trebalo dokazati.

(b) Ovo tvrđenje sledi neposredno iz (a) i Teoreme 1.2.3. □

Kao i u slučaju polugrupa, kongruenciju π_T na automatu određenu podskupom $T \subseteq A$ nazivaćemo *glavnom kongruencijom* na A *određenom podskupom* T.

Važno svojstvo glavnih kongruencija na automatu prikazano je sledećom teoremom:

Teorema 5.2.3. *Neka je $A = (A, a_0, X, \delta)$ povezan inicijalni automat koji raspoznaje jezik L skupom $T \subseteq A$. Tada je faktor-automat A/π_T izomorfan minimalnom automatu jezika L.*

Dokaz. Neka je $\varphi : A \to A_L$ preslikavanje definisano sa

$$a\varphi = T.a\ ,$$

za $a \in A$. Prema Teoremi 5.2.1, φ slika A na A_L. Sa druge strane, jasno je da je $\ker \varphi = \pi_T$, pa prema Teoremi o homomorfizmu (Teorema 1.3.2), automat A/π_T je izomorfan sa A_L, što je i trebalo dokazati. □

Iz prethodne teoreme se vidi da se jedan od načina minimizacije automata A koji raspoznaje jezik L skupom stanja T svodi na konstruisanje kongruencije π_T, što se može učiniti korišćenjem niza relacija koji se uvodi u narednoj teoremi.

Teorema 5.2.4. *Neka je T neprazan podskup automata A i $\{\pi_T^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je niz relacija na A definisanih sa*

$$(5.13)\quad \pi_T^{(0)} = \varepsilon_T \quad i \quad \pi_T^{(k+1)} = \left\{ (a,b) \in \pi_T^{(k)} \;\middle|\; (\forall x \in X)\, (ax, bx) \in \pi_T^{(k)} \right\}.$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\pi_T^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\varepsilon_T = \pi_T^{(0)} \supseteq \pi_T^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \pi_T^{(k)} \supseteq \pi_T^{(k+1)} \supseteq \dots \supseteq \pi_T .$$

(b) *Ako je* $\pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+1)}$*, za neki* $k \in \mathbb{N}^0$*, tada je* $\pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+m)} = \pi_T$*, za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$*.*

(c) *Ako je* A *konačan automat, tada postoji* $k \in \mathbb{N}^0$ *tako da je* $\pi_T^{(k)} = \pi_T$*.*

Dokaz. (a) Jasno da svi članovi niza $\{\pi_T^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ jesu relacije ekvivalencije, a neposredno iz definicije ovog niza sledi da je on opadajući lanac. Dakle, preostaje da se dokaže da $\pi_T \subseteq \pi_T^{(k)}$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$, što će biti dokazano indukcijom po k. Prema Teoremi 5.2.2 imamo da je $\pi_T \subseteq \varepsilon_T = \pi_T^{(0)}$. Dalje, pretpostavimo da je $\pi_T \subseteq \pi_T^{(k)}$ za neke $k \in \mathbb{N}^0$ i uzmimo da je $(a, b) \in \pi_T$. Ako $(a, b) \notin \pi_T^{(k+1)}$, to znači da postoji $x \in X$ tako da $(ax, bx) \notin \pi_T^{(k)} \subseteq \varepsilon_T$, a to prema (5.12) znači da $(a, b) \notin \pi_T$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom da je $(a, b) \in \pi_T$. Prema tome, zaključujemo da je $(a, b) \in \pi_T^{(k+1)}$, što znači da je $\pi_T \subseteq \pi_T^{(k+1)}$. Time je dokaz tvrđenja (a) završen.

(b) I ovo tvrđenje će biti dokazano indukcijom po m. Iz pretpostavke imamo da ono važi za $m = 1$. Pretpostavimo da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+m)}$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}\pi_T^{(k+m+1)} &= \left\{(a, b) \in \pi_T^{(k+m)} \;\middle|\; (\forall x \in X)\,(ax, bx) \in \pi_T^{(k+m)}\right\}\\ &= \left\{(a, b) \in \pi_T^{(k)} \;\middle|\; (\forall x \in X)\,(ax, bx) \in \pi_T^{(k)}\right\} = \pi_T^{(k+1)} = \pi_T^{(k)},\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

Prema (a), da bi smo dokazali da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T$, dovoljno je dokazati da je $\pi_T^{(k)} \subseteq \pi_T$. U tom cilju, uzmimo proizvoljan par $(a, b) \in \pi_T^{(k)}$ i indukcijom po dužini reči u dokažimo da je $(au, bu) \in \varepsilon_T$, za svaku reč $u \in X^*$. Ako je $|u| = 0$, tj. u je prazna reč, tada je $(au, bu) = (a, b) \in \pi_T^{(k)} \subseteq \varepsilon_T$, što smo i hteli dobiti. Dalje, pretpostavimo da je $(au, bu) \in \varepsilon_T$, za svaku reč u dužine $|u| \le n$, za neki $n \in \mathbb{N}^0$ i uzmimo proizvoljnu reč $v \in X^*$ dužine $|v| = n + 1$. Tada se v može zapisati u obliku $v = ux$, za neke $u \in X^*$, $|u| = n$, i $x \in X$, i prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je $(au, bu) \in \pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+1)}$. Međutim, odatle neposredno sledi da je $(av, bv) = (aux, bux) \in \pi_T^{(k)} \subseteq \varepsilon_T$, što je i trebalo dokazati.

Prema tome, zaključujemo da je $(au, bu) \in \varepsilon_T$, za svaku reč $u \in X^*$, što prema (5.12) znači da je $(a, b) \in \pi_T$. Time smo dokazali da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T$, čime je dokaz tvrđenja (b) završen.

(c) Ako je automat A konačan, tada postoji konačno mnogo relacija na A, pa bar dve relacije u opadajućem lancu iz (a) moraju biti jednake. tj.

postoje $k \in \mathbb{N}^0$ i $m \in \mathbb{N}$ tako da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+m)}$. No tada je jasno da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T^{(k+1)}$, pa prema (b) sledi da je $\pi_T^{(k)} = \pi_T$. $\square$

Sada možemo dati još jedan algoritam za konstrukciju minimalnog automata jezika. Našu pažnju usmerićemo na povezane inicijalne automate, jer ukoliko automat od koga krećemo nije takav, tada ga možemo svesti na povezan inicijalni automat prostim odbacivanjem svih stanja nedostižnih iz inicijalnog stanja. Uzmimo, dakle, da je A povezan inicijalni automat koji raspoznaje jezik L skupom stanja T.

Algoritam započinjemo formiranjem liste P svih parova stanja automata A. Ovu listu ćemo grafički predstavljati tablicom, pri čemu je, zbog refleksivnosti i simetričnosti relacija koje konstruišemo, dovoljno razmatrati parove koji leže ispod glavne dijagonale.

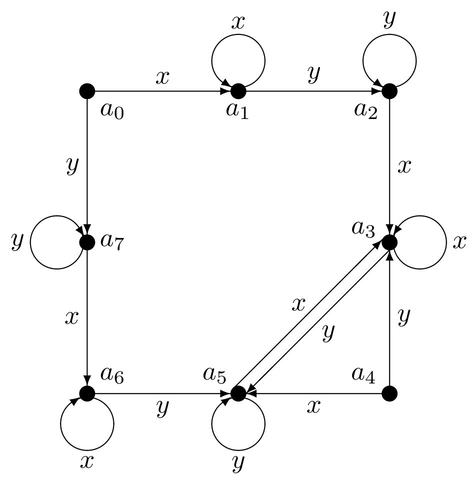
U prvom koraku algoritma konstruiše se relacija ε_T. Naime, sa liste P se brišu svi parovi iz skupa $T \times (A \setminus T) \cup (A \setminus T) \times T$, pri čemu ostaju parovi koji čine relaciju $\varepsilon_T = \pi_T^{(0)}$.

Neka smo posle $k+1$-vog koraka dobili relaciju $\pi_T^{(k)}$, gde je $k \geq 0$. Tada se u $k+2$-gom koraku gradi relacija $\pi_T^{(k+1)}$ tako što razmatramo parove (a, b) koji su na početku tog koraka bili na listi P, i ukoliko proverom ustanovimo da postoji slovo $x \in X$ takvo da par (ax, bx) na početku tog koraka nije bio na listi P, sa liste se brišu parovi (a, b) i (b, a).

Algoritam se završava prvim korakom u kome nije bilo nijednog brisanja sa liste. Parovi koji su ostali na listi čine traženu relaciju π_T.

Ovo ilustrujemo sledećim primerom:

Primer 5.2.2. Neka je automat A dat grafom



neka je a_0 njegovo početno stanje i neka A raspoznaje jezik L skupom stanja $T = \{a_2, a_3, a_6\}$. Kao što smo rekli, formiramo listu P svih parova stanja automata A, koju ovde predstavljamo tablicom parova, a kako su relacije koje generišemo refleksivne i simetrične, to posmatramo samo deo tablice ispod glavne dijagonale.

1. korak: Izbacujemo iz liste P sve parove iz vrsti i kolona koje odgovaraju stanjima koja su nedostižna iz početnog stanja, u ovom slučaju stanja a_4.

2. korak: Izbacujemo iz liste P sve parove iz $T \times (B \setminus T) \cup (B \setminus T) \times T$, gde je $B = A \setminus \{a_4\} = \{a_0, a_1, a_5, a_7\}$ $(T = \{a_2, a_3, a_6\})$.

3. korak: Proveravamo parove koji su ostali na listi:

$(a_1x, a_0x) = (a_1, a_1)$ – na listi je;
$(a_1y, a_0y) = (a_2, a_7)$ – nije na listi, pa se parovi (a_1, a_0) i (a_0, a_1) brišu;
$(a_3x, a_2x) = (a_3, a_3)$ – na listi je;
$(a_3y, a_2y) = (a_5, a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_3, a_2) i (a_2, a_3) brišu;
$(a_5x, a_0x) = (a_3, a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_5, a_0) i (a_0, a_5) brišu;
$(a_5x, a_1x) = (a_3, a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_5, a_1) i (a_1, a_5) brišu;
$(a_6x, a_2x) = (a_6, a_3)$ – na listi je;
$(a_6y, a_2y) = (a_5, a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_6, a_2) i (a_2, a_6) brišu;
$(a_6x, a_3x) = (a_6, a_3)$ – na listi je;
$(a_6y, a_3y) = (a_5, a_5)$ – na listi je;
$(a_7x, a_0x) = (a_6, a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_7, a_0) i (a_0, a_7) brišu;
$(a_7x, a_1x) = (a_6, a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_7, a_1) i (a_1, a_7) brišu;
$(a_7x, a_5x) = (a_6, a_3)$ – na listi je;
$(a_7y, a_5y) = (a_7, a_5)$ – na listi je.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0					X			
a_1					X			
a_2					X			
a_3					X			
a_4	X	X	X	X	X	X	X	X
a_5					X			
a_6					X			
a_7					X			

posle 1. koraka

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0			X	X	X		X	
a_1			X	X	X		X	
a_2	X	X			X	X		X
a_3	X	X			X	X		X
a_4	X	X	X	X	X	X	X	X
a_5			X	X	X		X	
a_6	X	X			X	X		X
a_7			X	X	X		X	

posle 2. koraka

relacija $\pi_T^{(0)} = \varepsilon_T$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0		X	X	X	X	X	X	X
a_1	X		X	X	X	X	X	X
a_2	X	X		X	X	X	X	X
a_3	X	X	X		X	X		X
a_4	X	X	X	X	X	X	X	X
a_5	X	X	X	X	X		X	
a_6	X	X	X		X	X		X
a_7	X	X	X	X	X		X	

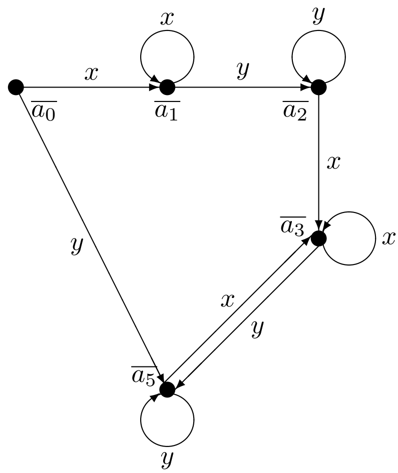
posle 3. i 4. koraka

relacije $\pi_T^{(1)} = \pi_T^{(2)} = \pi_T$

4. korak: U ovom koraku proveravaju se parovi (a_6, a_3) i (a_7, a_5) koji su jedini ostali na listi. Kao što smo napred videli, $(a_6x, a_3x) = (a_6, a_3)$, $(a_6y, a_3y) = (a_5, a_5)$, $(a_7x, a_5x) = (a_6, a_3)$ i $(a_7y, a_5y) = (a_7, a_5)$, pa kako su ovi parovi na listi, to se u ovom koraku ništa ne briše, što znači da je algoritam završen i da relacija π_T (na automatu B) koju smo tražili ima sledeće klase:

$$\{a_0\},\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3, a_6\},\ \{a_5, a_7\},$$

a traženi minimalni automat je predstavljen sledećim grafom:



Ovde $\overline{a}$ označava klasu stanja $a \in B$.

Literatura: Arbib [1969], Aufenkamp and Hohn [1957], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995].

5.3. Sintaksički monoid jezika

Slično raspoznavanju jezika automatom definiše se i raspoznavanje jezika monoidom. Naime, govorićemo da *monoid* S *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* $H \subseteq S$ ako postoji homomorfizam $\varphi : X^* \to S$ takav da je $L = H\varphi^{-1}$, tj.

(5.14) $$L = \{u \in X^* \mid u\varphi \in H\},$$

ili, ekvivalentno, ako za svaku reč $u \in X^*$ važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; u\varphi \in H.$$

U tom slučaju za jezik L kažemo da *može biti raspoznat monoidom* S. index-jezik!raspoznat monoidom Lako se može dokazati da monoid S raspoznaje L ako i samo ako postoji homomorfizam $\varphi : X^* \to S$ takav da je $L = L\varphi\varphi^{-1}$, i u tom slučaju ćemo govoriti da *monoid* S *raspoznaje* L *homomorfizmom* φ.

Potreban i dovoljan uslov koji treba da ispuni homomorfizam slobodnog monoida da bi se njime raspoznavao neki jezik dat je sledećom teoremom:

Teorema 5.3.1. *Monoid* S *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *homomorfizmom* φ : $X^* \to S$ *ako i samo ako jezgro* $\ker\varphi$ *homomorfizma* φ *zasićuje* L.

D o k a z . Neka monoid S raspoznaje L homomorfizmom φ. Stavimo da je $L\varphi = H$. Tada važi (5.14), pa za proizvoljan par $(u, v) \in \ker\varphi$, odnosno za $u, v \in X^*$ za koje je $u\varphi = v\varphi$, dobijamo niz ekvivalencija

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; u\varphi \in H \;\Leftrightarrow\; v\varphi \in H \;\Leftrightarrow\; v \in L,$$

odakle prema Lemi 1.2.3 sledi da $\ker\varphi$ zasićuje L.

Obratno, uzmimo da $\ker\varphi$ zasićuje L. Stavimo da je $\ker\varphi = \theta$. Tada je

$$\begin{aligned}(L\varphi)\varphi^{-1} &= \{u \in X^* \mid u\varphi \in L\varphi\} = \{u \in X^* \mid (\exists v \in L)\, u\varphi = v\varphi\} \\ &= \{u \in X^* \mid (\exists v \in L)\, (u, v) \in \ker\varphi\} \\ &= \{u \in X^* \mid (\exists v \in L)\, u \in v\theta\} = \textstyle\bigcup_{v\in L} v\theta = L,\end{aligned}$$

jer $\theta = \ker\varphi$ zasićuje L. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Posledica 5.3.1. *Svaki jezik $L \subseteq X^*$ može biti raspoznat nekim monoidom.*

D o k a z . Prema Teoremi 1.5.5, glavna kongruencija P_L na X^* određena sa L zasićuje L, pa na osnovu prethodne teoreme imamo da monoid $S = X^*/P_L$ raspoznaje L prirodnim homomorfizmom kongruencije P_L. $\square$

Podsetimo se da je glavna kongruencija P_L na slobodnom monoidu X^* određena jezikom $L \subseteq X^*$ definisana sa

$$(u, v) \in P_L \;\Leftrightarrow\; (\forall p, q \in X^*)\, (\, puq \in L \Leftrightarrow pvq \in L\,).$$

Nazovimo *kontekstom reči $u \in X^*$ u odnosu na jezik L* svaki par $(p, q) \in X^*$ za koji važi da je $puq \in L$. Sa $\mathrm{Cont}_L(u)$ označimo skup koji čine svi konteksti reči u u odnosu na jezik L. Ako je $(p, q) \in \mathrm{Cont}_L(u)$, govorićemo da se reč u *javlja u jeziku L u kontekstu (p, q)*. Koristeći ove pojmove i oznake, glavna kongruencija P_L može se definisati i sa

$$(u, v) \in P_L \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Cont}_L(u) = \mathrm{Cont}_L(v).$$

Drugim rečima, par (u, v) je u relaciji P_L ako i samo ako se reči u i v javljaju u jeziku L u istim kontekstima. U tom slučaju možemo reći da su reči u i v sintaksički ekvivalentne, pa se P_L naziva još i *sintaksičkom kongruencijom* jezika L. Odgovarajući faktor-monoid X^*/P_L naziva se *sintaksičkim monoidom* jezika L, i označava se sa $\mathrm{Syn}(L)$, a prirodni homomorfizam kongruencije P_L naziva se *sintaksičkim homomorfizmom*, i označava se sa φ_L.

Prema dokazu Posledice 5.3.1, sintaksički monoid $\mathrm{Syn}(L)$ jezika L raspoznaje L. Narednom teoremom uspostavićemo vezu između sintaksičkog monoida jezika i ostalih monoida koji raspoznaju taj jezik. Pre toga, uvešćemo sledeći pojam: ako su data dva monoida S i T, govorićemo da S *deli* T, i pisati $S \mid T$, ako je S homomorfna slika nekog podmonoida od T.

Teorema 5.3.2. *Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik. Monoid S raspoznaje L ako i samo ako* $\mathrm{Syn}(L)$ *deli S.*

Dokaz. Neka S raspoznaje L pomoću nekog homomorfizma $\varphi : X^* \to S$. Stavimo da je $H = L\varphi$ i $S' = X^*\varphi$. Prema Teoremi 5.3.1, $\ker\varphi$ zasićuje L, odakle prema Teoremi 1.5.5 dobijamo da je $\ker\varphi \subseteq P_L$. Sada na osnovu Teoreme korespodencije imamo da je $\mathrm{Syn}(L) = X^*/P_L$ homomorfna slika monoida $X^*/\ker\varphi \cong S'$. Kako je S' podmonoid od S, to je time dokazano da $\mathrm{Syn}(L)$ deli S.

Obratno, uzmimo da je $\mathrm{Syn}(L)$ homomorfna slika nekog podmonoida S' od S, tj. da postoji homomorfizam ψ iz S' na $\mathrm{Syn}(L)$. Primetimo da za proizvoljno slovo $x \in X$, skup $(a\varphi_L)\psi^{-1}$ je neprazan, zbog sirjektivnosti homomorfizma ψ. Označimo sa $x\varphi$ proizvoljan element iz tog skupa. Na ovaj način smo definisali preslikavanje $\varphi : X \to S'$, koje se, prema Teoremi 2.2.1, može proširiti do homomorfizma $\widehat{\varphi}$ iz X^* u S'.

Sa druge strane, prema definiciji preslikavanja φ imamo da je $x\varphi\psi = x\varphi_L$, odnosno $x\widehat{\varphi}\psi = x\varphi_L$, za svaki $x \in X$. Kako su $\widehat{\varphi}\psi$ i φ_L homomorfizmi iz X^* u $\mathrm{Syn}(L)$, to odavde i iz Teoreme 2.2.1 imamo da je $\widehat{\varphi}\psi = \varphi_L$.

Dalje, da bi smo dokazali da S raspoznaje L, dovoljno je dokazati da kongruencija $\ker\widehat{\varphi}$ zasićuje L. Zaista, za proizvoljne $u, v \in X^*$, iz $(u, v) \in \ker\widehat{\varphi}$ sledi da je $(u, v) \in \ker\varphi_L = P_L$, jer je $\widehat{\varphi}\psi = \varphi_L$, a odavde dalje sledi da važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; v \in L,$$

prema Teoremi 1.5.5 i Lemi 1.2.3. Dakle, opet prema Lemi 1.2.3 imamo da $\ker\widehat{\varphi}$ zasićuje L, što je i trebalo dokazati. $\square$

Primetimo da iz činjenice da monoid S deli monoid T sledi da za kardinalne brojeve tih monoida važi $|S| \leq |T|$, zbog čega dobijamo da iz prethodne teoreme neposredno sledi sledeća teorema:

Teorema 5.3.3. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, sintaksički monoid* $\mathrm{Syn}(L)$ *je monoid najmanje kardinalnosti koji raspoznaje L.*

Zanimljiva veza postoji i između sintaksičkog monoida i minimalnog automata jezika, koju opisuje sledeća teorema:

Teorema 5.3.4. *Sintaksički monoid* $\mathrm{Syn}(L)$ *jezika* $L \subseteq X^*$ *izomorfan je monoidu prelaza minimalnog automata* A_L *jezika* L.

Dokaz. Označimo minimalni automat jezika L kraće sa A, a glavnu desnu kongruenciju na X^* određenu sa L kraće sa σ. Kako je prema Teoremi 4.3.2, monoid prelaza T_A automata A izomorfan faktor-monoidu X^*/μ_A, to ostaje da se dokaže da je $\mu_A = P_L$. Zaista,

$$
\begin{aligned}
(u,v) \in \mu_A &\Leftrightarrow (\forall a \in A_\sigma)\ au = av && \text{(prema (4.2))}\\
&\Leftrightarrow (\forall p \in X^*)\ (p\sigma)u = (p\sigma)v && \text{(prema definiciji skupa } A_\sigma)\\
&\Leftrightarrow (\forall p \in X^*)\ (pu)\sigma = (pv)\sigma && \text{(prema (4.4))}\\
&\Leftrightarrow (\forall p \in X^*)\ (pu,pv) \in R_L && \text{(jer je } \sigma = R_L)\\
&\Leftrightarrow (\forall p \in X^*)(\forall q \in X^*)\,(\,(pu)q \in L \Leftrightarrow (pv)q \in L\,) && \text{(prema definiciji relacije } R_L)\\
&\Leftrightarrow (u,v) \in P_L && \text{(prema definiciji relacije } P_L),
\end{aligned}
$$

odakle je $\mu_A = P_L$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Kao što ćemo videti u Primeru 5.3.1 postoje monoidi koji ne mogu biti sintaksički monoidi niti jednog jezika. To nas navodi da postavimo pitanje pod kojim uslovima jedan monoid jeste sintaksički monoid nekog jezika. Jedan odgovor na to pitanje biće dat narednom teoremom. Pre toga, uvešćemo sledeći pojam: podskup H monoida S nazivaćemo *disjunktivnim podskupom* od S ako je glavna kongruencija P_H na S određena sa H jednaka identičkoj relaciji na S, tj. $P_H = \Delta_S$.

Teorema 5.3.5. *Monoid* S *je sintaksički monoid nekog jezika ako i samo ako sadrži disjunktivan podskup.*

Dokaz. Neka je $S = \mathrm{Syn}(L)$, za neki jezik $L \subseteq X^*$, i neka je $\varphi : X^* \to S$ sintaksički homomorfizam jezika L. Dokazaćemo da je $H = L\varphi$ disjunktivan podskup od S. Primetimo najpre da S raspoznaje L skupom H, pomoću homomorfizma φ, tj. da za svaki $w \in X^*$ važi

$$
w \in L \ \Leftrightarrow\ w\varphi \in H. \tag{5.15}
$$

Za proizvoljan par $(a,b) \in P_H$ imamo da je $a = u\varphi$ i $b = v\varphi$, za neke $u,v \in X^*$, i dalje, za proizvoljne $p,q \in X^*$ je

$$\begin{aligned} puq \in L &\Leftrightarrow (puq)\varphi \in H && \text{(prema (5.15))} \\ &\Leftrightarrow (p\varphi)a(q\varphi) \in H \\ &\Leftrightarrow (p\varphi)b(q\varphi) \in H && \text{(jer je } (a,b) \in P_H) \\ &\Leftrightarrow (pvq)\varphi \in H \\ &\Leftrightarrow pvq \in L && \text{(prema (5.15)).} \end{aligned}$$

Prema tome, $(u,v) \in P_L$, što znači da je $u\varphi = v\varphi$, odnosno $a = b$. Ovim smo dobili da je $P_H = \Delta_S$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, uzmimo da monoid S sadrži disjunktivan podskup H. Prema Posledici 2.2.1, postoji slobodan monoid X^* i sirjektivni homomorfizam φ iz X^* na S. Stavimo da je $L = H\varphi^{-1}$. Dokazaćemo da je S sintaksički monoid jezika L.

Uzmimo proizvoljne $u,v \in X^*$. Ako je $(u,v) \in \ker\varphi$, tj. $u\varphi = v\varphi$, tada za proizvoljne $p,q \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned} puq \in L &\Leftrightarrow (puq)\varphi \in H && \text{(jer je } L = H\varphi^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (p\varphi)(u\varphi)(q\varphi) \in H \\ &\Leftrightarrow (p\varphi)(v\varphi)(q\varphi) \in H && \text{(jer je } u\varphi = v\varphi) \\ &\Leftrightarrow (pvq)\varphi \in H \\ &\Leftrightarrow pvq \in L && \text{(jer je } L = H\varphi^{-1}), \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $(u,v) \in P_L$. Sa druge strane, neka je $(u,v) \in P_L$. Uzmimo da je $u\varphi = a$, $v\varphi = b$, za $a,b \in S$, i uzmimo proizvoljne $x,y \in S$. Kako je φ sirjektivni homomorfizam, to je $x = p\varphi$ i $y = q\varphi$, za neke $p,q \in X^*$, pa dalje imamo da je

$$\begin{aligned} xay \in H &\Leftrightarrow (puq)\varphi \in H \\ &\Leftrightarrow puq \in L && \text{(jer je } L = H\varphi^{-1}) \\ &\Leftrightarrow pvq \in L && \text{(jer je } (u,v) \in P_L) \\ &\Leftrightarrow (pvq)\varphi \in H && \text{(jer je } L = H\varphi^{-1}) \\ &\Leftrightarrow xby \in H. \end{aligned}$$

Prema tome, $(a,b) \in P_H = \Delta_S$, tj. $a = b$, pa je $u\varphi = v\varphi$, odnosno $(u,v) \in \ker\varphi$. Ovim smo dokazali da je $P_L = \ker\varphi$, što znači da je φ sintaksički homomorfizam a S je sintaksički monoid jezika L. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Sledećim primerom dokazaćemo da postoje monoidi koji ne mogu biti sintaksički monoidi niti jednog jezika.

Primer 5.3.1. Neka je T proizvoljna polugrupa desnih nula, tj. polugrupa u kojoj je množenje proizvoljnih elemenata $a, b \in T$ definisano sa $ab = b$, i neka je S jedinično proširenje polugrupe T pomoću elementa e. Uzmimo proizvoljan podskup H od S.

Ako je $|T| > 2$, tada postoje $a, b \in T$ takvi da je $a \neq b$ i važi

$$a, b \in T \cap H \qquad \text{ili} \qquad a, b \in T \cap (S \setminus H) = T \setminus H.$$

Ako su $a, b \in T \cap H$, tada za proizvoljne $x, y \in S$ imamo sledeći niz ekvivalencija

$$xay \in H \Leftrightarrow \; y = e \text{ ili } y \in H \;\; \Leftrightarrow \;\; xby \in H,$$

odakle sledi da je $(a, b) \in P_H$. Sa druge strane, ako $a, b \in T \setminus H$, tada za proizvoljne $x, y \in S$ dobijamo niz ekvivalencija

$$xay \in H \;\; \Leftrightarrow \;\; y \neq e \;\&\; y \in H \;\; \Leftrightarrow xby \in H,$$

pa je ponovo $(a, b) \in P_H$. Prema tome, u slučaju da je $|T| > 2$, $P_H \neq \Delta_S$, za svaki $H \subseteq S$, pa S nema disjunktivan podskup, što prema prethodnoj teoremi znači da S ne može biti sintaksički monoid niti jednog jezika.

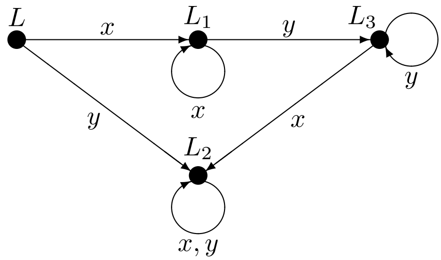
Ako je $|T| \leq 2$, tada je svaki jednoelementan podskup od T disjunktivan, i u tom slučaju za proizvoljan alfabet X sa više od jednog slova i proizvoljan neprazan podskup X' od X, S je sintaksički monoid jezika X^*. Odavde se vidi i da različiti jezici mogu imati isti sintaksički monoid.

Na kraju ovog poglavlja posvećenog sintaksičkim monoidima, govorićemo o jednom algoritmu za konstrukciju sintaksičkog monoida datog jezika. Taj algoritam zasnovan je na Teoremi 5.3.4, prema kojoj se sintaksički monoid jezika L može konstruisati kao monoid prelaza minimalnog automata $\mathcal{A}_L = (A_L, L, X, \delta_L)$ tog jezika, za koji prema Teoremi 4.3.1 znamo da je podmonoid monoida $\mathcal{T}_r(A_L)$ generisan skupom T_X. Postupak za nalaženje podmonoida monoida generisanog nekim skupom zasnovan je na Teoremi 1.5.3, koja je posebno korisna u konstruisanju monoida prelaza konačnih automata, koji su i sami konačni. Naime, ako je $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ konačan automat sa n stanja, tj. $|A| = n$, tada je poznato da je $|\mathcal{T}_r(A)| = n^n$, pa je monoid prelaza $T_{\mathcal{A}}$ automata $\mathcal{A}$ takođe konačan, pri čemu je $|T_{\mathcal{A}}| \leq n^n$.

Primer 5.3.2. Neka je $\mathcal{A}_L = (A_L, L, X, \delta_L)$ minimalni automat jezika

$$L = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},$$

konstruisan u Primeru 5.1.2. Podsetimo se da je automat $\mathcal{A}_L$ zadat grafom prelaza



Sintaksički monoid jezika L izomorfan je monoidu prelaza automata A_L, koji se nalazi kao podmonoid od $\mathcal{T}_r(A_L)$, gde je $A_L = \{L, L_1, L_2, L_3\}$ generisan preslikavanjima η_x i η_y. Pojednostavićemo pisanje stavljajući da je $A_L = \{0, 1, 2, 3\}$. U tom slučaju je

$$\eta_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \eta_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Krenimo od skupa $H = \{\eta_x, \eta_y\}$. Najpre imamo da je $Y_0 = H^0 = \{\eta_e\}$, gde je η_e identičko preslikavanje skupa A_L, tj.

$$\eta_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

i $Y_1 = Y_0 \cup H = \{\eta_e, \eta_x, \eta_y\}$. Dalje imamo da je

$$H^2 = \{\eta_x^2, \eta_x\eta_y, \eta_y\eta_x, \eta_y^2\}.$$

Neposredno se proverava da je $\eta_x^2 = \eta_x$, $\eta_y^2 = \eta_y$ i

$$\eta_x\eta_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \eta_{xy} \qquad \text{i} \qquad \eta_y\eta_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \eta_{yx}.$$

Prema tome,

$$H^2 = \{\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}, \eta_{yx}\} \quad \text{i} \quad Y_2 = Y_1 \cup H^2 = \{\eta_e, \eta_x, \eta_y, \eta_{xy}, \eta_{yx}\}.$$

Dalje imamo da je

$$H^3 = H^2 \cdot H = \{\eta_x, \eta_{xy}, \eta_x\eta_{xy}, \eta_x\eta_{yx}, \eta_{yx}, \eta_y, \eta_y\eta_{xy}, \eta_y\eta_{yx}\}.$$

Kako je

$$\eta_x\eta_{xy} = \eta_x^2\eta_y = \eta_x\eta_y = \eta_{xy}, \ \eta_y\eta_{yx} = \eta_y^2\eta_x = \eta_y\eta_x = \eta_{yx},$$

i takođe

$$\eta_x\eta_{yx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \eta_{yx},$$

$$\eta_y\eta_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \eta_{yx},$$

to je $H^3 = \{\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}, \eta_{yx}\}$, odakle dobijamo da je $Y^3 = Y^2$, što znači da je $T_A = Y_2$. Monoid T_A zadat je tablicom

$T(A)$	η_e	η_x	η_y	η_{xy}	η_{yx}
η_e	η_e	η_x	η_y	η_{xy}	η_{yx}
η_x	η_x	η_x	η_{xy}	η_{xy}	η_{yx}
η_y	η_y	η_{yx}	η_y	η_{yx}	η_{yx}
η_{xy}	η_y	η_{yx}	η_{xy}	η_{yx}	η_{yx}
η_{yx}	η_{yx}	η_{yx}	η_{yx}	η_{yx}	η_{yx}

Literatura: Arbib (ed.) [1968], Arbib [1969], Bogdanović and Ćirić [1993], Brzozowski and Simon [1973], Eilenberg [1973, 1976], Eilenberg and Schutzenberger [1976], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton [1974], Myhill [1957], Pin [1984, 1995, 1997], Pippenger [1997], Rabin and Scott [1959], Schein [1966], Schützenberger [1965] Simon [1975].

5.4. Raspoznavanje jezika konačnim automatima

Gledano sa aspekta praktične realizacije raspoznavanja jezika automatom, najznačajniji su jezici nad konačnim alfabetom koji mogu biti raspoznati konačnim automatom. Takve jezike nazivaćemo *raspoznatljivim jezicima*. Iako smo u ranijim poglavljima videli da se svaki jezik može raspoznati nekim automatom, u ovom poglavlju ćemo videti da ne može svaki jezik biti raspoznat konačnim automatom, odnosno da nije svaki jezik raspoznatljiv. Ovde ćemo takođe dati i neke potrebne i dovoljne uslove za jezik nad konačnim alfabetom da bude raspoznatljiv.

Pre no što damo teoremu koja daje prve karakterizacije raspoznatljivih jezika, uvodimo sledeći pojam: za relaciju ekvivalencije θ na skupu X, *indeksom relacije* θ, u oznaci $\operatorname{ind}\theta$, nazivaćemo kardinalni broj faktor-skupa X/θ. Ako je $\operatorname{ind}\theta$ konačan broj, tada ćemo govoriti da je θ *relacija konačnog indeksa*.

Teorema 5.4.1. *Neka je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *L je raspoznatljiv;*

(ii) *L je zasićen nekom desnom kongruencijom na X^* konačnog indeksa;*

(iii) *glavna desna kongruencija R_L na X^* je konačnog indeksa;*

(iv) *L može biti raspoznat konačnim monoidom;*

(v) *L je zasićen nekom kongruencijom na X^* konačnog indeksa;*

(vi) *sintaksička kongruencija P_L na X^* je konačnog indeksa.*

Dokaz. (i)⇒(iii). Ako jezik L može biti raspoznat nekim konačnim automatom, to prema Teoremi 5.1.2 znači da je i minimalni automat A_L konačan, odnosno da važi (iii).

(iii)⇒(ii). Ovo sledi neposredno.

(ii)⇒(i). Ako je jezik L zasićen nekom desnom kongruencijom σ na X^* konačnog indeksa, tada prema Teoremi 5.1.1 imamo da je A_σ konačni automat koji raspoznaje L.

(iv)⇒(vi). Ova implikacija se dokazuje slično kao implikacija (i)⇒(iii), korišćenjem Teoreme 5.3.3.

(vi)⇒(v). Ovo sledi neposredno.

(v)⇒(iv). Ovo se dokazuje slično kao (i)⇒(iii), korišćenjem Teoreme 5.3.1.

(iii)⇒(vi). Uslov (iii) u stvari znači da je minimalni automat jezika L konačan, a u tom slučaju i njegov monoid prelaza mora biti konačan, što prema Teoremi 5.3.4 povlači da je sintaksički monoid $\mathrm{Syn}(L)$ jezika L konačan, što je ekvivalentno sa (vi).

(vi)⇒(iii). Prema Teoremi 1.5.5, $P_L \subseteq R_L$, odakle je $\mathrm{ind}\, R_L \leq \mathrm{ind}\, P_L$, što dokazuje implikaciju (vi)⇒(iii). $\square$

Primer 5.4.1. Neka je $A = \{x, y\}$ i

$$L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

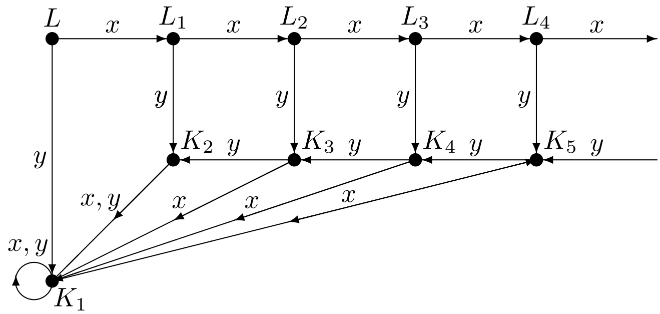
Dokazaćemo da L nije raspoznatljiv jezik.

Pretpostavićemo suprotno, da postoji konačan automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A$. Uvedimo oznaku $a_n = a_0 x^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Kako smo pretpostavili da je A konačan skup, to je $a_m = a_n$, za neke $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Međutim, onda dobijamo da je

$$a_0 x^m y^n = a_m y^n = a_n y^n = a_0 x^n y^n \in T,$$

a to znači da je $x^m y^n \in L$, što je u suprotnosti sa definicijom jezika L. Ovim smo dokazali da L nije raspoznatljiv jezik.

Drugi način da se ovo dokaže je da se konstruiše minimalni automat jezika L, koji je beskonačan. Naime, minimalni automat jezika L dat je grafom



gde je

$$
\begin{aligned}
L_m &= \{x^{n-m}y^n \,|\, n \geq m\}, \qquad m \in \mathbb{N}, \\
K_1 &= \varnothing\,, \\
K_m &= \{y^{m-2}\}, \qquad m \geq 2.
\end{aligned}
$$

Zaista, imamo da je

$$
\begin{aligned}
L.x &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L\} = \{x^{n-1}y^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = L_1, \\
L.y &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L\} = \varnothing = K_1,
\end{aligned}
$$

a za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ je

$$
\begin{aligned}
L_m.x &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L_m\} = \{x^{n-m-1}y^n \,|\, n \geq m+1\} = L_{m+1}, \\
L_m.y &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L_m\} = \{y^{m-1}\} = K_{m+1}, \\
K_m.x &= \{u \in X^* \,|\, xu \in K_m\} = \varnothing = K_1,
\end{aligned}
$$

dok je

$$
\begin{aligned}
K_1.y &= \varnothing = K_1, \\
K_2.y &= \{u \in X^* \,|\, yu \in K_2\} = \{u \in X^* \,|\, yu = e\} = \varnothing = K_1,
\end{aligned}
$$

a za $m \geq 3$ je

$$
\begin{aligned}
K_m.y &= \{u \in X^* \,|\, yu \in K_m\} = \{u \in X^* \,|\, yu = y^{m-2}\} \\
&= \{y^{m-3}\} = K_{m-1}.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.4.2. *Svaki jednoelementan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz. Neka je A konačan alfabet i $L = \{w\}$, za neki $w \in X^*$. Dokazaćemo da je L raspoznatljiv tako što ćemo konstruisati njegov minimalni automat.

Ako je $w = e$, tada za proizvoljan $x \in A$ je

$$L.x = \{u \in X^* \,|\, xu \in L\} = \{u \in X^* \,|\, xu = e\} = \varnothing.$$

Kako je $\varnothing.x = \varnothing$, za svaki $x \in A$, to je $A_L = \{L, \varnothing\}$, što znači da je minimalni automat A_L jezika L konačan.

Sa druge strane, uzmimo da je $w \in X^+$, odnosno $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je

$$L.u = \{v \in X^* \mid uv = w\},$$

odakle sledi da je $L.u \neq \varnothing$ ako i samo ako u jeste levi odsečak reči u, odnosno ako je $u = l_k(w)$, za neki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, u kom slučaju je

$$L.u = \{r_{n-k}(w)\}.$$

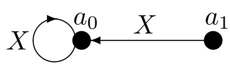
Ako uvedemo oznaku

$$L_k = L.l_k(w) = \{r_{n-k}(w)\},$$

za $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, i $L_{n+1} = \varnothing$, tada imamo da je $A_L = \{L_k \mid 0 \leq k \leq n+1\}$, što znači da je minimalni automat A_L jezika L konačan, pa je L raspoznatljiv jezik. $\square$

Teorema 5.4.3. *Prazan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz. Za proizvoljan alfabet X, automat dat grafom



sa inicijalnim stanjem a_0 raspoznaje prazan jezik stanjem a_1. $\square$

Teorema 5.4.4. *Unija dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz. Neka su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ raspoznatljivi jezici nad konačnim alfabetom A. Za $i \in \{1, 2\}$, neka automat $A_i = (A_i, a_0^i, X, \delta_i)$ raspoznaje L_i skupom $T_i \subseteq A_i$. Konstruišimo automat $A = (A, a_0, X, \delta)$ na sledeći način: neka je $A = A_1 \times A_2$, $a_0 = (a_0^1, a_0^2)$ i funkcija prelaza $\delta : A \times X \to A$ je definisana sa

$$\delta((a_1, a_2), x) = (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, x)). \tag{5.16}$$

Dokazaćemo da automat A raspoznaje $L_1 \cup L_2$ skupom $T = (T_1 \times A_2) \cup (A_1 \times T_2)$. Iz (5.16) se lako dobija da je

$$(a_1, a_2)u = (a_1 u, a_2 u),$$

za proizvoljne $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $u \in X^*$, odakle sledi da je

$$\begin{aligned} u \in L_1 \cup L_2 \ &\Leftrightarrow u \in L_1 \text{ ili } u \in L_2 \\ &\Leftrightarrow a_0^1 u \in T_1 \text{ ili } a_0^2 u \in T_2 \\ &\Leftrightarrow (a_0^1 u, a_0^2 u) \in (T_1 \times A_2) \cup (A_1 \times T_2) \\ &\Leftrightarrow a_0 u \in T. \end{aligned}$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Teorema 5.4.5. *Svaki konačan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz. Ovo sledi iz Teorema 5.4.2 i 5.4.4, jer se svaki konačan jezik može predstaviti u obliku konačne unije jednoelementnih jezika. □

Teorema 5.4.6. *Presek dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz. U oznakama iz Teoreme 5.4.4, automat $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik $L_1 \cap L_2$ skupom $T = T_1 \times T_2$. □

Teorema 5.4.7. *Komplement raspoznatljivog jezika je takođe raspoznatljiv jezik.*

Dokaz. Neka je L raspoznatljiv jezik nad konačnim alfabetom A. Ako konačan automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ raspoznaje L skupom $T \subseteq A$, tada isti automat raspoznaje komplement jezika L u X^* komplementom skupa T u A. □

Posledica 5.4.1. *Razlika dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz. Ovo tvrđenje sledi neposredno iz Teorema 5.4.6 i 5.4.7, jer za jezike L_1 i L_2 nad alfabetom X je $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap L_2^{\complement}$, gde $L_2^{\complement}$ označava komplement od L_2 u X^*. □

Teorema 5.4.8. (Lema o napumpavanju). *Neka je $L \subseteq X^*$ beskonačan raspoznatljiv jezik. Tada postoji broj $n \in \mathbb{N}$ takav da svaka reč $u \in L$ dužine $|u| \geq n$ može biti zapisana u obliku $u = v_1 w v_2$, pri čemu važi:*

(a) $v_1, v_2 \in X^*$ *i* $w \in X^+$;
(b) $|v_1 w| \leq n$;
(c) $v_1 w^m v_2 \in L$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ konačan automat koji raspoznaje jezik L skupom $T \subseteq A$. Neka je n broj stanja automata $\mathcal{A}$. Uzmimo proizvoljnu reč $u \in L$ dužine $|u| \geq n$, i predstavimo je u obliku

$$u = x_1 x_2 \cdots x_k,$$

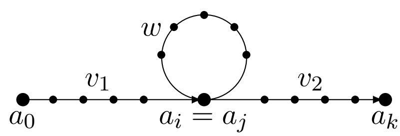
gde je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, i $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$. Za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je

$$a_i = a_0 x_1 \cdots x_i.$$

Kako je prema pretpostavci $k \geq n$, to se u nizu stanja

$$a_0, a_1, \ldots, a_k$$

bar jedno stanje ponavlja. Uzmimo da je a_i prvo stanje u datom nizu koje se ponavlja i neka je a_j prvo njegovo ponavljanje. Uočimo da je $i \geq 0$, $j - i > 0$ i $j \leq n$, jer su, zbog načina izbora stanja a_i i a_j, stanja $a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}$ međusobno različita. To je prikazano na sledećoj slici



Uzmimo sada da je

$$v_1 = \begin{cases} x_1 \cdots x_i & \text{ako je } i \geq 1 \\ e & \text{ako je } i = 0 \end{cases},$$

$$w = x_{i+1} \cdots x_j,$$

$$v_2 = \begin{cases} x_{j+1} \cdots x_k & \text{ako je } j \leq k - 1 \\ e & \text{ako je } j = k \end{cases}.$$

Jasno da važi (a) i (b). Takođe, kako imamo da je

$$a_i = a_0 v_1, \qquad a_i w = a_j = a_i \qquad \text{i} \qquad a_j v_2 = a_k = a_0 u \in T,$$

to za proizvoljan $m \in \mathbb{N}^0$ imamo da je

$$a_0 v_1 w^m v_2 = a_i w^m v_2 = a_i v_2 = a_j v_2 \in T,$$

što znači da je $v_1 w^m v_2 \in L$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Lema o napumpavanju se može uspešno koristiti za dokazivanje neraspoznatljivosti nekih jezika, kao što je prikazano na sledećem primeru.

Primer 5.4.2. Vratimo se na jezik $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ razmatran u Primeru 5.4.1. Koristeći Lemu o napumpavanju, prikazaćemo još jedan način na koji se može dokazati neraspoznatljivost jezika L.

Ukoliko bi on bio raspoznatljiv, onda bi prema Lemi o napumpavanju postojao broj $n \in \mathbb{N}$ za koji važe uslovi Leme o napumpavanju, pa bi reč $u = x^n y^n$ mogla biti zapisana u obliku $u = v_1 w v_2$, pri čemu su zadovoljeni uslovi Leme o napumpavanju. U tom slučaju bi iz $|v_1 w| \leq n$ sledilo da je $v_1 = x^i$, $w = x^j$ i $v_2 = x^k y^n$, pri čemu je $i + j + k \leq n$, $i, k \geq 0$ i $j \geq 1$, pa bi smo imali da je

$$x^n y^n = u = v_1 w^0 v_2 = x^i x^k y^n = x^{i+k} y^n,$$

pri čemu je $i + k < n$, što nije moguće. Prema tome, jezik L ne može biti raspoznatljiv.

Literatura: Arbib [1969], Burris and Sankappanavar [1981], Gécseg and Peák [1972], Glushkov [1961a], Howie [1991], Kleene [1956], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Myhill [1957], Nerode [1958], Pippenger [1997], Rabin and Scott [1959].

5.5. Nedeterministički automati

Nedeterminističkim automatom nazivamo uređenu trojku $A = (A, X, \delta)$ koju čine neprazan *skup stanja* A, neprazan *ulazni alfabet* X i *funkcija prelaza*

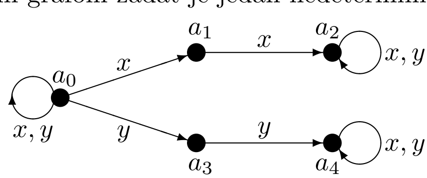
$$\delta : A \times X \to \mathcal{P}(A),$$

gde je sa $\mathcal{P}(A)$ označen partitivni skup skupa A, tj. skup svih podskupova skupa A.

Razlika između običnih automata, koje ćemo nazivati i *determinističkim automatima*, i onih nedeterminističkih je u tome što se kod determinističkih automata proizvoljnom paru $(a, x) \in A \times X$ pridružuje jedno *određeno* stanje, dok se kod nedeterminističkog automata tom paru pridružuje skup stanja $\delta(a, x)$, koji može biti i prazan, pri čemu se može reći da je $\delta(a, x)$ skup stanja "u koje je moguće preći" iz stanja a pod uticajem ulaznog simbola x.

Sa druge strane, deterministički automat se može tretirati kao specijalan slučaj nedeterminističkog automata kod koga su svi podskupovi $\delta(a, x)$ jednoelementni.

Primer 5.5.1. Sledećim grafom zadat je jedan nedeterministički automat:



Na primer, $\delta(a_0, x) = \{a_0, a_1\}$ a $\delta(a_1, y) = \varnothing$.

Neka je dat nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$. Za $P \subseteq A$ i $x \in X$ sa $\delta(P, x)$ označavaćemo podskup od A definisan sa

$$\delta(P, x) = \bigcup_{a \in P} \delta(a, x). \tag{5.17}$$

Jasno da je sa (5.17) dato preslikavanje koje slika $\mathcal{P}(A) \times X$ u $\mathcal{P}(A)$, i ako elemente iz A poistovetimo sa odgovarajućim jednoelementnim podskupovima iz $\mathcal{P}(A)$, tada možemo reći da je sa (5.17) preslikavanje δ prošireno sa $A \times X$ na $\mathcal{P}(A) \times X$, s obzirom da prema (5.17) imamo da je $\delta(\{a\}, x) = \delta(a, x)$, za sve $a \in A$, $x \in X$. Ovim smo pokazali da se nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ može na prirodan način prevesti u deterministički automat $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(A), X, \delta)$. Kao što smo to činili i ranije, koristićemo istu oznaku δ za funkcije prelaza oba ova automata, jer nema opasnosti od zabune zbog toga što se na skupu $A \times X$ ova preslikavanja poklapaju. Automat $\mathcal{A}'$ nazivaćemo *prirodnim proširenjem nedeterminističkog automata* $\mathcal{A}$.

Koristeći napred prikazani prelazak sa nedeterminističkog automata $\mathcal{A}$ na odgovarajući deterministički automat $\mathcal{A}'$, razne pojmove i oznake koji se tiču automata $\mathcal{A}'$ možemo na prirodan način prevesti u pojmove i oznake koji se tiču nedeterminističkog automata $\mathcal{A}$. Na primer, za $H \subseteq A$ i $u \in X^*$, sa Hu ćemo, kao i obično, označavati stanje automata $\mathcal{A}'$ u koje se prelazi iz stanja H pod uticajem ulazne reči u, a tu oznaku ćemo koristiti i u radu sa automatom $\mathcal{A}$, gde Hu predstavlja skup svih stanja tog automata "u koje je moguće preći" iz nekog stanja iz skupa H pod uticajem ulazne reči u.

Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ kažemo da je *konačan nedeterministički automat* ako su njegovi skupovi stanja i ulaza konačni. *Inicijalnim nedeterminističkim automatom* nazivamo uređenu četvorku $\mathcal{A} = (A, I, X, \delta)$, gde je (A, X, δ) nedeterministički automat i $I \subseteq A$, pri čemu ćemo I nazivati *inicijalnim stanjem* automata $\mathcal{A}$. Prirodno proširenje ovakvog automata je inicijalni deterministički automat $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(A), I, X, \delta)$, gde je $(\mathcal{P}(A), X, \delta)$ prirodno proširenje nedeterminističkog automata (A, X, δ).

Za inicijalni nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, I, X, \delta)$ kažemo da *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* $T \subseteq A$ ako je

$$L = \{u \in X^* \mid Iu \cap T \neq \varnothing\},$$

odnosno, ako za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; Iu \cap T \neq \varnothing.$$

U tom slučaju kažemo da L *može biti raspoznat nedeterminističkim automatom* A.

Sledećom teoremom ćemo pokazati da jezik može biti raspoznat nedeterminističkim automatom ako i samo ako može biti raspoznat determinističkim automatom.

Teorema 5.5.1. *Nedeterministički automat* $A = (A, I, X, \delta)$ *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* $T \subseteq A$ *ako i samo ako njegovo prirodno proširenje raspoznaje* L *skupom* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *koji čine svi podskupovi od* A *koji imaju neprazan presek sa* T*.*

D o k a z . To sledi neposredno iz činjenice da za proizvoljnu reč $u \in X^*$ važi

$$Iu \cap T \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; Iu \in \mathcal{T},$$

prema definiciji skupa $\mathcal{T}$. $\square$

Iz prethodne teoreme dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 5.5.2. *Jezik* L *nad konačnim alfabetom* X *je raspoznatljiv ako i samo ako može biti raspoznat konačnim nedeterminističkim automatom.*

D o k a z . Direktni deo teoreme je posledica činjenice da je konačan deterministički automat specijalan slučaj konačnog nedeterminističkog automata.

Obrat sledi iz Teoreme 5.5.1 i činjenice da prirodno proširenje konačnog nedeterminističkog automata jeste konačan deterministički automat. $\square$

Kao što ćemo videti u daljem tekstu, u raznim prilikama gde dokazujemo raspoznatljivost određenih jezika, to može biti učinjeno jednostavnije nalaženjem konačnih nedeterminističkih automata koji ih raspoznaju.

Literatura: Arbib [1969], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Pippenger [1997], Rabin and Scott [1959].

5.6. Proizvod jezika

Osim operacija unije, preseka i komplementiranja jezika, koje zajedno nazivamo *Booleovim operacijama* na jezicima i za koje smo u Odeljku 5.4. dokazali da očuvavaju raspoznatljivost jezika, važnu ulogu u izučavanju jezika igraju i operacija množenja jezika i zvezda operacija na jeziku, o kojima će biti reči u ovoj i narednoj tački.

Neka je dat slobodan monoid X^* nad konačnim alfabetom X. Za jezike $L_1, L_2 \subseteq X^*$, *proizvod jezika* L_1 i L_2, u oznaci L_1L_2 definišemo kao proizvod podskupova polugrupe X^*, tj.

$$\begin{aligned} L_1L_2 &= \{u_1u_2 \mid u_1 \in L_1,\ u_2 \in L_2\} \\ &= \{u \in X^* \mid (\exists u_1 \in L_1)(\exists u_2 \in L_2)\, u = u_1u_2\}. \end{aligned}$$

Drugim rečima, radi se o množenju u partitivnoj polugrupi $\mathcal{P}(X^*)$ polugrupe X^*. Podsetimo se da je o partitivnim polugrupama bilo reči u Glavi 1.

Sledećom teoremom dokazaćemo da i operacija množenja jezika očuvava raspoznatljivost jezika.

Teorema 5.6.1. *Proizvod dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz. Neka su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ raspoznatljivi jezici nad konačnim alfabetom X i neka je $L = L_1L_2$. Razlikovaćemo slučajeve kada je $e \in L$ i kada $e \notin L$.

Slučaj $e \notin L$: Za $i \in \{1,2\}$ neka je $\mathcal{A}_i = (A_i, a_0^i, X, \delta_i)$ konačan inicijalni automat koji raspoznaje L_i skupom $T_i \subseteq A_i$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Stavimo da je $A = A_1 \cup A_2$ i definišimo konačan nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, I, X, \delta)$ na sledeći način: $I = \{a_0^1\}$ i funkcija prelaza $\delta : A \times X \to \mathcal{P}(A)$ je definisana sa

$$\delta(a,x) = \begin{cases} \{\delta_1(a,x)\} & \text{ako je } a \in A_1 \text{ i } \delta_1(a,x) \notin T_1 \\ \{\delta_1(a,x), a_0^2\} & \text{ako je } a \in A_1 \text{ i } \delta_1(a,x) \in T_1 \\ \{\delta_2(a,x)\} & \text{ako je } a \in A_2. \end{cases} \tag{5.18}$$

Dokazaćemo da $\mathcal{A}$ raspoznaje L skupom T_2, tj. da za proizvoljan $u \in X^+$ važi

$$u \in L \iff Iu \cap T_2 \neq \varnothing.$$

Uzmimo najpre da je $u \in L$, tj. da je $u = u_1u_2$, za $u_1 \in L_1$ i $u_2 \in L_2$. Uzmimo takođe da je

$$u_1 = x_1x_2\cdots x_n, \quad u_2 = y_1y_2\cdots y_m,$$

gde su $m, n \in \mathbb{N}^0$, pri čemu je $m + n > 0$, i $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m \in X$. Sada imamo da je

$$\delta(I,u) = P_1P_2\cdots P_nR_1R_2\cdots R_m,$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \delta(I, x_1),\ P_2 = \delta(P_1, x_2), \ldots, P_n = \delta(P_{n-1}, x_n), \\
&R_1 = \delta(P_n, y_1),\ R_2 = \delta(R_1, y_2), \ldots, R_m = \delta(R_{m-1}, y_m).
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

Najpre ćemo indukcijom dokazati da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi

$$a_0^1 x_1 \cdots x_i \in P_i. \tag{5.20}$$

Zaista, najpre imamo da je

$$a_0^1 x_1 = \delta_1(a_0^1, x_1) \in \delta(a_0^1, x_1) = \delta(I, x_1) = P_1,$$

prema (5.18), čime je (5.20) dokazano za $i = 1$. Uzmimo dalje da (5.20) važi za neki i, $1 \leq i < n$, i dokažimo da važi i za $i+1$. Zaista, prema pretpostavci imamo da je $a_0^1 x_1 \cdots x_i \in P_i$, odakle prema (5.18) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
a_0^1 x_1 \cdots x_i x_{i+1} = \delta_1(a_0^1 x_1 \cdots x_i, x_{i+1}) &\in \delta(a_0^1 x_1 \cdots x_i, x_{i+1}) \\
&\subseteq \delta(P_i, x_{i+1}) = P_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Ovim smo dokazali da (5.20) važi za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Uočimo dalje da iz $u_1 \in L_1$ sledi da je

$$\delta_1(a_0^1 x_1 \cdots x_{n-1}, x_n) = a_0^1 u_1 \in T_1,$$

odakle prema (5.18) i (5.20) dobijamo da je $a_0^2 \in P_n$, pa slično kao (5.18) dokazujemo i

$$a_0^2 y_1 \cdots y_j \in R_j, \tag{5.21}$$

za svaki $j \in \{1, \ldots, m\}$. Iz (5.21) neposredno dobijamo da je $a_0^2 u_2 \in R_m$, pa kako prema (5.19) imamo da je $R_m = Iu$, a iz $u_2 \in L_2$ imamo da je $a_0^2 u_2 \in T_2$, to dobijamo da je $a_0^2 u_2 \in T_2 \cap Iu$. Ovim smo dokazali da iz $u \in L$ sledi $Iu \cap T_2 \neq \varnothing$.

Obratno, uzmimo $u \in X^+$ za koje je $Iu \cap T_2 \neq \varnothing$. Neka je

$$u = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Tada je

$$\delta(I, u) = P_1 P_2 \cdots P_n,$$

pri čemu je

$$P_1 = \delta(I, x_1),\ P_2 = \delta(P_1, x_2), \ldots, P_n = \delta(P_{n-1}, x_n).$$

Neka je $m = \min\{i \,|\, 1 \leq i \leq n \;\&\; P_i \cap A_2 \neq \varnothing\}$. Iz pretpostavke da je $Iu \cap T_2 \neq \varnothing$, odnosno da je $P_n \cap T_2 \neq \varnothing$ imamo da je $P_n \cap A_2 \neq \varnothing$, što znači da je gornji skup neprazan, pa zaista ima najmanji element. Prema definiciji broja m imamo da za svaki i, $1 \leq i < m$ je $P_i \cap A_2 = \varnothing$, što prema (5.18) znači da je

$$P_i = \{a_0 x_1 \cdots x_i\}, \quad \text{za svaki } i,\ 1 \leq i < m.$$

Sa druge strane, iz $P_m \cap A_2 \neq \varnothing$, prema (5.18), dobijamo da je

$$a_0^1 x_1 \cdots x_{m-1} x_m = \delta_1(a_0^1 x_1 \cdots x_{m-1}, x_m) \in T_1, \tag{5.22}$$

i da je

$$P_m = \{a_0^1 x_1 \cdots x_m, a_0^2\}. \tag{5.23}$$

Takođe, iz (5.22) i (5.23) sledi

$$P_m \cap T_1 \neq \varnothing. \tag{5.24}$$

Neka su $m_1, m_2, \ldots, m_k$ svi brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ za koje važi da je $P_{m_i} \cap T_1 \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq k$, pri čemu je $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Postojanje bar jednog takvog broja sledi iz (5.24). Indukcijom ćemo dokazati da za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ važi

$$P_{m_i} = \{a_0^1 x_1 \cdots x_{m_i}, a_0^2 x_{m_1+1} \cdots x_{m_i}, \ldots, a_0^2 x_{m_{i-1}+1} \cdots x_{m_i}, a_0^2\}, \tag{5.25}$$

i

$$x_1 \cdots x_{m_i} \in L_1. \tag{5.26}$$

Kako je jasno da je $m_1 = m$, to iz (5.22) i (5.23) sledi da relacije (5.25) i (5.26) važe za $i = 1$.

Pretpostavimo da relacije (5.25) i (5.26) važe za svaki j, $1 \leq j \leq i < k$, i dokažimo da važe i za $i+1$. Za proizvoljan l, $m_i < l < m_{i+1}$, je $P_l \cap T_1 = \varnothing$, što prema indukcijskoj hipotezi i (5.18) daje

$$P_l = \{a_0^1 x_1 \cdots x_l, a_0^2 x_{m_1+1} \cdots x_l, \ldots, a_0^2 x_{m_i+1} \cdots x_l\}.$$

Odavde i iz $P_{m_{i+1}} \cap T_1 \neq \varnothing$, prema (5.18), dobijamo da je

$$a_0^1 x_1 \cdots x_{m_{i+1}} = \delta_1(a_0^1 x_1 \cdots x_{m_{i+1}-1}, x_{m_{i+1}}) \in T_1 \tag{5.27}$$

i da je

$$\begin{aligned} P_{m_{i+1}} = \{a_0^1 x_1 \cdots x_{m_{i+1}}, a_0^2 x_{m_1+1} \cdots x_{m_{i+1}}, \ldots \\ \ldots, a_0^2 x_{m_i+1} \cdots x_{m_{i+1}}, a_0^2\}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

pri čemu je (5.27) ekvivalentno sa

$$x_1x_2\cdots x_{m_{i+1}} \in L_1. \tag{5.29}$$

Dakle, iz (5.28) i (5.29) sledi da relacije (5.25) i (5.26) važe za svaki $i \in \{1,\dots,k\}$.

Dalje, za svaki l, $m_k < l \leq n$ (ako takav l postoji) imamo da je $P_l \cap T_1 = \varnothing$, što prema (5.18) znači da je

$$P_l = \{a_0^1x_1\cdots x_l, a_0^2x_{m_1+1}\cdots x_l,\dots,a_0^2x_{m_k+1}\cdots x_l\},$$

što za $l = n$ daje

$$P_n = \{a_0^1x_1\cdots x_n, a_0^2x_{m_1+1}\cdots x_n,\dots,a_0^2x_{m_k+1}\cdots x_n\}.$$

Iz pretpostavke $P_n \cap T_2 = Iu \cap T_2 \neq \varnothing$ sada dobijamo da je

$$a_0^2x_{m_i+1}\cdots x_n \in T_2,$$

za neki i, $1 \leq i \leq k$, odnosno da je

$$x_{m_i+1}\cdots x_n \in L_2. \tag{5.30}$$

Prema tome, iz (5.30) i (5.26) dobijamo da je

$$u = x_1\cdots x_n = (x_1\cdots x_{m_i})(x_{m_i+1}\cdots x_n) \in L_1L_2 = L,$$

što je i trebalo dokazati. Ovim je upotpunjen dokaz za slučaj $e \notin L$.

Slučaj $e \in L$. Ovaj slučaj je moguć samo ako je $e \in L_1$ i $e \in L_2$. Uvedimo oznake

$$L' = L \setminus \{e\}, \quad L_1' = L_1 \setminus \{e\} \quad \text{i} \quad L_2' = L_2 \setminus \{e\}.$$

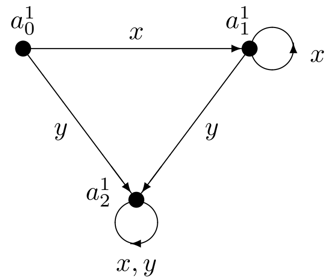
Lako se proverava da je $L' = L_1'L_2' \cup L_1' \cup L_2'$, odakle sledi da je

$$L = L_1'L_2' \cup L_1' \cup L_2' \cup \{e\}. \tag{5.31}$$

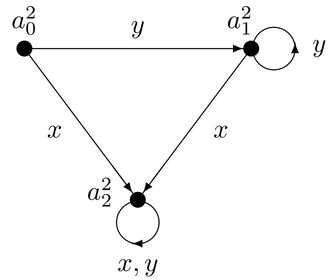
Prema Posledici 5.4.1, L_1' i L_2' su raspoznatljivi jezici, pri čemu $e \notin L_1'L_2'$, pa kao što je napred dokazano, $L_1'L_2'$ je raspoznatljiv jezik. Odavde i iz Teorema 5.4.4 i 5.4.5, s obzirom na (5.31), sledi da je L raspoznatljiv jezik. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Primer 5.6.1. Podsetimo se da smo raspoznatljivost jezika $L = \{x^n y^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ dokazali u Primeru 5.1.2. Ovde ćemo njegovu raspoznatljivost dokazati korišćenjem prethodne teoreme i raspoznatljivosti jezika $L_1 = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $L_2 = \{y^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Lako se proverava da su jezici L_1 i L_2 raspoznatljivi i da su njihovi minimalni automati dati grafovima



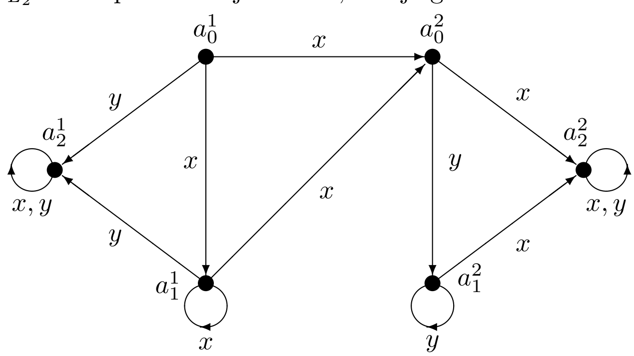
automat A_{L_1}



automat A_{L_2}

Jasno, za $i \in \{1, 2\}$, A_{L_i} je inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0^i i raspoznaje jezik L_i skupom $T_i = \{a_1^i\}$.

Nedeterministički automat koji raspoznaje jezik $L = L_1 L_2$, konstruisan iz automata A_{L_1} i A_{L_2} kao u prethodnoj teoremi, dat je grafom



Naime, ako kao u prethodnoj teoremi uzmemo da je $I = \{a_0^1\}$, tada ovaj automat raspoznaje L skupom $T_2 = \{a_1^2\}$.

Literatura: Arbib [1969], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Kleene [1956], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995].

5.7. Generisanje podpolugrupe i podmonoida jezikom

Podsetimo se da smo u Glavi 1 govorili o podpolugrupi polugrupe generisanoj datim podskupom te polugrupe, odnosno o podmonoidu monoida generisanim datim podskupom. Tom prilikom smo uveli i odgovarajuće oznake. U radu sa slobodnim polugrupama i monoidima koriste se i drugačije oznake, koje ćemo i mi ovde koristiti.

Neka je dat jezik $L \subseteq X^*$. Podpolugrupu slobodne polugrupe X^+, odnosno slobodnog monoida X^*, generisanu sa L označavaćemo sa $L^{(+)}$, a podmonoid od X^* generisan sa L ćemo označavati sa $L^{(*)}$. Razlog zbog čega znakove $+$ i $*$ stavljamo u zagrade je da bi smo napravili razliku između podpolugrupe $L^{(+)}$, odnosno podmonoida $L^{(*)}$, od X^* i slobodne polugrupe L^+, odnosno slobodnog monoida L^*, nad L kao alfabetom. U nekim slučajevima se ti pojmovi ne razlikuju, pa tada izostavljamo zagrade. Na primer, za svako slovo $x \in X$, monogena podpolugrupa $x^{(+)}$ od X^+ izomorfna je slobodnoj polugrupi x^+, pa u tom slučaju ne moramo pisati zagrade.

Preslikavanja $L \mapsto L^{(+)}$ i $L \mapsto L^{(*)}$ su unarne operacije na jezicima. Prvu od njih ćemo nazivati *plus operacijom*, a drugu *zvezda operacijom* (u literaturi se takođe sreću i nazivi *zvezda operacija Kleenea* kao i *iteracija*). Podsetimo se da prema Teoremama 1.5.1 i 1.5.2 važi

$$L^{(+)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \qquad \text{i} \qquad L^{(*)} = L^{(+)} \cup \{e\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} L^n,$$

pri čemu je $L^0 = \{e\}$.

Sledećom teoremom dokazujemo da gornje operacije takođe očuvavaju raspoznatljivost jezika.

Teorema 5.7.1. *Za proizvoljan raspoznatljiv jezik L nad konačnim alfabetom X, $L^{(+)}$ i $L^{(*)}$ su raspoznatljivi jezici.*

Dokaz. Neka je L raspoznatljiv jezik nad konačnim alfabetom X i neka je $A = (A, a_0, X, \delta)$ konačan inicijalni automat koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A$. Definišimo nedeterministički automat $\widehat{A} = (A, I, X, \widehat{\delta})$ sa: $I = \{a_0\}$ i funkcija prelaza $\widehat{\delta} : A \times X \to \mathcal{P}(A)$ je definisana sa

$$\widehat{\delta}(a,x) = \begin{cases} \{\delta(a,x)\} & \text{ako } \delta(a,x) \notin T \\ \{\delta(a,x), a_0\} & \text{ako } \delta(a,x) \in T. \end{cases} \tag{5.32}$$

Dokazaćemo da automat $\widehat{A}$ raspoznaje jezik $L^{(+)}$ skupom T, tj. da za svaki $u \in X^*$ važi

$$u \in L^{(+)} \iff Iu \cap T \neq \varnothing.$$

Neka je $u = e$. Ako je $Iu \cap T \neq \varnothing$, tj. $I \cap T \neq \varnothing$, tada je $a_0 \in T$, što znači da je $e \in L$, pa je $u = e \in L \subseteq L^{(+)}$. Obratno, ako je $u = e \in L^{(+)}$, to se može desiti samo ako je $e \in L$, što je ekvivalentno sa $a_0 \in T$, pa u ovom slučaju dobijamo da je $Iu \cap T = I \cap T = \{a_0\} \neq \varnothing$, što je i trebalo dokazati.

Uzmimo dalje da je $u \neq e$. Tada je

$$u = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, pa je dalje

$$\widehat{\delta}(I, u) = P_1 P_2 \cdots P_n,$$

pri čemu je

$$P_1 = \widehat{\delta}(I, x_1),\ P_2 = \widehat{\delta}(P_1, x_2), \ldots,\ P_n = \widehat{\delta}(P_{n-1}, x_n).$$

Neka je $Iu \cap T \neq \varnothing$. Neka su $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $1 \leq k \leq n$, svi brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ za koje je $P_{m_i} \cap T \neq \varnothing$, za $1 \leq i \leq k$, pri čemu je $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Sigurno je da postoji bar jedan broj sa takvom osobinom, jer je po pretpostavci $P_n \cap T = Iu \cap T \neq \varnothing$, a takođe je jasno da je $m_k = n$. Indukcijom ćemo dokazati da za svaki i, $1 \leq i \leq k$, važi

$$P_{m_i} = \{a_0 x_1 \cdots x_{m_i}, a_0 x_{m_1+1} \cdots x_{m_i}, \ldots, a_0 x_{m_{i-1}+1} \cdots x_{m_i}, a_0\} \tag{5.33}$$

i

$$x_1 \cdots x_{m_i} \in L \cup L^2 \cup \cdots L^i. \tag{5.34}$$

Zaista, kako je $P_l \cap T = \varnothing$, za $1 \leq l < m_1$, to prema (5.32) imamo da je $P_l = \{a_0 x_1 \cdots x_l\}$, dok iz $P_{m_1} \cap T \neq \varnothing$ dobijamo da je

$$a_0 x_1 \cdots x_{m_1} = \delta(a_0 x_1 \cdots x_{m_1 - 1}, x_{m_1}) \in T,$$

što znači da je

$$P_{m_1} = \{a_0 x_1 \cdots x_{m_1}, a_0\} \qquad \text{i} \qquad x_1 \cdots x_{m_1} \in L,$$

čime smo (5.33) i (5.34) dokazali za $i = 1$.

Uzmimo da relacije (5.33) i (5.34) važe za svaki j takav da je $1 \leq j \leq i < k$, i dokažimo da važe i za $i + 1$. S obzirom da je $P_l \cap T = \varnothing$, za $m_i < l < m_{i+1}$, to prema indukcijskoj pretpostavci i (5.32) imamo da je

$$P_l = \{a_0 x_1 \cdots x_l, a_0 x_{m_1+1} \cdots x_l, \ldots, a_0 x_{m_{i-1}+1} \cdots x_l, a_0 x_{m_i} \cdots x_l\},$$

za $m_i < l < m_{i+1}$, dok iz $P_{m_{i+1}} \cap T \neq \varnothing$ sledi da je ili

$$a_0 x_1 \cdots x_{m_{i+1}} = \delta(a_0 x_1 \cdots x_{m_{i+1}-1}, x_{m_{i+1}}) \in T, \tag{5.35}$$

ili je

$$a_0x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}} = \delta(a_0x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}-1}, x_{m_{i+1}}) \in T, \tag{5.36}$$

za neki j, $1 \le j \le i$, pri čemu u oba slučaja važi

$$P_{m_{i+1}} = \{a_0x_1\cdots x_{m_{i+1}}, a_0x_{m_1+1}\cdots x_{m_{i+1}}, \dots \\ \dots, a_0x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}}, a_0\}.$$

Sa druge strane, (5.35) povlači

$$x_1\cdots x_{m_{i+1}} \in L, \tag{5.37}$$

dok iz (5.36) sledi da je

$$x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}} \in L. \tag{5.38}$$

Kako prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je

$$x_1\cdots x_{m_j} \in L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^j,$$

što zajedno sa (5.38) daje

$$x_1\cdots x_{m_{i+1}} \in (L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^j)\cdot L \subseteq L^2 \cup L^3 \cup \cdots \cup L^{j+1}, \tag{5.39}$$

to iz činjenice da važi jedna od relacija (5.37) ili (5.39) dobijamo da je

$$x_1\cdots x_{m_{i+1}} \in L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^{j+1} \subseteq L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^{i+1},$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, dokazali smo da relacije (5.33) i (5.34) važe za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$, odakle, zbog činjenice da je $m_k = n$, sledi da je

$$u = x_1x_2\cdots x_{m_k} \in L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^k \subseteq L^{(+)},$$

što je i trebalo dokazati.

Obratno, uzmimo da je

$$u \in L^{(+)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k.$$

Tada se u može predstaviti u obliku

$$u = u_1u_2\cdots u_k,$$

za neki $k \in \mathbb{N}$ i neke $u_i \in L$, $1 \le i \le k$. Jasno da je $k \le n$ i

$$u_1 = x_1\cdots x_{m_1},\ u_2 = x_{m_1+1}\cdots x_{m_2}, \cdots,\ u_k = x_{m_k+1}\cdots x_{m_k},$$

za neke $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ takve da je $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k = n$. Indukcijom ćemo dokazati da za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$ važi

$$a_0 \in P_{m_i} \qquad \text{i} \qquad P_{m_i} \cap T \neq \varnothing. \tag{5.40}$$

Zaista, za proizvoljan l, $1 \leq l < m_1$, imamo da je

$$a_0 x_1 \cdots x_l = \delta(a_0 x_1 \cdots x_{l-1}, x_l) \in P_l,$$

prema (5.32), dok iz $x_1 \cdots x_{m_1} = u_1 \in L$ dobijamo da je

$$\delta(a_0 x_1 \cdots x_{m_1 - 1}, x_{m_1}) = a_0 x_1 \cdots x_{m_1} \in T,$$

što zbog (5.32) daje

$$a_0 \in P_{m_1} \qquad \text{i} \qquad a_0 x_1 \cdots x_{m_1} \in P_{m_1} \cap T,$$

čime je (5.40) dokazano za $i = 1$.

Pretpostavimo dalje da (5.40) važi za sve j za koje je $1 \leq j \leq i < k$, i dokažimo da važi i za $i + 1$. Zaista, iz pretpostavke da je $a_0 \in P_{m_i}$ imamo da je

$$a_0 x_{m_i+1} \cdots x_l \in P_l,$$

za svaki l, $m_i < l < m_{i+1}$, dok iz $x_{m_i+1} \cdots x_{m_{i+1}} = u_{i+1} \in L$ dobijamo da je

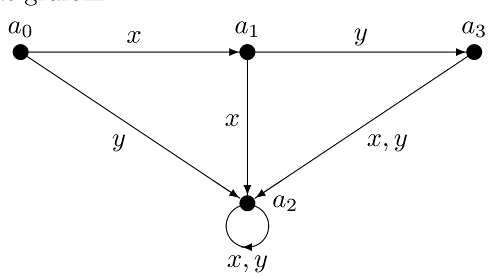
$$\delta(a_0 x_{m_i+1} \cdots x_{m_{i+1}-1}, x_{m_{i+1}}) = a_0 x_{m_i+1} \cdots x_{m_{i+1}} \in T,$$

što prema (5.32) daje

$$a_0 \in P_{m_{i+1}} \qquad \text{i} \qquad a_0 x_{m_i+1} \cdots x_{m_{i+1}} \in P_{m_{i+1}} \cap T.$$

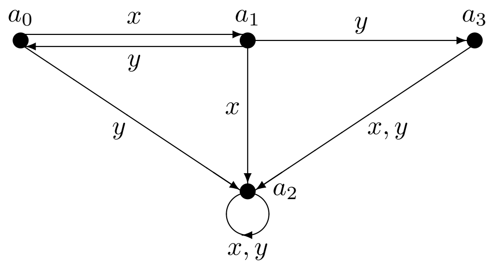
Ovim je upotpunjen dokaz relacije (5.40). Iz te relacije, imajući u vidu da je $m_k = n$, dobijamo da je $Iu \cap T = P_n \cap T \neq \varnothing$, što je i trebalo dokazati. Ovim je završen dokaz raspoznatljivosti jezika $L^{(+)}$. Raspoznatljivost jezika $L^{(*)}$ sledi na osnovu Teorema 5.4.2 i 5.4.4, jer je $L^{(*)} = L^{(+)} \cup \{e\}$. $\square$

Primer 5.7.1. Neka je dat jezik $L = \{xy\}$. Lako se proverava da je njegov minimalni automat A_L dat grafom



Jasno, A_L je inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, i raspoznaje L skupom $T = \{a_3\}$.

Nedeterministički automat koji raspoznaje jezik $L^{(+)} = \{(xy)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, konstruisan iz automata A_L kao u prethodnoj teoremi, dat je grafom



Ovaj automat, za čije inicijalno stanje uzimamo da je $I = \{a_0\}$, raspoznaje L skupom $T = \{a_3\}$.

Literatura: Arbib [1969], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Kleene [1956], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995].

5.8. Racionalni jezici. Regularni izrazi. Teorema Kleenea

Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$, stanja $a, b \in A$ i reč $u \in X^*$ takva da je $au = b$. Ako je u slovo ili prazna reč, tada kažemo da reč u *prevodi automat* $\mathcal{A}$ *direktno iz stanja* a *u stanje* b,a ako je $u = x_1 \cdots x_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$, tada kažemo da reč u *prevodi automat* $\mathcal{A}$ *iz stanja* a *u stanje* b *preko niza međustanja*

$$ax_1,\ ax_1x_2,\ \dots,\ ax_1x_2\cdots x_{m-1}.$$

Uzmimo dalje da je automat $\mathcal{A}$ konačan. Tada se njegova stanja mogu svrstati u konačan niz, odnosno, A se može zapisati u obliku

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

za neki $n \in \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljne $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sa $L_{ij}^{(0)}$ ćemo označavati skup svih reči iz X^* koje automat $\mathcal{A}$ prevode direktno iz stanja a_i u stanje a_j. Jasno, proizvoljan element iz $L_{ij}^{(0)}$ je ili prazna reč ili neko slovo. Dalje, za $k \in \{1, \dots, n\}$, sa $L_{ij}^{(k)}$ ćemo označavati skup svih reči iz X^* koje prevode stanje a_i u stanje a_j ili direktno, ili preko međustanja koja pripadaju skupu $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Teorema 5.8.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ konačan automat sa n stanja. Tada za proizvoljne $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi sledeća rekurentna formula:*

$$L_{ij}^{(k)} = L_{ij}^{(k-1)} \cup L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)}. \tag{5.41}$$

Dokaz. Označimo sa K desnu stranu jednakosti 5.41.

Najpre ćemo dokazati da je $K \subseteq L_{ij}^{(k)}$. Uzmimo proizvoljnu reč $u \in K$. Ako je $u \in L_{ij}^{(k-1)}$, onda je jasno da je $u \in L_{ij}^{(k)}$, što i treba dokazati. Neka je

$$u \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)}.$$

Tada je $u = u_1u_2u_3$, gde je

$$u_1 \in L_{ik}^{(k-1)}, \quad u_3 \in L_{kj}^{(k-1)} \quad \text{i} \quad u_2 \in \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)},$$

što znači da je ili $u_2 = e$, ili je $u_2 = v_1 \cdots v_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke $v_1, \ldots, v_m \in L_{kk}^{(k-1)}$. Sada imamo da je

$$a_iu_1 = a_k, \quad a_ku_2 = a_k, \quad a_ku_3 = a_j \quad \text{i} \quad a_iu = a_j.$$

Jasno, sva međustanja u prelazima iz a_i u a_k sa u_1, iz a_k u a_k sa u_2 i iz a_k u a_j sa u_3, ukoliko ih ima, pripadaju skupu $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, dok u prelazu iz a_i u a_j sa u, osim njih javlja se i a_k kao međustanje. Ovim smo dokazali da je $u \in L_{ij}^{(k)}$, čime smo dokazali i da je $K \subseteq L_{ij}^{(k)}$.

Obratno, uzmimo da je $u \in L_{ij}^{(k)}$. Ako a_k nije međustanje u prelazu iz a_i u a_j sa u, tada je $u \in L_{ij}^{(k-1)} \subseteq K$. Uzmimo da je a_k međustanje u tom prelazu. Tada je jasno da je $u \in X^+$, odnosno

$$u = x_1x_2 \cdots x_m,$$

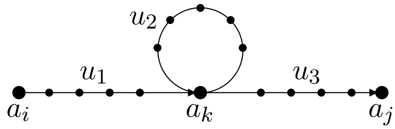
za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Neka su $s_1, \ldots, s_t$, $1 \leq t \leq m$, svi brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$ za koje važi

$$a_ix_1 \cdots x_{s_l} = a_k,$$

$1 \leq l \leq t$, pri čemu je

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_t.$$

Prema gornjoj pretpostavci, postoji bar jedan takav broj. To je prikazano na sledećoj slici:



Neka je

$$u_1 = x_1 \cdots x_{s_1}, \quad u_2 = \begin{cases} x_{s_1+1} \cdots x_{s_t} & \text{za } t > 1 \\ e & \text{za } t = 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad u_3 = x_{s_t+1} \cdots x_m.$$

Jasno da je $u_1 \in L_{ik}^{(k-1)}$ i $u_3 \in L_{kj}^{(k-1)}$. Ako je $t = 1$, odnosno $u_2 = e$, tada neposredno dobijamo da je

$$u = u_1 u_2 u_3 \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)} \subseteq K.$$

Uzmimo da je $t > 1$, odnosno da je

$$u_2 = x_{s_1+1} \cdots x_{s_t}.$$

Tada se u_2 može zapisati u obliku

$$u_2 = v_1 \cdots v_{t-1},$$

gde za $1 \leq l \leq t-1$ je

$$v_l = x_{s_l+1} \cdots x_{s_{l+1}}.$$

Odavde je jasno da

$$v_1, \dots, v_{t-1} \in L_{kk}^{(k-1)},$$

što dokazuje da je $u_2 \in \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)}$. Prema tome, imamo da je

$$u = u_1 u_2 u_3 \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)} \subseteq K.$$

Dakle, dokazali smo da je $L_{ij}^{(k)} \subseteq K$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Neka je dat slobodan monoid X^* nad konačnim alfabetom X. Jednoelementne jezike u X^* koje čini ili prazna reč ili neko slovo iz X nazivaćemo *elementarnim jezicima*. Jezik $L \subseteq X^*$ nazivaćemo *racionalnim jezikom* ako se može dobiti iz elementarnih jezika upotrebom operacija unije, množenja i zvezda operacije konačno mnogo puta. Drugim rečima, klasa svih racionalnih jezika je najmanja klasa jezika koja sadrži elementarne jezike i zatvorena je za operacije unije, množenja i zvezda operaciju.

Veza između racionalnih i raspoznatljivih jezika data je čuvenom Teoremom Kleenea:

Teorema 5.8.2. (Teorema Kleenea). *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je raspoznatljiv ako i samo ako je racionalan.*

Dokaz. Neka je L raspoznatljiv jezik i neka je $\mathcal{A} = (A, a_1, X, \delta)$ konačan inicijalni automat sa n stanja koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A$. Ako je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $T = \{a_{s_1}, \dots, a_{s_m}\}$, za neke $s_1, \dots, s_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, tada imamo da je

$$L = \{u \in X^* \mid a_1 u \in T\} = \bigcup_{k=1}^{m} L_{1s_k}^{(n)}.$$

Korišćenjem rekurentne formule 5.41, za svaki $k \in \{1, \dots, m\}$, jezik $L_{1s_k}^{(n)}$ se može dobiti iz elementarnih jezika oblika $L_{ij}^{(0)}$, korišćenjem samo operacija unije, proizvoda i zvezda operacije, koje se jedine javljaju u 5.41, konačno mnogo puta. Prema tome, i jezik L se može dobiti iz elementarnih jezika upotrebom samo operacija unije, proizvoda i zvezda operacije konačno mnogo puta. Dakle, L je racionalan jezik.

Obrat teoreme sledi neposredno iz Teorema 5.4.2, 5.4.4, 5.6.1 i 5.7.1. $\square$

Teorema Kleenea se može formulisati na još jedan ekvivalentan način. Da bi smo dali tu ekvivalentnu formulaciju Teoreme Kleenea, rekurzivno definišemo pojam *regularnog izraza* nad alfabetom X sledećim uslovima:

(R1) Izraz $\varnothing$ je regularan izraz.

(R2) Izraz e je regularan izraz.

(R3) Za svako slovo $x \in X$, izraz x je regularan izraz.

(R4) Ako su E i F regularni izrazi, tada je i $(E \cup F)$ regularan izraz.

(R5) Ako su E i F regularni izrazi, tada je i (EF) regularan izraz.

(R6) Ako je E regularan izraz, tada je i $E^{(*)}$ regularan izraz.

Regularni izrazi u (R1), (R2) i (R3) nazivaju se *primitivnim regularnim izrazima*, dok su uslovima (R4), (R5) i (R6) definisani *unija*, *proizvod* i *zvezda operacija* na regularnim izrazima.

Svakom regularnom izrazu E nad alfabetom X, može se pridružiti jezik $\mathrm{Lang}(E) \subseteq X^*$, *interpretacija regularnog izraza* E, koji se definiše na sledeći način:

(I1) $\mathrm{Lang}(\varnothing) = \varnothing$, gde se $\varnothing$ na desnoj strani interpretira kao prazan jezik.

(I2) $\mathrm{Lang}(e) = e$, gde se e na desnoj strani interpretira kao jedinica slobodnog monoida X^*.

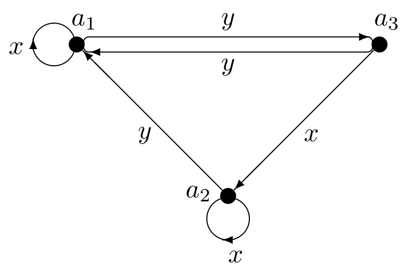
(I3) $\mathrm{Lang}(x) = x$, gde se x na desnoj strani interpretira kao slovo iz X.
(I4) $\mathrm{Lang}(E \cup F) = \mathrm{Lang}(E) \cup \mathrm{Lang}(F)$.
(I5) $\mathrm{Lang}(EF) = \mathrm{Lang}(E) \cdot \mathrm{Lang}(F)$.
(I6) $\mathrm{Lang}(E^*) = (\mathrm{Lang}(E))^{(*)}$.

Za jezik $L \subseteq X^*$ kažemo da je *predstavljen* (*definisan*) *regularnim izrazom* E ako je $L = \mathrm{Lang}(E)$. Sada se Teorema Kleenea može formulisati i na sledeći način.

Teorema 5.8.3. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je raspoznatljiv ako i samo ako se može predstaviti regularnim izrazom.*

Do predstavljanja raspoznatljivog jezika L regularnim izrazom dolazi se najčešće korišćenjem rekurentne formule (5.41), na način ilustrovan sledećim primerom:

Primer 5.8.1. Neka je automat $A = (A, a_1, X, \delta)$ dat grafom



i neka je L jezik koji automat A raspoznaje stanjem $\{a_3\}$. Imamo da je

$$L = L_{13}^{(3)} = L_{13}^{(2)} \cup L_{13}^{(2)} \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)} L_{33}^{(2)} = L_{13}^{(2)} \left(\{e\} \cup \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)} L_{33}^{(2)}\right) =$$
$$= L_{13}^{(2)} \left(\{e\} \cup \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)}\right) = L_{13}^{(2)} \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)},$$

pri čemu je

$$L_{13}^{(2)} = L_{13}^{(1)} \cup L_{12}^{(1)} \left(L_{22}^{(1)}\right)^{(*)} L_{23}^{(1)} \quad \text{i} \quad L_{33}^{(2)} = L_{33}^{(1)} \cup L_{32}^{(1)} \left(L_{22}^{(1)}\right)^{(*)} L_{23}^{(1)}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
L_{13}^{(1)} &= L_{13}^{(0)} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \left(\{e\} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)}\right) L_{13}^{(0)} = \\
&= \left(\{e\} \cup \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)}\right) L_{13}^{(0)} = \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \{x, e\}^{(*)} y = x^* y \\
L_{12}^{(1)} &= L_{12}^{(0)} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = x^* \cdot \varnothing = \varnothing \\
L_{22}^{(1)} &= L_{22}^{(0)} \cup L_{21}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \{x, e\} \cup y x^* \cdot \varnothing = \{x, e\} \\
L_{23}^{(1)} &= L_{23}^{(0)} \cup L_{21}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \varnothing \cup y x^* y = y x^* y \\
L_{33}^{(1)} &= L_{33}^{(0)} \cup L_{31}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \{e\} \cup y x^* y \\
L_{32}^{(1)} &= L_{32}^{(0)} \cup L_{31}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \{x\} \cup y x^* \cdot \varnothing = \{x\},
\end{aligned}$$

to je $L_{23}^{(2)} = x^* y$ i

$$L_{33}^{(2)} = \{e\} \cup y x^* \cup x \{x, e\}^{(*)} y x^* y = \{e\} \cup x^* y X^{(*)} y,$$

odakle je

$$L = x^* y \big(\{e\} \cup x^* y x^* y\big)^{(*)} = x^* y \big(x^* y x^* y\big)^{(*)}.$$

Poslednji izraz daje nam regularno predstavljanje jezika L.

Literatura: Arbib [1969], Arden [1960], Brzozowski [1962a, 1962b, 1964a, 1964b, 1965], Burris and Sankappanavar [1981], Dolinka [2000], Eilenberg [1973], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Kleene [1956], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton and Yamada [1960], Pippenger [1997], Redko [1964], Salomaa [1966].

5.9. Jezici generisani regularnim gramatikama

Podsetimo se da smo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazvali *regularnom gramatikom* ako svako njeno pravilo ima ili oblik

$$\alpha \to p\beta, \tag{5.42}$$

gde su $\alpha, \beta \in V \setminus X$ i $p \in X^+$, ili oblik

$$\alpha \to q, \tag{5.43}$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$ i $q \in X^*$, a da smo jezike generisane ovakvim gramatikama nazivali *regularnim jezicima*.

Pre no što pređemo na glavnu teoremu ovog poglavlja, kojom se dokazuje jednakost klase regularnih i klase raspoznatljivih jezika, dokazaćemo sledeću teoremu:

Teorema 5.9.1. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je regularan ako i samo ako je generisan gramatikom $G = (V, X, \pi)$ čije svako pravilo je ili oblika*

$$\alpha \to x\beta, \tag{5.44}$$

gde su $\alpha, \beta \in V \setminus X$ i $x \in X$, ili je oblika

$$\alpha \to e, \tag{5.45}$$

gde je $\alpha \in V \setminus X$.

Dokaz. Neka je $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ neka regularna gramatika i $\sigma \in V \setminus X$. Konstruisaćemo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$ na taj način što ćemo pravila iz π oblika (5.42), za $|p| > 1$ zameniti nizom pravila oblika (5.44), a pravila oblika (5.43), za $|q| \geq 1$, pravilima oblika (5.45), pri čemu ćemo uvesti i neke nove pomoćne simbole. Naime, svako pravilo oblika (5.42), gde je $p = x_1 x_2 \cdots x_n$, za neki $n \geq 2$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, zamenićemo skupom pravila oblika

$$\alpha \to x_1\xi_1,\ \xi_1 \to x_2\xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1} \to x_n\beta, \tag{5.46}$$

pri čemu nove pomoćne simbole $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ dodajemo skupu pomoćnih simbola gramatike G. Sa druge strane, svako pravilo oblika (5.43), gde je $q = y_1 y_2 \cdots y_m$, za $m \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$, zamenjujemo pravilima oblika

$$\alpha \to y_1\eta_1,\ \eta_1 \to y_2\eta_2,\ \ldots,\ \eta_{m-1} \to y_m\eta_m,\ \eta_m \to e, \tag{5.47}$$

pri čemu nove pomoćne simbole $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ dodajemo skupu pomoćnih simbola gramatike G. Jasno da je poslednje pravilo u (5.47) oblika (5.45), dok su ostala oblika (5.44). Prema tome, pravila novodobijene gramatike G' zadovoljavaju uslove (5.44) i (5.45). Takođe, svakom pravilu oblika (5.42) gramatike G, za $p = x_1 x_2 \cdots x_n$, u gramatici G' odgovara izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} x_1 x_2 \cdots x_n \beta$, dok pravilu oblika (5.43), gde je $q = y_1 y_2 \cdots y_m$, u gramatici G' odgovara izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} y_1 y_2 \cdots y_m$. Prema tome, svakom izvođenju $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u gramatici G odgovara neko (duže) izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u gramatici G', odakle dobijamo da je $L(G, \sigma) \subseteq L(G', \sigma)$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, krenimo od reči $w \in L(G', \sigma)$. Ako posmatramo gramatiku $G'' = (V', X, \pi \cup \pi')$, tada je jasno da je $w \in L(G'', \sigma)$. Prema tome, reč w ima u gramatici G'' izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w. \tag{5.48}$$

Indukcijom po broju javljanja simbola iz $V' \setminus V$ u (5.48) dokazaćemo da w ima izvođenje iz σ i u G. Ako u (5.48) nema simbola iz $V' \setminus V$, tada je jasno da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u G. U suprotnom, prvo pojavljivanje simbola iz $V' \setminus V$ u (5.48) zasnovano je ili na pravilu oblika

$$\alpha \to x_1\xi_1,$$

nastalim iz pravila π oblika (5.42), njegovom zamenom sa (5.46), ili na pravilu oblika

$$\alpha \to y_1\eta_1,$$

nastalim iz nekog pravila iz π oblika (5.43), njegovom zamenom sa (5.47). U prvom slučaju, kako reč w ne sadrži pomoćne simbole, a gramatika G'' nema pravila oblika $\xi_i \to u$, za $u \in X^*$, to jedini način na koji se ξ_1 može izgubiti u izvođenju (5.48) jeste da se ξ_1 zameni sa $x_2\xi_2$. Ista argumentacija važi i za $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, pa na isti način dolazimo do zamene simbola ξ_{n-1} za $x_n\beta$. Prema tome, u izvođenju (5.48) može se naći niz prelaza oblika (5.46), koji se u gramatici G'' može zameniti prelazom $\alpha \to x_1x_2\cdots x_n\beta$, pa broj pojavljivanja simbola iz $V' \setminus V$ u (5.48) može biti redukovan. Slično, u drugom slučaju izvođenje uključuje uzastopne zamene η_1 sa $y_2\eta_2$, itd., do zamene η_{m-1} sa $y_m\eta_m$, i svi ti prelazi mogu biti zamenjeni jednim prelazom $\alpha \to y_1y_2\cdots y_m$ u G''.

U oba slučaja izvođenje (5.48) zamenjuje se drugim izvođenjem koje ima manji broj pojavljivanja simbola iz $V' \setminus V$. Odavde indukcijom dobijamo da se to izvođenje može zameniti izvođenjem u kome nema simbola iz $V' \setminus V$, a to znači izvođenjem u G. Prema tome, $w \in L(G, \sigma)$, pa je $L(G', \sigma) \subseteq L(G, \sigma)$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. $\square$

Sada smo spremni da dokažemo teoremu koja uspostavlja jednakost među jezicima generisanim regularnim gramatikama i raspoznatljivim jezicima.

Teorema 5.9.2. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je regularan ako i samo ako je raspoznatljiv.*

Dokaz. Neka je L raspoznatljiv jezik i neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ konačan automat koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A$. Posmatrajmo gramatiku $G = (V, X, \pi)$, za koju je $V = A \cup X$ i skup π pravila je zadat sa

$$\begin{array}{lll} & a \to x(ax) & \text{za sve } a \in A,\ x \in A, \\ (5.49) & t \to e & \text{za svaki } t \in T. \end{array}$$

Dokazaćemo da je $L = L(G, a_0)$.

Najpre ćemo dokazati da za proizvoljne $a, b \in A$ i $u \in X^*$ važi

$$a \overset{*}{\Rightarrow} ub \;\Leftrightarrow\; au = b. \tag{5.50}$$

To ćemo dokazati indukcijom po dužini reči u. Prema (5.49), to važi za sva slova. Uzmimo dalje da je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $n \geq 2$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, i pretpostavimo da (5.50) važi za sve reči dužine manje od n.

Ako je $au = b$, tada za $c = ax_1\cdots x_{n-1}$ imamo da je $a \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}c$, prema indukcijskoj pretpostavci, dok iz $cx_n = b$, prema (5.49) imamo da je $c \to x_nb$ pravilo iz π, pa dobijamo izvođenje $x_1\cdots x_{n-1}c \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_nb$. Prema tome,

$$a \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}c \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_nb = ub,$$

pa je dakle $a \overset{*}{\Rightarrow} ub$.

Obratno, neka je $a \overset{*}{\Rightarrow} ub$. Poslednji član u ovom izvođenju mora biti oblika $w \Rightarrow ub$, gde je $w \in V^*$, pri čemu ovo neposredno izvođenje dobijamo primenom nekog pravila oblika $c \to x(cx)$, za neke $c \in A$ i $x \in X$. To znači da je $w = pcq$ i $ub = pxc'q$, gde su $p, q \in V^*$ i $c' = cx \in A$. Iz $ub = pxc'q$, kako je $b \in A$ i $u \in X^+$, sledi da je $q = e$, $c' = b$ i $px = u$, pa je dakle $w = pc$, pri čemu je $p \in X^+$ i $|p| < n$. Sada iz $a \overset{*}{\Rightarrow} w = pc$, prema indukcijskoj pretpostavci dobijamo da je $ap = c$, odakle imamo da je

$$b = c' = cx = (ap)x = a(px) = au,$$

što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da (5.50) zaista važi.

Sada dobijamo da važi

$$\begin{aligned} u \in L \;&\Leftrightarrow\; a_0u = t,\ \text{za neki } t \in T, \\ &\Leftrightarrow\; a_0 \overset{*}{\Rightarrow} ut,\ \text{za neki } t \in T, && \text{(prema (5.50))} \\ &\Leftrightarrow\; a_0 \overset{*}{\Rightarrow} u, && \text{(prema (5.49))}, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $L = L(G, a_0)$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka je L regularan jezik. Prema Teoremi 5.9.1, $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ regularna gramatika čije je svako pravilo ili oblika (5.44) ili oblika (5.45). Uzmimo da je $A = V \setminus X$, i $\delta : A \times X \to \mathcal{P}(A)$ je preslikavanje definisano sa

$$\delta(\alpha, x) = \{\beta \in A \mid \alpha \to x\beta \text{ je pravilo iz } \pi\}, \tag{5.51}$$

gde je $\alpha \in A = V \setminus X$ i $x \in X$. Tada je $\mathcal{A} = (A, I, X, \delta)$ inicijalni nedeterministički automat, pri čemu smo uzeli da je $I = \{\sigma\}$. Uzmimo, takođe, da je

$$T = \{\alpha \in A \,|\, \alpha \to e \text{ je pravilo iz } \pi\}.$$

Dokazaćemo da za $\alpha \in A$ i $u \in X^+$ važi

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in Iu. \tag{5.52}$$

Za $|u| = 1$, tj. za $u = x \in X$ imamo

$$\begin{aligned} \sigma \overset{*}{\Rightarrow} x\alpha \quad &\Leftrightarrow\; \sigma \to x\alpha \text{ je pravilo iz } \pi \\ &\Leftrightarrow\; \alpha \in \delta(\sigma, x) = \{\sigma\}x = Ix, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Uzmimo dalje da je $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, za $n \geq 2$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, i pretpostavimo da (5.52) važi za sve reči iz X^* dužine manje od n.

Uzmimo da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha = x_1 x_2 \cdots x_n \alpha$. To znači da je

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1 \cdots x_{n-1}\alpha' \Rightarrow x_1 \cdots x_{n-1} x_n \alpha,$$

pri čemu je $\alpha' \to x_n\alpha$ pravilo iz π. To znači da je $\alpha \in \delta(\alpha', x_n)$, dok sa druge strane, prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je $\alpha' \in Ix_1 \cdots x_{n_1}$. Prema tome, imamo da je

$$\alpha \in \delta(\alpha', x_n) \subseteq \delta(Ix_1 \cdots x_{n-1}, x_n) = Ix_1 \cdots x_n = Iu,$$

što je i trebalo dokazati.

Sa druge strane, uzmimo da je $\alpha \in Iu$. Neka je

$$\delta(I, x_1 x_2 \cdots x_n) = P_1 P_2 \cdots P_n,$$

gde je

$$P_1 = \delta(I, x_1),\; P_2 = \delta(P_1, x_2),\; \ldots,\; P_n = \delta(P_{n-1}, x_n).$$

Tada je $\alpha = Iu = P_n$, odnosno $\alpha \in \delta(\beta, x_n)$, za neki $\beta \in P_{n-1}$, što prema (5.51) znači da je $\beta \to x_n\alpha$ pravilo iz π, odakle dobijamo

$$x_1 \cdots x_{n-1}\beta \Rightarrow x_1 \cdots x_{n-1} x_n \alpha = u\alpha.$$

Takođe, iz $\beta \in P_{n-1} = Ix_1 \cdots x_{n-1}$, prema indukcijskoj pretpostavci imamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1 \cdots x_{n-1}\beta$. Prema tome,

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1 \cdots x_{n-1}\beta \Rightarrow u\alpha,$$

čime smo dokazali da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha$, a time i upotpunili dokaz za (5.52).

Sada imamo da važi

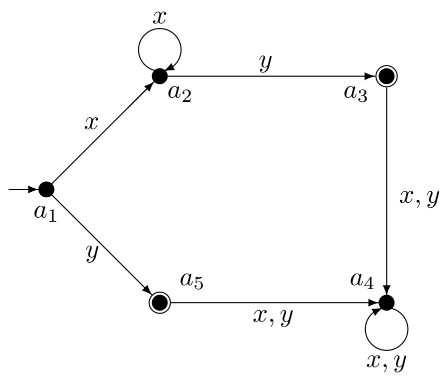
$$\begin{aligned} u \in L = L(G,\sigma) &\Leftrightarrow \sigma \overset{*}{\Rightarrow} u, \\ &\Leftrightarrow \sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha, \quad \text{za neki } \alpha \in T \\ &\Leftrightarrow \alpha \in Iu, \quad \text{za neki } \alpha \in T \qquad \text{(prema (5.52))} \\ &\Leftrightarrow Iu \cap T \neq \varnothing, \end{aligned}$$

što znači da automat A raspoznaje jezik L. $\square$

Literatura: Chomsky [1956, 1959], Chomsky and Miller [1958], Chomsky and Schützenberger [1963], Gécseg and Peák [1972], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Pippenger [1997],

5.10. Zadaci

1. Minimizirati automat sa slike



2. Naći monoid prelaza automata $A = (\{a,b,c\},\{x,y\},\delta)$ gde je

$$\begin{aligned} &\delta(a,x) = b, \;\; \delta(b,x) = b, \;\; \delta(c,x) = a, \\ &\delta(a,y) = \delta(b,y) = \delta(c,y) = b. \end{aligned}$$

3. Naći sintaksički monoid jezika $L = X^*xyxX^*$, gde je $X = \{x,y\}$.

4. Neka je X proizvoljan alfabet i neka je $u \in X^+$ proizvoljna reč. Odrediti minimalni automat jezika $L = \{v \in X^* \mid u \text{ je podreč od } v\} = X^*uX^*$.

5. Neka je $L = \{w\} \subset \{x,y\}^*$ i $|w| = k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Dokazati:

(a) za proizvoljne reči $p,q \in \{x,y\}^*$ važi $(p,q) \in \sigma_L$ ako i samo ako $p \mid w$ i $q \mid w$, ili ni p ni q ne dele w, ili $p = q$;

(b) $T = \{u \,|\, w$ ne sadrži podreč $u\}$ je σ_L-klasa koja je nula u $\mathrm{Syn}(L)$;
(c) množenje u $\mathrm{Syn}(L)$ je definisano sa

$$(p\sigma_L)(q\sigma_L) = \begin{cases} (pq)\sigma_L, & \text{ako } pq \,|\, w, \\ T, & \text{inače;} \end{cases}$$

(d) $(\mathrm{Syn}(L) \setminus \{e\})^{k+1} = T$.

6. Neka je M monoid i $P \subseteq M$. Dokazati da je $(u, v) \in \sigma_P$ ako i samo ako je za svaki $w \in M$ zadovoljeno $u^{-1}w^{-1}P = v^{-1}w^{-1}P$, gde su $u, v \in M$ proizvoljni elementi.

7. Neka je $L \subseteq X^*$. Za proizvoljnu reč $w \in X^*$ neka je $C_L(w)$ kontekst reči w u L. Dokazati da je

$$w\sigma_L = \left(\bigcap_{(u,v)\in C_L(w)} u^{-1}Lv^{-1} \right) \Bigg\backslash \left(\bigcup_{(u,v)\notin C_L(w)} u^{-1}Lv^{-1} \right).$$

8. Neka monoid Y^* raspoznaje jezik $L \subseteq X^*$ homomorfizmom $\phi : X^* \to Y^*$. Tada $\mathrm{Syn}(L)$ deli $\mathrm{Syn}(L)\phi$. Dokazati.

9. Neka je $L \subseteq X^*$ i $K \subseteq Y^*$. Ako $\mathrm{Syn}(L)$ deli $\mathrm{Syn}(K)$, tada Y^* raspoznaje L.

10. Neka je jezik L ideal slobodnog monoida X^*. Dokazati da L jeste σ_L-klasa koja je nula u $\mathrm{Syn}(L)$.

11. Neka je L jezik nad alfabetom X i $A = (A, X, a_0, \delta)$ je automat koji raspoznaje L pomoću skupa T. Dokazati da je L desni ideal u polugrupi X^+ ako i samo ako je T podautomat od A.

12. Neka je $L = \{w \in \{x, y\}^* \,|\, |w|_x = |w|_y\}$. Naći R_L. Da li je L raspoznatljiv?

13. Dokazati da jezik $L = \{x^{k^2} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ nije raspoznatljiv.

14. Dokazati da jezik $L = \{x^p \,|\, p$ je prost broj$\}$ nije raspoznatljiv.

15. Odrediti tip jezika $L = \{x^n y^{n+2m} x^m \,|\, m, n \geq 0\}$ nad alfabetom $\{x, y\}$.

16. Odrediti tip jezika $L = \{u\overline{u} \,|\, u \in \{x, y\}^*\}$ nad alfabetom $\{x, y\}$.

17. Odrediti gramatiku koja generiše jezik $\{x^i y^k z^{2i} \,|\, i, k \geq 0\}$. Da li je dati jezik regularan?

18. Da li jezik $L(G,\sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$, $X = \{x, y\}$, $\pi = \{\sigma \to x\sigma y + y\sigma\lambda + \lambda,\ \lambda \to x + y\}$, jeste raspoznatljiv?

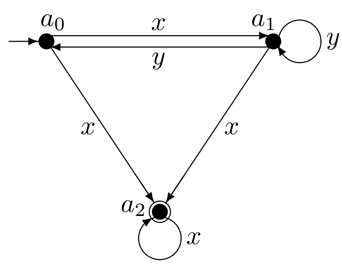
19. Da li je jezik

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ je binarni zapis broja } (2^{k+1} - 1)^2, k \in \mathbb{N}\}$$

raspoznatljiv?

20. Da li je jezik $L = \{w \in \{x, y\}^* \mid |w| \equiv 1(\text{mod } 3)\}$ regularan?

21. Naći deterministički automat koji je ekvivalentan datom nedeterminističkom automatu.



22. Neka je $L \subseteq X^*$ raspoznatljiv i $x \in X$ proizvoljan simbol. Dokazati da su i Lx^{-1} i $x^{-1}L$ raspoznatljivi jezici.

23. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ homomorfizam. Dokazati da ako je $L \subseteq Y^*$ raspoznatljiv, tada je i $L\phi^{-1}$ raspoznatljiv jezik.

24. Neka je $L \subseteq X^*$ raspoznatljiv jezik. Dokazati da su tada raspoznatljivi i jezici

$$\text{Pref}(L) = \{w \in X^* \mid wu \in L \text{ za neki } u \in X^*\},$$
$$\text{Suf}(L) = \{w \in X^* \mid uw \in L \text{ za neki } u \in X^*\}.$$

25. Dokazati da je jezik L nad alfabetom X regularan ako i samo ako je jezik $L^{-1} = \{\overline{u} \mid u \in L\}$ regularan.

26. Dokazati da ako je $L \subseteq \{x\}^*$ i $\{n \mid x^n \in L\}$ je aritmetička progresija, tada je L raspoznatljiv.

27. Dokazati da je $L \subseteq \{x\}^*$ raspoznatljiv ako i samo ako skup $\{n \mid x^n \in L\}$ jeste unija konačno mnogo aritmetičkih progresija.

28. Dokazati da je sledeći jezik regularan:

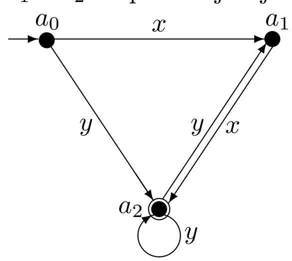
$$L = \{u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ je binarni zapis broja } n = 2^m(2^k - 1) + 1, \\ \text{pri čemu je } m + k \text{ paran}\}.$$

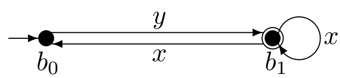
29. Jezik $L \subseteq X^*$ može biti raspoznat jednoelementnim skupom u nekom automatu ako i samo ako važi relacija

$$u \in L,\ uv \in L,\ w \in L \Rightarrow wv \in L.$$

30. Konstruisati minimalne automate jezika $L_1 = y^*x^+$ i $L_2 = x^*y^+$, a zatim i automat koji raspoznaje jezik $L = L_1 \cup L_2$.

31. Neka su L_1 i L_2 raspoznatljivi jezici čiji su automati

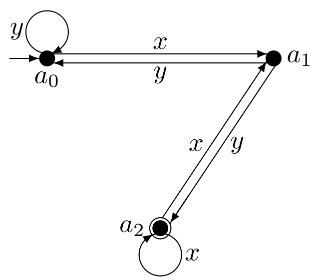




Konstruisati automat koji raspoznaje jezik L_1L_2.

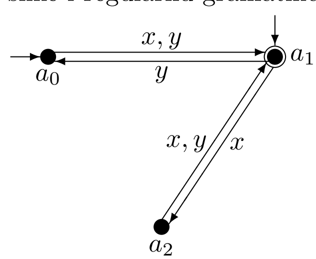
32. Konstruisati automat koji raspoznaje jezik $L \subseteq \{x, y\}^*$ koga čine sve reči koje počinju sa x i iza svakog x se obavezno javlja bar jedan y.

33. Dat je nedeterministički automat koji raspoznaje L.



Odrediti automat koji raspoznaje L^*.

34. Naći jezik automata sa slike i regularnu gramatiku koja generiše taj jezik.

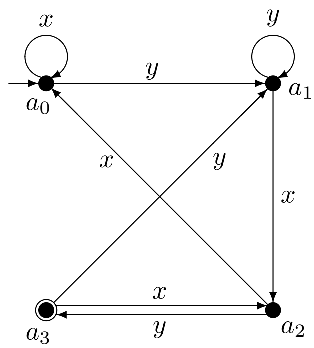


35. Neka je $G = (\{\sigma, \alpha, \beta\}, \{x, y\}, \pi)$ gramatika sa izvođenjima

$$\sigma \to \alpha,\ \sigma \to \beta,\ \alpha \to xx\alpha,\ \alpha \to xyx,\ \beta \to x\alpha,\ \beta \to yx\beta,\ \beta \to e.$$

Konstruisati nedeterministički konačan automat koji raspoznaje jezik $L(G, \sigma)$.

36. Naći jezik automata sa slike i gramatiku kojom je generisan.



37. Data je gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $V = \{\sigma\}$, $X = \{(,)\}$ i

$$\pi = \{\sigma \to e,\ \sigma \to \sigma\sigma,\ \sigma \to (\sigma)\}.$$

Da li je G regularna gramatika?

Glava 6

Kontekstno-nezavisni jezici

Kontekstno-nezavisni jezici uvedeni su u radovima Chomskyog [1956, 1959] sa namerom da posluže kao formalizacija gramatičkih svojstava prirodnih jezika, ali su se veoma brzo pokazali kao veoma pogodni za formalno opisivanje sintakse programskih jezika i našli značajne primene kod definisanja programskih jezika, u sintaksnoj analizi jezika i konstrukciji kompajlera. Te njihove primene dovele su do razvoja teorije kontekstno-nezavisnih jezika kao jedne od najznačajnijih oblasti Teorije formalnih jezika.

Kontekstno-nezavisni jezici se mogu definisati na više različitih, međusobno ekvivalentnih načina. U Glavi 2, mi smo ih već definisali kao jezike koji se mogu generisati kontekstno-nezavisnim gramatikama. Kako su pokazali, nezavisno jedni od drugih, Chomsky i Schützenberger [1963] i Ginsburg i Rice [1962], kontekstno nezavisni jezici se mogu definisati i kao komponente najmanjeg rešenja sistema polinomialnih jednačina, odakle potiče i naziv *algebarski jezici* pod kojim se sreću u nekim izvorima. Treći važan način zadavanja kontekstno-nezavisnih jezika je njihovo generisanje potisnim automatima, matematičkim modelom uvedenim u radu Schützenbergera [1963].

Glavna tema ove glave je dokaz ekvivalentnosti koncepata generisanja jezika kontekstno-nezavisnom gramatikom i raspoznavanja jezika potisnim automatom, koju su prvi dokazali Chomsky [1962] i Evey [1963]. U prvom odeljku ove glave prikazuju se neke osnovne osobine kontekstno-nezavisnih gramatika i jezika, u Odeljcima 6.2 i 6.3 se dokazuje da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika, udaljavanjem e-pravila i trivijalnih pravila, svođenjem na formu čiste gramatike i gramatike u Normalnoj formi Chomsky, može svesti na gramatiku jednostavnije forme koja raspoznaje isti jezik, a u Odeljku 6.4 se pokazuje kako se izvođenja u kontekstno-nezavisnim gramatikama mogu predstaviti stablima i dokazuje se veoma korisna Lema o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezike. Potom u Odeljcima 6.5, 6.6 i 6.7 uvodimo pojam potisnog automata, tj. automata sa potiskujućom memorijom (stekom), pojmove raspoznavanja jezika skupom stanja potisnog automata i raspoznavanja jezika praznim stekom, dokazujemo ekvivalentnost ta dva načina raspoznavanja, i konačno, dokazujemo glavnu teoremu ove glave koja kaže da je jezik kontekstno-nezavisan ako i samo ako se može raspoznati nekim potisnim automatom.

6.1. Kontekstno-nezavisne gramatike

Podsetimo se da smo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazvali *kontekstno-nezavisnom*, ako je svako pravilo iz π oblika $\alpha \to p$, gde je $\alpha \in V \setminus X$ i $p \in V^*$. Jezike generisane ovakvim gramatikama nazvali smo *kontekstno-nezavisnim jezicima*. Ovde će biti reči o osnovnim osobinama kontekstno-nezavisnih gramatika i jezika.

Najpre ćemo dokazati jednu teoremu koja je u izvesnom smislu obrat Teoreme 2.4.2, i važi kod kontekstno-nezavisnih gramatika.

Teorema 6.1.1. *Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika i*

$$u_1 u_2 \cdots u_n \overset{*}{\Rightarrow} v \tag{6.1}$$

je izvođenje u G, za $u_1, u_2, \ldots, u_n, v \in V^*$. Tada se v može zapisati u obliku $v = v_1 v_2 \cdots v_n$, za $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V^*$, tako da važi

$$u_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1, \;\; u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2, \;\; \ldots, \;\; u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_n, \tag{6.2}$$

pri čemu važi

(i) *nijedno od izvođenja iz (6.2) nije duže od izvođenja (6.1);*

(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenjima iz (6.2) nalaze se među pravilima koja se koriste u (6.1).*

Dokaz. Jasno je da je tvrđenje teoreme dovoljno dokazati za slučaj $n = 2$.

Dokaz će biti izveden indukcijom po dužini izvođenja $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$. Uzmimo najpre da je izvođenje $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ dužine 1, tj. da je neposredno izvođenje. Tada je ono zasnovano na pravilu oblika $u \to w$, gde je $u \in V \setminus X$ i $w \in V^*$, što znači da je $u_1 u_2 = puq$ i $v = pwq$, za neke $p, q \in V^*$. Jasno je da je pu podreč od u_1, ili je uq podreč od u_2. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je pu podreč od u_1. Tada je $u_1 = pur$ i $ru_2 = q$, za neki $r \in V^*$.

Ako stavimo da je $v_1 = pwr$ i $v_2 = u_2$, tada imamo da je $u_1 \Rightarrow v_1$, prema pravilu $u \to w$, $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$, pri čemu je jasno da se radi o izvođenjima dužine ne veće od 1, i $v_1 v_2 = pwru_2 = pwq = v$, što je i trebalo dokazati.

Uzmimo dalje da je izvođenje $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ dužine $m > 1$ i da tvrđenje teoreme važi za sva izvođenja dužine manje od m. Neka je $u_1 u_2 \Rightarrow w$ prvi korak u ovom izvođenju. Prema napred dokazanom za neposredna izvođenja, $w = w_1 w_2$, za neke $w_1, w_2 \in V^*$, pri čemu su $u_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ i $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_2$ izvođenja dužine ne veće od 1. Sa druge strane, iz $w = w_1 w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$, prema indukcijskoj pretpostavci, imamo da je $v = v_1 v_2$, za neke $v_1, v_2 \in V^*$, pri čemu postoje izvođenja $w_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1$ i $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$, dužine manje od m, u kojima se koriste samo pravila koja se koriste i u izvođenju $w_1 w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$. Prema tome $v = v_1 v_2$ i

$$u_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \qquad \text{i} \qquad u_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$$

su izvođenja dužine ne veće od m, što je i trebalo dokazati. $\square$

Posledica 6.1.1. *Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika i neka je $u_1 w u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje u G, za $u_1, u_2, v \in V^*$ i $w \in X^*$. Tada se v može zapisati u obliku $v = v_1 w v_2$, za $v_1, v_2 \in V^*$, tako da $u_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1$ i $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$.*

Dokaz. To sledi iz Teoreme 2.4.2 i činjenice da za $w \in X^*$ postoji izvođenje $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, $w' \in V^*$, ako i samo ako je $w' = w$. $\square$

Dalje će biti reči o zatvorenosti klase kontekstno-nezavisnih jezika u odnosu na neke operacije na jezicima.

Teorema 6.1.2. *Neka je X konačan alfabet.*

(a) *ako su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisni jezici, tada su takvi i jezici $L_1 \cup L_2$ i $L_1 L_2$.*
(b) *ako je $L \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisan jezik, tada je takav i jezik $L^{(*)}$.*

Dokaz. (a) Za $i \in \{1, 2\}$, neka je $L_i = L(G_i, \sigma_i)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G_i = (V_i, X, \pi_i)$ i $\sigma_i \in V_i \setminus X$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $(V_1 \setminus X) \cap (V_2 \setminus X) = \varnothing$. Konstruišimo gramatike

$$G_U = (V_U, X, \pi_U) \qquad \text{i} \qquad G_P = (V_P, X, \pi_P)$$

sa

$$\begin{aligned} &V_U = V_P = V_1 \cup V_2 \cup \{\sigma\}, && \text{gde } \sigma \notin V_1 \cup V_2, \\ &\pi_U = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1,\ \sigma \to \sigma_2\}, \\ &\pi_P = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1 \sigma_2\}. \end{aligned}$$

Dokazaćemo da je $L_1 \cup L_2 = L(G_U, \sigma)$ i $L_1 L_2 = L(G_P, \sigma)$.

Neka je $w \in L_1 \cup L_2$. Tada je $w \in L_1$ ili $w \in L_2$, što znači da $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w$ ili $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} w$, odakle dobijamo $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$ ili $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, jer gramatika G_U obuhvata obe gramatike G_1 i G_2. Kako $\sigma \Rightarrow \sigma_1$ i $\sigma \Rightarrow \sigma_2$, to u oba slučaja dobijamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$. Prema tome, $w \in L(G_U, \sigma)$, čime smo dokazali $L_1 \cup L_2 \subseteq L(G_U, \sigma)$.

Obratno, neka je $w \in L(G_U, \sigma)$, tj. $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$. Prvi korak u ovom izvođenju mora biti ili $\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_1$ ili $\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_2$, tj. imamo

$$\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w \qquad \text{ili} \qquad \sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w.$$

Međutim, iz definicije gramatike G_U je jasno da izvođenje $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, odnosno $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, ako postoji, mora biti izvođenje u G_1, odnosno G_2. Prema tome

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w \qquad \text{ili} \qquad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} w,$$

odakle sledi da je $w \in L_1 \cup L_2$, što znači da je $L(G_U, \sigma) \subseteq L_1 \cup L_2$. Ovim smo dokazali da je $L_1 \cup L_2 = L(G_U, \sigma)$.

Uzmimo $w \in L_1 L_2$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in L_1$ i $v \in L_2$, tj.

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} u \qquad \text{i} \qquad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} v,$$

a kako gramatika G_P obuhvata obe gramatike G_1 i G_2, to je

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} u \qquad \text{i} \qquad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} v.$$

Odavde prema Teoremi 2.4.2 dobijamo

$$\sigma_1 \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} uv = w,$$

pa je, prema tome,

$$\sigma \Rightarrow_{G_P} \sigma_1 \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w,$$

što znači da je $w \in L(G_P, \sigma\}$, čime smo dokazali da je $L_1 L_2 \subseteq L(G_P, \sigma)$.

Obratno, uzmimo $w \in L(G_P, \sigma)$. Tada postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w$, čiji prvi korak može biti samo $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} \sigma_1 \sigma_2$, odakle sledi da postoji izvođenje

$$\sigma_1 \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w.$$

Odavde, prema Teoremi 6.1.1, sledi da je $w = uv$, za neke $u, v \in X^*$, i da postoje izvođenja

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} u \qquad \text{i} \qquad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} v.$$

Jasno je da je prvo od ovih izvođenja ustvari izvođenje u G_1, a drugo je izvođenje u G_2. Prema tome, dobili smo da je $u \in L_1$, $v \in L_2$ i $w = uv$, što znači da je $w \in L_1L_2$, čime smo dokazali da je $L(G_P, \sigma) \subseteq L_1L_2$. Dakle, dokazali smo da je $L_1L_2 = L(G_P, \sigma)$.

(b) Uzmimo da je $L = L(G, \sigma)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ i neki $\sigma \in V \setminus X$. Konstruišimo gramatiku $G' = (V', X, \pi')$ sa:

$$V' = V \cup \{\sigma'\}, \quad \text{gde } \sigma' \notin V, \quad \text{i} \quad \pi' = \pi \cup \{\sigma' \to \sigma\sigma', \sigma' \to e\},$$

i dokazžimo da je $L^{(*)} \subseteq L(G', \sigma')$.

Najpre ćemo indukcijom dokazati da je $L^n \subseteq L(G', \sigma')$, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$. Za $n = 0$, to tvrđenje važi zbog prisustva pravila $\sigma' \to e$ u π'. Za proizvoljnu reč $w \in L$ imamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, pa dakle i $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$, pa s obzirom da $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} e$, na osnovu Teoreme 2.4.2 dobijamo $\sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} we = w$. Prema tome

$$\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w,$$

što znači da je $w \in L(G', \sigma')$, čime smo dokazali da je $L \subseteq L(G', \sigma')$.

Pretpostavimo da je $L^n \subseteq L(G', \sigma')$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i dokažimo da je $L^{n+1} \subseteq L(G', \sigma')$. Uzmimo $w \in L^{n+1}$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in L$, $v \in L^n$. Prema indukcijskoj pretpostavci imamo $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v$, dok sa druge strane imamo $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G u$, odnosno $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u$, odakle, prema Teoremi 2.4.2, sledi

$$\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} uv = w.$$

Dakle, $w \in L(G', \sigma')$, što znači da je $L^{n+1} \subseteq L(G', \sigma')$, što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da je $L^{(*)} \subseteq L(G', \sigma')$.

Dokažimo sada da je $L(G', \sigma') \subseteq L^{(*)}$. Uvedimo oznake

$$K = L(G', \sigma') \quad \text{i} \quad K_n = \{w \in K \mid |w| \leq n\},\ n \in \mathbb{N}^0.$$

Kako je $K = \cup_{n\in\mathbb{N}^0} K_n$, to je dovoljno dokazati da je $K_n \subseteq L^{(*)}$, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$, što će biti dokazano indukcijom.

Jasno je da je $K_0 \subseteq L^{(*)}$. Pretpostavimo da je $K_n \subseteq L^{(*)}$, za neki $n \in \mathbb{N}^0$, i dokažimo da je $K_{n+1} \subseteq L^{(*)}$. Uzmimo proizvoljan $w \in K_{n+1}$. Ako je $w = e$, tada je $w \in L^{(*)}$. Neka je $w \neq e$. Tada prvi korak u izvođenju $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$ mora biti $\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma'$, tj. imamo

$$\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w.$$

Prema Teoremi 6.1.1, $w = uv$, za neke $u, v \in X^*$, pri čemu važi

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u \qquad \text{i} \qquad \sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v.$$

Jasno je da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u$ ustvari izvođenje u G, što znači da je $u \in L$, a sa druge strane, iz $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v$ dobijamo da je $v \in K_n$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke dobijamo da je $v \in L^i$, za neki $i \in \mathbb{N}^0$. Prema tome, $w = uv \in LL^i = L^{i+1} \subseteq L^{(*)}$, što dokazuje da je $L(G', \sigma') \subseteq L^{(*)}$. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. $\square$

Prethodnom teoremom smo dokazali da za proizvoljan konačan alfabet X, klasa kontekstno-nezavisnih jezika u X^* je zatvorena za uniju, proizvod i zvezda operaciju. Međutim, ova klasa nije zatvorena za presek i komplement, što će biti dokazano kasnije, Teoremom 6.4.2. Međutim, ta klasa je zatvorena za preseke sa raspoznatljivim jezicima, što dokazujemo sledećom teoremom:

Teorema 6.1.3. *Neka je X konačan alfabet. Ako je $L_1 \subseteq X^*$ raspoznatljiv, a $L_2 \subseteq X^*$ je kontekstno-nezavisan jezik, tada je i $L_1 \cap L_2$ kontekstno-nezavisan jezik.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ konačan automat koji raspoznaje L_1 skupom $T \subseteq A$. Kako je klasa kontekstno-nezavisnih jezika zatvorena za uniju, to bez umanjenja opštosti dokaza možemo uzeti da je skup T jednoelementan, tj. $T = \{t\}$.

Uzmimo da je $L_2 = L(G, \sigma)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ i $\sigma \in V \setminus A$. Definišimo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$ na sledeći način: uzećemo da je

$$V' = X \cup (A \times V \times A),$$

a da se π' sastoji od pravila sledećih oblika

(a) $(a, \alpha, b) \to (a, \alpha_1, c_1)(c_1, \alpha_2, c_2) \cdots (c_{m-1}, \alpha_m, b)$, za proizvoljno pravilo $\alpha \to \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ iz π, gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$, i proizvoljne $a, c_1, \ldots, c_{m-1}, b \in A$;

(b) $(a, u, b) \to u$, ako je $au = b$ u automatu $\mathcal{A}$.

Neposredno se proverava da je $L_1 \cap L_2 = L(G', \sigma')$, gde je $\sigma' = (a_0, \sigma, t)$. $\square$

Na kraju ćemo dokazati zatvorenost kontekstno-nezavisnih jezika za homomorfizme slobodnih monoida.

Teorema 6.1.4. *Neka su X i Y konačni alfabeti i $\varphi : X^* \to Y^*$ je homomorfizam. Tada za svaki kontektstno-nezavisan jezik $L \subseteq X^*$, $L\varphi$ je kontekstno-nezavisan jezik u Y^*.*

Dokaz. Neka je $L = L(G, \sigma)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ i $\sigma \in V \setminus X$. Jasno je da se φ može proširiti do homomorfizma $\psi : V^* \to ((V \setminus X) \cup Y)^*$, stavivši

$$\alpha\psi = \begin{cases} \alpha\varphi, & \text{ako je } \alpha \in X, \\ \alpha, & \text{ako je } \alpha \in V \setminus X. \end{cases}$$

Dalje, neka je $\pi\psi = \{\alpha\psi \to u\psi \mid \alpha \to u \text{ je pravilo iz } \pi\}$. Jasno je da je $G\psi = (V\psi, Y, \pi\psi)$ kontekstno-nezavisna gramatika, i neposredno se proverava da je $L\varphi = L(G\psi, \sigma\psi)$. Prema tome, $L\varphi$ je kontekstno-nezavisan jezik. $\square$

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Bar-Hillel, Perles and Shamir [1961], Chomsky [1959, 1956, 1963], Ginsburg [1966], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995], Wechler [1983]

6.2. Udaljavanje *e*-pravila i trivijalnih pravila

U ovom i narednom poglavlju ćemo pokazati da za svaku kontekstno-nezavisnu gramatiku postoji kontekstno-nezavisna gramatika koja generiše isti jezik, a čija su pravila jednostavnija od pravila prve gramatike. Krenućemo sa udaljavanjem takozvanih *e*-pravila i trivijalnih pravila iz kontekstno-nezavisne gramatike.

Najpre ćemo dokazati sledeću teoremu:

Teorema 6.2.1. *Postoji algoritam kojim se može utvrditi da li jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom sadrži praznu reč ili ne.*

Dokaz. Neka je data kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$. Neka je $U \subseteq V$ skup definisan sa

$$U = \{\alpha \in V \setminus X \mid \alpha \overset{*}{\Rightarrow} e\}.$$

Dokazaćemo najpre da postoji algoritam za određivanje skupa U. Naime, definisaćemo niz $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova od $V \setminus X$ sa

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\alpha \in V \setminus X \mid (\alpha, e) \in \pi\}, \\ U_{n+1} &= U_n \cup \{\alpha \in V \setminus X \mid (\exists u \in U_n^*)\ (\alpha, u) \in \pi\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jasno je da je $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz podskupova od $V \setminus X$ i lako se proverava da je

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Kako je $V \setminus X$ konačan skup, to postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $U_n = U_{n+1}$, i nije teško proveriti da je tada $U = U_n$. Ovim je dokazano da postoji algoritam za određivanje skupa U.

Algoritam kojim se može utvrditi da li jezik $L(G, \sigma)$, za $\sigma \in V \setminus X$ sadrži praznu reč zasnovan je na algoritmu za nalaženje skupa U, jer je $e \in L(G, \sigma)$ ako i samo ako je $\sigma \in U$. $\square$

Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika. Pravila iz π oblika $\alpha \to e$, gde je $\alpha \in V \setminus X$ i e je prazna reč, nazivaćemo *e-pravilima.*

Teorema 6.2.2. *Za proizvoljan kontekstno-nezavisan jezik $L \subseteq X^*$ postoji kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ bez e-pravila koja generiše jezik $L \setminus \{e\}$.*

Dokaz. Neka je $L = L(G_0, \sigma)$, gde je $G_0 = (V, X, \pi_0)$ kontekstno-nezavisna gramatika i $\sigma \in V \setminus X$. Uočimo skup

$$U = \{\alpha \in V \setminus X \mid \alpha \overset{*}{\Rightarrow} e \text{ u } G_0\}.$$

Za reč $w \in V^*$, označimo sa $D(w, U)$ skup svih reči iz V^* koje su nastale iz reči w brisanjem izvesnog broja slova iz skupa U, moguće i nijednog. Neka je $G = (V, X, \pi)$ gramatika sa skupom pravila π definisanim sa

$$\pi = \big\{(\alpha, u) \in (V \setminus X) \times V^+ \,\big|\, (\exists w \in V^*)\ (\alpha, w) \in \pi_0 \ \&\ u \in D(w, U)\big\}. \tag{6.3}$$

Drugim rečima, za proizvoljno pravilo $\alpha \to w$ iz π_0, ako reč w sadrži k javljanja slova iz skupa U, onda to pravilo zamenjujemo sa 2^k pravila oblika $\alpha \to u$, $u \in D(w, U)$, $u \neq e$, u slučaju da je $w \notin U^*$, odnosno sa $2^k - 1$ pravila tog oblika, u slučaju da je $w \in U^*$. Jasno je da gramatika G ne sadrži e-pravila.

Dokazaćemo da je $L(G, \sigma) = L \setminus \{e\}$.

Ako je $\alpha \to u$ pravilo iz π, tada prema definiciji gramatike G imamo da je $\alpha \to w$ pravilo iz π_0, pri čemu je $u \in D(w, U)$. Uzmimo da je

$$w = v_1 v_2 \cdots v_m,$$

za neke $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Iz $u \in D(w, U)$ dobijamo da je

$$u = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j},$$

za neke $i_1, i_2, \dots, i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$, pri čemu za svaki $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_j\}$ je $v_i \overset{*}{\Rightarrow} e$ u G_0. Odavde se neposredno dobija da je $\alpha \Rightarrow w \overset{*}{\Rightarrow} u$ u G_0. Prema tome, svakom pravilu $\alpha \to u$ iz π odgovara neko izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} u$ u G_0, što znači da je relacija π sadržana u polu-kongruenciji $\overset{*}{\Rightarrow}_{G_0}$ na V^*. Kako prema Lemi 2.4.1 imamo da je $\overset{*}{\Rightarrow}_G$ najmanja polukongruencija na V^* koja sadrži π, to je $\overset{*}{\Rightarrow}_G \subseteq \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0}$, što znači da je $L(G, \sigma) \subseteq L(G_0, \sigma) = L$. Konačno, kako $e \notin L(G, \sigma)$, jer π ne sadrži e-pravila, to je $L(G, \sigma) \subseteq L - \{e\}$.

Obratno, da bi smo dokazali da je $L - \{e\} \subseteq L(G, \sigma)$, dovoljno je dokazati da za proizvoljne $\alpha \in V \setminus X$ i $w \in V^+$, $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ povlači $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$. To ćemo dokazati indukcijom po dužini izvođenja $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$.

Uzmimo najpre da je $\alpha \Rightarrow_{G_0} w$. Tada je $\alpha \to w$ pravilo iz π_0, jer je $\alpha \in V \setminus X$, odakle je $\alpha \to w$ pravilo iz π, prema (6.3), odakle je $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$.

Pretpostavimo dalje da je izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ dužine $m > 1$ i pretpostavimo da tvrđenje koje dokazujemo važi za sva izvođenja dužine manje od m. Uočimo najpre da je

$$\alpha \Rightarrow_{G_0} v_1 v_2 \cdots v_k \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w,$$

za neke $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Prema Teoremi 6.1.1, w se može zapisati u obliku $w = u_1 u_2 \cdots u_k$, za neke $u_1, u_2, \dots, u_k \in V^*$, takve da je $v_i \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} u_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, pri čemu dužina ovih izvođenja nije duža od dužine izvođenja $v_1 v_2 \cdots v_k \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, tj. od $m-1$. Prema tome, kad god je $u_i \neq e$, na ta izvođenja možemo primeniti indukcijsku hipotezu, čime dobijamo da je tada $v_i \overset{*}{\Rightarrow}_G u_i$. Neka je $\{i_1, i_2, \dots, i_j\}$ skup svih elemenata iz skupa $\{1, 2, \dots, k\}$ za koje je $u_i \neq e$ i neka je $v = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j}$. Kako je reč v nastala iz reči $v_1 v_2 \cdots v_k$ brisanjem slova iz skupa U, to je $\alpha \to v$ pravilo iz π. Sa druge strane, iz

$$v_{i_1} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_1}, \ \cdots, \ v_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_j},$$

zbog saglasnosti relacije $\overset{*}{\Rightarrow}_G$ dobijamo da je

$$v = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G w.$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\alpha \Rightarrow_G v \overset{*}{\Rightarrow}_G w,$$

što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Za jezik $L \subseteq X^+$ ćemo govoriti da je X^+-*jezik*. Neposredno iz prethodne teoreme dobija se:

Posledica 6.2.1. *Proizvoljan kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan nekom kontekstno-nezavisnom gramatikom bez e-pravila.*

Primer 6.2.1. Neka je data gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$ sa $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$ i pravilima

$$\sigma \to x\lambda y, \quad \lambda \to x\lambda y, \quad \lambda \to e.$$

Ova gramatika generiše jezik $L(G_0, \sigma) = \{x^n y^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Jasno je da je $U = \{\lambda\}$, a gramatika $G = (V, X, \pi)$ dobijena metodama iz Teoreme 6.2.2 ima pravila

$$\sigma \to x\lambda y, \quad \sigma \to xy, \quad \lambda \to x\lambda y, \quad \lambda \to xy.$$

Na primer, izvođenju

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^3\lambda y^3 \Rightarrow x^3y^3$$

u G_0, u G odgovara izvođenje

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^2xyy^2 = x^3y^3.$$

Primer 6.2.2. Gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$, sa $X = \{x, y\}$ i $V \setminus X = \{\sigma\}$ i pravilima

$$\sigma \to x\sigma y, \quad \sigma \to e,$$

generiše jezik $L = L(G_0, \sigma) = \{x^n y^n \,|\, n \in \mathbb{N}^0\}$ koji sadrži praznu reč. Gramatika dobijena iz G_0 metodom datom u dokazu Teoreme 6.2.2 ima pravila

$$\sigma \to x\sigma y, \quad \sigma \to xy,$$

i generiše jezik $L(G, \sigma) = \{x^n y^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = L \setminus \{e\}$.

Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika. Pravila oblika $\alpha \to \beta$, gde su $\alpha, \beta \in V \setminus X$, nazivamo *trivijalnim pravilima*. Jasno je da se primenom ovakvih pravila vrši samo preimenovanje pomoćnih simbola, što opravdava naziv koji smo im dali. Sledeća teorema pokazuje da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika sa trivijalnim pravilima može zameniti kontekstno-nezavisnom gramatikom bez takvih pravila koja generiše isti jezik.

Teorema 6.2.3. *Proizvoljan kontekstno-nezavisan jezik može biti generisan nekom kontekstno-nezavisnom gramatikom bez trivijalnih pravila.*

Dokaz. Neka je $L = L(G_0, \sigma)$ jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom $G_0 = (V, X, \pi_0)$, za $\sigma \in V \setminus X$. Definišimo novu gramatiku $G_1 = (V, X, \pi_1)$ na sledeći način: Uzećemo da se skup pravila π_1 sastoji iz svih pravila iz π_0 i iz svih parova $(\alpha, u) \in (V \setminus X) \times V^*$ za koje postoji $\beta \in V \setminus X$ takav da važe sledeća dva uslova:

(i) $\beta \to u$ je netrivijalno pravilo iz π_0;
(ii) α i β su povezani nekim nizom

$$\alpha \to \beta \qquad \text{ili} \qquad \alpha \to \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta,\ n \in \mathbb{N},$$

trivijalnih pravila iz π_0.

Takođe ćemo uzeti da je $G = (V, X, \pi)$ gramatika čiji skup pravila π čine sva netrivijalna pravila iz π_1. Dokazaćemo da je $L(G_0, \sigma) = L(G, \sigma)$, pri čemu će nam gramatika G_1 služiti kao pomoćna gramatika. To znači da za proizvoljnu reč $w \in X^*$ treba dokazati da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ ako i samo ako je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$. Kako gramatika G_1 obuhvata gramatike G_0 i G, to izvođenja u njoj nećemo posebno označavati indeksom G_1, kao što ćemo činiti u slučaju izvođenja u gramatikama G_0 i G.

Neka je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$. Posmatrajmo izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w \tag{6.4}$$

u G_1. Ako se u ovom izvođenju ne koriste trivijalna pravila, tada je jasno da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, što i treba dokazati.

Uzmimo da se u izvođenju (6.4) trivijalna pravila koriste k puta, gde je $k \geq 1$. Neka je $w_1 \Rightarrow w_2$ poslednji korak u tom izvođenju kod koga se koristi neko trivijalno pravilo, recimo pravilo $\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in V \setminus X$. Tada se izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ može zapisati u obliku

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \Rightarrow w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w,$$

pri čemu se u izvođenju $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$ ne koriste trivijalna pravila. Iz pretpostavke da je u $w_1 \Rightarrow w_2$ korišćeno pravilo $\alpha \to \beta$ dobijamo da je $w_1 = p\alpha q$ i $w_2 = p\beta q$, za neke $p, q \in V^*$. Prema Teoremi 6.1.1, $w = p'uq'$, za neke $p', u, q' \in V^*$, takve da postoje izvođenja

$$p \overset{*}{\Rightarrow} p', \qquad \beta \overset{*}{\Rightarrow} u, \qquad q \overset{*}{\Rightarrow} q' \tag{6.5}$$

u kojima se koriste samo pravila koja se koriste i u izvođenju $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$, što znači da se u tim izvođenjima ne koriste trivijalna pravila. Neka je $\beta \Rightarrow v$

prvi korak u izvođenju $\beta \stackrel{*}{\Rightarrow} u$. Jasno je da je tada $\beta \to v$ pravilo iz π_0, i to netrivijalno, jer smo rekli da se u izvođenju $\beta \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ ne koriste trivijalna pravila. Prema tome, imamo da je $\alpha \to \beta$ trivijalno pravilo iz π_0 i $\beta \to v$ je netrivijalno pravilo iz π_0, odakle je $\alpha \to v$ netrivijalno pravilo iz π_1, odnosno pravilo iz π, prema definiciji gramatika G_1 i G. Korišćenjem tog pravila dobijamo da važi

$$w_1 = p\alpha q \Rightarrow pvq. \tag{6.6}$$

Sa druge strane, iz $p \stackrel{*}{\Rightarrow} p'$, $v \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ i $q \stackrel{*}{\Rightarrow} q'$, prema Teoremi 2.4.2 dobijamo da postoji izvođenje

$$pvq \stackrel{*}{\Rightarrow} p'uq' = w \tag{6.7}$$

u kome se koriste samo ona pravila koja se koriste u prelazima $p \stackrel{*}{\Rightarrow} p'$, $v \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ i $q \stackrel{*}{\Rightarrow} q'$. To znači da se u (6.7) ne koriste trivijalna pravila. Dakle, iz (6.6) i (6.7) dobijamo da postoji izvođenje $w_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ u kome se ne koriste trivijalna pravila, čime smo dobili da se izvođenje (6.4) može zameniti izvođenjem u kome se koristi samo $k-1$ trivijalnih pravila, odnosno da se broj korišćenja trivijalnih pravila u tom izvođenju može smanjiti, i ako ponovimo taj postupak još $k-1$ put, dobićemo izvođenje reči w iz σ u kome se ne koristi nijedno trivijalno pravilo, što znači da je $\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow}_G w$.

Obratno, uzmimo da je $\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow}_G w$ i posmatrajmo ga kao izvođenje

$$\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow} w \tag{6.8}$$

u G_1. Ako se u njemu koriste samo pravila iz π_0, tada je jasno da je $\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, što i treba dokazati.

Uzmimo da se u izvođenju pravila iz skupa $\pi_1 \setminus \pi_0$ koriste k puta. Zapišimo izvođenje (6.8) u obliku

$$\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1 \Rightarrow w_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} w, \tag{6.9}$$

pri čemu je izvođenje $w_1 \Rightarrow w_2$ zasnovano na primeni pravila $\alpha \to u$ iz $\pi_1 \setminus \pi_0$. To znači da je $w_1 = p\alpha q$ i $w_2 = puq$, za neke $p, q \in V^*$, dok prema definiciji skupa π_1 imamo da postoji netrivijalno pravilo $\beta \to u$ u π_0 i niz

$$\alpha \to \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta, \qquad n \in \mathbb{N}^0,$$

trivijalnih pravila iz π_0. Sada je jasno da se izvođenje $w_1 \Rightarrow w_2$ može u (6.9) zameniti izvođenjem

$$w_1 = p\alpha q \Rightarrow p\alpha_1 q \Rightarrow \cdots \Rightarrow p\alpha_n q \Rightarrow p\beta q \Rightarrow puq = w_2$$

u kome se ne koriste pravila iz $\pi_1 \setminus \pi_0$. Prema tome, u izvođenju (6.8) broj primena pravila iz $\pi_1 \setminus \pi_0$ možemo smanjiti, sve dok ih potpuno ne eliminišemo, posle čega dobijamo izvođenje u G_0. Prema tome, $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primer 6.2.3. Neka je data gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$, gde je $V \setminus X = \{\sigma, \lambda, \mu\}$, $X = \{x, y\}$ i π_0 se sastoji iz pravila

$$\begin{array}{lll} \sigma \to \lambda, & \lambda \to \mu, & \mu \to \sigma \\ \sigma \to x^2, & \lambda \to x, & \mu \to y. \end{array}$$

Ova gramatika generiše jezik $L = L(G_0, \sigma) = \{x^2, x, y\}$. Kako u π_0 imamo sledeće nizove trivijalnih pravila

$$\begin{array}{ll} \mu \to \sigma, & \lambda \to \mu \to \sigma, \\ \sigma \to \lambda, & \mu \to \sigma \to \lambda, \\ \lambda \to \mu, & \sigma \to \lambda \to \mu, \end{array}$$

to netrivijalnim pravilima $\sigma \to x^2$, $\lambda \to x$ i $\mu \to y$ gramatike G_0 pridružujemo redom pravila

$$\mu \to x^2,\ \lambda \to x^2, \qquad \sigma \to x,\ \mu \to x, \qquad \lambda \to y,\ \sigma \to y,$$

čime smo dobili pravila

$$\begin{array}{lll} \sigma \to x^2, & \mu \to x^2, & \lambda \to x^2, \\ \lambda \to x, & \sigma \to x, & \mu \to x, \\ \mu \to y, & \lambda \to y, & \sigma \to y, \end{array}$$

nove gramatike $G = (V, X, \pi)$ koja nema trivijalnih pravila i koja generiše jezik L, tj. $L = L(G, \sigma)$.

Ovaj primer nam takođe pokazuje da smo u definiciji pravila iz π_1 morali koristiti nizove trivijalnih pravila, a ne samo trivijalna pravila. Naime, ako bi smo koristili samo trivijalna pravila, tada bi smo dobili gramatiku $G' = (V, X, \pi')$ sa pravilima

$$\sigma \to x^2, \quad \mu \to x^2, \quad \lambda \to x, \quad \sigma \to x, \quad \mu \to y, \quad \lambda \to y,$$

koja generiše jezik $L(G', \sigma) = \{x^2, x\} \neq L$.

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Chomsky [1959], Ginsburg [1966], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995]

6.3. Gramatike u Normalnoj formi Chomsky

Ovde ćemo nastaviti sa redukcijama kontekstno-nezavisnih gramatika. Uvešćemo pojmove čiste gramatike i gramatike u Normalnoj formi Chomsky i dokazati da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika može zameniti nekom čistom gramatikom, odnosno gramatikom u Normalnoj formi Chomsky, koja generiše isti jezik.

Kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazivamo *čistom gramatikom* ako je svako pravilo iz π ili oblika

$$\alpha \to \beta, \qquad \text{gde je } \alpha \in V \setminus X,\ \beta \in (V \setminus X)^+,\ |\beta| > 1,$$

ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V \setminus X,\ x \in X.$$

Uočimo da čista gramatika nema ni e-pravila, ni trivijalnih pravila.

Sada dokazujemo sledeće:

Teorema 6.3.1. *Svaki kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan čistom gramatikom.*

Dokaz. Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika koja generiše jezik $L = L(G, \sigma)$, $\sigma \in V \setminus X$. Prema Teoremama 6.2.2 i 6.2.3, ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da gramatika G ne sadrži e-pravila niti trivijalna pravila. Proizvoljnom slovu $x \in X$ pridružimo simbol $\beta_x \notin V$ i stavimo da je

$$V' = V \cup \{\beta_x \,|\, x \in X\}.$$

Pravila iz π su ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V \setminus X,\ x \in X, \tag{6.10}$$

ili su oblika

$$\alpha \to u, \qquad \text{gde je } u \in V^+ \setminus V. \tag{6.11}$$

Pravila oblika (6.10) nećemo dirati, dok ćemo svako pravilo iz π oblika (6.11) zameniti pravilom oblika

$$\alpha \to u', \tag{6.12}$$

pri čemu je u' reč dobijena iz u zamenom svakog terminalnog simbola x koji se javlja u u sa β_x. Označimo sa π' novi skup pravila dobijen iz π

zadržavanjem svih pravila iz π oblika (6.10), zamenom svih pravila oblika (6.11) odgovarajućim pravilima oblika (6.12), i dodavanjem novih pravila

$$\beta_x \to x, \qquad \text{za svaki } x \in X. \tag{6.13}$$

Jasno je da je $G' = (V', X, \pi')$ čista gramatika. Ostaje još samo da se dokaže da je $L(G, \sigma) = L(G', \sigma)$.

Uočimo proizvoljno neposredno izvođenje

$$p\alpha q \Rightarrow_G puq, \tag{6.14}$$

u gramatici G koje se koristi pravilom oblika (6.11), gde su $p, q \in V^*$. Kako u G imamo pravilo $\alpha \to u'$, gde je u' reč dobijena iz u zamenom svakog terminalnog slova $x \in X$ koje se javlja u u novim pomoćnim simbolom β_x, to imamo da je $p\alpha q \Rightarrow_{G'} pu'q$, sa druge strane, reč u se može dobiti iz u' ponovnom zamenom simbola β_x sa x, pa koristeći pravila iz π' oblika (6.13) dobijamo da je $pu'q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} puq$. Prema tome, neposredno izvođenje (6.14) u G koje se koristi pravilom oblika (6.11) možemo zameniti u G' izvođenjem

$$p\alpha q \Rightarrow_{G'} pu'q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} puq,$$

pa ako to učinimo sa svim izvođenjima u G koja koriste pravila oblika (6.11), dobićemo da svakom izvođenju $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, u G, $w \in X^+$, odgovara neko izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$ u G'. Prema tome, $L(G, \sigma) \subseteq L(G', \sigma)$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da svakom izvođenju

$$\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w \tag{6.15}$$

u G', gde je $\alpha \in (V \setminus X)^+$ i $w \in X^+$, odgovara neko izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$ u G. To će biti dokazano indukcijom po dužini izvođenja (6.15).

Uzmimo najpre da se radi o neposrednom izvođenju $\alpha \Rightarrow_{G'} w$. Neka je $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$ i neke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V \setminus X$. Prema Teoremi 6.1.1, $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, za neke $w_1, w_2, \ldots, w_n \in X^+$, pri čemu je $\alpha_i \Rightarrow_{G'} w_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jasno je da je svako od tih izvođenja dobijeno primenom pravila oblika (6.10), što znači da je $\alpha_i \Rightarrow_G w_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odakle prema Teoremi 2.4.2 dobijamo da je

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1 w_2 \cdots w_n = w,$$

što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo dalje da je (6.15) izvođenje dužine $m > 1$ i da tvrđenje koje dokazujemo važi za izvođenja oblika (6.15) dužine manje od m. Neka je $\alpha \Rightarrow_{G'} u$, za $u \in V^*$, prvi korak izvođenja (6.15). Pretpostavimo da je to izvođenje dobijeno primenom pravila $\beta \to v$ iz π'. To znači da je $\alpha = p\beta q$ i $u = pvq$, za neke $p, q \in (V')^*$. Kako je $\alpha \in (V \setminus X)^+$, to je jasno da je $\beta \in V \setminus X$ i $p, q \in V^*$. Ako je $\beta \to v$, pravilo iz π, tada je $\alpha \Rightarrow_G u$, što i želimo dokazati. U suprotnom je $v \in (V')^+$, i v se može zapisati u obliku

$$v = v_1 \beta_{x_1} v_2 \beta_{x_2} \cdots v_k \beta_{x_k} v_{k+1},$$

za neke $v_1, v_2, \cdots, v_{k+1} \in (V \setminus X)^*$ i $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$. Prema definiciji pravila gramatike G', pravilo $\beta \to v$ je dobijeno iz nekog pravila

$$\beta \to v_1 x_1 v_2 x_2 \cdots v_k x_k v_{k+1}, \tag{6.16}$$

iz π. Sa druge strane, iz

$$u = pvq = pv_1 \beta_{x_1} v_2 \beta_{x_2} \cdots v_k \beta_{x_k} v_{k+1} q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w,$$

prema Teoremi 6.1.1 sledi da je

$$w = w_1 s_1 w_2 s_2 \cdots w_k s_k w_{k+1},$$

pri čemu postoje izvođenja

$$pv_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_1, \qquad v_i \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_i, \ \text{za } 2 \leq i \leq k, \qquad v_{k+1} q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_{k+1}, \tag{6.17}$$

$$\beta_{x_i} \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} s_i, \quad \text{za } 1 \leq i \leq k, \tag{6.18}$$

dužine ne veće od dužine izvođenja $u \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$. Sada na izvođenja (6.17) možemo primeniti indukcijsku pretpostavku, čime dobijamo da postoje izvođenja

$$pv_1 \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1, \qquad v_i \overset{*}{\Rightarrow}_G w_i, \quad \text{za } 2 \leq i \leq k, \qquad v_{k+1} q \overset{*}{\Rightarrow}_G w_{k+1} \tag{6.19}$$

u G. Sa druge strane, za proizvoljan $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, jedino pravilo u π' koje sadrži β_{x_i} na levoj strani je pravilo $\beta_{x_i} \to x_i$, odakle prema (6.18) dobijamo da je $s_i = x_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, što znači da je

$$w = w_1 x_1 w_2 x_2 \cdots w_k x_k w_{k+1}. \tag{6.20}$$

Prema tome, korišćenjem pravila (6.16) iz π dolazimo do izvođenja

$$\alpha = p\beta q \Rightarrow_G pv_1 x_1 v_2 x_2 \cdots v_k x_k v_{k+1} q, \tag{6.21}$$

dok iz (6.19) i (6.20), prema Teoremi 2.4.2, dobijamo

$$pv_1 x_1 v_2 x_2 \cdots v_k x_k v_{k+1} q \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1 x_1 w_2 x_2 \cdots w_k x_k w_{k+1} = w. \tag{6.22}$$

Dakle, iz (6.21) i (6.22) dobijamo da je $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, što je i trebalo dokazati. Dakle, $L(G', \sigma) \subseteq L(G, \sigma)$, što je upotpunilo dokaz teoreme. $\square$

Primer 6.3.1. Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$ sa $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$, $X = \{x, y\}$ i skupom π pravila datim sa

$$\sigma \to x\lambda y, \qquad \sigma \to xy, \qquad \lambda \to x\lambda y, \qquad \lambda \to xy.$$

Podsetimo se da smo do ove gramatike došli u Primeru 6.2.1 uklanjanjem e-pravila.

Metodama koje su date u dokazu prethodne teoreme dobijamo gramatiku $G' = (V', X, \pi')$, gde je $V' = V \cup \{\beta_x, \beta_y\}$ i skup π' se sastoji iz pravila

$$\begin{array}{llll} \sigma \to \beta_x\lambda\beta_y, & \sigma \to \beta_x\beta_y, & \lambda \to \beta_x\lambda\beta_y, & \lambda \to \beta_x\beta_y, \\ \beta_x \to x, & \beta_y \to y. & & \end{array}$$

Na primer, izvođenju

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^2(xy)y^2 = x^3y^3$$

u gramatici G odgovara u gramatici G' izvođenje

$$\sigma \Rightarrow \beta_x\lambda\beta_y \Rightarrow \beta_x^2\lambda\beta_y^2 \Rightarrow \beta_x^2(\beta_x\beta_y)\beta_y^2 = \beta_x^3\beta_y^3 \overset{*}{\Rightarrow} x^3y^3.$$

Za kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ kažemo da je u *Normalnoj formi Chomsky* ako je svako pravilo iz π ili oblika

$$\alpha \to \beta\gamma, \qquad \text{gde su } \alpha, \beta, \gamma \in V \setminus X, \tag{6.23}$$

ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V \setminus X,\ x \in X. \tag{6.24}$$

Teorema 6.3.2. *Svaki kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan gramatikom u Normalnoj formi Chomsky.*

Dokaz. Neka je $L = L(G, \sigma)$ X^+-jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom $G = (V, X, \pi)$. Prema Teoremi 6.3.1, ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je G čista gramatika. Prema tome, pravila iz π mogu biti ili oblika (6.23) ili oblika (6.24) ili oblika

$$\alpha \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k, \qquad \text{gde su } \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in V \setminus X,\ k \geq 3. \tag{6.25}$$

Kako su pravila oblika (6.23) i (6.24) već u Normalnoj formi Chomsky, to ćemo se zadržati samo na pravilima oblika (6.25), i svako od takvih pravila ćemo zameniti nekim novim pravilima koja su u Normalnoj formi Chomsky. Naime, svakom pravilu oblika (6.25) pridružićemo skup

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-2}\} \tag{6.26}$$

novih pomoćnih simbola, tako da skupovi oblika (6.26) koji odgovaraju različitim pravilima iz π oblika (6.25) budu međusobno disjunktni, i pravilo (6.25) ćemo zameniti nizom pravila

(6.27) $\alpha \to \alpha_1\gamma_1,\ \gamma_1 \to \alpha_2\gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_{k-3} \to \alpha_{k-2}\gamma_{k-2},\ \gamma_{k-2} \to \alpha_{k-1}\alpha_k.$

Kada to učinimo sa svim pravilima iz π oblika (6.25), dobićemo novi rečnik V' i novi skup pravila π', odnosno dobićemo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$, koja je očigledno u Normalnoj formi Chomsky. Ostaje da se dokaže da je $L = L(G, \sigma) = L(G', \sigma)$.

Primetimo najpre da svakom pravilu iz π oblika (6.25) odgovara u gramatici G' izvođenje

$$\alpha \underset{G'}{\Rightarrow} \alpha_1\gamma_1 \underset{G'}{\Rightarrow} \alpha_1\alpha_2\gamma_2 \underset{G'}{\Rightarrow} \cdots \underset{G'}{\Rightarrow} \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k,$$

odakle dobijamo da svakom izvođenju u G odgovara neko izvođenje u G'. Prema tome, $L(G, \sigma) \subseteq L(G', \sigma)$.

Uočimo dalje gramatiku $G'' = (V', X, \pi \cup \pi')$. Kako ona obuhvata obe gramatike G i G', to neće biti opasnosti od zabune ako pri označavanju izvođenja u G'' izostavimo pisanje indeksa G''. Da bi smo dokazali inkluziju $L = (G', \sigma) \subseteq L(G, \sigma)$, dovoljno je dokazati da se iz proizvoljnog izvođenja

$$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_m = w, \tag{6.28}$$

gde je $m \in \mathbb{N}$ i $w \in X^*$, mogu eliminisati primene svih pravila iz $\pi' \setminus \pi$, odnosno svi simboli iz $V' \setminus V$.

Pretpostavimo da se pravila iz $\pi' \setminus \pi$ u izvođenju (6.28) koriste n puta, gde je $n \in \mathbb{N}$, i dokažimo da se taj broj može smanjiti, t.j. da postoji neko drugo izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u G'' u kome se pravila iz $\pi' \setminus \pi$ koriste manje od n puta.

Neka je $w_{i_1} \Rightarrow w_{i_1+1}$, gde je $0 \leq i_1 < m$, proizvoljno neposredno izvođenje pri kome se koristi pravilo $\alpha \to \alpha_1\gamma_1$ iz (6.27). To znači da važi

$$w_{i_1} = p_1\alpha q_1 \Rightarrow p_1\alpha_1\gamma_1 q_1 = w_{i_1+1},$$

za neke $p_1, q_1 \in (V')^*$. Simbol γ_1, koji je ovom prilikom uveden u izvođenje (6.28), izgubiće se prilikom primene pravila $\gamma_1 \to \alpha_2\gamma_2$ u nekom neposrednom izvođenju $w_{i_2} \Rightarrow w_{i_2+1}$, gde je $i_1 < i_2 < m$. U međuvremenu, tokom izvođenja $w_{i_1+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$, on će biti samo prepisivan, dok će se zamene pomoćnih simbola rečima iz $(V')^*$, prema pravilima gramatike G'', u rečima w_{i_1+1}, $\ldots, w_{i_2-1}$, vršiti levo i desno od tog simbola. Na taj način dobijamo da je

$$w_{i_2} = p_2\alpha_1^{(2)}\gamma_1 q_2,$$

gde su $p_2, \alpha_1^{(2)}, q_2 \in (V')^*$ reči za koje važi

$$p_1 \overset{*}{\Rightarrow} p_2, \qquad \alpha_1 \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1^{(2)}, \qquad q_1 \overset{*}{\Rightarrow} q_2. \tag{6.29}$$

Pri tome su sva pravila koja se koriste u sva tri izvođenja iz (6.29) tačno ona koja se koriste u izvođenju $w_{i_1+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$, odakle lako zaključujemo da ukupan broj primena pravila iz $\pi' \setminus \pi$ u izvođenjima iz (6.29) nije veći od broja primena tih pravila u izvođenju $w_{i_1+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$.

Nastavljajući na isti način dalje, dobićemo da se izvođenje (6.28) može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\sigma = w_0 \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_1} &= p_1\alpha q_1 \Rightarrow p_1\alpha_1\gamma_1 q_1 = w_{i_1+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2} &= p_2\alpha_1^{(2)}\gamma_1 q_2 \Rightarrow p_2\alpha_1^{(2)}\alpha_2\gamma_2 q_2 = w_{i_2+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_3} &= p_3\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\gamma_2 q_3 \Rightarrow p_3\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3\gamma_3 q_3 = w_{i_3+1} \\
\dots \quad & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{k-1}} &= p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\gamma_{k-2} q_{k-1} \\
&\quad \Rightarrow p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1} = w_{i_{k-1}+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w, &
\end{aligned}$$

pri čemu su $p_j, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{j-1}^{(j)}, q_j \in (V')^*$, $1 \le j \le k-1$, reči za koje važi

$$p_j \overset{*}{\Rightarrow} p_{j+1},\ \alpha_1^{(j)} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1^{(j+1)},\ \cdots\ ,\ \alpha_{j-1}^{(j)} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_{j-1}^{(j+1)},\ q_j \overset{*}{\Rightarrow} q_{j+1}, \tag{6.30}$$

za $1 \le j \le k-2$. Pri tome, kao i napred, dobijamo da ukupan broj primena pravila iz $\pi' \setminus \pi$ u izvođenjima iz 6.30 nije veći od broja primena tih pravila u izvođenju $w_{i_j+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{j+1}}$, za svaki j, $1 \le j \le k-2$. Prema tome, imamo izvođenja

$$p_1 \overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}, \qquad \alpha_i \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_i^{(k-1)},\ \text{za } 1 \le i \le k-2, \qquad q_1 \overset{*}{\Rightarrow} q_{k-1}, \tag{6.31}$$

u kojima ukupan broj primena pravila iz $\pi' \setminus \pi$ nije veći od ukupnog broja primena tih pravila u izvođenjima

$$w_{i_1+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2},\ w_{i_2+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_3},\ \cdots\ ,\ w_{i_{k-2}+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{k-1}}. \tag{6.32}$$

Sada iz 6.31, prema Teoremi 2.4.2, dobijamo da postoji izvođenje

$$p_1\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k q_1 \overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1}, \tag{6.33}$$

u kome broj primena pravila iz $\pi' \setminus \pi$ nije veći od ukupnog broja primena tih pravila u izvođenjima iz 6.32.

Dakle, imamo da važi

$$
\begin{aligned}
\sigma = w_0 &\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_1} = p_1\alpha q_1 \\
&\Rightarrow p_1\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k q_1 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1} = w_{i_{k-1}+1} \\
&\overset{*}{\Rightarrow} w,
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

prema 6.33, koristeći pravilo $\alpha \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ iz π. Jasno je da se u izvođenju 6.34 pravila iz $\pi'\setminus\pi$ primenjuju manji broj puta nego u (6.28), što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primer 6.3.2. Gramatiku čiju smo redukciju započeli u Primeru 6.2.1, doveli smo u Primeru 6.3.1 do čiste gramatike sa pravilima

$$
\begin{array}{llll}
\sigma \to \beta_x\lambda\beta_y, & \sigma \to \beta_x\beta_y, & \lambda \to \beta_x\lambda\beta_y, & \lambda \to \beta_x\beta_y, \\
\beta_x \to x, & \beta_y \to y. & &
\end{array}
$$

Ako nastavimo redukciju dalje, na način prikazan u dokazu Teoreme 6.3.2, dolazimo do gramatike u Normalnoj formi Chomsky sa pravilima

$$
\begin{array}{llll}
\sigma \to \beta_x\gamma, & \gamma \to \lambda\beta_y, & \sigma \to \beta_x\beta_y, & \lambda \to \beta_x\delta, \\
\delta \to \lambda\beta_y, & \lambda \to \beta_x\beta_y, & \beta_x \to x, & \beta_y \to y,
\end{array}
$$

pri čemu su uvedeni novi pomoćni simboli γ i δ. Jedno od izvođenja reči x^3y^3 u ovoj gramatici je

$$
\begin{aligned}
\sigma &\Rightarrow \beta_x\gamma \Rightarrow x\gamma \Rightarrow x\lambda\beta_y \Rightarrow x\beta_x\delta\beta_y \Rightarrow x^2\delta\beta_y \Rightarrow x^2\lambda\beta_y^2 \\
&\Rightarrow x^2\beta_x\beta_y^3 \Rightarrow x^3\beta_y^3 \Rightarrow x^3y\beta_y^2 \Rightarrow x^3y^2\beta_y \Rightarrow x^3y^3.
\end{aligned}
$$

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Chomsky [1959], Ginsburg [1966], Greibach [1965] Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995]

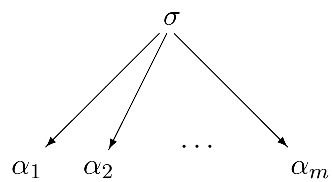
6.4. Stablo izvođenja. Lema o napumpavanju

U ovom odeljku govorimo najpre o predstavljanju izvođenja u kontekstno-nezavisnih gramatikama takozvanim stablima izvođenja, a potom dokazujemo Lemu o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezike, koja je veoma korisna u slučajevima kada treba dokazati da dati jezik nije kontekstno-nezavisan. Koristeći tu lemu, dokazaćemo da klasa kontekstno-nezavisnih jezika nad datim konačnim alfabetom nije zatvorena za presek i uniju, što smo ranije obećali da ćemo učiniti.

Neka je sada data kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$, $\sigma \in V \setminus X$ i izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u G, gde je $w \in V^*$. Tada tom izvođenju odgovara stablo D označeno elementima iz V koje definišemo na sledeći način: Neka je izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ dato sa:

$$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n = w. \tag{6.35}$$

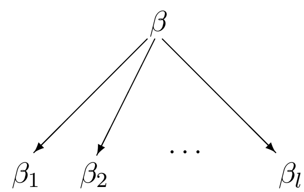
Koren stabla D označen je sa σ. Ako se u izvođenju $\sigma \Rightarrow w_1$ koristi pravilo oblika $\sigma \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$, tada stablo izvođenja $\sigma \Rightarrow w_1$, u oznaci D_1, definišemo sa:



Dalje, neka je definisano stablo izvođenja

$$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_k,$$

gde je $1 \leq k < n$, koje ćemo označiti sa D_k. Neka je neposredno izvođenje $w_k \Rightarrow w_{k+1}$ zasnovano na primeni pravila oblika $\beta \to \beta_1\beta_2\cdots\beta_l$, gde su $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l \in V$. To znači da se jedno od pojavljivanja simbola β u reči w_k zamenjuje sa $\beta_1\beta_2\cdots\beta_l$. Kako tom pojavljivanju simbola β u w_k odgovara jedno određeno pojavljivanje tog simbola kao oznake lista u D_k, to ćemo stablo D_{k+1} dobiti na taj način što ćemo tom čvoru u D_k prikačiti stablo



Na ovaj način smo induktivno definisali niz stabala $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Stablo D_n nazivamo *stablom izvođenja* (6.35).

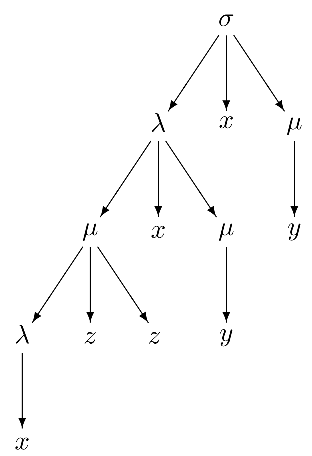
Primer 6.4.1. Posmatrajmo gramatiku $G = (V, X, \pi)$, gde je $V \setminus X = \{\sigma, \lambda, \mu\}$, $X = \{x, y, z\}$ i pravila su

$$\sigma \to \lambda x\mu, \quad \lambda \to \mu x\mu, \quad \mu \to \lambda z^2, \quad \mu \to y, \quad \lambda \to x,$$

izvođenju

$$\sigma \Rightarrow \lambda x\mu \Rightarrow \mu x\mu x\mu \Rightarrow \lambda z^2 x\mu x\mu \Rightarrow \lambda z^2 xyx\mu \Rightarrow xz^2xyx\mu \Rightarrow xz^2xyxy = xz^2(xy)^2,$$

odgovara stablo



Primetimo da, koristeći grafičko predstavljanje stabla D, grane koje polaze iz proizvoljnog čvora stabla D možemo urediti uzimajući, na primer, njihov redosled sleva na desno. Slično možemo urediti i puteve u stablu D koji polaze iz korena. Naime, za svaka dva takva puta p_1 i p_2 postoji čvor a stabla D u kome se oni razdvajaju, odnosno račvaju, pa ako se grana puta p_1 koja izlazi iz a nalazi levo od odgovarajuće grane puta p_2, tada ćemo reći da se put p_1 nalazi levo od puta p_2. Konačno, za dva lista l_1 i l_2 stabla D ćemo reći da se list l_1 nalazi levo od l_2 ako se put koji ide od korena do l_1 nalazi levo od puta koji ide od korena do l_2.

Ako kod stabla D izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w \in V^*$, čitamo oznake listova sleva na desno, pročitaćemo upravo reč w, za koju kažemo da je *rezultat stabla D*. Na primer, u prethodnom primeru, čitanjem oznaka listova, sleva na desno, dobijamo reč $xzzxyxy$.

Pojam stabla izvođenja koristićemo u dokazu sledeće teoreme:

Teorema 6.4.1. (Lema o napumpavanju). *Neka je X konačan alfabet i $L \subseteq X^*$ je beskonačan kontekstno-nezavisan jezik. Tada postoji broj $n \in \mathbb{N}$ takav da svaka reč $w \in L$ dužine $|w| \geq n$ može biti zapisana u obliku*

$$w = puqvr,$$

gde su $p, u, q, v, r \in X^*$ reči za koje važi:

(a) $|uv| \geq 1$;
(b) $|uqv| \leq n$;
(c) $pu^m qv^m r \in L$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$.

Dokaz. Prema Teoremama 6.2.2 i 6.3.2, postoji kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ u Normalnoj formi Čomskog i $\sigma \in V \setminus X$ tako da je $L \setminus \{e\} = L(G, \sigma)$. Neka je k broj pomoćnih simbola gramatike G, tj. $k = |V \setminus X|$, i neka je $n > 2^{k+1}$.

Uzmimo proizvoljnu reč $w \in L$ dužine $|w| \geq n$. Neka je D stablo izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$. Kako je gramatika G u Normalnoj formi Chomsky, to iz proizvoljnog čvora tog stabla koji nije list mogu izlaziti najviše dve grane, pa ako stablo D ima i nivoa, tada ne može imati više od 2^i listova, zbog gornje napomene o broju listova potpunog binarnog stabla. Kako su listovi stabla D označeni slovima reči w, čiji je broj jednak $|w| \geq n > 2^{k+1}$, to stablo D mora imati najmanje $k+2$ nivoa. Prema tome, u stablu D postoji neki put $\mathcal{P}$ dužine ne manje od $k+1$ na kome leže $k+2$ čvora, od kojih je najmanje $k+1$ označeno pomoćnim simbolima. Posmatrajmo poslednja $k+2$ čvora na putu $\mathcal{P}$. Kako su oni označeni simbolima iz $V \setminus X$ kojih ima k, to među nijima postoje dva čvora, recimo a i b, koji su označeni istim pomoćnim simbolom, recimo λ. Uzmimo takođe, da je čvor b na višem nivou od čvora a. Uočimo podstabla D_a i D_b od D generisana redom čvorovima a i b. Rezultate tih stabala označimo redom sa q' i q. Jasno, $q', q \in X^*$ i D_a i D_b su stabla nekih izvođenja $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q'$ i $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$. Kako je D_b pravo podstablo od D_a, jer je b na višem nivou od a, to je q prava podreč od q', što znači da je $q' = uqv$, za neke $u, v \in X^*$ za koje je $|uv| \geq 1$. Dalje, jasno je da je $q' = uqv$ podreč od w, pa se w može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke $p, r \in X^*$. Prema tome, ostaje da se dokaže (b) i (c).

Uslov (b) je posledica činjenice da smo uzeli čvor a među poslednjih $k+2$ čvorova na putu $\mathcal{P}$. Naime, to znači da stablo D_a ima $k+1$ nivo, odnosno najviše $2^{k+1} < n$ listova, što dalje znači da je $|uqv| = |q'| \leq 2^{k+1} < n$, što je i trebalo dokazati.

Posmatrajući stabla D_a i D_b vidimo da postoje izvođenja $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u\lambda v$, $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$ i $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} uqv$, dok posmatrajući celo stablo D vidimo da postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p\lambda r$. Iz $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u\lambda v$, prema Teoremi 2.4.2, sledi $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u^m \lambda v^m$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$, što zajedno sa $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$ i $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p\lambda r$, ponovo prema Teoremi 2.4.2, daje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} pu^m qv^m r$. Dakle, $pu^m qv^m r \in L$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Kao i u slučaju Leme o napumpavanju za raspoznatljive jezike, i Lema o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezike je veoma korisna u dokazivanju da određeni jezici nisu kontekstno-nezavisni.

Primer 6.4.2. Jezik $L = \{x^n y^n x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije kontekstno-nezavisan.

Pre nego što dokažemo ovo tvrđenje, uvešćemo nekoliko novih pojmova. Za reč $w \in X^*$, gde je X proizvoljan alfabet, *granicom* u reči w nazivaćemo bilo koju podreč od w dužine 2 koja se sastoji od različitih slova. Pod *brojem granica* u reči w, u oznaci $B(w)$, podrazumevaćemo broj pojavljivanja takvih podreči u w. Na primer, proizvoljna reč w iz datog jezika L ima tačno dve granice xy i yx, koje dele tu reč na tri odsečka podjednakih dužina, označimo ih sa $s_1(w)$, $s_2(w)$ i $s_3(w)$, što slikovito možemo prikazati na sledeći način

$$\underbrace{xx\cdots x}_{s_1(w)} | \underbrace{yy\cdots y}_{s_2(w)} | \underbrace{xx\cdots x}_{s_3(w)}.$$

Pretpostavimo sada da je L kontekstno-nezavisan jezik. Tada prema Lemi o napumpavanju postoji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslove te leme, i reč $w = x^n y^n x^n$ se može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke reči $p, u, q, v, r \in X^*$ koje ispunjavaju uslove (a), (b) i (c) Leme o napumpavanju. Reči u i v ne mogu sadržati granice, jer u suprotnom dobijamo

$$B(pu^3qv^3r) > 2 \qquad \text{i} \qquad pu^3qv^3r \in L,$$

što nas je dovelo do protivrečnosti. Prema tome, reči u i v su cele sadržane u nekom od odsečaka reči w, ali naravno, u najviše dva od tri odsečka te reči. Zbog toga u reči $w' = pu^2qv^2r \in L$, odsečci $s_1(w')$, $s_2(w')$ i $s_3(w')$ neće biti iste dužine, čime smo ponovo došli do protivrečnosti. Prema tome, odavde zaključujemo da jezik L ne može biti kontekstno-nezavisan.

Primetimo da u prethodnom primeru nismo koristili osobinu (b) iz Leme o napumpavanju. Međutim, ona će biti veoma važna u sledećem primeru:

Primer 6.4.3. Jezik $L = \{x^m y^n x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ nije kontekstno-nezavisan.

Proizvoljna reč $w \in L$ ima tačno tri granice xy, yx i xy, koje dele tu reč na četiri odsečka $s_1(w)$, $s_2(w)$, $s_3(w)$ i $s_4(w)$, pri čemu je $|s_1(w)| = |s_3(w)|$ i $|s_2(w)| = |s_4(w)|$, što možemo prikazati sa:

$$\underbrace{xx\cdots x}_{s_1(w)} | \underbrace{yy\cdots y}_{s_2(w)} | \underbrace{xx\cdots x}_{s_3(w)} | \underbrace{yy\cdots y}_{s_4(w)}.$$

Pretpostavimo sada da je L kontekstno-nezavisan jezik. Tada prema Lemi o napumpavanju postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslove te leme, i za proizvoljne $m, n \geq n_0$ se reč $w = x^m y^n x^m y^n$ može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke reči $p, u, q, v, r \in X^*$ koje ispunjavaju uslove (a), (b) i (c) Leme o napumpavanju. Kao i u prethodnom primeru dokazujemo da reči u i v ne mogu sadržati granice, što znači da su cele sadržane u nekim od četiri odsečaka reči w. Pri tome nam uslov $|uqv| \leq n_0 \leq m, n$ kaže da mogu biti sadržane samo u istom ili u dva uzastopna odsečka, pa ponovo dobijamo da će za reč $w' = pu^2qv^2r$, za koju prema Lemi o napumpavanju znamo da je u L, biti $|s_1(w')| \neq |s_3(w)|$ ili $|s_2(w')| \neq |s_4(w)|$, čime smo opet došli do protivrečnosti. Dakle, ovim zaključujemo da L nije kontekstno-nezavisan jezik.

Primer 6.4.2 biće nam važan u dokazu sledeće teoreme, koju smo obećali još u Odeljku 6.1. Njome dokazujemo da klasa kontekstno-nezavisnih jezika, za koju smo Teoremom 6.1.2 dokazali da je zatvorena za uniju, proizvod i zvezda operaciju, nije zatvorena za presek i komplement.

Teorema 6.4.2. (a) *Presek dva kontekstno-nezavisna jezika ne mora biti kontekstno-nezavisan jezik.*

(b) *Komplement kontekstno-nezavisnog jezika ne mora biti kontekstno-nezavisan jezik.*

Dokaz. (a) Neka je $X = \{x, y\}$ i $L = \{x^n y^n x^m \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$. Jezik L može se predstaviti kao proizvod jezika $\{x^n y^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, za koji smo u Primeru 6.2.1 videli da je kontektsno-nezavisan, i jezika x^+, za koji znamo da je raspoznatljiv, pa time i kontekstno-nezavisan. Prema tome, L je kontekstno-nezavisan jezik, kao proizvod dva kontekstno-nezavisna jezika. Slično, i $L' = \{x^m y^n x^n \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$ je kontekstno-nezavisan jezik. Međutim, kao što smo pokazali u Primeru 6.4.2, jezik

$$L \cap L' = \{x^n y^n x^n \,|\, n \in \mathbb{N}\},$$

nije kontekstno-nezavisan.

(b) Ovo sledi iz (a), jer za proizvoljna dva jezika $L_1, L_2 \subseteq X^*$ važi

$$L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c,$$

gde je L^c oznaka za komplement jezika L u X^*. $\square$

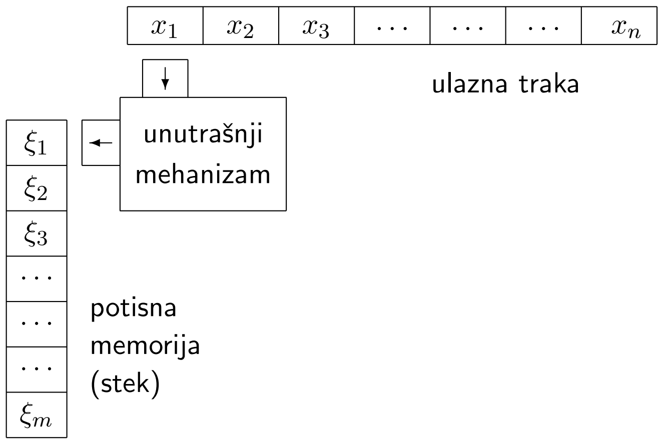
Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Bar-Hillel, Perles and Shamir [1961], Ginsburg [1966], Howie [1991], Lallement [1979], Madarász and Crvenković [1995]

6.5. Potisni automati

Podsetimo se još jednom da smo kontekstno-nezavisne jezike definisali kao jezike generisane kontekstno-nezavisnim gramatikama. U ovom i narednim odeljcima govorićemo o jednom drugom modelu generisanja jezika, o njihovom generisanju potisnim automatima, za koji ćemo dokazati da je ekvivalentan generisanju kontekstno-nezavisnim gramatikama.

Pre nego što damo formalnu matematičku definiciju pojma potisnog automata, objasnićemo šta se zamišlja pod realnim modelom potisnog automata.

Realni model potisnog automata prikazan je na sledećoj slici



Kao što se vidi sa slike, potisni automat se u ovom modelu sastoji od ulazne trake, potisne memorije i unutrašnjeg mehanizma.

Na ulaznoj traci upisana je ulazna reč $x_1x_2\cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slova ulaznog alfabeta X. Ta reč se čita slovo po slovo, glavom za čitanje označenom na slici simbolom $\downarrow$. Posle učitavanja svakog slova, ono se briše, a ostatak reči se pomera za jedno mesto ulevo, tako da je potisni automat spreman da učita sledeće slovo ulazne reči.

U potisnoj memoriji upisana je reč $\xi_1\xi_2\cdots\xi_m$, gde su $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ slova alfabeta memorije M. Glava za upisivanje, označana na slici sa $\leftarrow$, deluje samo na znak na vrhu memorije, u ovom slučaju na znak ξ_1. Taj znak može se zameniti proizvoljnom reči $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k \in M^*$. Reč w se u memoriju upisuje počev od poslednjeg slova α_k, do prvog slova α_1, pri čemu upisivanje svakog narednog slova potiskuje ostatak sadržaja memorije za jedno mesto naniže. Zbog toga se ovakva memorija naziva *potisna memorija* ili *stek*, a ovakav automat i zove *potisnim automatom* ili *automatom sa potiskujućom memorijom*. Zamena simbola ξ_1 praznom reči znači prosto brisanje tog simbola, pri čemu se ostatak sadržaja memorije podiže za jedno mesto naviše.

Do proizvoljnog slova sadržanog u memoriji se može doći samo brisanjem svih slova koja se nalaze iznad njega.

Na kraju, unutrašnji mehanizam se karakteriše unutrašnjim stanjima potisnog automata, i u toku rada tog automata vrši se permanentna promena stanja.

Prema tome, možemo reći da se u toku rada, potisni automat u svakom trenutku karakteriše trojkom koju čine stanje u kome se trenutno nalazi, trenutni sadržaj memorije i trenutni sadržaj ulazne trake. Tu trojku nazivamo konfiguracijom tog automata.

Sada ćemo preći na formalnu definiciju potisnog automata. Pod *potisnim automatom* $\mathcal{A}$ podrazumevamo sedmorku

$$\mathcal{A} = (A, X, M, a_0, \xi_0, \mu, \delta),$$

gde je

- A – konačan skup, *skup stanja* od $\mathcal{A}$;
- X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* od $\mathcal{A}$;
- M – neprazan konačan skup, *alfabet steka* (*potisne memorije*) od $\mathcal{A}$;
- a_0 – element iz A, *početno stanje* od $\mathcal{A}$;
- ξ_0 – element iz M, *početni simbol steka* od $\mathcal{A}$;
- μ – preslikavanje iz $A \times M$ u $\mathcal{F}(A \times M^*)$, gde $\mathcal{F}(A \times M^*)$ označava skup svih konačnih podskupova od $A \times M^*$, uključujući tu i prazan podskup;
- δ – preslikavanje iz $A \times M \times (A \cup \{e\})$ u $\mathcal{F}(A \times M^*)$.

Preslikavanja μ i δ nazivamo *funkcijama prelaza* potisnog automata $\mathcal{A}$. Kako su slike pri ovim preslikavanjima podskupovi od $A \times M^*$, to je jasno da se potisni automati "ponašaju *nedeterministički*", što će se bolje videti iz daljeg teksta.

Proizvoljnu trojku $(a, \alpha, u) \in A \times M^* \times X^*$ nazivaćemo *konfiguracijom* potisnog automata $\mathcal{A}$. U napred datom modelu potisnog automata, ova konfiguracija bi odgovarala trenutku u kome se potisni automat $\mathcal{A}$ nalazi u stanju a, u steku se nalazi zapamćena reč α, a na ulaznoj traci na očitavanje čeka ulazna reč u. Rad potisnog automata $\mathcal{A}$ sastoji se u nizu prelazaka iz konfiguracije u konfiguraciju, koji su određeni funkcijama prelaza μ i δ. Te funkcije se takođe mogu shvatiti kao izvesni *program*, ili, tačnije rečeno, *skup instrukcija* po kome radi potisni automat $\mathcal{A}$. Taj skup instrukcija čine sve relacije oblika

$$(b, \beta) \in \mu(a, \xi)$$

koje važe za $(b,\beta) \in A \times M^*$ i $(a,\xi) \in A \times M$, i sve relacije oblika

$$(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$$

koje važe za $(b,\beta) \in A \times M^*$ i $(a,\xi,x) \in A \times M \times (X \cup \{e\})$.

Možemo razlikovati tri vrste prelaza u potisnom automatu.

1. Stacionarni prelazi. Neka je data konfiguracija (a,α,u), pri čemu je $\alpha \in M^+$, što znači da je stek neprazan. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$. Ako je $(b,\beta) \in \mu(a,\xi)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a,α,u) na konfiguraciju $(b,\beta\alpha',u)$, što simbolički označavamo

$$(a,\alpha,u) \to (b,\beta\alpha',u).$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b,\beta) \in \mu(a,\xi),$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β
i ostavi ulaznu reč u nepromenjenom.

Dakle, prelazi ovog tipa ne zavise od ulaza. Ovakve prelaze nazivamo *stacionarnim prelazima*, jer se prilikom njih ne menja sadrzaj ulazne trake.

2. Progresivni prelazi. Neka je data konfiguracija (a,α,u), pri čemu je $\alpha \in M^+$ i $u \in X^+$, što znači da su i stek i ulazna traka neprazni. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$, i označimo sa x prvo slovo ulazne reči u, tj. uzmimo da je $u = xu'$, za neki $u' \in X^*$. Ako je $(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a,α,u) na konfiguraciju $(b,\beta\alpha',u')$, što simbolički označavamo

$$(a,\alpha,u) \to (b,\beta\alpha',u').$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β
i izbriši prvo slovo x ulazne reči u.

Prelaze ovakvog tipa nazivamo *progresivnim prelazima*, jer se prilikom njih briše prvi simbol sa ulazne trake.

3. Prelazi sa praznim ulazom. Neka je data konfiguracija (a, α, e), pri čemu je $\alpha \in M^+$. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$. Ako je $(b, \beta) \in \delta(a, \xi, e)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a, α, u) na konfiguraciju $(b, \beta\alpha', e)$, što simbolički označavamo

$$(a, \alpha, e) \to (b, \beta\alpha', e).$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b, \beta) \in \delta(a, \xi, e)$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

> *pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β*
> *i ostavi ulaznu traku praznom*

(kakva je bila i pre prelaza). Ovakve prelaze ćemo nazivati *prelazima sa praznim ulazom*.

Stacionarni i progresivni prelazi i prelazi sa praznim ulazom predstavljaju sve moguće prelaze iz jedne konfiguracije potisnog automata A u drugu. Možemo smatrati da smo na ovaj način definisali relaciju $\to$ na skupu svih konfiguracija potisnog automata A, pri čemu je

$$(a_1, \alpha_1, u_1) \to (a_2, \alpha_2, u_2)$$

ako i samo ako je moguć prelaz iz konfiguracije (a_1, α_1, u_1) u konfiguraciju (a_2, α_2, u_2), koji je bilo stacionaran, bilo progresivan, bilo prelaz sa praznim ulazom.

Sa $\xrightarrow{*}$ ćemo označavati refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\to$. To znači da za dve konfiguracije (a, α, u) i (b, β, v) potisnog automata A važi

$$(a, \alpha, u) \xrightarrow{*} (b, \beta, v) \tag{6.36}$$

ako i samo ako je ili $(a, \alpha, u) = (b, \beta, v)$, ili postoji niz konfiguracija

$$\{(a_i, \alpha_i, u_i)\}_{i=1}^{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

takav da važi

$$(a, \alpha, u) = (a_1, \alpha_1, u_1) \to (a_2, \alpha_2, u_2) \to \cdots \to (a_n, \alpha_n, u_n) = (b, \beta, v). \tag{6.37}$$

Izraz oblika (6.36), odnosno niz prelaza (6.37), nazivamo *izračunavanjem* u A, a pojedinačne prelaze u (6.37) nazivamo *koracima* u tom izračunavanju.

Primetimo da sa konfiguracije oblika (a,e,u) nije moguće preći ni na jednu drugu konfiguraciju potisnog automata A. To znači da ako u nekom izračunavanju u A dođemo do konfiguracije tog oblika, izračunavanje se prekida. Drugim rečima, ukoliko se u toku rada potisnog automata stek isprazni, što se može desiti, jer prvi simbol steka možemo zameniti i praznom reči, što znači obrisati, tada se rad potisnog automata prekida.

U literaturi se mogu naći i slične definicije potisnog automata u kojima se uzima da su μ i δ parcijalna preslikavanja. Međutim, to u suštini ništa ne menja, jer je za rad potisnog automata, tj. za prelaze u njemu, potpuno svejedno da li je $\mu(a,\xi) = \varnothing$ ili $\mu(a,\xi)$ nije definisano, i slično, da li je $\delta(a,\xi,x) = \varnothing$ ili $\delta(a,\xi,x)$ nije definisano.

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Chomsky [1962], Chomsky and Schützenberger [1963], Evey [1963], Ginsburg [1966], Goldstine [1977], Howie [1991], Madarász and Crvenković [1995], Schützenberger [1963]

6.6. Raspoznavanje jezika potisnim automatima

U ovom odeljku pokazaćemo da se pojam raspoznavanja, odnosno generisanja jezika potisnim automatom može definisati na dva načina – kao raspoznavanje skupom stanja i raspoznavanje praznim stekom, i dokazaćemo da su ta dva načina ekvivalentna.

Prvi način sličan je onom koji smo koristili u prethodnoj glavi, kada smo govorili o raspoznavanju jezika konačnim automatima. Naime, govorićemo da potisni automat A *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* $T \subseteq A$ ako je

$$L = \{u \in X^* \mid (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M^*)\ (a_0, \xi_0, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha, e)\},$$

odnosno ako za $u \in X^*$ važi

$$u \in L \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M^*)\ (a_0, \xi_0, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha, e).$$

Drugi način raspoznavanja jezika potisnim automatom je raspoznavanje praznim stekom. Naime, govorićemo da potisni automat A *raspoznaje jezik* L *praznim stekom* ako je

$$L = \{u \in X^* \mid (\exists a \in A)\ (a_0, \xi_0, u) \xrightarrow{*} (a, e, e)\},$$

odnosno ako za $u \in X^*$ važi

$$u \in L \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in A)\ (a_0, \xi_0, u) \xrightarrow{*} (a, e, e).$$

I pored očite razlike u definiciji ovih načina raspoznavanja, sledećom teoremom se dokazuje da su oni u suštini ekvivalentni.

Teorema 6.6.1. *Neka je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X. Tada postoji potisni automat koji raspoznaje L skupom stanja ako i samo ako postoji potisni automat koji raspoznaje L praznim stekom.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da postoji potisni automat

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, X, M_1, a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, \mu_1, \delta_1)$$

koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A_1$. To znači da je

$$L = \{u \in X^* \mid (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M_1^*)\ (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha, e)\}.$$

Konstruišimo potisni automat

$$\mathcal{A}_2 = (A_2, X, M_2, a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, \mu_2, \delta_2)$$

na sledeći način: uzmimo da je

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cup \{a_0^{(2)}, a_1^{(2)}\}, && \text{pri čemu } a_0^{(2)}, a_1^{(2)} \notin A_1, \\ M_2 &= M_1 \cup \{\xi_0^{(2)}\}, && \text{pri čemu } \xi_0^{(2)} \notin M_1, \end{aligned}$$

i definišimo $\mu_2 : A_2 \times M_2 \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\mu_2(a,\xi) = \mu_1(a,\xi) \quad \text{za } (a,\xi) \in A_1 \times M_1, \tag{6.38}$$

$$\mu_2(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}) = \{ \quad (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)})\} \tag{6.39}$$

$$\mu_2(a,\xi) = \varnothing \qquad \text{u ostalim slučajevima,}$$

i $\delta_2 : A_2 \times M_2 \times (X \cup \{e\}) \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\delta_2(a,\xi,x) = \delta_1(a,\xi,x) \quad \text{za } (a,\xi,x) \in A_1 \times M_1 \times X, \tag{6.40}$$

$$\delta_2(a,\xi,e) = \delta_1(a,\xi,e) \quad \text{za } a \in A_1 \setminus T,\ \xi \in M_1, \tag{6.41}$$

$$\delta_2(a,\xi,e) = \{(a_1^{(2)}, e)\} \quad \text{za } a \in T \cup \{a_1^{(2)}\},\ \xi \in M_2, \tag{6.42}$$

$$\delta_2(a,\xi,x) = \varnothing \qquad \text{u ostalim slučajevima.} \tag{6.43}$$

Označimo sa L' jezik koji potisni automat $\mathcal{A}_2$ raspoznaje praznim stekom, tj.

$$L' = \{u \in X^* \mid (\exists a \in A_2)\ (a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e)\}.$$

Dokazaćemo da je $L = L'$.

Razmotrimo najpre kako funkcioniše potisni automat A_2. Kada A_2 krene sa izračunavanjem iz konfiguracije oblika $(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u)$, za neki $u \in X^*$, tada uslov (6.39) služi da načini prelaz

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \to (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u). \tag{6.44}$$

Štaviše, iz (6.39) i (6.43) se dobija da svako izračunavanje koje polazi iz konfiguracije $(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u)$ mora započeti korakom (6.44). Dalje, uslovi (6.38), (6.40) i (6.41) služe da se svakom izračunavanju u A_1 jednoznačno pridruži izračunavanje u A_2, njegova "kopija" u A_2, čije se konfiguracije razlikuju od odgovarajućih konfiguracija prvog izračunavanja samo po tome što je pri drugom izrač unavanju na dnu steka stalno prisutan simbol $\xi_0^{(2)}$. Preciznije, za konfiguracije (a, α, u) i (b, β, v) u A_1 važi tvrđenje:

(‡) *$(a, \alpha, u) \to (b, \beta, v)$ je stacionarni (progresivni) prelaz u A_1 ako i samo ako je $(a, \alpha\xi_0^{(2)}, u) \to (b, \beta\xi_0^{(2)}, v)$ stacionarni (progresivni) prelaz u A_2, a u slučaju da je $a \in A_1 - T$ i $u = v = e$, tada odgovarajuće tvrđenje važi i za prelaze sa praznim ulazom.*

U zavisnosti o kom tipu prelaza se radi, ovo tvrđenje se lako dokazuje korišćenjem osobina (6.38), (6.40) i (6.41), tim redom. Na kraju, uslov (6.42) služi da se njegovom upotrebom stek isprazni, kad god se dođe do konfiguracije oblika (a, ξ, e), za neki $a \in T$.

Pošto smo objasnili način funkcionisanja potisnog automata A_2, vratimo se na dokaz teoreme. Uzećemo da je $u \in L$, tj. da u A_1 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha, e), \tag{6.45}$$

gde je $a \in T$ i $\alpha \in M_1^*$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da osim konfiguracije (a, α, e) u izračunavanuju (6.45) ne postoji druga konfiguracija koja pripada skupu $T \times M_1^* \times \{e\}$ (jer izračunavanje (6.45) možemo prekinuti prilikom prvog pojavljivanja takve konfiguracije u njemu). Tada iz (6.45), prema tvrđenju (‡), dobijamo da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha\xi_0^{(2)}, e). \tag{6.46}$$

Dalje, prema uslovu (6.42), kojim, kao što smo već rekli, praznimo stek, imamo u A_2 sledeće izračunavanje:

$$(a, \alpha\xi_0^{(2)}, e) \xrightarrow{*} (a_1^{(2)}, e, e). \tag{6.47}$$

Ako sada spojimo prelaz (6.44) i izračunavanja (6.46) i (6.47) u A_2, dobijamo izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a_1^{(2)}, e, e),$$

što znači da je $u \in L'$. Ovim je dokazano da je $L \subseteq L'$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, uzmimo da je $u \in L'$, tj. da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e), \tag{6.48}$$

za neki $a \in A_2$. Prema napred uočenom, prvi korak ovog izračunavanja mora biti

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \to (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u).$$

Zbog uslova (6.38), (6.40) i (6.41), pri daljim prelazima potisni automat A_2 će se zadržati u stanjima iz A_1 sve dok ne dođe do konfiguracije oblika (a', α, e), gde je $a' \in T$ i $\alpha \in M_2^*$. Prema tome, u okviru izračunavanja (6.48) javlja se izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a', \alpha, e), \tag{6.49}$$

takvo da sva stanja u konfiguracijama iz (6.49) pripadaju skupu A_1. Kako su koraci u tom izračunavanju bazirani samo na (6.38), (6.40) i (6.41), to se u stek unose samo reči iz M_1^*, pa je svaka konfiguracija koja se javlja u njemu oblika $(q, \beta\xi_0^{(2)}, v)$, gde je $q \in A_1$, $\beta \in M_1^*$ i $v \in X^*$. Odavde prema (‡) dobijamo da izračunavanju (6.49) u A_2 odgovara u A_1 izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a', \alpha', e),$$

gde je $\alpha' \in M_1^*$ reč takva da je $\alpha = \alpha'\xi_0^{(2)}$. Ovo znači da je $u \in L$, čime smo dokazali da je $L = L'$.

Sada prelazimo na dokaz obrata teoreme. Dakle, pretpostavićemo da postoji potisni automat

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, X, M_1, a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, \mu_1, \delta_1)$$

koji raspoznaje jezik L praznim stekom, tj.

$$L = \{u \in X^* \mid (\exists a \in A_1)\ (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e)\},$$

i konstruisaćemo potisni automat

$$\mathcal{A}_2 = (A_2, X, M_2, a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, \mu_2, \delta_2)$$

koji raspoznaje L nekim skupom $T \subseteq A_2$. Zaista, uzećemo da je

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cup \{a_0^{(2)}, t\}, && \text{pri čemu } a_0^{(2)}, t \notin A_1,\\ M_2 &= M_1 \cup \{\xi_0^{(2)}\}, && \text{pri čemu } \xi_0^{(2)} \notin M_1, \end{aligned}$$

i definisaćemo preslikavanja $\mu_2 : A_2 \times M_2 \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\begin{aligned} \mu_2(a,\xi) &= \mu_1(a,\xi) && \text{za } (a,\xi) \in A_1 \times M_1,\\ \mu_2(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}) &= \{(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)})\} \\ \mu_2(a,\xi) &= \varnothing && \text{u ostalim slučajevima,} \end{aligned} \tag{6.50}$$

i $\delta_2 : A_2 \times M_2 \times (X \cup \{e\}) \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\delta_2(a,\xi,x) = \delta_1(a,\xi,x) \quad \text{za } (a,\xi,x) \in A_1 \times M_1 \times (X \cup \{e\}), \tag{6.51}$$

$$\delta_2(a,\xi_0^{(2)},e) = \{(t,\xi_0^{(2)})\} \quad \text{za } a \in A_2, \tag{6.52}$$

$$\delta_2(a,\xi,x) = \varnothing \quad \text{u ostalim slučajevima.} \tag{6.53}$$

Označimo sa L' jezik koji A_2 raspoznaje skupom $T = \{t\}$, tj.

$$L' = \{u \in X^* \mid (\exists \alpha \in M_2^*)\ (a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (t,\alpha,e)\}.$$

Dokazaćemo da je $L = L'$.

Jasno je da je potisni automat A_2 konstruisan slično onom konstruisanom u prvom delu teoreme, a takođe i da slično funkcioniše. Bez većih teškoća se i za ovaj automat može dokazati da je prvi korak u svakom izračunavanju u A_2 koje polazi iz konfiguracije oblika $(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u)$, gde je $u \in X^*$, dat sa (6.44) i da važi tvrđenje (‡). Uslov koji razlikuje ovaj automat i automat konstruisan u prvom delu teoreme je (6.52), koji upotrebljavamo da zaustavimo izračunavanje u A_2 kad god dospemo do konfiguracije oblika $(a, \xi_0^{(2)}, e)$, $a \in A_1$, kojoj u A_1 odgovara konfiguracija (a,e,e).

Posle ovih komentara vezanih za funkcionisanje potisnog automata A_2, nastavljamo dokaz. Uzećemo najpre da je $u \in L$, tj. da u A_1 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a,e,e),$$

gde je $a \in A_1$. Prema (‡), tom izračunavanju u A_2 odgovara izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \xi_0^{(2)}, e), \tag{6.54}$$

dok prema (6.52) imamo

$$(a, \xi_0^{(2)}, e) \xrightarrow{*} (t, \xi_0^{(2)}, e), \tag{6.55}$$

pa iz (6.44), (6.54) i (6.55) dobijamo da važi

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (t, \xi_0^{(2)}, e),$$

što znači da je $u \in L'$, pa je dakle $L \subseteq L'$.

Obratno, uzmimo da je $u \in L'$, tj. da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (t, \alpha, e), \tag{6.56}$$

za neki $\alpha \in M_2^*$. Prvi korak u ovom izračunavanju dat je sa (6.44). Sa druge strane, jasno je da se potisni automat ne može vratiti u stanje $a_0^{(2)}$, a posle ulaska u stanje t ne može iz njega više izaći, pa u okviru izračunavanja (6.56) možemo izdvojiti izračunavanje oblika

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \beta, e) \to (t, \alpha, e), \tag{6.57}$$

pri čemu su sva stanja u konfiguracijama iz (6.57), osim poslednje, iz skupa A_1, a zadnji korak u (6.57) je zasnovan na (6.52), što je moguće samo ukoliko je $\beta = \alpha = \xi_0^{(2)}$, pa dobijamo izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \xi_0^{(2)}, e). \tag{6.58}$$

Kako su svi koraci u (6.58) zasnovani ili na (6.50) ili na (6.51), to se tokom tih koraka u stek unose samo reči iz M_1^*, pa su sve druge koordinate svih konfiguracija u (6.58) oblika $\gamma\xi_0^{(2)}$, odakle prema (‡) dobijamo da izračunavanju (6.56) u A_2 odgovara u A_1 izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e).$$

Prema tome, $u \in L$, čime smo dokazali da je $L = L'$, što je i trebalo dokazati.

Ovim smo završili dokaz teoreme. □

U svetlu prethodne teoreme, ako je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X, i A je potisni automat koji raspoznaje L bilo nekim podskupom skupa stanja, bilo praznim stekom, tada ćemo govoriti prosto da A *raspoznaje* L i da je L jezik *raspoznatljiv potisnim automatom*.

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Chomsky [1962], Chomsky and Schützenberger [1963], Evey [1963], Ginsburg [1966], Howie [1991], Madarász and Crvenković [1995], Schützenberger [1963]

6.7. Kontekstno-nezavisni jezici i potisni automati

U ovom odeljku dokazujemo glavnu teoremu ove glave koja kaže da jezici koji mogu biti raspoznati potisnim automatom jesu upravo kontekstno-nezavisni jezici.

Teorema 6.7.1. *Neka je X konačan alfabet i neka je $L \subseteq X^*$ neprazan jezik. Tada je L kontekstno-nezavisan ako i samo ako može biti raspoznat nekim potisnim automatom.*

Dokaz. Prikazaćemo samo glavne crte ovog dokaza. Pretpostavimo prvo da je L kontekstno-nezavisan jezik. Razlikovaćemo slučajeve $e \notin L$ i $e \in L$.

Slučaj $e \notin L$: Prema Teoremi 6.3.2 možemo uzeti da je $L = L(G, \sigma)$ za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ koja je u Normalnoj formi Chomsky. Konstruišimo potisni automat

$$A = (A, X, M, a_0, \xi_0, \mu, \delta) \tag{6.59}$$

na sledeći način

$$\begin{aligned}
&A = \{a_0, a_1, t\}, \quad M = (V \setminus X) \cup \{\xi_0\}, \text{ gde } \xi_0 \notin V \text{ i } X \cap V = \varnothing,\\
&\mu(a_0, \xi_0) = \{(a_1, \sigma\xi_0)\},\\
&\mu(a_1, \lambda) = \{(a_1, \alpha\beta) \mid \lambda \to \alpha\beta \text{ je pravilo iz } \pi\},\\
&\mu(a, \lambda) = \varnothing, \quad \text{u ostalim slučajevima},\\
&\delta(a_1, \xi_0, e) = \{(t, \xi_0)\},\\
&\delta(a_1, \lambda, x) = \{(a_1, e)\}, \quad \text{ako je } \lambda \to x \text{ pravilo iz } \pi,\\
&\delta(a, \lambda, x) = \varnothing, \quad \text{u ostalim slučajevima.}
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Tada potisni automat A raspoznaje L skupom $T = \{t\}$.

Slučaj $e \in L$: U ovom slučaju posmatramo jezik $L' = L \setminus \{e\}$. Tada automat A definisan za L' sa (6.59) raspoznaje L', i ako u (6.60) dodamo

$$\delta(a_0, \xi_0, e) = \{(t, \xi_0)\},$$

tada ćemo dobiti novi potisni automat koji raspoznaje L.

Obratno, pretpostavimo da jezik L može biti raspoznat nekim potisnim automatom

$$A = (A, X, M, a_0, \xi_0, \mu, \delta).$$

Prema Teoremi 6.6.1 možemo uzeti da se radi o raspoznavanju praznim stekom. Definišimo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ na sledeći način: Uzmimo najpre da je
$$V \setminus X = (A \times M \times A) \cup \{\sigma\}.$$
Elemente iz $V \setminus X$ zapisivaćemo u obliku $[p, \alpha, q]$, da ih ne bi pomešali sa konfiguracijama potisnig automata A. Skup π pravila definisaćemo na sledeći način: Najpre ćemo za svaki $a \in A$ staviti da je
$$\sigma \to [a_0, \xi_0, a]$$
pravilo iz π. Dalje, svakoj "instrukciji" $(a', \beta_1\beta_2 \cdots \beta_k) \in \mu(a, \alpha)$, za $k \geq 1$, pridružićemo skup pravila
$$[a, \alpha, a_k] \to [a', \beta_1, a_1][a_1, \beta_2, a_2] \cdots [a_{k-1}, \beta_k, a_k],$$
gde je $a_1, \ldots, a_k$ proizvoljan niz elemenata iz A, dok ćemo "instrukciji" oblika $(a', e) \in \mu(a, \alpha)$ pridružiti pravilo
$$[a, \alpha, a'] \to e.$$
Na kraju, proizvoljnoj "instrukciji" $(a', \beta_1\beta_2 \cdots \beta_k) \in \delta(a, \alpha, x)$, za $k \geq 1$, pridružujemo skup pravila
$$[a, \alpha, a_k] \to x[a', \beta_1, a_1][a_1, \beta_2, a_2] \cdots [a_{k-1}, \beta_k, a_k],$$
gde je $a_1, \ldots, a_k$ proizvoljan niz elemenata iz A, dok ćemo "instrukciji" oblika $(a', e) \in \delta(a, \alpha, x)$ pridružiti pravilo
$$[a, \alpha, a'] \to x.$$
Kada sva ova pravila sakupimo i njima formiramo skup π, dobijamo gramatiku G koja je očigledno kontekstno-nezavisna (mada ne u Normalnoj formi Chomsky), i za koju je $L = L(G, \sigma)$. $\square$

Literatura: Autebert, Berstel and Boasson [1997], Chomsky [1962], Chomsky and Schützenberger [1963], Evey [1963], Ginsburg [1966], Howie [1991], Madarász and Crvenković [1995], Schützenberger [1963]

6.8. Zadaci

1. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ homomorfizam slobodnih monoida. Ako je $L \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisan jezik, dokazati da je tada i $L\phi$ kontekstno-nezavisan jezik.

2. Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V \setminus X = \{\sigma, \lambda\}$ i pravila izvođenja su $\sigma \to x\lambda y,\ \lambda \to x\lambda y + e$. Naći gramatiku bez e-izvođenja koja generiše jezik $L(G, \sigma)$.

3. Data je kontekstno-nezavisna gramatika $G = (\{\sigma, \alpha, \beta, x, y, z\},\ \{x, y, z\},\ \pi)$, gde je $\pi = \{\sigma \to x\sigma y,\ \sigma \to \alpha\beta,\ \sigma \to z,\ \alpha \to \beta\alpha z,\ \alpha \to y,\ \beta \to \alpha\sigma\}$. Naći gramatiku u Normalnoj formi Chomsky ekvivalentnu gramatici G.

4. Neka je $G = (\{\sigma, p, q, \Rightarrow, \rceil, (,)\},\ \{p, q, \Rightarrow, \rceil, (,)\},\ \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika sa skupom pravila $\pi = \{\sigma \to \rceil\sigma,\ \sigma \to (\sigma \Rightarrow \sigma),\ \sigma \to p,\ \sigma \to q\}$. Naći gramatiku u Normalnoj formi Chomsky koja generiše $L(G, \sigma)$.

5. Odrediti kontekstno-nezavisnu gramatiku bez e-pravila koja generiše jezik nad alfabetom $\{b, c\}$ koji čine sve reči u kojima se bcc javlja najmanje tri puta kao podrec.

6. Odrediti tip jezika $\{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ u \neq v\}$.

7. Da li je jezik $\{uz\overline{u}zu \mid u \in \{x, y\}^*\}$ kontekstno-nezavisan?

8. Dokazati da jezik $\{uu \mid u \in \{x, y\}^*\}$ nije kontekstno-nezavisan.

9. Dokazati da jezik $\{x^n \mid n \text{ je prost broj }\}$ nije kontekstno-nezavisan.

10. Odrediti gramatiku bez trivijalnih i e-izvođenja koja generiše jezik $L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ i $X = \{x, y\}$, $V = X \cup \{\sigma, \lambda, \mu\}$ i skup π čine pravila

$$\sigma \to \lambda + xx, \qquad \lambda \to \mu + x, \qquad \mu \to \sigma + y.$$

Konstruisati potisni automat koji raspoznaje taj jezik.

11. Konstruisati potisni automat koji raspoznaje jezik $L = \{wx\overline{w} \mid w \in \{x, y\}^*\}$.

12. Dat je potisni automat $A = (A, X, V, \delta)$ gde su $A = \{i, q, t\}$, $X = \{x, y\}$, $V = \{\xi, \alpha, \beta\}$ i funkcija δ je određena sa

$$\begin{array}{lll}
\delta(i, \xi, x) = (i, \alpha\xi), & \delta(q, \beta, y) = (q, e), & \delta(i, \beta, x) = (i, \alpha\beta), \\
\delta(i, \alpha, x) = \{(i, \alpha^2), (q, e)\}, & \delta(i, \xi, y) = (i, \beta\xi), & \delta(i, \beta, y) = \{(i, \beta^2), (q, e)\}, \\
\delta(i, \alpha, y) = (i, \beta\alpha), & \delta(q, \xi, e) = \{(t, \xi)\}, & \delta(q, \alpha, x) = (q, e), \\
\mu = \varnothing,\ T = \{t\}. & &
\end{array}$$

Dokazati da je ulaz $x^2y^2x^2$ raspoznatljiv i odrediti jezik koji je raspoznatljiv ovim automatom pomoću skupa T. Konstruisati kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generiše dobijeni jezik.

13. Neka je L skup svih palindroma, tj. reči w takvih da je $w = \overline{w}$, nad datim alfabetom.

(a) Dokazati da je L kontekstno-nezavisan.
(b) Odrediti kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generise taj jezik.
(c) Konstruisati potisni automat koji raspoznaje jezik L.

Glava 7

Raspoznavanje jezika tipova 0 i 1

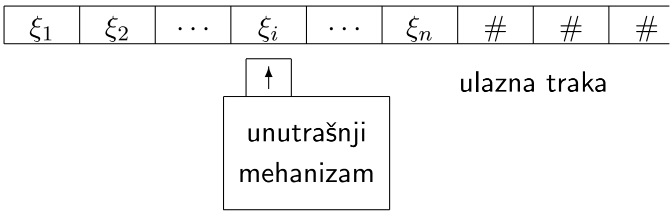
U prethodnim glavama smo jezike tipa 3 (regularne jezike) okarakterisali kao jezike koji se mogu raspoznati konačnim automatima, a za jezike tipa 2 (kontekstno-zavisne jezike) smo dokazali da su to upravo jezici koji se mogu raspoznati potisnim automatima. Prirodno se nameće pitanje: Da li se i jezici tipa 0 i 1 mogu okarakterisati na sličan način? Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i u ovoj glavi dajemo dva modela apstraktnih matematičkih mašina koje raspoznaju te jezike.

Za raspoznavanje jezika tipa 0 koriste se apstraktne mašine koje je uveo Turing [1936], i koje se u njegovu čast nazivaju Turingovim mašinama. U Odeljku 7.1 uvode se pojmovi determinističke i nedeterminističke Turingove mašine i raspoznavanja jezika tim mašinama, pri čemu se dokazuje da oba ova tipa Turingovih mašina raspoznaju istu klasu jezika, a u Odeljku 7.2 se dokazuje da ta klasa jeste upravo klasa svih jezika tipa 0.

Sa druge strane, jezici tipa 1, tj. kontekstno-zavisni jezici, raspoznaju se specijalnim tipom Turingovih mašina uvedenim u radu Myhilla [1960], koje se nazivaju linearno ograničenim automatima. Njihova definicija daje se u Odeljku 7.3, gde se takođe dokazuju rezultati Landwebera [1963] i Kurodae [1964], prema kojima klasa jezika koji se mogu raspoznati nedeterminističkim linearno ograničenim automatima jeste upravo klasa kontekstno-zavisnih jezika, tj. jezika tipa 1.

7.1. Turingove mašine

Postoji više različitih načina za definisanje Turingovih mašina. Međutim, svi oni su međusobno ekvivalentni, pa ćemo ovde dati osnovni model Turingove mašine. Njegovom jednostavnom modifikacijom dobijaju se i ostali modeli.



Pre nego što damo formalnu definiciju Turingove mašine opisaćemo neformalno njen rad. Turingova mašina se sastoji iz *ulazne trake* koja je podeljena na ćelije i u svakoj od njih zabeležen je po jedan simbol iz konačnog alfabeta Σ, koji se naziva skup *simbola trake*. Ulazna traka ima početak sa leve strane, a sa desne strane je neograničena, tj. ima beskonačno mnogo ćelija. U svakom diskretnom trenutku vremena, *glava mašine* pokazuje na jednu ćeliju, odnosno na simbol trake koji je u njoj zabeležen. Na početku rada mašine, na ulaznoj traci su u prvih n ćelija, za neki prirodan broj n, zabeleženi simboli iz *ulaznog alfabeta* X, gde je $X \subseteq \Sigma$. Preostali deo trake je prazan, tako da među simbolima trake postoji i simbol # koji označava praznu ćeliju i važi $\# \notin X$. *Unutrašnji mehanizam* mašine određen je *stanjima* mašine, pri čemu je skup A svih stanja mašine konačan. Rad mašine kontrolisan je *instrukcijama* koje u svakom diskretnom trenutku vremena, zavisno od trenutnog stanja mašine i simbola na koji glava mašine trenutno pokazuje, određuju šta će se desiti u narednom trenutku. Sam rad mašine sastoji se u izvršavanju sledećih operacija:

1. prelazak iz jednog stanja u drugo;
2. zamena simbola u ćeliji drugim simbolom, pri čemu je moguće da se on zameni i istim simbolom, tj. da sadržaj ćelije ostane nepromenjen;
3. pomeranje glave mašine za jedno mesto ulevo ili jedno mesto udesno.

U pomeranju glave ključnu ulogu igraju dva posebna simbola L i R, pri čemu je, jasno, sa L određeno pomeranje glave ulevo, a sa R udesno. Pri tome može da postoji najviše jedna instrukcija koja za trenutno stanje i simbol na traci ukazuje na dalji rad mašine. Mašina završava sa radom kada za trenutno stanje i simbol na traci ne postoji nijedna instrukcija koja predviđa dalje ponašanje mašine.

U vezi sa tačkom 2 treba napomenuti da se u literaturi često razmatraju Turingove mašine kod kojih postoji mogućnost da posmatrani simbol na traci bude i obrisan. Takva mogućnost indirektno postoji i kod mašina koje se ovde razmatraju. Naime, alfabetu Σ se može dodati novi pomoćni simbol B (čita se *prazno* ili *blanko*) koji je moguće upisati umesto razmatranog simbola, čime bi on bio tretiran kao obrisan. Znajući to, u nekim neformalnim razmatranjima podrazumevaćemo da Turingova mašina ima mogućnost brisanja posmatranog simbola.

Sada ćemo dati formalnu definiciju Turingove mašine. Pod *Turingovom mašinom* podrazumevamo petorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, gde je

- A – neprazan konačan skup, *skup stanja* mašine $\mathcal{A}$;
- a_0 – element iz A, *početno stanje* mašine $\mathcal{A}$;
- X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* mašine $\mathcal{A}$;
- Σ – neprazan konačan skup koji sadrži X i simbol $\# \notin X$, *alfabet trake* mašine $\mathcal{A}$;
- δ – parcijalno preslikavanje iz $A \times \Sigma$ u $A \times \Sigma \setminus \{\#\} \times \{L, R\}$, *funkcija prelaza* mašine $\mathcal{A}$.

Pod pojmom *konfiguracije* Turingove mašine $\mathcal{A}$ podrazumevaćemo proizvoljnu trojku $(a, \alpha, i) \in A \times (\Sigma \setminus \{\#\})^* \times \mathbb{N}$. U napred datom neformalnom modelu mašine, ova konfiguracija bi odgovarala trenutku kada se mašina $\mathcal{A}$ nalazi u stanju a, u nepraznom delu trake je upisana reč α, čitano sleva na desno, a i je redni broj ćelije na koju glava pokazuje u tom trenutku, takođe brojano sleva na desno, od početka trake. Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \xi', D)$, za neki $(a, \xi) \in A \times \Sigma$ i $D \in \{L, R\}$, tada izraz

$$\delta(a, \xi) = (b, \xi', D)$$

nazivamo *instrukcijom* mašine $\mathcal{A}$. Rad Turingove mašine $\mathcal{A}$ sastoji se u nizu prelazaka iz jedne konfiguracije u drugu, pri čemu su ti prelasci određeni instrukcijama te mašine, na način koji ćemo objasniti u daljem tekstu.

Neka je $(a, \xi_1\xi_2 \cdots \xi_n, i)$ proizvoljna konfiguracija, gde su $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Sigma \setminus \{\#\}$. Razlikujemo više tipova prelaza:

1. Neka je $i \in [1, n]$ i $\delta(a, \xi_i) = (b, \xi, R)$. Tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi\xi_{i+1} \ldots \xi_n, i + 1)$, što pišemo

$$(a, \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n, i) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1}\xi\xi_{i+1} \ldots \xi_n, i + 1).$$

Drugim rečima, instrukcija $\delta(a,\xi_i) = (b,\xi,R)$ kaže sledeće: pređi iz stanja a u stanje b, zameni simbol ξ_i u i-toj ćeliji simbolom ξ i pomeri glavu za jedno mesto udesno, nad ćeliju sa rednim brojem $i+1$.

2. Neka je $i \in [2,n]$ i $\delta(a,\xi_i) = (b,\xi,L)$. Tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a,\xi_1\dots\xi_{i-1}\xi\xi_{i+1}\dots\xi_n, i-1)$, što pišemo

$$(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,i) \underset{A}{\longrightarrow} (a,\xi_1\dots\xi_{i-1}\xi\xi_{i+1}\dots\xi_n,i-1).$$

Drugim rečima, instrukcija $\delta(a,\xi_i) = (b,\xi,L)$ kaže sledeće: pređi iz stanja a u stanje b, zameni simbol ξ_i u i-toj ćeliji simbolom ξ i pomeri glavu za jedno mesto ulevo, nad ćeliju sa rednim brojem $i-1$.

3. Neka je $i = n+1$. Tada glava pokazuje na praznu ćeliju, tj. na ćeliju u kojoj je zabeležen znak $\#$, pa razlikujemo sledeće podslučajeve:

3.1. Ako je $\delta(a,\#) = (b,\xi,R)$, tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n+2)$, što pišemo

$$(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,n+1) \underset{A}{\longrightarrow} (a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n+2).$$

Znači, instrukcija $\delta(a,\#) = (b,\xi,R)$ kaže: zabeleži simbol ξ u $(n+1)$-vu ćeliju i pomeri glavu za jedno mesto udesno, nad $(n+2)$-gu ćeliju.

3.2. Ako je $\delta(a,\#) = (b,\xi,L)$, tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n)$, što pišemo

$$(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,n+1) \underset{A}{\longrightarrow} (a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n).$$

Prema tome, u ovom slučaju instrukcija $\delta(a,\#) = (b,\xi,L)$ kaže: upiši simbol ξ u $(n+1)$-vu ćeliju i pomeri glavu za jedno mesto ulevo, nad n-tu ćeliju.

Konačan niz konfiguracija (a_k,α_k,i_k), $k \in [0,n]$, gde je $n \in \mathbb{N}^0$, nazivaćemo *izračunavanjem* u Turingovoj mašini A, ako za svako $k \in [0,n-1]$ važi

$$(a_k,\alpha_k,i_k) \underset{A}{\longrightarrow} (a_{k+1},\alpha_{k+1},i_{k+1}).$$

Ove pojedinačne prelaze nazivamo *koracima* tog izračunavanja. Broj koraka u ovom izračunavanju, tj. broj n, nazivamo *dužinom* tog izračunavanja. Ako su (a,α,i) i (b,β,j) konfiguracije za koje postoji izračunavanje (a_k,α_k,i_k), $k\in[0,n]$, takvo da je

$$(a,\alpha,i)=(a_0,\alpha_0,i_0)\quad \text{i}\quad (b,\beta,j)=(a_n,\alpha_n,i_n),$$

tada pišemo

$$(a,\alpha,i)\xrightarrow[A]{*}(b,\beta,j),$$

pri čemu, bez opasnosti od zabune, i taj izraz nazivamo izračunavanjem, tj. identifikujemo ga sa gornjim nizom konfiguracija. Jasno, to izračunavanje je dužine 0 ako i samo ako je $(a,\alpha,i)=(b,\beta,j)$. Ukoliko je jasno o kojoj se Turingovoj mašini radi, u oznakama $\xrightarrow[A]{}$ i $\xrightarrow[A]{*}$ izostavljamo A, tj. pišemo samo $\rightarrow$ i $\xrightarrow{*}$.

Drugim rečima, na skupu $A\times\Sigma^*\times\mathbb{N}$ svih konfiguracija definisana je relacija $\rightarrow$ tako da su dve konfiguracije (a,α,i) i (b,β,j) u relaciji $\rightarrow$ ako i samo ako se iz konfiguracije (a,α,i) može preći u (b,β,j) u jednom koraku. Takođe, definisana je i relacija $\xrightarrow{*}$, koja predstavlja refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\rightarrow$.

Napomena 7.1.1. Već smo pomenuli da je moguće definisati Turingovu mašinu tako da postoji mogućnost upisivanja praznog simbola. Osim toga, često se u literaturi javljaju i Turingove mašine kod kojih glava posle čitanja simbola sa trake ne ide obavezno levo ili desno, već može ostati i na istom mestu. Takva mogućnost postoji i kod ovako uvedenog pojma Turingove mašine. Naime, ako želimo da mašina, koja se nalazi u stanju a i čita simbol ξ sa trake, pređe u stanje a_1, ispiše ξ_1 na traci i glava ostane na istom mestu, skupu stanja mašine A dodajemo novo stanje b, a instrukcijama mašine A dodajemo sledeće instrukcije:

$$\begin{aligned}&\delta(a,\xi)=(b,\xi_1,R),\\ &\delta(b,\mu)=(a_1,\mu,L),\quad \text{za svaki simbol trake } \mu.\end{aligned}$$

Takođe, postoje i tzv. Turingove mašine kod kojih ulazna traka ima više staza. To su, zapravo, Turingove mašine kod kojih alfabet trake, a i ulazni alfabet, jesu Descartesovi proizvodi nekih skupova. Mašina ima onoliko staza koliko činilaca ima u tim Descartesovim proizvodima. Turingova mašina sa k staza, za neki $k\in\mathbb{N}$, jeste mašina kod koje alfabet trake jeste neki skup k-torki. U neformalnim razmatranjima se uzima da se na svakoj stazi pojavljuju simboli iz odgovarajućeg skupa koji predstavlja alfabet te trake.

Analogno pojmu raspoznavanja jezika automatima uvodi se i pojam raspoznavanja jezika Turingovim mašinama. Kažemo da Turingova mašina $\mathcal{A}=(A,a_0,X,\Sigma,\delta)$ *raspoznaje jezik* $L\subseteq X^*$ *pomoću skupa* $T\subseteq A$ ako je

$$L=\{u\in X^*\mid (a_0,u,1)\xrightarrow{*}(a,\alpha,i)\,,\ \text{ gde je } a\in T,\ \alpha\in\Sigma^*,\ i\in\mathbb{N}\},$$

tj.

$$u \in L \Leftrightarrow (a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i) \quad \text{gde je } a \in T,\ \alpha \in \Sigma^*,\ i \in \mathbb{N},$$

a za jezik L u tom slučaju kažemo da je *raspoznatljiv Turingovom mašinom*. Skup T nazivamo skupom *finalnih stanja* Turingove mašine A. Neformalno, Turingova mašina A raspoznaje jezik L ako je L skup svih reči ulaznog alfabeta koje vode do nekog finalnog stanja. Često se kaže i da Turingova mašina A *prihvata reč* $u \in X^*$ *skupom* T ako je $(a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i)$, za neko stanje $a \in T$. Primetimo da se ovde govori samo o prihvatanju reči nad alfabetom X, dok simboli iz skupa $\Sigma \setminus X$ imaju pomoćnu ulogu, koja se može uporediti sa ulogom pomoćnih simbola kod gramatika.

Primer 7.1.1. Opisaćemo Turingovu mašinu $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ koja raspoznaje kontekstno-nezavisan jezik $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Stavimo

$$\begin{aligned} A &= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \\ X &= \{x, y\}, \\ \Sigma &= \{x, y, \#, \alpha, \beta\}. \end{aligned}$$

Skup finalnih stanja je $T = \{a_5\}$, a funkcija prelaza δ je data na sledeći način. Ukoliko prvi ulazni simbol jeste x, mašina ga menja u α, dok se u suprotnom zaustavlja. Zatim se kreće udesno, do prvog y, i menja ga u β. Onda se vraća ulevo do poslednjeg α, pa prvi desni x, ako ga ima, menja u α i ponovo odlazi udesno u potragu za novim y. Dakle, u svakom krugu mašina menja prvi levi x u α i prvi levi y u β, a dolazi do finalnog stanja samo ukoliko nema više x-ova levo od prvog levog y i iza poslednjeg desnog y se nalazi #. Funkcija prelaza je data sa:

1.	$\delta(a_0, x) = (a_1, \alpha, R)$
2.a.	$\delta(a_1, x) = (a_1, x, R)$
2.b.	$\delta(a_1, \beta) = (a_1, \beta, R)$
2.c.	$\delta(a_1, y) = (a_2, \beta, L)$
3.a.	$\delta(a_2, \beta) = (a_2, \beta, L)$
3.b.	$\delta(a_2, \alpha) = (a_3, \alpha, R)$
3.c.	$\delta(a_2, x) = (a_4, x, L)$
4.a.	$\delta(a_4, x) = (a_4, x, L)$
4.b.	$\delta(a_4, \alpha) = (a_0, \alpha, R)$
5.a.	$\delta(a_3, \beta) = (a_3, \beta, R)$
5.b.	$\delta(a_3, \#) = (a_5, \beta, R)$

Sledeća šema prikazuje ponašanje mašine A u slučaju kada je ulazna reč x^3y^3. Takođe su data i pravila koja se koriste u svakom od koraka.

konfiguracija	pravilo
$(a_0, xxxyyy, 1)$	start
$(a_1, \alpha xxyyy, 2)$	1
$(a_1, \alpha xxyyy, 3)$	2.a
$(a_1, \alpha xxyyy, 4)$	2.a
$(a_2, \alpha xx\beta yy, 3)$	2.c
$(a_4, \alpha xx\beta yy, 2)$	3.c
$(a_4, \alpha xx\beta yy, 1)$	4.a
$(a_0, \alpha xx\beta yy, 2)$	4.b
$(a_1, \alpha\alpha x\beta yy, 3)$	1
$(a_1, \alpha\alpha x\beta yy, 4)$	2.a
$(a_1, \alpha\alpha x\beta yy, 5)$	2.b
$(a_2, \alpha\alpha x\beta\beta y, 4)$	2.c
$(a_2, \alpha\alpha x\beta\beta y, 3)$	3.a

konfiguracija	pravilo
$(a_4, \alpha\alpha x\beta\beta y, 2)$	3.c
$(a_0, \alpha\alpha x\beta\beta y, 3)$	4.b
$(a_1, \alpha\alpha\alpha\beta\beta y, 4)$	1
$(a_1, \alpha\alpha\alpha\beta\beta y, 5)$	2.b
$(a_1, \alpha\alpha\alpha\beta\beta y, 6)$	2.b
$(a_2, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 5)$	2.c
$(a_2, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 4)$	3.a
$(a_2, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 3)$	3.a
$(a_3, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 4)$	3.b
$(a_3, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 5)$	5.a
$(a_3, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 6)$	5.a
$(a_3, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 7)$	5.a
$(a_5, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, 8)$	5.b

Slično kao kod automata, i ovde uvodimo pojam nedeterminističke Turingove mašine. Kao što se i očekuje, to će biti Turingova mašina kod koje δ nije parcijalno preslikavanje, već je relacija, pa za neke $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ ima više izbora za $\delta(a, \xi)$, tj. $\delta(a, \xi)$ je podskup skupa $A \times \Sigma \setminus \{\#\} \times \{L, R\}$. Tako ćemo ranije definisanu Turingovu mašinu nazivati i *determinističkom Turingovom mašinom*, a petorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ nazivamo *nedeterminističkom Turingovom mašinom* ako A, a_0, X i Σ imaju isto značenje kao u definiciji determinističke Turingove mašine, dok je δ relacija između skupova $A \times \Sigma$ i $A \times \Sigma \setminus \{\#\} \times \{L, R\}$.

Jezik $L \subseteq X^*$ je raspoznatljiv nedeterminističkom Turingovom mašinom $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ pomoću skupa $T \subseteq A$ ako je

$$L = \{u \in X^* \mid (a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i) \text{ gde je } a \in T,\ \alpha \in \Sigma^*,\ i \in \mathbb{N}\},$$

tj.

$$u \in L \Leftrightarrow (a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i) \text{ gde je } a \in T,\ \alpha \in \Sigma^*,\ i \in \mathbb{N}.$$

Skup T je skup *finalnih stanja* Turingove mašine $\mathcal{A}$. Neformalno, nedeterministička Turingova mašina $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik L ako je L skup svih reči ulaznog alfabeta koje vode iz početnog do nekog od finalnih stanja, za neki izbor niza prelaza. Često se kaže i da Turingova mašina A *prihvata reč* $u \in X^*$ *skupom* T ako postoji način da se, polazeći od a_0 i reči u na ulaznoj traci, dođe do nekog finalnog stanja.

Kao i u slučaju automata bez izlaza, i ovde važi da determinističke i nedeterminističke Turingove mašine imaju iste mogućnosti u raspoznavanju jezika. To se dokazuje u sledećoj teoremi:

Teorema 7.1.1. *Jezik je raspoznatljiv determinističkom Turingovom mašinom ako i samo ako je raspoznatljiv nedeterminističkom Turingovom mašinom.*

Dokaz. Kako se svaka deterministička Turingova mašina može smatrati nedeterminističkom, to je direktni deo teoreme trivijalan.

Dokazaćemo obrat. Pretpostavimo da nedeterministička Turingova mašina $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ raspoznaje L pomoću skupa T. Opisaćemo determinističku Turingovu mašinu $A' = (A', a_0, X, \Sigma', \delta')$ koja raspoznaje L. Naime, skup stanja A' se poklapa sa skupom stanja A, a takođe će i skup finalnih stanja biti T. Za fiksirane $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ takve da je $\delta(a, \xi)$ definisano, označimo sa $k(a, \xi)$ broj definisanih prelaza iz stanja a za ulaz ξ, i numerišimo redom prelaze $\delta(a, \xi) = (a', \mu, D)$, gde je $D \in \{R, L\}$, brojevima od 1 do $k(a, \xi)$. Uvedimo oznaku $r = \max\{k(a, \xi) \mid a \in A,\ \xi \in \Sigma\}$. Svaka transformacija u A' okarakterisana je konačnim nizom brojeva između 1 i r koji predstavljaju brojeve prelaza koji su upotrebljeni u toj transformaciji. Jasno je da svaki ovakav niz brojeva ne mora da predstavlja transformaciju, jer je moguće da za izvestan par (a, ξ) ima manje od r izbora za prelaz, tj. $k(a, \xi) < r$.

Neka je sada Σ' skup koji se sastoji od nekih trojki oblika $[x, i, \xi]$, gde je $x \in X$, $i \in [0, r]$, $\xi \in \Sigma$, pri čemu skup Σ' ne mora da obuhvata sve trojke tog oblika. Naime, s obzirom da alfabet trake čine trojke, to možemo smatrati da je traka podeljena na tri staze. U prvoj će se nalaziti ulazna reč. Na drugoj su na početku nule, a nadalje A' generiše niz brojeva skupa $\{1, 2, \ldots, r\}$, gde svaki od tih brojeva predstavlja broj prelaza koji je upotrebljen. Na trećoj stazi je na početku kopija ulazne reči, a u toku rada se na njoj simulira rad mašine A, za ulaze sa prve staze i prelaze određene nizom u drugoj stazi. Pri tome X identifikujemo sa trojkama oblika $[x, 0, x]$, za svaki $x \in X$. Dakle, ako je A' u stanju a i na ulazu se javlja trojka (x, i, ξ), i ako sa $\delta_i(a, \xi)$ označimo i-ti prelaz u našoj numeraciji nedeterminističke mašine A, definisan za par (a, ξ), tada za $\delta_i(a, \xi) = (a', \xi', R)$ automat A' prelazi u stanje a', na treću stazu upisuje simbol ξ' i pomera glavu jedno mesto udesno. Analogno se razmatra i slučaj $\delta_i(a, \xi) = (a', \xi', L)$.

Jasno je da ukoliko A prihvata reč u tada će nas odgovarajući izbor transformacija, tj. niza na drugoj stazi, dovesti do finalnog stanja i kod mašine A'. Obratno, ako mašina A ne prihvata reč u tada nas nijedan izbor niza na drugoj stazi, koji predstavlja izbor odgovarajućih prelaza, ne može dovesti do finalnog stanja u A'. $\square$

Literatura: Fischer [1965], Hopcroft and Ullman [1969], Kain [1972], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton [1982], Turing [1936].

7.2. Turingove mašine i jezici tipa 0

U ovom odeljku dokazujemo da jezici raspoznati Turingovim mašinama jesu upravo jezici tipa 0, tj. jezici generisani gramatikama.

Najpre dokazujemo jedan deo teoreme koja to tvrdi.

Teorema 7.2.1. *Neka je X proizvoljan alfabet i L jezik nad alfabetom X koji je raspoznatljiv Turingovom mašinom. Tada je L jezik tipa* 0.

Dokaz. Pretpostavimo da Turingova mašina $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ raspoznaje jezik L skupom stanja T. Konstruisaćemo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ koja generiše dve kopije neke reči iz Σ^* i onda simulira rad mašine A na jednoj od kopija. Ako A prihvata razmatranu reč, tada G transformiše drugu kopiju u reč iz X^*. Ako A ne prihvata početnu reč, tada izvođenje ne vodi do reči iz X^*. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $\delta(a, \xi)$ nedefinisano za sve $a \in T$ i $\xi \in \Sigma$.

Uzmimo da je $V = \{[x, \xi] \mid x \in X \cup \{e\},\ \xi \in \Sigma\} \cup A \cup \{\sigma, \rho, \eta\}$, i neka su pravila izvođenja data sa:

1. $\sigma \to a_0\rho$,
2. $\rho \to [x, x]\rho$,
3. $\rho \to \eta$,
4. $\eta \to [e, \#]\eta$,
5. $\eta \to e$,
6. $a[x, \xi] \to [x, \mu]a'$, za sve $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ takve da je $\delta(a, \xi) = (a, \mu, R)$,
7. $[y, \nu]a[x, \xi] \to [y, \nu][x, \mu]a'$, za sve $\xi, \mu\nu \in \Sigma$ i $x, y \in X \cup \{e\}$ i $a \in A$ takve da je $\delta(a, \xi) = (a', \mu, L)$,
8. $[x, \xi]a \to axa,\ a[x, \xi] \to axa,\ a \to e$, za sve $x \in X \cup \{e\}$, $\xi \in \Sigma$, $a \in T$.

Pretpostavimo da A prihvata reč $u = x_1x_2\dots x_n$, gde je $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Koristeći pravila 1 i 2 dobijamo

$$\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} a_0[x_1, x_1][x_2, x_2]\dots[x_n, x_n]\rho.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ broj ćelija koje A koristi za izračunavanje. Koristeći pravilo 3, a zatim m puta pravilo 4, i konačno pravilo 5, imamo

$$\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} a_0[x_1, x_1][x_2, x_2]\dots[x_n, x_n][e, \#]^m.$$

Nadalje koristimo pravila 6 i 7 sve dok ne dođemo do nekog finalnog stanja. Primetimo da pri tome prva komponenta u paru $[x, \xi]$, $x \in X \cup \{e\}$, $\xi \in \Sigma$, ostaje neizmenjena.

Indukcijom po dužini izračunavanja

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_s, r),$$

dokazaćemo da iz njega sledi

$$\begin{aligned} a_0[x_1, x_1][x_2, x_2]\dots[x_n, x_n][e, \#]^m & \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ & \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1, \xi_1][x_2, \xi_2]\dots[x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r]\dots[x_{n+m}, \xi_{n+m}], \end{aligned}$$

gde su

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X,\ x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+m} = e,$$

i

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m} \in \Sigma, \quad \text{pri čemu je }\ \xi_{s+1} = \xi_{s+2} = \dots = \xi_{n+m} = \#.$$

Tvrđenje evidentno važi za izračunavanja dužine 0. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sva izračunavanja dužine $k-1$, i uzmimo da je

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_s, r),$$

izračunavanje dužine k. To izračunavanje možemo podeliti na izračunavanje

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a', \mu_1\mu_2\dots\mu_t, r'),$$

dužine $k-1$, i korak

$$(a', \mu_1\mu_2\dots\mu_t, r') \underset{A}{\longrightarrow} (a, \xi_1\xi_2\dots\mu_s, r').$$

Prema induktivnoj hipotezi, postoji izvođenje

$$\begin{aligned} &a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n][e,\#]^m \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ &\quad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\mu_1]\dots[x_{r'-1},\mu_{r'-1}]a'[x_{r'},\mu_{r'}]\dots[x_{n+m},\mu_{n+m}]. \end{aligned}$$

Stavimo

$$D = \begin{cases} L, & \text{ako je } r = r'-1, \\ R, & \text{ako je } r = r'+1. \end{cases}$$

Tada svakako za neki D važi $\delta(a',\mu_{r'}) = (a,\xi_{r'},D)$. Prema pravilima 6 ili 7 je

$$a'[x_{r'},\mu_{r'}] \underset{G}{\longrightarrow} [x_{r'},\xi_{r'}]a$$

ili

$$[x_{r'-1},\mu_{r'-1}]a'[x_{r'},\mu_{r'}] \underset{G}{\longrightarrow} a[x_{r'-1},\mu_{r'-1}][x_{r'},\xi_{r'}]$$

zavisno od vrednosti D. Jasno je da je $\mu_i = \xi_i$ za sve $i \neq r'$. Odatle je

$$\begin{aligned} &a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n][e,\#]^m \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ &\quad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_{n+m},\xi_{n+m}], \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sada prema pravilu 8 za $a \in T$ imamo

$$[x_1,\xi_1]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_{n+m},\xi_{n+m}] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1x_2\dots x_n.$$

Dakle, $L(G,\sigma)$ sadrži sve reči koje raspoznaje mašina A, tj. $L \subseteq L(G,\sigma)$.

Preostaje da se dokaže da A prihvata sve reči iz jezika $L(G,\sigma)$. Posmatrajmo izvođenje u G koje vodi do reči $u \in L \subseteq X^*$, pri čemu smo uzeli da je $u = x_1x_2\dots x_n$, za neke $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$. Početni deo tog izvođenja mora biti oblika

$$\sigma \underset{G}{\longrightarrow} a_0\rho \overset{*}{\underset{G}{\longrightarrow}} a_0[x_1,x_1]\dots[x_n,x_n].$$

Dokazaćemo indukcijom po dužini izvođenja

$$\begin{aligned} &a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ &\quad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_n,\xi_n] \end{aligned} \tag{7.1}$$

da iz njega sledi

$$(a_0,x_1x_2\dots x_n,1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,r),$$

za neke $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Sigma$.

Neka je (7.1) izvođenje dužine 1, tj. neposredno izvođenje

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\ldots[x_n,x_n] \underset{G}{\Longrightarrow} [x_1,\xi_1]a[x_2,x_2]\ldots[x_n,x_n].$$

Ovo izvođenje je moguće samo ako je zadovoljeno $\delta(a_0,x_1)=(a,\xi_1,R)$. Tada je jasno da važi

$$(a_0, x_1x_2\ldots x_n, 1) \underset{A}{\longrightarrow} (a, \xi_1x_2\ldots x_m, 2),$$

što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo da gornje tvrđenje važi za sva izvođenja dužine $k-1$ i dokažimo da važi i za izvođenje (7.1) dužine k. Tada se to izvođenje može podeliti na izvođenje

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\ldots[x_n,x_n] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1']\ldots[x_{r'-1},\xi_{r'-1}']a'[x_{r'},\xi_{r'}']\ldots[x_n,\xi_n']$$

dužine $k-1$ i neposredno izvođenje

$$\begin{aligned}&[x_1,\xi_1']\ldots[x_{r'-1},\xi_{r'-1}']a'[x_{r'},\xi_{r'}']\ldots[x_n,\xi_n'] \underset{G}{\Longrightarrow}\\ &\qquad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1]\ldots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\ldots[x_n,\xi_n].\end{aligned}$$

Prema indukcijskoj hipotezi je

$$(a_0, x_1x_2\ldots x_n, 1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a, \xi_1'\xi_2'\ldots\xi_n', r').$$

Takođe, iz poslednjeg neposrednog izvođenja sledi

$$\delta(a', x_{r'}) = \begin{cases} (a, \xi_{r'+1}, R), & \text{ako je } r = r'+1,\\ (a, \xi_{r'-1}, L), & \text{ako je } r = r'-1.\end{cases}$$

Odatle je

$$(a, \xi_1'\xi_2'\ldots\xi_n', r') \to (a, \xi_1\xi_2\ldots\xi_n, r).$$

Prema tome,

$$(a_0, x_1x_2\ldots x_n, 1) \overset{*}{\underset{A}{\longrightarrow}} (a, \xi_1\xi_2\ldots\xi_n, r),$$

što je i trebalo dokazati.

Vratimo se ponovo izvođenjima u gramatici G. Ona su sledećeg oblika

$$\begin{aligned}&\sigma \underset{G}{\longrightarrow} a_0\rho \overset{*}{\underset{G}{\longrightarrow}} a_0[x_1,x_1]\ldots[x_n,x_n]\\ &\qquad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1]\ldots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\ldots[x_n,\xi_n].\end{aligned}$$

Izvođenje do reči iz X^* je moguće samo ako primenimo u izvesnom koraku pravilo 8, a ono je primenljivo samo ako su nas već upotrebljena izvođenja dovela do stanja $a \in T$, a onda prema već dokazanom važi

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \xrightarrow[A]{*} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_n, r).$$

Jasno je da primenom pravila 8 konačan broj puta dobijamo

$$[x_1, \xi_1]\dots[x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r]\dots[x_n, \xi_n] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1\dots x_n.$$

Kako je $u = x_1x_2\dots x_n \in L(G, \sigma)$, to niz izvođenja koji vodi do reči iz X^* svakako postoji, i u njemu se pojavljuje i izvođenje (7.1) kod koga je $a \in T$. Odatle, prema već dokazanom važi

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \xrightarrow[A]{*} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_n, r),$$

što znači da mašina A prihvata reč u. Dakle, $L(G, \sigma) \subseteq L$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sledećom teoremom dokazuje se i obratna implikacija.

Teorema 7.2.2. *Neka je L jezik tipa 0 nad proizvoljnim alfabetom X. Tada postoji Turingova mašina koja raspoznaje jezik L.*

Dokaz. Neka je $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ gramatika tipa 0. Konstruisaćemo nedeterminističku Turingovu mašinu $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ koja raspoznaje L. Uzmimo $\Sigma = V \cup \{\#, \rho, \mu\}$, pri čemu $\#, \rho, \mu$ ne pripadaju alfabetu V. Smatraćemo, takođe, da A može da upisuje prazan simbol $\#$.

Opisaćemo u grubim crtama rad mašine A. Na početku se na ulaznoj traci mašine nalazi reč $w \in X^*$. Mašina A upisuje ρ na prvom mestu trake i pomera reč w jedno mesto udesno. Zatim iza reči w dopisuje $\rho\sigma\rho$. Dakle, neprazan deo trake je reč $\rho w\rho\sigma\rho$. Sada A simulira izvođenja u G na drugom delu trake, tj. ako je $\sigma \to u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_{n-1} \Rightarrow u_n$ izvođenje u G, tada A menja σ u u_1, zatim u_1 u u_2, ..., zatim u_{n-1} u u_n. Naime, ako je sadržaj trake oblika $\rho w\rho\xi_1\xi_2\dots\xi_k\rho$, tada A bira reč $\xi_i\xi_{i+1}\dots\xi_{i+r-1}$ takvu da postoji pravilo $\xi_i\xi_{i+1}\dots\xi_{i+r-1} \to \alpha$ u π, gde je α neka reč iz V^*, i menja podreč $\xi_i\xi_{i+1}\dots\xi_{i+r-1}$ sa α. Pri tome se po potrebi vrši pomeranje reči $\xi_{i+r}\dots\xi_k$ ulevo ili udesno kako bi se napravilo dovoljno prostora za reč α ako ona nije dužine r. Na kraju dolazimo do reči $u_n \in V^*$ takve da nijedna njena podreč nije leva strana nekog izvođenja iz π. Sadržaj trake je $\rho w\rho u_n\rho$. Uporedimo reči w i u_n. Mašina prihvata reč w ako je $u_n = w$, tj. ako postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, odakle je jasno da A raspoznaje L. $\square$

Konačno, formulisaćemo i glavnu teoremu ovog odeljka, kojom su prethodne dve teoreme sumirane u jednu.

Teorema 7.2.3. *Jezik je tipa* 0 *ako i samo ako jeste raspoznatljiv Turingovom mašinom.*

Literatura: Hopcroft and Ullman [1969], Kain [1972], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton [1982].

7.3. Linearno ograničeni automati

U ovom odeljku uvodimo pojmove determinističkog i nedeterminističkog linearno ograničenog automata i dokazujemo da je upravo nedeterministički linearno ograničeni automat mašina koja raspoznaje jezike tipa 1. Naziv ovih mašina potiče otuda što su to Turingove mašine koje za svoj rad koriste ograničen broj ćelija ulazne trake i taj broj je, u opštem slučaju, linearna funkcija broja ćelija u kojima se nalazi ulazna reč. Međutim, dokazuje se da modeli linearno ograničenih automata sa različitim linearnim funkcijama granica koje ih karakterišu zapravo raspoznaju istu klasu jezika. Zato će ovde biti predstavljen model u kome je ta funkcija identička, odnosno model linearno ograničenog automata koji za svoj rad koristi deo ulazne trake na kome se nalazi ulazna reč. Primetimo da ovi automati, za razliku od "običnih" automata razmatranih u ranijim glavama, imaju beskonačnu memoriju, ali, za razliku od Turingovih mašina, ograničen pristup memoriji.

Formalno, *linearno ograničeni automat*, ili *deterministički linearno ograničeni automat*, je petorka $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, gde je

- A – neprazan konačan skup, *skup stanja* automata $\mathcal{A}$;
- a_0 – element iz A, *početno stanje* automata $\mathcal{A}$;
- X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* automata $\mathcal{A}$;
- Σ – neprazan konačan skup koji sadrži skup X i simbole $\#, \Delta, \$ \notin X$, *alfabet trake* automata $\mathcal{A}$;
- δ – parcijalno preslikavanje iz $A \times \Sigma$ u $A \times \Sigma \setminus \{\#\} \times \{L, R\}$, *funkcija prelaza* automata $\mathcal{A}$.

Primećujemo da osim obaveznog znaka $\#$ za praznu ćeliju, takođe imamo i specijalne znake

- Δ – znak koji označava *početak ulazne reči*,
- $\$$ – znak koji označava *kraj ulazne reči*.

Zapazimo da je ulazna reč oblika $\Delta u\$$, gde je $u \in X^*$. Simboli Δ i $\$$ služe da "spreče" glavu da prilikom rada izađe iz obeleženog dela trake.

Pod *nedeterminističkim linearno ograničenim automatom* podrazumevamo petorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, kod koje A, a_0, X i Σ imaju isto značenje kao kod determinističkog linearno ograničenog automata, dok je δ relacija između skupova $A \times \Sigma$ i $A \times \Sigma \setminus \{\#\} \times \{L, R\}$. Dakle, to je nedeterministička Turingova mašina koja koristi samo onaj deo ulazne trake na kome se nalazi ulazna reč.

Kako su ovi automati specijalan slučaj Turingovih mašina, to se relacije $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ i $\xrightarrow[\mathcal{A}]{*}$, odnosno $\rightarrow$ i $\xrightarrow{*}$, definišu analogno kao kod Turingovih mašina. Na isti način kao kod Turingovih mašina definišu se i pojmovi raspoznavanja jezika i prihvatanja reči determinističkim i nedeterminističkim linearno ograničenim automatom.

Međutim, za razliku od rezultata datog u Teoremi 7.1.1, gde je dokazana ekvivalentnost raspoznatljivosti jezika determinističkim i nedeterminističkim Turingovim mašinama, kod linearno ograničenih mašina još uvek nije ustanovljeno da li to važi. Naime, još uvek je nepoznato da li svaki jezik koji je raspoznatljiv nedeterminističkim linearno ograničenim automatom može biti raspoznat i determinističkim linearno ograničenim automatom. S obzirom na Teoremu 7.1.1, on je svakako raspoznatljiv determinističkom Turingovom mašinom. Međutim, broj ćelija ulazne trake koje koristi ta Turingova mašina jeste eksponencijalna funkcija dužine ulazne reči.

Naredna teorema daje prvi deo glavnog rezultata ovog odeljka.

Teorema 7.3.1. *Ako je jezik L raspoznatljiv nedeterminističkim linearno ograničenim automatom, tada je on kontekstno-zavisan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ linearno ograničeni automat koji raspoznaje L pomoću skupa T, i konstruišimo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ takvu da je $L = L(G, \sigma)$.

Za svaki $\xi \in \Sigma$ uvedimo nove simbole ξ' i ξ'', stavimo da je $\Sigma' = \{\xi' \mid \xi \in \Sigma\}$, $\Sigma'' = \{\xi'' \mid \xi \in \Sigma\}$ i $\overline{\Sigma} = \Sigma' \cup \Sigma''$, i uzmimo da je

$$V = X \cup \{\sigma\} \cup T \cup \{[\Delta, z] \mid z \in \overline{\Sigma} \cup A \times \Sigma''\} \cup A \times \Sigma'' \cup \overline{\Sigma},$$

gde su σ i Δ novi simboli. Pravila koja čine skup pravila π definišemo tako da gramatika G simulira rad automata $\mathcal{A}$ unazad. Naime, za proizvoljne $\xi, \mu, \eta \in \Sigma$ i $a, b \in A$, skup pravila π gradimo na sledeći način:

1) Ako je $a \in T$, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned} \sigma &\to [\Delta, \xi']a, \\ [\Delta, \xi'] &\to [\Delta, \xi''], \\ [\Delta, \xi'] &\to [\Delta, \xi']\mu', \\ [\Delta, \xi'']\mu' &\to [\Delta, \xi'']\mu'', \\ \mu''\eta' &\to \mu''\eta''. \end{aligned}$$

2) Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \mu, R)$ prelaz u A, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned} \mu''b &\to (a, \xi''), \\ [\Delta, \mu'']b &\to [\Delta, (a, \xi'')], \\ \mu''(b, \eta'') &\to (a, \xi'')\eta'', \\ [\Delta, \mu''](b, \eta'') &\to [\Delta, (a, \xi'')]\eta''. \end{aligned}$$

3) Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \mu, L)$ prelaz u A, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned} (b, \eta'')\mu'' &\to \eta''(a, \xi''), \\ [\Delta, (b, \eta'')]\mu'' &\to [\Delta, \eta''](a, \xi'')]. \end{aligned}$$

4) U skup π uključujemo i pravila

$$\begin{aligned} [\Delta, (a_0, \xi'')] &\to \xi'', \\ \xi'' &\to \xi. \end{aligned}$$

Za ovako definisanu gramatiku G važi $L = L(G, \sigma)$. $\square$

Sa ciljem da dokažemo obrat ove teoreme uvodimo pojam reda gramatike, kao i pojam linearno ograničene gramatike i dokazujemo da za svaku kontekstno-zavisnu gramatiku postoji linearno ograničena kontekstno-zavisna gramatika koja generiše isti jezik.

Kontekstno-zavisna gramatika je *reda* n ako je n najveća dužina reči koje se pojavljuju u pravilima date gramatike. Takođe, gramatika *očuvava dužinu* ako za svako izvođenje $\alpha \to \beta$ važi ili da je α početni simbol ili da β ne sadrži početni simbol i $|\alpha| = |\beta|$.

Kontekstno zavisna gramatika G je *linearno ograničena* ako važi:

(a) G je reda 2,
(b) G očuvava dužinu,
(c) ako je σ početni simbol, tada iz $\sigma \to \alpha\beta$ sledi $\alpha = \sigma$.

Sada dokazujemo sledeće:

Lema 7.3.1. *Za svaku kontekstno-zavisnu gramatiku G postoji linearno ograničena kontekstno-zavisna gramatika koja generiše isti jezik kao gramatika G.*

Dokaz. Dokazaćemo najpre da za proizvoljnu kontekstno-zavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ reda n postoji neka kontekstno-zavisna gramatika $G' = (V', X, \pi')$ reda $n-1$ koja generiše isti jezik kao G. Odatle će se, daljim smanjenjem stepena gramatike, dobiti i kontekstno-zavisna gramatika reda 2 koja generiše isti jezik kao G.

Možemo pretpostaviti da nijedno pravilo u gramatici G nema simbol iz X ni na jednoj svojoj strani, osim pravila oblika $\alpha \to x$.

Neka je sada $\phi \to \psi$ pravilo u π. Ako je $|\psi| < 3$ onda to pravilo postaje pravilo u π'. U suprotnom je $\phi = \alpha\phi'$ i $\psi = \beta\gamma\delta\psi'$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \in V \setminus X$ i $\phi', \psi' \in (V \setminus X)^*$. Ako je $\phi' = e$, tada uvodimo nove simbole $\alpha_1, \alpha_2 \in V' \setminus X$ i skupu π' dodajemo pravila $\alpha \to \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 \to \beta\gamma$, $\alpha_2 \to \delta\psi'$. Ako je $\phi' \neq e$, tada je $\phi' = v\phi''$, gde je $v \in V \setminus X$ i $\phi'' \in (V \setminus X)^*$. Uvodimo nove simbole $\alpha', v' \in V' \setminus X$ i pravilima π' dodajemo pravila $\alpha v \to \alpha' v'$, $\alpha' \to \beta$, $v'\phi'' \to \gamma\delta\psi''$.

Menjajući na ovaj način pravila gramatike G novim pravilima očigledno formiramo gramatiku nižeg reda koja generiše isti jezik kao gramatika G.

Dakle, možemo smatrati da je data gramatika G reda 2. Dokazaćemo sada da postoji linearno ograničena gramatika $G' = (V', X, \pi')$ koja generiše isti jezik kao G.

Stavimo $V' = V \cup \{\sigma', \rho\}$, gde je $\sigma', \rho \notin V$. Pravila u π' su određena sa

$$
\begin{array}{lll}
\sigma' \to \sigma'\rho, & \sigma' \to \sigma, & \\
\rho\alpha \to \alpha\rho, & \alpha\rho \to \rho\alpha & \text{za svaki } \alpha \in V, \\
 & & \\
\alpha \to \beta, & \text{ako je } \alpha \to \beta \text{ pravilo u } G & \\
\alpha\beta \to \gamma\delta, & \text{ako je } \alpha\beta \to \gamma\delta \text{ pravilo u } G & \\
\alpha\rho \to \beta\gamma, & \text{ako je } \alpha \to \beta\gamma \text{ pravilo u } G &
\end{array}
$$

Gramatika G' je očigledno linearno ograničena. Dokazaćemo da je G' generiše isti jezik kao G, tj. da je $L(G, \sigma) = L(G', \sigma')$. Neka je $\Phi : (V')^* \to V^*$ homomorfizam određen sa $\sigma'\Phi = \sigma$, $\rho\Phi = e$ i $\alpha\Phi = \alpha$, za svaki $\alpha \in V$. Tada iz $u \underset{G'}{\longrightarrow} v$ sledi $u\Phi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v\Phi$, pa je $L(G', \sigma') \subseteq L(G, \sigma)$. Obratno, ako je $u \underset{G}{\longrightarrow} v$ tada je ili $u \underset{G'}{\longrightarrow} v$ ili $u\rho \underset{G'}{\longrightarrow} v$. Dakle, ako je $u \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v$ tada je ili

$u \xRightarrow[G']{*} v$ ili $u\rho \xRightarrow[G']{*} v$. Imajući u vidu prva dva pravila iz π', za $v \in L(G,\sigma)$ je $\sigma \xRightarrow[G]{*} u \xRightarrow[G]{*} v$, za neki $u \in V^*$, a onda je ili

$$\sigma' \xrightarrow[G']{} \sigma \xrightarrow[G]{} u \xRightarrow[G']{*} u\rho \xRightarrow[G']{*} v$$

ili

$$\sigma' \xrightarrow[G']{} \sigma \xrightarrow[G]{} u \xRightarrow[G']{*} v$$

izvođenje za v u gramatici G'. Dakle, $L(G,\sigma) \subseteq L(G',\sigma')$.

Prema tome, gramatike G i G' generišu isti jezik. $\square$

Sada smo spremni da dokažemo obrat Teoreme 7.3.1.

Teorema 7.3.2. *Za svaki jezik generisan linearno ograničenom gramatikom postoji nedeterministički linearno ograničen automat koji ga raspoznaje.*

Dokaz. Neka je $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ linearno ograničena gramatika. Konstruisaćemo nedeterministički linearno ograničen automat $A = (A, a_0, X, V, \delta)$ koji raspoznaje L. Naime, skup stanja je

$$\begin{aligned} A = \{&a_0, a_1, b_0, b_0', b_1, c_0, c_1\} \cup \\ &\cup \{d_\alpha \mid \text{ za svaki } \alpha \in V \text{ takav da postoji pravilo } \alpha\beta \xrightarrow[G]{} \gamma\delta\} \end{aligned}$$

i $T = \{a_0\}$. Funkcija prelaza je određena sa:

$$\begin{aligned}
\delta(a_0, \Delta) &= (a_1, \Delta, R), & \\
\delta(a_1, x) &= (a_1, x, R), & \text{za svaki } x \in X, \\
\delta(a_1, \Delta) &= (b_0, \Delta, L), & \\
\delta(b_0, \xi) &= (b_0, \xi, R), & \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0, \xi) &= (b_0, \xi, L), & \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0', \xi) &= (b_0', \xi, L), & \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0, \mu) &= (b_0', \xi, R), & \text{za svako pravilo } \xi \xrightarrow[G]{} \mu, \\
\delta(b_0, \eta) &= (d_\xi, \xi, R), & \text{za svako pravilo } \xi\mu \xrightarrow[G]{} \eta\upsilon, \\
\delta(s_\xi, \upsilon) &= (b_0', \mu, R), & \text{za svako pravilo } \xi\mu \xrightarrow[G]{} \eta\upsilon, \\
\delta(b_0, \sigma) &= (c_0, \sigma, L), & \\
\delta(b_0, \Delta) &= (b_1, \Delta, R), & \\
\delta(c_1, \sigma) &= (b_1, \Delta, R), & \text{za svako pravilo } \sigma \xrightarrow[G]{} \sigma\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(b_1,\xi) &= (b_0',\sigma,R), \qquad \text{za svako pravilo } \sigma \xrightarrow[G]{} \sigma\xi, \\
\delta(b_1,\xi) &= (b_0',\sigma,R), \qquad \text{za svako pravilo } \sigma \xrightarrow[G]{} \sigma\xi, \\
\delta(b_1,\Delta) &= (a_0,\Delta,R).
\end{aligned}$$

Ovako definisan automat A raspoznaje jezik $L(G,\sigma)$. □

Konačno, može se dokazati i glavni rezultat ovog odeljka dat sledećom teoremom.

Teorema 7.3.3. *Jezik je raspoznatljiv nedeterminističkim linearnim ograničenim automatom ako i samo ako je kontekstno-zavisan.*

Dokaz. Neposredno sledi na osnovu Teorema 7.3.1 i 7.3.2, kao i Leme 7.3.1. □

Već smo pomenuli da nije poznato da li se svaki kontekstno-zavisan jezik može raspoznati determinističkim linearno ograničenim automatom. Međutim, u narednoj teoremi je pokazano da za kontekstno-nezavisne jezike to važi.

Teorema 7.3.4. *Svaki kontekstno-nezavisan jezik se može raspoznati determinističkim linearno ograničenim automatom.*

Dokaz. Prema Teoremi 6.3.2 svaka kontekstno-nezavisna gramatika može biti zadata gramatikom u Normalnoj formi Chomsky, tj. sva pravila su oblika

$$\alpha \to \beta\gamma \text{ ili } \alpha \to x,$$

za neke $\alpha,\beta,\gamma \in V\setminus X$ i $x \in X$. Tada izvođenje reči dužine n ima dužinu $2n-1$. Kako je skup pravila izvođenja konačan, to ga možemo dobro urediti, tj. numerisati pravila nekim redosledom, brojevima od 1 do k, gde je k ukupan broj pravila. Tada svako izvođenje karakteriše niz brojeva koji odgovaraju upotrebljenim pravilima u pojedinim koracima. Ovaj niz brojeva možemo smatrati zapisom nekog broja sa osnovom k.

Opisaćemo automat A koji raspoznje dati jezik L. Ovaj automat ima tri staze. Na prvoj se nalazi ulazna reč $w \in X^*$ dužine n. Na drugoj se nalazi $(2n-1)$-nocifreni broj sa osnovom k. Treća staza služi za simuliranje izvođenja u gramatici G pri čemu se primenjuju redom pravila numerisana ciframa broja sa druge staze. Ako je automat došao do kraja druge trake, tj. upotrebio sva zadata izvođenja, onda upoređuje reči na prvoj i trećoj stazi.

Ako je reč dobijena na trećoj stazi jednaka reči na prvoj, tada automat prihvata reč w, u suprotnom broju na drugoj stazi dodaje 1 i ponavlja postupak sve dok na drugoj stazi ne dođe do broja k^{2n-1}, kada konačno odbacuje reč w. $\square$

Literatura: Hopcroft and Ullman [1969], Kain [1972], Kuroda [1964], Landweber [1963], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton [1982], Myhill [1960].

7.4. Zadaci

1. Konstruisati Turingovu mašinu koja reč $w \in \{x, y\}^*$ zadatu na traci na početku rada mašine pretvara u reč

(a) $\overline{w}$,
(b) $x^{|w|_x} y^{|w|_y}$,
(c) $t(w)w'h(w)$, ako je $w = h(w)w't(w)$,
(d) x^{2n}, ako je $w = x^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

2. Dokazati da mašina $T = \{\{a_0, a_1\}, a_0, \{x, y\}, \{x, y, \#\}, \delta\}$ gde je funkcija δ data sa

$$\begin{array}{l} \delta(a_0, x) = (a_1, x, R) \\ \delta(a_1, x) = (a_0, x, R) \end{array}$$

raspoznaje pomoću $\{a_0\}$ sve reči sa parnim brojem pojavljivanja slova x.

3. Ako su date Turingove mašine koje raspoznaju jezike L_1 i L_2 konstruisati Turingove mašine koje raspoznaju jezike $L_1 \cup L_2$ i $L_1 \cap L_2$.

4. Koristeći metod opisan u Teoremi 7.2.1, konstruisati gramatiku koja generiše jezik raspoznatljiv Turingovom mašinom zadatom u Zadatku 2.

5. Posmatrajmo Turingovu mašinu

$$T = (\{a_0, a_1, a_2, a_3\}, a_0, \{\$, [,]\}, \{\#, \$, [,], \alpha, \beta\}, \delta)$$

gde je δ data sa:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcll} \delta(a_0, \$) & = & (a_0, \$, R) & \delta(a_1,]) & = & (a_2, \alpha, L) & \\ \delta(a_0, \alpha) & = & (a_0, \alpha, R) & \delta(a_2, \gamma) & = & (a_2, \gamma, L) & \text{za svaki } \gamma \neq \$ \\ \delta(a_0, [) & = & (a_1, \alpha, R) & \delta(a_2, \$) & = & (a_0, \$, R) & \\ \delta(a_1, [) & = & (a_1, [, R) & \delta(a_0, \beta) & = & (a_3, \alpha, R) & \\ \delta(a_1, \alpha) & = & (a_1, \alpha, R). & & & & \end{array}$$

Koje od reči oblika $\$w$, gde je $w \in \{[,]\}^*$, T raspoznaje pomoću $\{a_3\}$? Konstruisati gramatiku koja generiše jezik koji T raspoznaje pomoću $\{a_3\}$ koristeći algoritam dat u Teoremi 7.2.1. Da li se može konstruisati jednostavnija gramatika?

6. Odrediti jezik $L = L(G, \sigma)$ i konstruisati Turingovu mašinu koja ga raspoznaje, ako je $G = (\{\sigma, \alpha, x, y\}, \{x, y\}, \pi)$ i pravila izvođenja su:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \alpha x + x \\ \alpha & \to & \alpha\alpha + y\sigma + y \\ \sigma x & \to & \alpha y \\ \sigma y & \to & e. \end{array}$$

Da li je jezik L kontekstno-nezavisan? Da li je regularan?

7. Konstruisati Turingovu mašinu koja raspoznaje jezik $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (\{\sigma, \alpha, a, b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \pi)$ i pravila izvođenja su:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & c\alpha b\sigma + a\sigma b\sigma c + a\alpha b \\ c\alpha b & \to & d\alpha b + db \\ \alpha & \to & ef. \end{array}$$

8. Dokazati da za deterministički linearno ograničen automat A postoji deterministički linearno ograničen automat A' takav da se A' zaustavlja za bilo koju konfiguraciju i A' raspoznaje isti jezik kao A.

9. Dokazati da je jezik $\{x^n y^{nf} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ kontekstno-zavisan, ako je $f : n \mapsto nf$ funkcija dobijena primenom konačno mnogo sabiranja i/ili množenja .

10. Konstruisati linearno ograničeni automat koji raspoznaje jezik

$$\{x^n \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ i } n \text{ nije prost broj }\}.$$

Glava 8

Odlučivost u Teoriji jezika

Pojam *algoritma*[1] ili *efektivnog postupka* predstavlja jedan od najznačajnijih matematičkih pojmova. Već vekovima ovaj pojam se u matematici koristi u svom neformalnom, intuitivnom smislu. Štaviše, mnogi matematičari smatraju da ovaj pojam spada u grupu primitivnih matematičkih pojmova i da ne postoje jednostavniji, intuitivno jasniji matematički pojmovi preko kojih bi se pojam algoritma definisao. Ipak, tridesetih godina ovog veka se u matematičkoj logici javila potreba za formalizovanjem ovog pojma. Prvu formalizaciju pojma algoritma predstavljaju napred već razmatrane Turingove mašine, za koje smo rekli da su uvedene u radu Turinga [1936]. Potom su se pojavili i razni drugi koncepti, kao što su rekurzivne funkcije (Kleene [1936, 1943]), Churchov λ-račun (Church [1941]), Postovi sistemi (Post [1936, 1943]), normalni algoritmi Markova (Markov [1954]), neograničene registarske mašine (Shepherdson and Sturgis [1963]) i drugi. Osim što su odigrali značajnu ulogu u rešavanju raznih logičkih i algebarskih problema, ovi koncepti su se kasnije pokazali i kao veoma značajni za nastanak i razvoj računarstva.

Smatrajući da Turingova mašina ispunjava tačno one uslove za koje se smatra da ih intuitivni pojam algoritma treba imati, Church [1936] je izneo tezu da se svaki algoritam može realizovati nekom Turingovom mašinom, poznatu pod nazivom Churchova teza. O toj tezi, koja do danas nije opovrg-

[1] Naziv *algoritam* potiče od `Algorithmi` – latinskog zapisa imena arapskog matematičara al-Horezmija, preko čijih dela je do Evrope stigao indijski desetični pozicioni sistem i računanje u njemu. Taj naziv se prvobitno koristio za označavanje postupaka za računanje u tom sistemu, a kasnije je dobio današnji, opštiji smisao. Zanimljivo je i da je kod al-Horezmija operacija prenošenja članova sa jedne na drugu stranu jednakosti, uz promenu znaka, nazivana "al-džebr", odakle se latinskim zapisom došlo do naziva *algebra*.

nuta i opšte je prihvaćena, biće reči u prvom odeljku ove glave, gde se govori o neformalnim pojmovima izračunljivosti i odlučivosti i njihovim formalnim ekvivalentima – Turing-izračunljivosti i Turing odlučivosti. Tema drugog odeljka su rekurzivni i rekurzivno nabrojivi jezici. U tom odeljku daju se razne karakterizacije tih jezika, dokazuje se da je jezik rekurzivno nabrojiv ako i samo ako je tipa 0, što je rezultat do koga su prvi došli Davis [1958] i Chomsky [1959], a za kontekstno-zavisne jezike se dokazuje da su rekurzivni. U poslednjem odeljku bavićemo se još nekim algoritamskim problemima u teoriji jezika – pitanjima odlučivosti izvesnih problema na raznim klasama jezika.

8.1. Izračunljivost i odlučivost. Churchova teza

Neka su A i B neki skupovi i $\phi : A \to B$ je proizvoljna parcijalna (totalna) funkcija. Za funkciju ϕ kažemo da je *parcijalna* (*totalna*) *izračunljiva* ako postoji efektivan postupak pomoću koga će se za svaki argument odrediti odgovarajuća vrednost funkcije. U situacijama kada je iz konteksta jasno o kakvoj se funkciji radi, odrednice parcijalno i totalno se mogu i izostaviti, i tada govorimo prosto o *izračunljivoj funkciji*. Primetimo da uvek možemo smatrati, s obzirom da radimo sa parcijalnim fukcijama, da ϕ predstavlja parcijalno preslikavanje iz skupa $A \cup B$ u $A \cup B$. U slučaju da je $\phi : X^* \to Y^*$ parcijalna (totalna) funkcija iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^*, tada takođe možemo smatrati da je ϕ parcijalno preslikavanje slobodnog monoida Z^*, gde je $Z = X \cup Y$.

Pojam problema ili predikata često se koristi kao sinonim za pojam relacije. Naime, ako je $\mathcal{P}$ neka n-arna relacija na skupu A, tada je nazivamo *problemom* ili *predikatom* na A, a izrazom oblika $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ naznačavamo da se radi o n-arnom problemu (predikatu). Osim toga, za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ za koje je $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$ kažemo da $\mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *važi*, a za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ za koje $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin \mathcal{P}$ kažemo da $\mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ne važi*. Za problem $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je *odlučiv* ako postoji algoritam koji za date $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ daje odgovor 'DA', ukoliko $\mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ važi, ili odgovor 'NE', ukoliko $\mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ne važi. Takav algoritam naziva se *algoritmom odlučivanja*. Ako takav algoritam ne postoji, za problem kažemo da je *neodlučiv*. Na primer, problem '$x = 2y$', gde su x i y prirodno brojevi, je odlučiv. Takođe, prema Teoremi 6.2.1, takav je problem i '$e \in L$', gde je $L \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisan jezik.

Pojam odlučivosti se može dovesti u direktnu vezu sa pojmom izračunljivosti korišćenjem pojma *karakteristične funkcije* problema $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, koja predstavlja n-arnu funkciju na $C_{\mathcal{P}} : A^n \to \{t, f\}$ definisanu sa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)C_{\mathcal{P}} = \begin{cases} t, & \text{ako } \mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ važi,} \\ f, & \text{ako } \mathcal{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ ne važi,} \end{cases}$$

gde su $t, f \in A$ fiksirani elementi koji, jasno, igraju ulogu logičkih vrednosti "tačno" (true) i "netačno" (false). Evidentno, problem $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je odlučiv ako i samo ako je $C_{\mathcal{P}}$ izračunljiva funkcija.

Napred uvedeni pojmovi su neformalni jer se definišu korišćenjem neformalnog pojma algoritma. U daljem tekstu dajemo i formalne definicije Turing-izračunljivosti i Turing-odlučivosti. Za parcijalnu (totalnu) funkciju $\phi : X^* \to X^*$ kažemo da je *parcijalna* (*totalna*) *Turing-izračunljiva funkcija* ako postoji neka Turingova mašina $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ koja se zaustavlja ako i samo ako je na ulazu reč $u \in X^*$ za koju je funkcija ϕ definisana, i prilikom zaustavljanja na traci je ispisana reč $u\phi$. I ovde se odrednice parcijalna i totalna mogu izostaviti, ako je jasno o kakvoj je funkciji reč. Funkcija više promenljivih $\phi : (X^*)^n \to X^*$ se izračunava Turingovom mašinom tako što se prilikom izračunavanja vrednosti $(u_1, u_2, \ldots, u_n)\phi$ za ulaznu reč uzima reč oblika $u_1\#u_2\#\ldots\#u_n$, pa se na isti način definiše i Turing-izračunljivost funkcije više promenljivih. Ako je $\mathcal{P}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ problem na X^*, tada kažemo da je on *Turing-odlučiv* ako njegova karakteristična funkcija jeste Turing-izračunljiva.

Postavlja se pitanje: Kakav je odnos između izračunljivosti i Turing-izračunljivosti? Prvo što se ovde može primetiti je da se ne može uspostaviti precizan matematički odnos između ovih pojmova, iz prostog razloga što je prvi od njih zasnovan na neformalnom pojmu algoritma, a drugi na formalnom pojmu Turingove mašine. Jedino je jasno da Turingova mašina zadovoljava sve uslove koje algoritam treba da ispuni, prema neformalnoj, intutitivnoj predstavi algoritma. Ono što je teško odrediti je: Da li pojam Turingove mašine sadrži samo to ili još nešto van toga, neko dodatno ograničenje koje će klasu algoritama koji se mogu realizovati Turingovim mašinama načiniti užom od klase svih intuitivno shvaćenih algoritama? Kao što smo ranije već rekli, o ovom pitanju razmišljao je Church [1936] koji je, analizirajući Turingove mašine i njihove mogućnosti, došao do zaključka da Turingove mašine ispunjavaju tačno one uslove kojima je određen neformalni, intutitivni pojam algoritma, tako da je on formulisao sledeću tezu:

Churchova teza. *Funkcija je izračunljiva ako i samo ako je Turing-izračunljiva.*

Iz istog razloga zbog kojih se pojmovi algoritma i Turingove mašine ne mogu precizno uporediti, ni Churchova teza se ne dokazuje. Ona bi se jedino mogla opovrgnuti ako bi se našao primer algoritma koji se ne bi mogao realizovati Turingovom mašinom. Međutim, do sada takav primer nije pronađen. Štaviše, za mnoge druge kasnije uvedene modele izračunavanja, među kojima su i napred pomenuti koncepti rekurzivne funkcije, Churchovog λ-računa, Postovog sistema, normalnog algoritma Markova i neograničene registarske mašine, dokazano je da su ekvivalentni Turingovim mašinama, tj. da je funkcija izračunljiva u bilo kojem od tih modela ako i samo ako je Turing-izračunljiva. Sve to uticalo je da Churchova teza bude opšte prihvaćena u teoriji algoritama i da se dokazi u kojima se poziva na nju smatraju korektnim. U stvari, u teoriji algoritama, Churchova teza igra ulogu aksiome. Na takav način Churchova teza biće korišćena i u narednim odeljcima.

Literatura: Church [1936, 1941], Cutland [1980], Detlovs [1953], Hopcroft and Ullman [1969, 1979], Kain [1972], Kleene [1936, 1943], Madarász and Crvenković [1995], Markov [1954], Mendelson [1964], Post [1936, 1943], Rozenberg and Salomaa [1994], Shepherdson and Sturgis [1963], Turing [1936].

8.2. Rekurzivni i rekurzivno nabrojivi jezici

U izvornoj definiciji pojmova rekurzivnog i rekurzivno nabrojivog skupa koristi se pojam rekurzivne funkcije, koja se definiše kao funkcija koja se može dobiti iz nekih elementarnih funkcija primenom, konačno mnogo puta, operatora kompozicije, rekurzije i minimizacije funkcija. Međutim, o pojmu rekurzivne funkcije ovde neće biti reči, a kako je poznato da je koncept rekurzivne funkcije ekvivalentan konceptu Turing-izračunljive funkcije, to ćemo ovde pojmove rekurzivnog i rekurzivno nabrojivog skupa, odnosno rekurzivnog i rekurzivno nabrojivog jezika, definisati korišćenjem pojma izračunljive funkcije.

Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik. Ako su $t, f \in X^*$ fiksirane reči, tada preslikavanje $C_L : X^* \to \{t, f\}$ definisano sa

$$uC_L = \begin{cases} t, & \text{ako je } u \in L, \\ f, & \text{ako je } u \notin L, \end{cases}$$

nazivamo *karakterističnom funkcija jezika* L. Jasno, reči t i f igraju ulogu logičkih vrednosti "tačno" (true) i "netačno" (false). Sa druge strane, ako je $t \in X^*$ fiksirana reč, tada parcijalno preslikavanje $P_L : X^* \to \{t\}$ definisano sa

$$uP_L = \begin{cases} t, & \text{ako je } u \in L, \\ \text{nije definisano}, & \text{ako je } u \notin L, \end{cases}$$

nazivamo *parcijalnom karakterističnom funkcijom jezika* L.

Za jezik L kažemo da je *rekurzivan* ako je njegova karakteristična funkcija C_L izračunljiva, tj. ako je problem '$w \in L$' odlučiv za svaku reč $w \in X^*$, dok za L kažemo da je *rekurzivno nabrojiv* ako je izračunljiva njegova parcijalna karakteristična funkcija.

Očigledno je da je komplement rekurzivnog jezika takođe rekurzivan, kao i da svaki rekurzivan jezik jeste rekurzivno nabrojiv. Postavlja se pitanje da li je i svaki rekurzivno nabrojiv jezik rekurzivan? Odgovor je, naravno, negativan. Međutim, pre nego što to dokažemo daćemo neke pomoćne rezultate.

Lema 8.2.1. *Jezik L je rekurzivan ako i samo ako su jezici L i L^c rekurzivno nabrojivi.*

Dokaz. Direktan smer očigledno važi.

Pretpostavimo da su L i L^c rekurzivno nabrojivi. Tada su funkcije P_L i P_{L^c} izračunljive. Opisaćemo algoritam za izračunavanje funkcije C_L. Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč. Odredimo uP_L i uP_{L^c}. Jasno je da je tačno jedna od ovih funkcija definisana. Ako je $uP_L = t$, tada je $u \in L$ i $uC_L = t$. U suprotnom je $uP_{L^c} = t$ i tada je $u \notin L$ i $uC_L = f$. Prema Churchovoj tezi L je rekurzivan. $\square$

U stvari, rekurzivno nabrojiv jezik se najčešće definiše kao rang neke parcijalne izračunljive funkcije. Dokazaćemo da je ta definicija ekvivalentna sa ovde datom definicijom rekurzivno nabrojivog jezika.

Primetimo prvo da na svakom konačnom alfabetu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, možemo definisati uređenje sa

$$x_i \leq x_j \Leftrightarrow i \leq j.$$

Zatim se to uređenje može proširiti na $X^2 \cup X$ tako što se u nizu nalaze prvo slova iz X a zatim reči iz X^2 uređene tako da je $x_{i_1}x_{j_1} \leq x_{i_2}x_{j_2}$ ako je $i_1 \leq i_2$ i ako je $i_1 = i_2$ tada je $j_1 \leq j_2$. Ovakvo uređenje se dalje može proširiti na X^*. Ovako uvedeno uređenje na skupu X^* naziva se *leksikografsko uređenje* skupa X^*.

Dakle, ako je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tada je

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_1, \ldots$$

niz u X^* određen uređenjem $\leq$. Nije teško uočiti da je funkcija $K_1 : X^* \to \mathbb{N}$ koja reči $u = x_{i_k}x_{i_{k-1}} \ldots x_{i_1}x_{i_0}$ dodeljuje njen indeks u gornjem nizu data sa

$$(x_{i_k}x_{i_{k-1}}\dots x_{i_1}x_{i_0})K_1 = i_k\cdot(n+1)^k+i_{k-1}\cdot(n+1)^{k-1}+\dots+i_1\cdot(n+1)+i_0-k.$$

Definišimo i uređenje na $X^* \times X^*$ na sledeći način

$$(u_1,v_1) \le (u_2,v_2) \Leftrightarrow u_1 \le u_2 \text{ ili } u_1 = u_2 \text{ i } v_1 \le v_2.$$

Gornje uređenje se može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \dots & (x_1,x_n) & (x_1,x_1x_1) & (x_1,x_1x_2) & \dots \\
(x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \dots & (x_2,x_n) & (x_2,x_1x_1) & (x_2,x_1x_2) & \dots \\
\vdots & & & & & & \\
(x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \dots & (x_n,x_n) & (x_n,x_1x_1) & (x_n,x_1x_2) & \dots \\
(x_1x_1,x_1) & (x_1x_1,x_2) & \dots & (x_1x_1,x_n) & (x_1x_1,x_1x_1) & (x_1x_1,x_1x_2) & \dots \\
\vdots & & & & & &
\end{array},$$

pri čemu za elemente ove beskonačne matrice (b_{ij}) važi

$$b_{i_1j_1} \le b_{i_2j_2} \Leftrightarrow i_1 \le i_2 \text{ ili } i_1 = i_2 \text{ i } j_1 \le j_2.$$

Uredićemo elemente ove matrice u niz tako što se krećemo po sporednim dijagonalama sleva u desno polazeći iz gornjeg levog ugla, tj. niz je

$$b_{11}, b_{21}, b_{12}, b_{31}, b_{22}, b_{13}, b_{41}, b_{32}, \dots.$$

Funkcija $K_2 : X^* \times X^* \to \mathbb{N}$ određuje indeks para (u,v) u gornjem nizu. Može se dokazati da je

$$(u,v)K_2 = 1/2\cdot((uK_1+vK_1-2)^2+uK_1+3\cdot(vK_1)-2).$$

Nije teško uočiti da postoje algoritmi za izračunavanje funkcija K_1 i K_2, pa su one, prema Churchovoj tezi, izračunljive, i to totalne. Takođe su obe funkcije bijekcije.

Sada definišemo funkciju $k : X^* \times X^* \to X^*$ sa $w = (u,v)k$ ako je indeks reči w u nizu reči iz X^* jednak indeksu para (u,v) u nizu iz $X^* \times X^*$. Opisaćemo algoritam za izračunavanje funkcije k. Neka su u, v proizvoljne reči. Tada upotrebimo algoritam koji izračunava funkciju $(u,v)K_2$. Zatim za dobijeni broj $(u,v)K_2$ odredimo reč w takvu da je $(u,v)K_2 = wK_1$. Naime, reč w je oblika $w = x_{i_m}\dots x_{i_0}$, gde je $i_m i_{m-1}\dots i_0$ zapis broja $(u,v)K_2 + k$ u sistemu sa osnovom $n+1$. Kako je algoritam za pretvaranje broja datog u dekadnom zapisu u broj sa osnovom $n+1$ poznat, prema Churchovoj tezi, k je totalna izračunljiva funkcija.

Teorema 8.2.1. *Jezik je rekurzivno nabrojiv ako i samo ako je rang neke parcijalne izračunljive funkcije.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $L \subseteq X^*$ rekurzivno nabrojiv jezik. Tada je P_L izračunljiva funkcija, pa postoji Turingova mašina $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ koja je izračunava. Definišimo funkciju $\phi : X^* \to X^*$ sa

$$u\phi = \begin{cases} u, & \text{ako je } uP_L = t, \\ \text{nije definisana}, & \text{ako } \; u \notin L. \end{cases}$$

Lako se može konstruisati Turingova mašina A' koja izračunava ovu funkciju. Naime, ona ima dve staze. Prva služi da zapamti ulaznu reč u, dok druga simulira rad mašine A sa ulazom u. Ukoliko se izračunavanje na drugoj stazi zaustavi, onda se za izlaz uzima reč sa prve staze. Dakle, mašina A' se zaustavlja samo za reči u za koje se i A zaustavlja, tj. za $u \in L$, i tada je izlaz u. Prema Churchovoj tezi, A' izračunava ϕ i očigledno je $L = X^*\phi$.

Obratno, neka je $L = X^*\phi$, za neku izračunljivu funkciju $\phi : X^* \to X^*$. Posmatrajmo najpre slučaj kada je ϕ totalna funkcija.

Neka je A Turingova mašina koja izračunava ϕ. Opisaćemo Turingovu mašinu A' za izračunavanje funkcije P_L. Ova mašina ima dve staze. Na prvoj se nalazi reč u. Druga simulira rad mašine A. Na drugoj stazi se najpre nalazi prva reč iz X^*. Zatim se na drugoj stazi odvija izračunavanje funkcije ϕ. Ako je po zaustavljanju rada na drugoj stazi reč ista kao i na prvoj, tada A' postavlja reč t na traku i zaustavlja se. U suprotnom se na drugu stazu postavlja sledeća reč iz X^* i ponovi postupak. Ukoliko je $u \in L$ tada će se za ulaz v na drugoj stazi mašina A' zaustaviti sa izlazom t. Ukoliko $u \notin L$ mašina A' se neće zaustaviti. Dakle, mašina A' izračunava P_L.

Neka je sada ϕ parcijalna funkcija. Ako je $L = \varnothing$, tada je on trivijalno rekurzivno nabrojiv. Ako je L neprazan fiksirajmo element $u_0 \in L$.

Definisaćemo totalnu izračunljivu funkciju $\psi : X^* \to X^*$ takvu da je $X^*\phi = X^*\psi$.

Definišimo funkciju $f : X^* \times X^* \to X^*$ sa

$$(u, v)f = \begin{cases} 1, & A \text{ izračunava } u\phi \text{ u } n \leq |v| \text{ koraka}, \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

pri čemu su 0 i 1 fiksirani simboli alfabeta mašine A. Funkcija f je totalna izračunljiva. Mašina koja je izračunava simulira rad mašine A u prvih $|v|$ koraka. Ako se je A zaustavila onda se na traku postavlja 1, u suprotnom se postavlja 0.

Definišimo sada funkciju $g : X^* \to X^*$ sa

$$wg = \begin{cases} u\phi, & \text{ako je } w = (u,v)k \text{ i } (u,v)f = 1, \\ u_0, & \text{ako je } w = (u,v)k \text{ i } (u,v)f = 0. \end{cases}$$

Jasno je da je g totalna funkcija i da je $X^*g = X^*\phi$. Opisaćemo algoritam za izračunavanje funkcije g. Neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Odredimo wK_1 koristeći algoritam koji izračunava K_1. Zatim, za ovaj broj odredimo najveći mogući broj m takav da je $m(m-1)/2 < wK_1$ i stavimo $l = wK_1 - m(m-1)/2$. Tada je $(u,v)K_2 = wK_1$ za reči u i v takve da je $uK_1 = m+2-l$ i $vK_1 = l$. Kako algoritam za izračunavanje inverzne funkcije funkcije K_1 postoji, to su na ovaj način određene reči u i v. Primenimo sada algoritam koji izračunava $(u,v)f$ i zavisno od dobijene vrednosti dodelimo funkciji g vrednost. Prema Churchovoj tezi funkcija g jeste izračunljiva, a kako je ona i totalna, prema prvom delu dokaza je $L = X^*g$ rekurzivno nabrojiv jezik. $\square$

Pokazaćemo sada da je skup svih Turingovih mašina prebrojiv. Neka je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ proizvoljna Turingova mašina. Niz instrukcija ove mašine je konačan. Uzećemo da su skupovi A i Σ oblika

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\},$$
$$\Sigma = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}\},$$

za neke $n, m \in \mathbb{N}$. Svakoj instrukciji $\delta(a_i, \xi_j) = (a_{i'}, \xi_{j'}, D)$ dodelimo reč $a\langle i\rangle_{10}\xi\langle j\rangle_{10}a\langle i'\rangle_{10}\xi\langle j'\rangle_{10}D$, gde je $D \in \{L, R\}$ i oznaka $\langle k\rangle_{10}$ označava dekadni zapis broja $k \in \mathbb{N}$. Na taj način zapisujemo sve instrukcije mašine $\mathcal{A}$. Uredimo u leksikografskom poretku ove reči. Dalje formiramo jedinstvenu reč koja sadrži redom zapise instrukcija razdvojene znakom ';'. Ova reč predstavlja kod mašine $\mathcal{A}$ u brojnom sistemu sa osnovom 15. Prebacivanjem ovog broja u broj sa osnovom 10 dobijamo indeks mašine $\mathcal{A}$ u nizu Turingovih mašina.

Primer 8.2.1. Posmatrajmo Turingovu mašinu $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, gde je $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\Sigma = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ i

$$\delta(a_0, \xi_1) = (a_0, \xi_2, L),$$
$$\delta(a_0, \xi_2) = (a_1, \xi_1, R),$$
$$\delta(a_1, \xi_0) = (a_2, \xi_2, R),$$
$$\delta(a_1, \xi_2) = (a_1, \xi_2, R).$$

Tada se ova mašina kodira sa $a0\xi1a0\xi2L; a0\xi2a1\xi1R; a1\xi0a2\xi2R; a1\xi2a1\xi2R$ u brojnom sistemu sa osnovom 15, čije su cifre redom $0, 1, 2, \dots, 9, a, \xi, L, R, ;$. Dakle, indeks ove mašine je $13 + 2 \cdot 15 + 11 \cdot 15^2 + 1 \cdot 15^3 + \ldots + 10 \cdot 15^{38}$.

Primetimo da je ovo indeksiranje Turingovih mašina, tj. preslikavanje iz skupa svih Turingovih mašina u skup $\mathbb{N}$, injektivno. Međutim, ovo preslikavanje nije sirjektivno. Zaista, proizvoljan broj $k \in \mathbb{N}$ zapišimo u brojnom sistemu sa osnovom 15 koristeći cifre $0, 1, 2, \ldots, 9, a, \xi, L, R, ;$. Dobijeni broj može biti kod neke Turingove mašine samo ako je prva cifra u ovom kodu a, zatim slede cifre iz skupa $\{0, 1, \ldots, 9\}$, zatim ξ, pa cifre iz $\{0, 1, \ldots, 9\}$, zatim a, pa cifre iz $\{0, 1, \ldots, 9\}$, ponovo ξ praćen ciframa iz $\{0, 1, \ldots, 9\}$, onda L ili R, pa ;, itd. Ukoliko zapis nije tog oblika uzećemo da je to kod trivijalne Turingove mašine $A_{\varnothing} = (\{a_0\}, a_0, \{x_0\}, \{x_0, \#, \}, \delta)$ sa jednom instrukcijom $\delta(a_0, x_0) = (a_0, x_0, R)$. Na ovaj način je opisan algoritam za nalaženje Turingove mašine sa datim indeksom. Sa A_k ćemo označavati k-tu Turingovu mašinu, za $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 8.2.2. *Rekurzivno nabrojivih jezika ima prebrojivo mnogo.*

Dokaz. Dokazali smo da Turingovih mašina ima prebrojivo mnogo. Neka je $A_1, A_2, \ldots$ niz Turingovih mašina formiran na gore opisani način i neka je $f_1, f_2, \ldots$ niz parcijalnih unarnih funkcija koje su izračunljive, redom, Turingovim mašinama iz gornjeg niza. Prema Teoremi 8.2.1 niz $S_n = X^* f_n$, $n \in \mathbb{N}$, predstavlja niz svih rekurzivno nabrojivih jezika. $\square$

Konačno smo spremni da dokažemo da se klase svih rekurzivnih i rekurzivno nabrojivih jezika razlikuju.

Teorema 8.2.3. *Postoji rekurzivno nabrojiv jezik koji nije rekurzivan.*

Dokaz. S obzirom na Teoremu 8.2.1, treba konstruisati rekurzivno nabrojiv jezik K čiji komplement nije rekurzivno nabrojiv.

Uzećemo da

$$u \in K \Leftrightarrow u \in S_{uK_1},$$

gde je $S_1, S_2, \ldots$ niz rekurzivno nabrojivih jezika. Definišimo funkciju $\phi : X^* \to X^*$ sa

$$w\phi = \begin{cases} v, & \text{ako je } w = (u, v)k \text{ i } uf_{vK_1} = v, \\ \text{nije definisana}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Algoritam za izračunavanje funkcije ϕ se sastoji u sledećem. Za $w \in X^*$ odredimo na način opisan u dokazu Teoreme 8.2.1 reči u, v takve da je $w = (u, v)k$. Zatim odredimo vK_1. Zapišimo ovaj broj u sistemu sa osnovom 15 i odredimo Turingovu mašinu čiji je to indeks. Postavimo na ulaz ove mašine reč u. Ako po zaustavljanju mašine na traci bude reč v, onda funkcija ϕ dobija vrednost v, u suprotnom je nedefinisana.

Dokazaćemo da je $K = X^*\phi$. Neka je $v \in K$. Tada je $v \in S_{vK_1}$, pa postoji reč u takva da je $uf_{vK_1} = v$. Tada je za $w = (u,v)k$ zadovoljeno $w\phi = v$, pa je $v \in X^*\phi$. Obratno, ako je $v \in X^*\phi$, postoji $w \in X^*$ takav da je $w\phi = v$. To znači da je za reč u takvu da je $w = (u,v)k$ zadovoljeno $uf_{vK_1} = v$, pa je $v \in X^*f_{vK_1} = S_{vK_1}$, tj. $v \in K$. Dakle, K je rang izračunljive funkcije, pa je rekurzivno nabrojiv.

Treba još dokazati da K^c nije rekurzivno nabrojiv. Pretpostavimo suprotno, tj. K^c je rekurzivno nabrojiv. Tada postoji $u_0 \in X^*$ takav da je $K^c = S_{u_0K_1}$. Tada je

$$u_0 \in K \Leftrightarrow u_0 \in S_{u_0K_1} \Leftrightarrow u_0 \in K^c,$$

što je nemoguće. $\square$

Razmatraćemo dalje rekurzivnost, odnosno rekurzivnu nabrojivost, jezika generisanih gramatikama.

Teorema 8.2.4. *Za kontekstno-zavisan jezik L nad alfabetom X i proizvoljnu reč $w \in X^*$ problem '$w \in L$' je odlučiv.*

Dokaz. Neka je $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-zavisna gramatika i $\sigma \in V \setminus X$ fiksirani simbol. Generisaćemo rastući niz skupova $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ na sledeći način:

$$R_0 = \{\sigma\},$$
$$R_{k+1} = R_k \cup \{q \in V^* \mid \text{ postoji izvođenje } p \Rightarrow q, \text{ za neki } p \in R_k\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Jasno je da je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova, koji su konačni zbog konačnosti skupova V i π.

Dokazaćemo da za $k \in \mathbb{N}$ važi da je $p \in R_k$ ako i samo ako postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ dužine k.

Dokazujemo najpre direktan smer gornje implikacije. Pretpostavimo da je $p \in R_k$. Dokazaćemo indukcijom da postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ dužine k. Za $k = 0$ je $p = \sigma$, pa je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ izvođenje dužine 0. Pretpostavimo da iz $p \in R_i$ sledi da postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ dužine i. Neka je, sada, $p \in R_{i+1}$. Tada, prema definiciji skupa R_{i+1} postoji reč $p' \in R_i$ takva da postoji izvođenje $p' \Rightarrow p$ dužine 1. Prema indukcijskoj hipotezi postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p'$ dužine i, pa je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p' \Rightarrow p$ izvođenje reči p dužine $i+1$.

Obratno, neka je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ izvođenje dužine k reči $p \in V^*$. Dokazaćemo indukcijom da je $p \in R_k$. Za $k = 0$ tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da važi i za $k = i$ i dokažimo da važi za $k = i+1$. Neka je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p$ izvođenje dužine $i+1$. Tada postoji reč $p' \in V^*$ takva da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p' \Rightarrow p$, pri čemu je izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p'$ dužine i. Prema indukcijskoj hipotezi je $p' \in R_i$, odakle je, prema načinu na koji je niz skupova $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generisan, $p \in R_{i+1}$.

Dokažimo sada da je $w \in L$ ako i samo ako $w \in R_{n+n^2+\ldots n^m}$, gde je $n = |V|$ i $m = |w|$.

Ako $w \in R_{n+n^2+\ldots n^m}$, tada, prema već dokazanom, postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, pa je $w \in L$. Obratno, neka je $w \in L$, tj. postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$. S obzirom na Teoremu 7.3.1 smatraćemo da je G linearno ograničena gramatika. Dakle, u izvođenju $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ se javljaju samo reči čija je dužina $\leq m$. Pri tome je jasno da se ponavljanje istih reči može izbeći izbacivanjem iz niza izvođenja onih izvođenja koje se nalaze između istih reči. Prema tome, u nizu $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ može biti najviše $n+n^2+\ldots n^m$ reči, tj. ovo izvođenje je dužine najviše $n+n^2+\ldots n^m$. Prema već dokazanom je $w \in R_{n+n^2+\ldots n^m}$. $\square$

Posledica 8.2.1. *Svaki kontekstno-zavisan jezik je rekurzivan.*

Postavlja se pitanje da li se klase rekurzivnih i kontekstno-zavisnih jezika poklapaju. Odgovor je negativan i dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 8.2.5. *Postoji rekurzivan jezik koji nije kontekstno-zavisan.*

Dokaz. Primetimo da se kontekstno-zavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ može kodirati na sličan način kao i Turingove mašine. Naime, ako je $V \setminus X = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ i $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$, tada uredimo pravila u π po leksikografskom redosledu u alfabetu $V \cup \{\rightarrow\}$. Zatim kodiramo svako pravilo oblika $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} \rightarrow \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_l}$, sa $\xi i1 \ldots \xi ik \rightarrow \xi j1 \ldots \xi jl$, što je reč u alfabetu $\{0, 1, \ldots, 9, \xi, x, \rightarrow\}$. Gramatiku G kodiramo navodeći nizove reči koje odgovaraju pravilima iz π međusobno ih razdvajajući znakom ;. Tada je G kodirana nekom reči nad alfabetom $\{0, 1, \ldots, 9, \xi, x, \rightarrow, ;\}$. Ova reč predstavlja broj u brojnom sistemu sa osnovom 14. Prebacimo ovaj broj u broj sa osnovom 10 i dodelimo gramatici G taj indeks. Slično kao kod Turingovih mašina se pokazuje da je ovo indeksiranje injektivno i može se dodefinisati da bude i sirjektivno. Pri tome postoji algoritam za određivanje k-te kontekstno-zavisne gramatike, gde je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dakle, sve kontekstno-zavisne gramatike se mogu poređati u niz $G_1, G_2, \ldots$.

Kako svaka kontekstno-zavisna gramatika generiše konačan broj jezika, to se i kontekstno-zavisni jezici mogu poređati u niz. Pri tome, za zadato

$k \in \mathbb{N}$ možemo odrediti jezik L_k na sledeći način. Odredimo gramatiku $G_1 = (V_1, X_1, \pi_1)$. Ako je $k \leq |V_1 \setminus X_1|$ tada G_1 generiše L polazeći od k-tog pomoćnog simbola iz V_1. U suprotnom nastavimo postupak uzimajući umesto broja k broj $k - |V_1 \setminus X_1|$. Odredimo gramatiku $G_2 = (V_2, X_2, \pi_2)$. Opet proveravamo da li je $k \leq |V_2 \setminus X_2|$ i nastavljamo postupak na opisani način. Kako je $k \in \mathbb{N}$ to mora postojati gramatika G_m i pomoćni simbol ove gramatike koji generiše L.

Neka je $L_1, L_2, \ldots$ niz svih kontekstno-zavisnih jezika. Takođe smo pokazali da se sve reči iz X^* mogu poređati u niz $u_1, u_2, \ldots$.

Uočimo jezik S određen sa

$$u_n \in S \Leftrightarrow u_n \notin L_n.$$

Kako postoji algoritam za testiranje $u_n \in L_n$, to je S rekurzivan. Međutim, S nije kontekstno-zavisan. Zaista, ako je S kontekstno-zavisan, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $S = L_{n_0}$. Tada je

$$u_{n_0} \in L_{n_0} \Leftrightarrow u_{n_0} \in S \Leftrightarrow u_{n_0} \notin L_{n_0},$$

što je nemoguće. $\square$

Metod korišćen u dokazu prethodne teoreme naziva se *Cantorov dijagonalni postupak*.

Teorema 8.2.6. *Jezik je rekurzivno nabrojiv ako i samo ako je tipa* 0.

Dokaz. Neka je L rekurzivno nabrojiv jezik. Prema Teoremi 8.2.1 i Churchovoj tezi postoji Turing-izračunljiva funkcija $\phi : X^* \to X^*$ takva da je $L = X^*\phi$. Neka je $A = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ Turingova mašina koja izračunava ϕ. Gramatika koja generiše L je $G = (V, X, \pi)$, gde je $V = A \cup \Sigma \cup \{\sigma, \$\}$ pri čemu σ i $\$$ nisu simboli iz $A \cup \Sigma$. Pravila izvođenja su određena sa

1. $\sigma \to \$\#a_0\#\$$,
2. $\$\# \to \$\#\#$,
3. $\#\$ \to \#\#\$$,
4. $taxz \to tya'z$, za sve $z, t \in \Sigma$ i x, y, a, a' takve da je $\delta(a, x) = (a', y, R)$,
5. $tzax \to ta'zy$, za sve $z, t \in \Sigma$ i x, y, a, a' takve da je $\delta(a, x) = (a', y, L)$,

6. $\#\#z \to z\#\#$, za svaki $z \in V$,
7. $ax \to x$, ako $\delta(a,x)$ nije definisano.

Očigledno je da gramatika G simulira rad mašine A i važi da je $L = L(G,\sigma)$, pa je L jezik tipa 0.

Obratno, neka je $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (V,X,\pi)$ gramatika i σ pomoćni simbol gramatike G. Formirajmo niz skupova $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kao u dokazu Teoreme 8.2.4. Tada se, kao u pomenutom dokazu, dokazuje da $u \in R_k$ ako i samo ako postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u$ dužine k, za neki $k \in \mathbb{N}$. Algoritam za izračunavanje funkcije P_L se sastoji u sledećem. Generišemo skup R_1. Za datu reč u proveravamo da li je $u \in R_1$. Ako je odgovor pozitivan, onda završavamo postupak uz izlaz t. U suprotnom, generišemo R_2 i ispitujemo da li je $u \in R_2$. Ako je to tačno, onda postupak završavamo, a ako nije, tada generišemo R_3 i ponovljamo opisani postupak. Jasno, ako je $u \in L$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je niz izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u$ dužine k, pa je $u \in R_k$, što znači da će postupak biti završen kada generišemo R_k i proverimo da li je $u \in R_k$. Ako $u \notin L$, tada ne postoji niz $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi $u \notin R_n$, što znači da se opisani algoritam neće završiti.

Prema Churchovoj tezi, P_L je izračunljiva funkcija, pa je L rekurzivno nabrojiv jezik. $\square$

Kao neposrednu posledicu Teoreme 8.2.6 dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 8.2.2. *Za proizvoljan jezik L tipa 0 nad alfabetom X i proizvoljnu reč $w \in X^*$ problem 'w $\in L$' je neodlučiv.*

Prethodna posledica, izrečena u terminima mašina, predstavlja čuveni 'problem zaustavljanja' Turingove mašine.

Posledica 8.2.3. (Halting problem). *Za proizvoljnu Turingovu mašinu A i proizvoljnu reč $u \in X^*$ problem 'A prihvata u' je neodlučiv.*

Literatura: Chomsku [1959], Davis [1958], Hopcroft and Ullman [1969], Kain [1972], Kleene [1936, 1943], Madarász and Crvenković [1995], McNaughton [1982], Minsky [1967], Rogers [1967], Turing [1936].

8.3. Odlučivi i neodlučivi problemi u Teoriji jezika

Najpre ćemo dati nekoliko rezultata koji se tiču odlučivosti nekih problema vezanih za kontekstno-nezavisne jezike. Napomenimo da je u Teoremi 6.2.1 već dokazano da je za kontekstno-nezavisan jezik L problem '$e \in L$' odlučiv.

Prema Posledici 8.2.1 sledi da je problem '$w \in L$', za $w \in X^*$ proizvoljnu reč i kontekstno-nezavisan jezik $L \subseteq X^*$, odlučiv. Međutim, u narednoj teoremi daćemo algoritam odlučivosti ovog problema.

Teorema 8.3.1. *Za kontekstno-nezavisan jezik L nad alfabetom X i proizvoljnu reč $w \in X^*$ problem '$w \in L$' je odlučiv.*

Dokaz. Ako je $w = e$ tada možemo primeniti Teoremu 6.2.1. S obzirom na algoritam dat u Teoremi 6.2.2 za eliminisanje pravila oblika $\alpha \to e$ iz kontekstno-nezavisne gramatike $G = (V, X, \pi)$ koja generiše L, možemo smatrati da gramatika G nema izvođenja oblika $\alpha \to e$.

Formiramo induktivno sledeći niz podskupova monoida V^*:

$$R_1 = \{v \in V^* \mid |v| \leq |w| \text{ i } \sigma \to v\},$$
$$R_{k+1} = R_k \cup \{v \in V^* \mid |v| \leq |w| \text{ i } v' \Rightarrow v \text{ za neki } v' \in R_k\}.$$

Očigledno je

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots \subseteq R_k \subseteq R_{k+1} \ldots$$

i dužina reči iz skupova R_k je ograničena dužinom reči w. Otuda je gornji niz konačan, pa je $R_k = R_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, i ako je n najmanji broj sa tim svojstvom, tada je $R_n = R_{n+k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dokazaćemo da je $w \in L(G, \sigma)$ ako i samo ako je $w \in R_n$.

Ako je $w \in L$, tj. $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, tada postoji niz izvođenja

$$\sigma \to v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_k \Rightarrow w$$

pri čemu je $|v_1| \leq |v_2| \leq \ldots \leq |v_k| \leq |w|$, pa je $w \in R_{k+1} \subseteq R_n$.

Sa druge strane, iz $w \in R_n$ sledi da postoje reči $v_1 \in R_1, v_2 \in R_2, \ldots, v_{n_1} \in R_{n-1}$ takve da je

$$\sigma \to v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_{n-1} \Rightarrow w,$$

odakle sledi da je $w \in L(G, \sigma)$. $\square$

U sledećoj teoremi dokazujemo odlučivost još nekih klasičnih problema za klasu kontekstno-nezavisnih jezika.

Teorema 8.3.2. *Za kontekstno-nezavisan jezik L nad alfabetom X, sledeći problemi su odlučivi:*

(a) *'L je prazan',*
(b) *'L je konačan',*
(c) *'L je beskonačan'*

Dokaz. (a). Formirajmo sledeći niz podskupova skupa V:

$$Y_0 = X,$$
$$Y_{k+1} = Y_k \cup \{\alpha \in V \setminus X \mid \alpha \to v \text{ za neki } v \in Y_k^*\}.$$

Jasno da je niz $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz podskupova konačnog skupa, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $Y_n = Y_{n+k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dokazaćemo da je $L(G,\sigma) = \varnothing$ ako i samo ako $\sigma \notin Y_n$.

Dokažimo najpre da je Y_n skup svih $\alpha \in V\setminus X$ takvih da postoji izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$, gde je $w \in X^*$. Za $\alpha \in Y_1$ tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da važi i za $\alpha \in Y_{i-1}$ i neka je $\alpha \in Y_i$. Tada je ili $\alpha \in Y_{i-1}$ pa, prema indukcijskoj hipotezi, zadovoljava tvrđenje ili je $\alpha \to v$, za neki $v \in Y_{i-1}^*$. Uzmimo da je v oblika $v = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, za neke $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in Y_{i-1}$. Prema indukcijskoj hipotezi postoje izvođenja

$$\alpha_1 \overset{*}{\Rightarrow} u_1,\ \alpha_2 \overset{*}{\Rightarrow} u_2,\ \dots,\ \alpha_m \overset{*}{\Rightarrow} u_m,$$

za neke $u_1, u_2, \dots, u_m \in X^*$. Odatle sledi da postoji izvođenje

$$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} v = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \overset{*}{\Rightarrow} u_1u_2\cdots u_m = w,$$

pri čemu je $w \in X^*$. Dakle, tvrđenje važi za sve Y_k, $k \in \mathbb{N}$, pa i za $k = n$.

Neka je sada $L(G,\sigma) = \varnothing$. Ako je $\sigma \in Y_n$, tada, prema prethodno dokazanom, postoji reč $w \in X^*$ takva da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, pa $w \in L(G,\sigma)$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Dokažimo sada indukcijom da iz $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$, gde je $w \in X^*$ proizvoljna reč, sledi $\alpha \in Y_n$. Dokaz izvodimo indukcijom. Ako je $\alpha \to w$, tada $\alpha \in Y_1$. Pretpostavimo da tvrđenje važi ako je niz izvođenja dužine k. Neka je, sada, $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} w$ pomoću niza dužine $k+1$. Tada je

$$\alpha \to v \overset{*}{\Rightarrow} w,$$

gde je $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ izvođenje dužine k. Uzmimo da je v oblika $v = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, za neke $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$. Prema Teoremi 6.1.1, reč w je oblika $w = u_1u_2\cdots u_m$, gde je $u_1, u_2, \dots, u_m \in X^*$. Pri tome važi

$$\alpha_1 \overset{*}{\Rightarrow} u_1,\ \alpha_2 \overset{*}{\Rightarrow} u_2,\ \dots,\ \alpha_m \overset{*}{\Rightarrow} u_m$$

i ova izvođenja su dužine najviše k. Prema indukcijskoj hipotezi je zadovoljeno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in Y_n$. Tada je $\alpha \in Y_n^* \subseteq Y_{n+1} = Y_n$.

Dakle, ako je $L(G, \sigma) \neq \varnothing$, tj. ako postoji reč $w \in L(G, \sigma)$, tada je $\sigma \in Y_n$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $\sigma \notin Y_n$.

(b) i (c). Neka je $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ i $\sigma \in V \setminus X$. S obzirom na Teoremu 6.2.2, možemo pretpostaviti da u gramatici G nema pravila oblika $\alpha \to e$.

Formirajmo najpre skup

$$V' = \{\alpha \in V \setminus X \mid \sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha v \text{ za neke } u, v \in V^*\}.$$

Stavimo

$$V_1 = \{\sigma\},$$
$$V_{k+1} = V_k \cup \{\alpha \in V \setminus X \mid \beta \to u\alpha v \text{ za neke } u, v \in V^*, \beta \in V_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rastući niz podskupova konačnog skupa V, to postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $V_n = V_{n+k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Lako se proverava da je $V_n = V'$. Štaviše, ako označimo $G' = (V' \cup X, X, \pi')$, gde su u π' sva pravila iz π u kojima se od pomoćnih simbola pojavljuju samo oni iz V', tada je $L(G, \sigma) = L(G', \sigma)$.

Uočimo proizvoljan simbol $\alpha \in V'$. Za zadatu reč $w \in (V' \cup X)^*$ problem $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} pwq$, za neke $p, q \in (V' \cup X)^*$ je odlučiv. Zaista algoritam se sastoji u formiranju niza skupova

$$H_1 = \{v \in (V' \cup X)^* \mid \alpha \to pvq, \text{ gde je } |v| \leq |w| \text{ i } p, q \in (V' \cup X)^*\},$$
$$H_{k+1} = H_k \cup \{v \in (V' \cup X)^* \mid v' \to pvq, \text{ gde je } |v| \leq |w|, p, q \in (V' \cup X)^* \text{ i } v' \in H_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponovo je $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rastući niz skupova reči čija je dužina ograničena brojem $|w|$. Stoga je ovaj niz konačan, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $H_n = H_{n+k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Nije teško uočiti da $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} pwq$, za neke $p, q \in (V' \cup X)^*$, ako i samo ako je $w \in H_n$.

Primenimo opisani algoritam na reči w oblika $w = \alpha\beta$ i $w = \beta\alpha$, gde je $\beta \in V' \cup X$. Ukoliko je $w \in H_n$ za neku od ovih dveju reči, tada postupak zaustavljamo i ubacimo α u skup R, gde je

$$R = \{\alpha \in V' \mid \alpha \overset{*}{\Rightarrow} p\alpha q \text{ za neke } p, q \in (V' \cup X)^*\}.$$

Sada opisani postupak primenjujemo redom na simbole $\alpha \in V'$. Ukoliko je $R = \varnothing$ tada je, jasno, $L(G, \sigma)$ konačan. U suprotnom je beskonačan. $\square$

Razmotrimo sada probleme iz Teorema 8.3.1 i 8.3.2 za kontekstno-zavisne jezike.

Teorema 8.3.3. *Za proizvoljan kontekstno-zavisan jezik L nad alfabetom X sledeći problemi su neodlučivi:*

(a) *'L je prazan',*

(b) *'L je beskonačan'.*

Dokaz. (a). Uočimo proizvoljnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$, gde je $\sigma \in V \setminus X$, i $w \in X^*$ je proizvoljna reč. Konstruišimo gramatiku $G_w = (V \cup \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\} \cup \{\#\}, X \cup \{\#\}, \pi')$, gde su $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ novi pomoćni simboli i $\#$ je novi terminalni simbol. Pravila izvođenja π' su određena sa:

1. $\sigma_0 \to \sigma_1 \sigma \sigma_2$,
2. $p \to q$, za svako $p \underset{G}{\longrightarrow} q$, gde je $|p| \leq |q|$,
3. $p \to q\#^k$, gde je $p \underset{G}{\longrightarrow} q$ i $|p| = |q| + k$, za $k > 0$,
4. $\#\xi \to \xi\#$, za svaki $\xi \in V$,
5. $\sigma_1 w \to \#^m \sigma_2$, gde je $|w| = m$,
6. $\sigma_2 \# \to \# \sigma_2$,
7. $\sigma_2 \sigma_2 \to \#\#$.

Očigledno je da su pravila gramatike G_w oblika $u \to v$, pri čemu je $|u| \leq |v|$, pa je prema Teoremi 2.3.1, G_w kontekstno-zavisna gramatika. Takođe nije teško uočiti da je $w \in L(G, \sigma)$ ako i samo ako je $L(G_w, \sigma_0) \neq \varnothing$.

Pretpostavimo da za proizvoljnu kontekstno-zavisnu gramatiku problem 'da li je jezik koji ona generiše prazan' jeste odlučiv. Tada je, specijalno, odlučiv i problem $L(G_w, \sigma_0) \neq \varnothing$, pa je odlučiv i njemu ekvivalentan problem $w \in L(G, \sigma)$, što je netačno.

(b). Neka je, ponovo, $G = (V, X, \pi)$ proizvoljna gramatika, $\sigma \in V \setminus X$ pomoćni simbol i neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Generisaćemo kontekstno-zavisnu gramatiku $G_w^\infty = (V \cup \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\} \cup \{\#\}, X \cup \{\#\}, \pi'')$, gde su $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ novi pomoćni simboli i $\#$ je novi terminalni simbol. Pravila izvođenja π'' obuhvataju sva pravila iz π' i dodato ja pravilo $\sigma_2 \to \sigma_2\#$.

Može se uočiti da je $w \in L(G, \sigma)$ ako i samo ako je $L(G_w^\infty, \sigma_0)$ beskonačan. Dakle, ako bi problem beskonačnosti jezika generisanog nekom kontekstno-zavisnom gramatikom bio odlučiv, onda bi i problem $w \in L(G, \sigma)$ za proizvoljnu gramatiku G bio odlučiv, što je netačno. $\square$

Vrlo često je od interesa i pitanje zatvorenosti pojedinih klasa jezika za Booleove operacije. Sledeća teorema predstavlja jedan rezultat tog tipa koji se odnosi na klasu kontekstno-nezavisnih jezika.

Teorema 8.3.4. *Za proizvoljne kontekstno-nezavisne jezike L_1 i L_2 problem '$L_1 \cap L_2 = \varnothing$' je neodlučiv.*

Dokaz. Neka je $G = (V, X, \pi)$ gramatika tipa 0 i $\sigma \in V \setminus X$. Stavimo $\pi = \{p_i \to q_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Za svako pravilo $p_i \to q_i$ uvedimo novi pomoćni simbol δ_i. Takođe, za svaki $x \in X$ uvedimo i novi pomoćni simbol x'. Stavimo

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\delta_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}, \\ X' &= \{x' \,|\, x \in X\}. \end{aligned}$$

Definišimo jezike

$$\begin{aligned} L_1 = \;& \{u\delta_i p_i v \# v^{-1} q_i^{-1} u^{-1} \# \,|\, u, v \in V^*, 1 \leq i \leq n\}, \\ L_2 = \;& \{\delta_i \sigma \# \,|\, 1 \leq i \leq n\} \cdot \{v^{-1} u^{-1} \# u \delta_i v \# \,|\, u, v \in V^*, 1 \leq i \leq n\}^* \\ & \cdot \{w^{-1} \# w'\}, \end{aligned}$$

gde $\# \notin V \cup V_1 \cup X'$ i $w' \in X'^*$ je reč odgovarajuća reči $w \in X^*$.

Može se uočiti da su L_1 i L_2 kontekstno-nezavisni jezici. Takođe, $L_1 \cap L_2$ sadrži reči oblika

$$\delta_{i_1} \sigma \# q_{i_1}^{-1} \# u_2 \delta_{i_2} q_{i_2} v_2 \# v_2^{-1} q_{i_2}^{-1} u_2 \# u_3 \delta_{i_3} q_{i_3} v_3 \# \ldots \# w^{-1} \# w',$$

gde za svaki $k \in \mathbb{N}$ važi $u_{k+1} p_{i_{k+1}} v_{k+1} = u_k q_{i_k} v_k$. Primetimo da svaka reč iz $L_1 \cap L_2$ predstavlja jedno izvođenje reči w.

Posmatrajmo homomorfizam $\Phi : (V \cup V_1 \cup X' \cup \{\#\})^* \to X^*$ određen sa

$$\begin{aligned} x'\Phi &= x, && \text{za svaki } x \in X, \\ \alpha\Phi &= e, && \text{za svaki } \alpha \in V \setminus X \cup V_1 \cup X' \cup \{\#\}. \end{aligned}$$

Tada je $(L_1 \cap L_2)\Phi = L(G, \sigma)$, pa je $L(G, \sigma) = \varnothing$ ako i samo ako je $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Prema Teoremi 8.3.3 problem $L(G, \sigma) = \varnothing$, gde je G gramatika tipa 0, je neodlučiv, pa je i $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ neodlučiv. $\square$

Rezultati dati u prethodnim teoremama kao i još neki problemi čija je odlučivost razmatrana u literaturi sumirani su u sledećoj tabeli. U tabeli je sa 'da' označeno da je za posmatranu klasu problem odlučiv, 'ne' da nije, '?' da je pitanje odlučivosti posmatranog problema za uočenu klasu još uvek otvoreno, a 't' označava da je odgovor trivijalno pozitivan. Sa L, L_1 i L_2 su označeni jezici, a sa $\mathcal{L}$ klasa (tip) jezika.

Problem	Tip 3	Tip 2	Tip 1	Tip 0
’L je prazan’	da	da	ne	ne
’L je konačan’	da	da	ne	ne
’L je beskonačan’	da	da	ne	ne
’$L = X^*$’	da	ne	ne	ne
’$L_1 = L_2$’	da	ne	ne	ne
’$L_1 \subseteq L_2$’	da	ne	ne	ne
’$L_1 \cap L_2$ je prazan’	da	ne	ne	ne
’$L_1 \cap L_2$ je konačan’	da	ne	ne	ne
’$L_1 \cap L_2$ je beskonačan’	da	ne	ne	ne
’$L = R$’, R je regularan skup	da	ne	ne	ne
’L je regularan’	t	ne	ne	ne
’$\mathcal{L}$ je zatvorena za preseke’	t	ne	t	t
’$\mathcal{L}$ je zatvorena za komplement’	t	ne	?	ne
’$\mathcal{L}$ je zatvorena za proizvod’	t	t	t	t
’$\mathcal{L}$ je zatvorena za uniju’	t	t	t	t

Navedimo na kraju još neke neodlučive probleme u vezi sa kontekstno-nezavisnim jezicima, koji nisu obuhvaćeni tabelom. Dokaz rezultata sumiranih u narednoj teoremi se može naći u knjizi Hopcrofta i Ullmana [1969].

Teorema 8.3.5. *Za kontekstno-nezavisne jezike L, L_1 i L_2 sledeći problemi su neodlučivi:*

(a) *’L sadrži regularan jezik’,*
(b) *’$L^c = \varnothing$’,*
(c) *’L^c je konačan’,*
(d) *’L^c je regularan’,*
(e) *’L^c je kontekstno-nezavisan’,*
(f) *’$L_1 \cap L_2$ je regularan’.*

Literatura: Hopcroft and Ullman [1969], Kain [1972], Landweber [1964], Madarász and Crvenković [1995].

8.4. Zadaci

1. Da li skup svih jezika raspoznatljivih determinističkim linearnim ograničenim automatima predstavlja Booleovu algebru?

2. Dokazati da ako je problem

(a) '$L = \varnothing$',
(b) '$L = X^*$'

neodlučiv za jezike klase C_1, onda je on neodlučiv i za jezike klase $C_2 \supseteq C_1$.

3. Šta nije u redu u sledećem rezonovanju:

Kako je klasa kontekstno-nezavisnih jezika zatvorena za uniju, X^* je kontekstno-nezavisan jezik i problem '$L_1 = L_2$' je nerešiv za dva kontekstno-nezavisna jezika, to je i problem '$L = X^*$' nerešiv za kontekstno-nezavisan jezik L.

4. Dokazati da ako je problem '$L = \varnothing$' rešiv za jezike klase C koja je zatvorena za preseke sa regularnim jezicima, tada je problem '$w \in L$' rešiv za jezike klase C.

5. Dokazati da je problem '$L_1 \subseteq L_2$' ekvivalentan problemu '$L_1 = L_2$', gde su L_1, L_2 jezici iste klase C.

6. Dokazati da je problem 'da li dve Turingove mašine raspoznaju iste jezike' neodlučiv.

7. U opštem slučaju presek dva kontekstno-nezavisna jezika nije kontekstno-nezavisan. Neka je $G = (\{\sigma, \rho, \tau, x, y, 0, 1\}, \{x, y, 0, 1\}, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika sa skupom pravila

$$\pi = \{\sigma \to \rho\tau,\ \rho \to x\rho 10 + y\rho 0 + x10 + y0,\ \tau \to 0\tau x + 10\tau y + 0x + 10y\}.$$

Da li je $L(G, \sigma) \cap \{w\overline{w} \mid w \in \{x, y, 0, 1\}^*\}$ kontekstno-nezavisan jezik?

8. Neka je $L \subset X^*$ kontekstno-zavisan jezik i neka je $F(u)$ kontekstno-zavisni jezici za svaki $u \in X^*$ takvi da postoji fiksirano $k \in \mathbb{N}$ za koje važi $|F(u)| \geq |u|$ za svaki $u \in L$. Dokazati da je

$$F(L) = \cup_{u \in L} F(u)$$

kontekstno-zavisan jezik.

9. Neka je L kontekstno-zavisan jezik. Dokazati da jezik

$$\{u \mid (\exists v \in X^*)\, |u| = |v| \text{ and } uv \in L\}$$

ne mora da bude kontekstno-nezavisan.

10. Neka je L kontekstno-nezavisan jezik. Dokazati da je jezik

$$\{u_1 u_3 u_5 \cdots u_{2k+1} \,|\, u_1 u_2 u_3 u_4 \cdots u_{2k+1} \in L\}$$

kontekstno nezavisan.

11. Podsetimo se da je operator $\mathrm{Pref} : L \mapsto \mathrm{Pref}\, L$ na jezicima definisan sa

$$\mathrm{Pref}\,(L) = \{u \,|\, (\exists v \in X^*)\, uv \in L\}.$$

Koje od poznatih klasa jezika su zatvorene za ovaj operator?

12. Podsetimo se da je reč $u \in X^+$ *pravi prefiks* reči $w \in X^+$ ako postoji reč $v \in X^+$ takva da je $w = uv$. Definišimo operator $\mathrm{Min} : L \mapsto \mathrm{Min}\, L$ na jezicima sa

$$\mathrm{Min}\,(L) = \{u \,|\, u \in L \text{ i nijedan pravi prefiks od } u \text{ nije u } L\}.$$

Koje od poznatih klasa jezika su zatvorene za ovaj operator?

Literatura

AGLIANO, P. and J. B. NATION

[1989] *Lattices of pseudovarieties*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **46** (1989), 177–183.

AHO, A. V. and J. D. ULLMAN

[1971] *The Theory of Parsing, Translation and Compiling*, Vol. 1, Prentice Hall, Engl. Cliffs, N. J., 1971.

[1973] *The Theory of Parsing, Translation and Compiling*, Vol. 2, Prentice Hall, Engl. Cliffs, N. J., 1973.

[1977] *Principles of Compiler Design*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

ALMEIDA, J.

[1994] *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1994.

[1989] *The algebra of implicit operations*, Algebra Universalis **26** (1989), 16–32.

[1990] *On pseudovarieties, varieties of languages, filters of congruences, pseudoidentities and related topics*, Algebra Universalis **27** (1990), 333-350.

ANDRÉKA, H., S. HORVÁTH and I. NÉMETI

[1973] *Notes on maximal congruence relations, automata and related topics*, Acta Cybernetica **2** (1973), 71–88.

ARBIB, M. A.

[1969] *Algebraic Theories of Abstract Automata*, Prentice Hall, 1969.

ARBIB, M. A. (EDITOR)

[1968] *Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups*, Academic Press, New York, 1968.

ARDEN, D. N.

[1960] *Delayed logic and finite-state machines*, in: Theory of computing machine design, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1960, 1–35.

ARTAMONOV, V. A., V. N. SALIĬ, L. A. SKORNYAKOV, L. N. SHEVRIN and E. G. SHULGEIFER

[1991] *General algebra*, Vol 2, L. A. Skornyakov (ed.), Matematicheskaya Biblioteka, Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).

ASH, C. J.

[1985] *Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes*, J. Algebra **92** (1985), 104–115.

AUFENKAMP, D. D. and F. E. HOHN

[1957] *Analysis of sequential machines*, IRE Trans. Electronic Comput. **6** (1957), 276–285.

AUTEBERT, J. M.

[1994] *Théorie des langages et des automates*, Masson, Paris, 1994.

AUTEBERT, J. M., J. BERSTEL and L. BOASSON

[1997] *Context-free languages and pushdown automata*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 111–174.

BABCSÁNYI, I.

[1977] *Rees automaták*, Matematikai Lapok **29** (1977–81), no. 1–3, 139–148.

BABCSÁNYI, I. and A. NAGY

[1995] *Right-group type automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), 131–136.

BALDWIN, J. T. and J. BERMAN

[1976] *Varieties and finite closure conditions*, Colloq. Math. **35** (1976), 413–418.

BANASCHEWSKI, B.

[1983] *The Birkhoff Theorem for varieties of finite algebras*, Algebra Universalis **17** (1983), 360–368.

BAR-HILLEL, Y., M. PERLES and E. SHAMIR

[1961] *On formal properties of simple phrase structure grammars*, Z. Phonetik. Sprachwiss. Kommunikationsforsch. **14** (1961), 143–172.

Beal, M. P. and D. Perrin

[1997] *Symbolic dynamics and finite automata*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 463–505.

Berstel, J.

[1979] *Transductions and Context-Free Languages*, Teubner, Stuttgart, 1979.

Berstel, J. and D. Perrin

[1984] *Theory of Codes*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1984.

Birkhoff, G.

[1935] *On the structure of abstract algebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433–454.

[1944] *Subdirect unions in universal algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 764–768.

[1979] *Lattice theory*, 3rd edition, 3rd printing, Coll. Publ. XXV, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1979.

Bloh, A. Š.

[1960] *On problems solvable by sequential machines*, Probl. kibernetiki **3** (1960), 81–88 (in Russian).

Bogdanović, M., S. Bogdanović, T. Petković and M. Ćirić

[2000] *The necks of automata*, (u štampi).

Bogdanović, S.

[1985] *Semigroups with a system of subsemigroups*, Inst. of Math., Novi Sad, 1985.

Bogdanović, S. and M. Ćirić

[1992] *Retractive nil-extensions of regular semigroups* I, Proc. Japan Acad, **68** (5), Ser. A (1992), 115–117.

[1993] *Polugrupe*, Prosveta, Niš, 1993.

[1995a] *Orthogonal sums of semigroups*, Israel J. Math. **90** (1995), 423–428.

[1995b] *Decompostitons of semigroups with zero*, Publ. Inst. Math. Belgrade **57** **(71)** (1995), 111–123.

[1995c] *Positive quasi-orders with the common multiple property on a semigroup*, in: Proc. of the Math. Conf. in Priština 1994, Lj. D. Kočinac ed., Priština 1995, 1–6.

[1997] *A note on congruences on algebras*, Proceedings of the II Mathematical Conference in Priština (1996), 67–72 (Lj. D. Kočinac, editor), Univ. Priština, Priština, 1997.

[1998] *Quasi-orders and semilattice decompositions of semigroups*, (*A survey*), in: International Conference in Semigrroups and its Related Topics, 1995, Yunnan University, Kunming, China, K. P. Shum, Y. Guo, M. Ito and Y. Fong, eds, Springer-Verlag, Singapore, 1998 (1998), 27–56.

Bogdanović, S., M. Ćirić and T. Petković

[2000] *Generalized varieties of algebras*, (u štampi).

Bogdanović, S., M. Ćirić, T. Petković, B. Imreh, and M. Steinby

[1999] *Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras*, Fundamenta Informaticae **34** (1999), 31–40.

[2000] *Local properties of unary algebras and automata*, (u štampi).

Bogdanović, S., B. Imreh, M. Ćirić and T. Petković

[2000] *Directable automata and their generalizations – A survey*, in: S. Crvenković (ed.), Proc. VIII Int. Conf. "Algebra and Logic" (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math **30** (3) (2000), 25–68.

Brzozowski, J. A.

[1962a] *Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events*, Proc. Symp. Math. Theory of Automata (Fox, J. ed.) Brooklyn, NY, 1962, 529–561.

[1962b] *A survey of regular expressions and their applications*, IRE Trans. Elec. Comp. **11** (1962), 324–335.

[1964a] *Derivatives of regular expressions*, J. Assoc. Comput. Machinery **11** (1964), 481–494.

[1964b] *Regular expressions from sequential circuits*, IEEE Trans. Elec. Comp. **13** (1964), 741–744.

[1965] *Regular expressions for linear sequential circuits*, IEEE Trans. Elec. Comp. **14** (1965), 148–156.

[1980a] *Open problems about regular languages*, Dept. of Computer Science, Univ. of Waterloo, 1980.

[1980b] *Developments in the theory of regular languages*, Dept. of Computer Science, Univ. of Waterloo, 1980.

Brzozowski, J. A. and I. Simon

[1973] *Characterization of locally testable events*, Discrete Math. **4** (1973), 243–271.

Büchi, J. R.

[1960] *Weak second-order arithmetic and finite automata*, Zait. Math. Logik Grund. d. Math. **6** (1960), 66–92.

[1989] *Finite automata, their algebras and grammars. Towards a theory of formal expressions*, D. Siefkes, ed., Springer-Verlag, New York, 1989.

Burris, S. and H. P. Sankappanavar

[1981] *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Cadden, W. J.

[1959] *Equivalent sequential machines*, IRE Transactions of Circuit Theory **6** (1959), 30–34.

Černý, J.

[1964] *Poznámka k homogénym experimentom s konecinými automatami*, Mat.-fyz. cas. SAV **14** (1964), 208–215.

Černý, J., A. Pirická and B. Rosenauerová

[1971] *On directable automata*, Kybernetika **7** (1971), no. 4, 289–298.

Choffrut, C. and J. Karhumaki

[1997] *Combinatorics of words*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 329–438.

Chomsky, N.

[1956] *Three models for the description of languages*, IRE Trans. on Information Theory **2** (1956), 113–124.

[1957] *Syntactic Structures*, Mouton, The Hague, 1957.

[1959] *On certain formal properties of grammars*, Information and Control **2** (1959), 137–167.

[1962] *Context-free grammars and pushdown storage*, Quaterly Prog. Rept. **65**, MIT Res. Lab. Elect. Cambridge Mass (1962), 187–194.

[1963] *Formal properties of grammars*, Handbook of Math. Phych., Vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1963, 323–418.

[1979] *Gramatika i um*, Nolit, Beograd, 1979.

[1984] *Sintaksičke strukture*, Dnevnik, Književna zajednica Novog sada, Novi Sad, 1984.

Chomsky, N. and G. A. Miller

[1958] *Finite-state languages*, Inf. and Control **1** (1958), 91–112.

Chomsky, N. and M. P. Schützenberger

[1963] *The algebraic theory of context-free languages*, in: Computer Programming and Formal Systems (Braffort, P. and D. Hirchberg, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1963, 118–161.

Church, A.

[1936] *An unsolvable problem for elementary number theory*, The American Journal of Mathematics **58** (1936), 345–363.

[1941] *The Calculi of Lambda-Conversion*, Princeton, 1941.

Ćirić, M. and S. Bogdanović

[1995] *Theory of greatest decompositions of semigroups*, (*A survey*), Algebra, logic & discrete mathematics (Niš, 1995), Filomat (Niš) **9:3** (1995), 385–426.

[1996a] *Posets of $\mathcal{C}$-congruences*, Algebra Universalis **36** (1996), 423–424.

[1996b] *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum **52** (1996), 119–132.

[1997] *The lattice of positive quasi-orders on a semigroup*, Israel J. Math. **98** (1997), 157–166.

[1999a] *Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata*, Algebra Colloq. **6**:1 (1999), 71–88.

Ćirić, M., S. Bogdanović and J. Kovačević

[1998] *Direct sum decompositions of quasi-ordered sets and their applications*, Filomat (Niš) **12:1**, (1998), 65–82.

Ćirić, M., S. Bogdanović and T. Petković

[1996] *The lattice of positive quasi-orders on an automaton*, Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. **11**, (1996), 143–156.

[1998] *The lattice of subautomata of an automaton: A survey*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **64** (**78**) (1998), 165–182.

Ćirić, M., B. Imreh and M. Steinby

[1999] *Subdirectly irreducible definite, reverse definite and generalized definite automata*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **10** (1999), 69–79.

Ćirić, M., T. Petković and S. Bogdanović

[2000] *Weak direct limits of unary algebras*, (u štampi).

Clifford, A. H. and G. B. Preston

[1961] *The algebraic theory of semigroups*, Vol I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961.

[1967] *The algebraic theory of semigroups*, Vol II, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967.

Cohn, P. M.

[1965] *Universal Algebra*, Harper and Row, New York, N. Y., 1965.

Conway, J. H.

[1971] *Regular Algebra and Finite Machines*, Chapman and Hall, London, 1971.

Crawley, P. and R. P. Dilworth

[1973] *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

Crochemore, M. and C. Hancart

[1997] *Automata for matching patterns*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 399–462.

Crvenković, S., I. Dolinka and Z. Ésik

[1999] *A note on equations for commutative regular languages*, Information Processing Letters **70** (2) (1999), 265–267.

[2000a] *The variety of Kleene algebras with conversion is not finitely based*, Theoretical Computer Science **230** (2000), 235–245.

[2000b] *On equations for union-free regular languages*, Information and Computation (u štampi).

Crvenković, S., I. Dolinka and R. Sz. Madarász

[1998] *Odabrane teme opšte algebre: grupe, prsteni, polja, mreže*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

Crvenković, S. and R. Sz. Madarász

[1993] *On Kleene algebras*, Theoretical Computer Science **108** (1993), 17–24.

[1994] *On dynamic algebras*, Theoretical Computer Science **134** (1994), 79–86.

Cutland, N.

[1980] *Computability. An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

Cvetković, D.

[1996] *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

Cvetković, D. and S. Simić

[1996] *Diskretna matematika – matematika za kompjuterske nauke*, Drugo izdanje, Prosveta, Niš, 1996.

DASSOW, J.

[1981] *Completeness problems in the structural theory of automata*, Akademie-Verlag, Berlin, 1981.

DAVEY, B. A. and H. A. PRIESTLEY

[1990] *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

DAVIS, M.

[1958] *Computability and Unsolvability*, McGraw-Hill, New York, 1958.

DÖMÖSI, P.

[1988] *On temporal products of automata*, Papers on Automata and Languages X, Dept. of Math. Karl Marx Univ. of Economics, Budapest (1988), 49–62.

DETLOVS, V. K.

[1953] *Normal algorithms and recursive functions*, Dokl. AN SSSR **90** (1953), 723–725 (in Russian).

DOLINKA, I.

[2000] *Identititeti na algebrama regularnih jezika*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2000.

DONG YANG LONG

[1996] *The structure of languages whose syntactic monoid is nilpotent*, Acta Sci. Natur. Univ. Sunyatseni **35** (1996), no. 1, 12–16.

DUBREIL, P.

[1941] *Contribution à la théorie des demi-groupes*, Mem. Acad. Sci. Inst. Fr. **63**, Gauthiers-Villars, 52 pp.

DUBREIL-JACOTIN, M. L.

[1947] *Sur l'immersion d'un demi-groupe dans un groupe*, C. R. Acad. Sci. Paris **225** (1947), 787–788.

DUBUC, L.

[1996] *Les automates circulaires biaisés vérifient la conjecturede Černy*, RAIRO Inform. Théor. Appl. **30** (1996), no. 6, 495–505.

EHRENFEUCHT, A., R. PARIKH and G. ROZENBERG

[1981] *Pumping lemmas for regular sets*, SIAM J. of Computing **10**, no. 3 (1981), 536–541.

Eilenberg, S.

[1973] *Classes of semigroups and classes of sets*, Proc. ACM Symp. on Theory of Computing **5** (1973), 266–267.

[1974] *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York and London, Vol. A, 1974.

[1976] *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York and London, Vol B, 1976.

Eilenberg, S. and M. P. Schutzenberger

[1976] *On pseudovarieties*, Advances in Math. **19** (1976), 413–418.

Elgot, C. C. and J. D. Rutledge

[1961] *Operations on finite automata*, Proc. 2nd Ann. Symp. on Switching Theory and Logical Design, Detroit, Mich., 1961.

Ésik, Z.

[1992] *Varieties of automata and transformation semigroups*, Acta Mathematica Hungarica **59** (1–2) (1992), 59–74.

[1996] *Definite tree languages and their cascade compositions*, Publ. Math. Debrecen **48**/3–4 (1996), 243–261.

Ésik, Z. and B. Imreh

[1981] *Subdirectly irreducible commutative automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 251–260.

Evey, R. J.

[1963] *The theory and application of pushdown store machines*, in: Mathematical Linguistics and Automatic Translation, NSF-IO, Harvard University, 1963, 217–255.

Fischer, P. C.

[1965] *On Formalism for Turing Machines*, Proc. 6th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory 1965, and JACM vol. **12** (1965), no. 4, 570-588.

Fleck, A. C.

[1965] *On the automorphism group of an automaton*, J. Assoc. Comp. Machinery **12** (1965), 566–569.

Fleischer, I.

[1955] *A note on subdirect products*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **6** (1955), 463–465.

FUCHS, L.

[1952] *On subdirect unions* I, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **3** (1952), 103–120.

FÜLÖP, Z. and S. VÁGVÖLGYI

[1989] *Congruential tree languages are the same as recognizable tree languages*, Bull. EATCS **39** (1989), 175–185.

GÉCSEG, F.

[1976] *On products of abstract automata*, Acta Sci. Math. (Szeged) **38** (1976), 21–43.

[1986] *Products of automata*, EATCS Monographs in Theor. Comput. Sci. Vol. **7**, Springer-Verlag, Berlin-Haidelberg, 1986.

GÉCSEG, F. and I. PEÁK

[1972] *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

GÉCSEG, F. and M. STEINBY

[1984] *Tree automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

[1997] *Tree languages*, in: Handbook of formal languages, Vol. 3 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 1–68.

GÉCSEG, F. and G. THIERRIN

[1987] *Characterizations of locally transitive semiautomata*, Papers on Automata and languages IX, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest **87–2** (1987), 1–8.

GILL, A.

[1960] *Comparison of finite-state models*, IRE Trans. Circuit Theory **7** (1960), no. 2, 178–179.

[1962] *Introduction to the theory of finite-state machines*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

GIAMMARRESI, D. and A. RESTIVO

[1997] *Two-dimensional languages*, in: Handbook of formal languages, Vol. 3 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 215–267.

GINSBURG, S.

[1959a] *A technique for the reduction of a given machine to a minimal-state machine*, IRE Trans. Electronic Computers **8** (1959), 346–355.

[1959b] *On the reduction of superfluous states in a sequential machine*, J. Assoc. Comput. Machinery **8** (1959), 259–282.

[1959c] *A synthesis technique for minimal state sequential machines*, IRE TRans. Electronic Compput. **8** (1959), 441–449.

[1960] *Connective properties preserved in minimal state machines*, J. Assoc. Comp. Machinery **7** (1960), 311–325.

[1962] *An introduction to mathematical machine theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1962. London, 1962.

[1966] *The mathematical theory of context-tree languages*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[1975] *Algebraic and Automata-Theoretic Properties of Formal Languages*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

Ginsburg, S. and H. G. Rice

[1962] *Two families of languages related to ALGOL*, J. Assoc. Comp. Machinery **9** (1962), 350–371.

Ginsburg, S. and E. H. Spanier

[1963] *Quotients of context-free languages*, J. Assoc. Comp. Machinery **10** (1963), 487–492.

Ginzburg, A.

[1966] *About some properties of definite, reverse definite and related automata*, IEEE Trans. Electronic Computers **15** (1966), 809–810.

[1968] *Algebraic theory of automata*, Academic Press Inc., New York, 1968.

Glushkov, V. M.

[1961a] *Abstract theory of automata*, Uspehi matem. nauk **16:5 (101)** (1961), 3–62 (in Russian).

[1961b] *Abstract automata and partitions of free semigroups*, DAN SSSR **136** (1961), 765–767 (in Russian).

Goldstine, J.

[1977] *Automata with data storage*, Proc. Conf. Comput. Sci., Waterloo, 1997.

Graczyńska, E.

[1983a] *Proofs of unary regular identities*, Demonstratio Math. **16** (1983), no. 4, 925–929.

[1983b] *On regular identities*, Algebra Universalis **17** (1983), 369–375.

[1985] *Regular identities*, Technishe Hochschule Darmstadt, Preprint no. 940, 1985.

[1990] *On some operators on pseudovarieties*, Bull. Sect. Logic, Pol. Acad. Sci. **19** (1990), 122–127.

[1991] *On some operators on pseudovarieties*, General Algebra, Proc. Conf., Vienna/Austria 1990, Contrib. General Algebra **7** (1991), 177–184.

[1995] *On some operators on pseudovarieties* II, Bull. Sect. Logic, Univ. Lodz, Dep. Logic **24** (1995), 80–88.

Grätzer, G.

[1968] *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1968.

[1978] *General Lattice Theory*, Akademie–Verlag, Berlin, 1978.

Grätzer, G. and J. Płonka

[1970] *A characterization of semilattices*, Colloq. Math. **22** (1970), 21–24.

Greibach, S. A.

[1965] *A new normal form theorem for context-free phase structure grammars*, J. Assoc. Comput. Mach. **12** (1) (1965), 42–52.

Grillet, P. A.

[1995] *Semigroups. An intoduction to structure theory*, ColloMarcel Dekker, Inc., New York, 1995.

Harju, T. and J. Karhumäki

[1997] *Morphisms*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 439–510.

Hartmanis, J.

[1962] *Loop-free structure of sequential machines*, Information and Control **5** (1962), 25–43.

[1963] *The equivalence of sequential machine models*, IEEE Trans. Electronic Comput. **12** (1963), 18–19.

Hartmanis, J. and R. E. Stearns

[1963] *Some dangers in state reduction of sequential machines*, Infor. Control **5** (1962), 252–260.

[1966] *Algebraic structure theory of sequential machines*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.

Head, T., G. Paun and D. Pixton

[1997] *Language theory and molecular genetics: generative mechanisms suggested by DNA recombination*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 295–360.

HEUTER, U.

[1988] *Definite tree languages*, Bull. EATCS **35** (1988), 137–144.

[1989] *Generalized definite tree languages*, Mathem. Found. Comput. Sci. (Proc. Symp., Porabka-Kozubnik, Poland 1989). Lect. Notes in Comput. Sci. 379, Springer-Verlag, Berlin 1989, 270–280.

HIGGINS, P. M.

[1990] *An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities*, Algebra Universalis **27** (1990), 597–599.

[1992] *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford University Press, Oxford-New York-Tokyo, 1992.

HOLCOMBE, W. M. L.

[1982] *Algebraic Automata Theory*, Cambridge Univ. Press, 1982.

HOPCROFT, J. E. and J. D. ULLMAN

[1969] *Formal Languages and their Relation to Automata*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[1979] *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley Publishing Company, 1979.

HOWIE, J. M.

[1976] *An introduction to semigroup theory*, Acad. Press, New York, 1976.

[1991] *Automata and languages*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[1995] *Fundamentals of Semigroup Theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, Oxford: Clarendon Press, 1995.

HUFFMAN, D. A.

[1954] *The synthesis of sequential switching circuits*, J. Franklin Inst. **57** (1954),I, 161–190.

HUZINO, S.

[1958] *On some sequential machines and experiments*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **12** (1958), 136–158.

IMREH, B.

[1981] *On finite nilpotent automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 281–293.

[1984] *On finite definite automata*, Acta Cybernetica **7** (1984), 61–65.

Imreh, B. and M. Ito

[1999a] *On some special classes of regular languages*, in: Jewels are forever, Contributions on theoretical computer science in honor of Arto Salomaa (J. Karhumäki, ed. et al.), Springerm, Berlin, 1999, 25-34.

[1999b] *Nondeterministic directable automata and related languages*, RIMS Kokyuroku **1106** (1999), 81–87.

Imreh, B., M. Ito and M. Steinby

[1999a] *On commutative directable nondeterministic automata*, (u štampi).

Imreh, B. and M. Steinby

[1995] *Some remarks on directable automata*, Acta Cybernetica **12**, (1995), no. 1, 23–35.

[1999] *Directable nondeterministic automata*, Acta Cybernetica **14** (1999), 105–115.

Ito, M. (Editor)

[1992] *Words, Languages and Combinatorics*, World Scientific, Singapore, 1992.

Ito, M. and J. Duske

[1983] *On cofinal and definite automata*, Acta Cybernetica **6** (1983), no. 2, 181–189.

Jaffe, J.

[1978] *A necessary and sufficient pumping lemma for regular languages*, SIGACT News (1978), 48–49.

Jónsson, B.

[1972] *Topics in universal algebra*, Lect. Notes in Math. Vol 250, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Jónsson, B. and E. Nelson

[1974] *Relatively free products in regular varieties*, Algebra Universalis **4** (1974), no. 1, 14–19.

Kain, R. Y.

[1972] *Automata Theory: Machines and Languages*, McGraw Hill, New York, 1972.

Kari, L., G. Rozenberg and A. Salomaa

[1997] *L systems*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 253–328.

KILP, M., U. KNAUER and A. V. MIKHALEV

[2000] *Monoids, Acts and Categories*, De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. **29**, Walter de Gruyter, Berlin–NewYork, 2000.

KIMURA, N.

[1958a] *The structure of idempotent semigroups* (I), Pacific J. Math. **8** (1958), 257–275.

[1958b] *On some existence theorems on multiplicative systems*. I. *Greatest quotients*, Proc. Japan Acad. **36** (1958), no. 6, 305–309.

KLEENE, S. C.

[1936] *General recursive functions of natural numbers*, Math. Ann. **112** (1936), 727–742.

[1943] *Recursive predicates and quantifiers*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 41–73.

[1956] *Representation of events in nerve nets and finite automata*, in: Automata Studies (Shanon, C. E. and J. Mc Carthy, eds.), Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956, 3–41.

KLJACHKO, A., I. RYSTSOV and M. SPIVAK

[1987] *Extremal combinatorial problem concerninig the length of the reset word in a finite automaton*, Cybernetics **23** (1987), 165–170, (Translated from Russian).

KLOSS, B. B.

[1988a] *Some properties of correctable automata*, Kibernetika (Kiev) (1988), no. 1, 10–15, (in Russian).

[1988b] *On minimal autonomuos partitions of directed graphs and some aplications to automata theory*, Acta Cybernetica (Szeged) **8** (1988), no. 4, 325–339.

KOČINAC, LJ. and A. MANDAK

[1996] *Algebra* II: *Grupe, prsteni i polja, univerzalne algebre, moduli i linearne algebre, mreže i Booleove algebre*, Univerzitet u Prištini, Priština, 1996.

KOGALOVSKIĬ, S. R.

[1965] *On the Theorem of Birkhoff*, Uspehi Mat. Nauk. **20** (1965), 206–207 (in Russian).

KOVAČEVIĆ, J., M. ĆIRIĆ, T. PETKOVIĆ and S. BOGDANOVIĆ

[2000] *Decompositions of automata and reversible states*, in: A. Adam and P. Dömösi (eds.), Proceedings of the Nineth International Conference on Automata and Formal Languages, Publ. Math. Debrecen (u štampi).

Kozen, D.

[1992] *On the Myhill-Nerode theorem for trees*, Bull. EATCS **47** (1992), 170–173.

Krohn, K. and J. L. Rhodes

[1962] *Algebraic theory of machines*, in: Proc. Symp. Math. Theory of Automata (J. Fox, ed.), Brooklyn, 1962, 341–384.

[1965] *Algebraic theory of machines* I: *The decomposition results*, Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965), 450–464.

Kudrjavcev, V. B., A. S. Podkolzin and Š. Ušćumlić

[1986] *Uvod u teoriju apstraktnih automata*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

Kuich,, W. and A. Salomaa

[1986] *Semirings, Automata, Languages*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Kuroda, S. Y.

[1964] *Classes of Languages and Linear Bounded Automata*, Information and Control **7** (1964), no. 2, 207–223.

Kurosh, A. G.

[1973] *Lectures in general algebra*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).

Lallement, G.

[1979] *Semigroups and combinatorial applications*, Willey Interscience, New York, 1979.

Landweber, P. S.

[1963] *Three Theorems on Phrase Structure Grammars of Type 1*, Information and Control **6** (1963), no. 2, 131–136.

[1964] *Decision Problems of Phrase-structure Grammars*, IEEE Trans. Elect. Comp. **13** (1964), no.4, 354–362.

Letičevskiĭ, A. A.

[1962] *Automaton partitions by mappings of free semigroups*, Zhurn. Vychisl. Matem. Mat. Fiz. **2** (1962), 467–474 (in Russian).

[1965a] *Alphabet mappings and finite automata*, Teor. konechnyh i veroyatnostnyh avtomatov (Moskva, 1965), 250–252 (in Russian).

[1965b] *On mininization of finite automata*, Kibernetika (1965), no. 1, 20–23 (in Russian).

Levi, F. W.

[1944] *On semigroups*, Bull. Calcutta Math. Soc. **36** (1944), 141–146.

Lex, W. and R. Wiegandt

[1981] *Torsion theory for acts*, Studia Sci. Math. Hungar. **16** (1981), 263–280.

Lindenmayer, A.

[1968] *Mathematical models for cellular interactions in development*, I, II, J. Theoret. Biol. **18** (1968), 280–315.

Madarász, R. Sz. and S. Crvenković

[1992] *Relacione algebre*, Mat. Inst. SANU, Beograd, 1992.

[1995] *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*, Univ. u Novom Sadu, Novi Sad, 1995.

Maljcev, A. I.

[1970] *Algebraic Systems*, Nauka, Moskva, (1970), (in Russian).

Marcus, S.

[1964] *Grammars and Finite Automata*, The Publ. House of the Roumanian Academy, Bucharest, Romania, 1964.

[1997] *Contextual grammars and natural languages*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 215–235.

Markov, A. A.

[1954] *Theory of algorithms*, Tr. Matem. In-ta V. A. Steklova **42**, 1954 (in Russian).

Mateescu, A. and A. Salomaa

[1997a] *Formal languages: an introduction and a synopsis*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 1–39.

[1997b] *Aspects of classical language theory*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 175–251.

McCulloch, W. and W. Pitts

[1943] *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, Bull. Math. Biophys. **5** (1943), 115–133.

McKnight, J.

[1964] *Kleene quotient theorems*, Pacific J. Math. **14** (1964), 1343–1352.

McKnight, J. D. and A. J. Storey

[1969] *Equidivisible semigroups*, J. Algebra **12** (1969), 24–48.

McNaughton, R.

[1974] *Algebraic decision procedure for local testability*, Math. Syst. Theory **8** (1974), 60–76.

[1982] *Elementary Computability, Formal Language and Automata*, Prentice Hall, Inc. 1982.

McNaughton, R. and H. Yamada

[1960] *Regular expressions and state graphs for automata*, IRE Trans. Elec. Comp. **9** (1960), 39–47.

Mealy, G. H.

[1955] *A method for synthesizing sequential circuits*, Bell. System. Techn. J. **34** (1955), 1045–1049.

Mendelson, E.

[1964] *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1964.

Mijajlović, Ž.

[1993] *Algebra* I, Milgor, Beograd-Moskva, 1993.

Milić, S.

[1991] *Elementi matematičke logike i teorije skupova*, A–Š delo, Beograd, 1991.

[1995] *Elementi algebre*, Carić, Beograd, 1995.

Minsky, M. L.

[1967] *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice Hall, N. J., 1967.

Moore, E. F.

[1956] *Gedanken-experiments on sequential machines*, in: Automata studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds), Princeton, 1956, 129–153.

Morse, M. and G. A. Hedlund

[1944] *Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups*, Duke Math. J. **11** (1944), 1–7.

MYHILL, J.

[1957] *Finite automata and the representation of events*, Wright Air Development Command Technical Report 57–624 (1957), 112–137.

[1960] *Linear-bounded Automata*, Wright Air Develop. Div. Tech. Note (1960), 60–165.

NAGY, A.

[1977] *Boolean type retractable automata with traps*, Acta Cybernetica **10** (1991), no. 1–2, 53–64.

NELSON, R. J.

[1968] *Introduction to automata*, John Willey & Sons, New York, London, Sidney, 1968.

NERODE, A.

[1958] *Linear automaton transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 541–544.

NETHERWOOD, D. B.

[1959] *Minimal sequential machines*, IRE Trans. Electronic. Comput. **8** (1959), 339–345.

NIEMELU, L.

[1989] *On the directability of automata*, Kybernetika (Prague) **25** (1989), no. 5, 419–421.

NIEMI, V.

[1997] *Cryptology: language-theoretic aspects*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 507–524.

NIVAT, M. and A. PODELSKI

[1989] *Definite tree automata* (cont'd), Bull. EATCS **38** (1989), 186–190.

OEHMKE, R.

[1963] *On the structures of an automaton and its input semigroup*, J. Assoc. Comp. Machinery **10** (1963), 521–525.

PARK, CHIN-HONG

[1994] *On right congruences associated with the input semigroup S of automata*, Semigroup Forum **48** (1994), 263–271.

Paull, M. C. and S. Unger

[1959] *Minimizing the number of states in incompletely specified sequential switching functions*, IRE Trans. Electronic Comput. **8** (1959), 356–367.

Peák, I.

[1964] *Automata and semigroups* I, Acta Sci. Math. (Szeged) **25** (1964), 193–201 (in Russian).

[1965] *Automata and semigroups* II, Acta Sci. Math. (Szeged) **26** (1965), 49–54 (in Russian).

Perrin, D.

[1995a] *Symbolic dynamics and finite automata*, in: Mathematical Foundations of Computer Science (Wiedermann, J. and P. Hajek, eds.), Lecture Notes in Computer Science **969**, Springer Verlag, 1995, 94–104.

[1995b] *Les débuts de la théorie des automates*, Technique et Science Informatique **14** (1995), 409–433.

Perrin, D. and J. E. Pin

[1995] *Semigroups and automata on infinite words*, in: Semigroups,Formal Languages and Groups (J. Fountain, ed.), Kluwer, 1995, 49–72.

Perrin, D. and M. P. Schützenberger

[1992] *Synchronizing words and automata and the road coloring problem*, in: Symbolic Dynamics and its Applications (P. Walters, ed.), American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, vol. 135, 1992, 295–318.

Perles, M., M. O. Rabin and E. Shamir

[1963] *The theory of definite automata*, IEEE Trans. Electronic Computers **EC-12** (1963), 233–243.

Perović, Ž.

[1998] *Bulove algebre*, Prosveta, Niš, 1998.

Petković, T.

[1998] *Varijeteti automata i polugrupa*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, 1998.

Petković, T., M. Ćirić and S. Bogdanović

[1998] *Decompositions of automata and transition semigroups*, Acta Cybernetica **13** (1988), no. 4, 385–403.

[2000a] *Correspondences between varieties of automata and semigroups*, (u štampi).

[2000b] *Characteristic semigroups of directable automata*, (u štampi).

Petrich, M.

[1973] *Introduction to semigroups*, Merill, Ohio, 1973.

[1977] *Lectures in semigroups*, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.

Pin, J. E.

[1978] *Sur les mots synchronisants dans un automata fini*, Elektron. Inform. Verarb. u. Kybernetik, EIK **14** (1978), 297–303.

[1979] *Sur un cas particulier de la conjecture de Cerny*, Automata, langagues and programming, ICALP'79 (Proc. Coll., Udine, 1979), Lect. Notes. Comp. Sci. **62**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp. 345–352.

[1984] *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984. (English translation: *Varieties of Formal Languages*, North Oxford Academic Publ., London, 1986).

[1995] *Finite semigroups and recognizable languages: an introduction*, in: NATO Advanced Study Institute – Semigroups, Formal Languages and Groups (J. Fountain ed.), pp. 1–32, Kluwer academic publishers, 1995.

[1997] *Syntactic semigroups*, in: Handbook of formal languages, Vol. 1 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 679–746.

Pippenger, N.

[1997] *Theories of computability*, Cambridge University Press, 1997.

Płonka, J.

[1967] *On a method of construction of abstract algebras*, Fundamenta Math. **61** (1967), 183–189.

[1969] *On equational classes of abstract algebras defined by regular identities*, Fundamenta Math. **64** (1969), 241–247.

[1982] *On the sum of a system of disjoint unary algebras corresponding to a given type*, Bull. Acad. Polon. Sci. **30** (1982), no. 7–8, 305–309.

[1984] *On the sum of a direct system of universal algebras with nullary polynomials*, Algebra Universalis **19** (1984), 197–207.

[1985] *On the lattice of varieties of unary algebras*, Simon Stevin **59** (1985), no. 4, 353–364.

Płonka, J. and A. Romanowska

[1992] *Semilattice sums*, in: Universal Algebra and Quasigroup Theory, A. Romanowska and J. D. H. Smith (eds.), Heldermann Verlag Berlin, 1992, 123–158.

Popović, Ž., S. Bogdanović, T. Petković and M. Ćirić

[2000a] *Trapped automata*, in: A. Adam and P. Dömösi (eds.), Proceedings of the Nineth International Conference on Automata and Formal Languages, Publ. Math. Debrecen (u štampi).

[2000b] *Generalized directable automata*, in: M. Ito (ed.), Words, languages and combinatorics. III. Proceedings of the Second International Colloquium held at Kyoto Sangyo University, Kyoto, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (u štampi).

Post, E. L.

[1936] *Finite combinatory processes-formulation* I, J. Symb. Logic **1** (1936), 103–105.

[1943] *Formal reduction of the general combinatorial decision problem*, Amer. J. Math. **65** (1943), 197–215.

[1947] *Recursive unsolvability of a problem of Thue*, J. Symb. Logic **12** (1947), 1–11.

Rabin, M. O. and D. Scott

[1959] *Finite automata and their decision problem*, IBM J. Res. Dev. **3** (1959), 114–125.

Raney, G. N.

[1958] *Sequential functions*, J. Assoc. Comp. Machinery **5** (1958), 177-180.

Redko, V. N.

[1964] *On defining relations on for the algebra of regular events*, Ukrain. Mat. Zh. **16** (1964), 120–126 (in Russian).

[1965] *On a connection between automata and semigroups*, Vopr. Teoret. Kibernetiki (Kiev) (1965), 83–90.

Reterman, J.

[1982] *The Birkhoff theorem for finite algebras*, Algebra Universalis **14** (1982), 1–10.

Rogers, H. Jr.

[1967] *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Romanowska, A.

[1986] *On regular and regularized identities*, Algebra Universalis **23** (1986), 215–241.

ROMANOWSKA, A. and J. D. H. SMITH

[1991] *On the structure of semilattice sums*, Czechosl. Math. J. **41 (116)** (1991), 24–42.

ROZENBERG, G. and A. SALOMAA

[1994] *Cornerstones of Undecidability*, Prentice Hall, New York, 1994.

ROZENBERG, G. and A. SALOMAA (EDITORS)

[1997a] *Handbook of Formal Languages, Vol 1: Word, language, grammar*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[1997b] *Handbook of Formal Languages, Vol 2: Linear modeling: background and application*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[1997c] *Handbook of Formal Languages, Vol 3: Beyond words*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

RYSTSOV, I. C.

[1992a] *An almost optimal estimate for the length of a reset word for regular automata*, Dokl. Akad. Nauk. Ukrainy (1992), no. 9, 5–8, (in Russian).

[1992b] *Rank of a finite automaton*, Kibernet. Sistem. Anal. **28** (1992), 323–328, (Translated from Russian).

[1994] *Reset words for solvable automata*, Kibernet. Sistem. Anal. (1994), no. 6, 21–26, (in Russian).

[1995a] *An almost optimal estimate for the length of a reset word for regular automata*, Kibernet. Sistem. Anal. (1995), no. 5, 40–48, (in Russian).

[1995b] I. C. Rystsov, *Quasioptimal band for the length of reset words for regular automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), no. 5, 145–152.

[1996] *Exact linear bound for the length of reset words in commutative automata*, Publ. Math. Debrecen **48**/3–4 (1996), 405–409.

[1997] *Reset words for commutative and solvable automata*, Theor. Comput. Sci. **172** (1997), no. 1–2, 273–279.

SALIĬ, V. N.

[1969a] *Equationally normal varieties of semigroups*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **84** (1969), 61–68 (in Russian).

[1969b] *Equationally normal varieties of universal algebras*, Works of Young Scientists: Mathematics and Mechanics **2** (1969), 124–130 (in Russian).

[1988] *Universal algebra and automata*, Izd. Saratovskogo Univ., Saratov, 1988 (in Russian).

SALOMAA, A.

[1966] *Two complete axiom systems for the algebra of regular events*, J. Assoc. Comput. Machinery **13** (1966), 158–169.

[1969] *Theory of automata*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[1973] *Formal Languages*, Academic Press, New York, London, 1973.

[1981] *Jewels of Formal Language Theory*, Computer Science Press, Rockville, 1981.

[1985] *Computation and Automata*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

SCHEIN, B. M.

[1965] *On the theorem Birkfoff-Kogalovkiĭ*, Uspehi Mat. Nauk. **20** (1965), 173–174 (in Russian).

[1966] *Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific J. Math. **17** (1966), 529–547.

SCHÜTZENBERGER, M. P.

[1963] *On context-free languages and pushdown automata*, Inform. and Control **6** (1963), 217–255.

[1965] *On finite monoids having only trivial subgroups*, Information and Control **8** (1965), 190–194.

SETOYANAGI, M.

[1982] *Note on subdirectly irredicible automata*, Proc. Conf. on Semigroup Theory and its Related Fields, Kyoto, 1982, 68–77.

ŠEŠELJA, B.

[1990] *Matematika informatike*, Institut za Matematiku, Novi Sad, 1990.

SHANNON, C. E. and J. MCCARTHY (EDITORS)

[1956] *Automata studies*, Princeton Univ. Press **13**, Princeton, N.J., 1956.

SHEPHERDSON, J. C. and H. E. STURGIS

[1963] *Computability of recursive functions*, J. Assoc. Comput. Mach. **10** (1963), 217–255.

SHEVRIN, L. N.

[1962] *About some classes of abstract automata*, Uspehi matem. nauk **17:6 108** (1962), p. 219 (in Russian).

SHYR, H. J.

[1991] *Free Monoids and Languages*, Hon Min Book Comp., Taichung, 1991.

SIMON, I.

[1975] *Piecewise testable events*, in: Automata theory and formal languages, 2nd G. I. Conference, Lecture Notes in Computer Science **33**, Springer-Verlag, 1975, 214–322.

SMIRNOV, D. M.

[1976] *Regular varieties of algebras*, Algebra i Logika **15** (1976), no. 3, 331–342 (in Russian).

[1978] *The correspondence between regularly definable varieties of unary algebras and semigroups*, Algebra i Logika **17** (1978), no. 4, 468–477 (in Russian).

STAIGER, L.

[1997] *ω-languages*, in: Handbook of formal languages, Vol. 3 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 339–387.

STANKOVIĆ, R. S., M. R. STOJIĆ I S. M. BOGDANOVIĆ

[1988] *Fourierovo predstavljanje signala*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

STARKE, P. H.

[1969] *Abstrakte Automaten*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

STEARNS, R. E. and J. HARTMANIS

[1963] *Regularity preserving modifications of regular expressions*, Inform. Control **6** (1963), 55–69.

STEINBY, M.

[1969] *On definite automata and related systems*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Mathematica **444**, 1969.

[1979] *Syntactic algebras and varieties of recognizible sets*, Les arbres en algebre et en programmation, 4eme Coll. Lille (Proc. Coll., Lille 1979), University of Lille, Lille 1979, 226–240.

[1981] *Some algebraic aspects of recognizability*, Fundamentals of computation theory (Proc. Conf. Szeged 1981). Lect. Notes in Comput. Sci. 117, Springer-Verlag, Berlin 1981, 360–372.

[1992a] *A theory of tree language varieties*, in: Tree automata and Languages (M. Nivat and A. Podelski, eds.), Elsevier Science Publ., 1992, 57–81.

[1992b] *On generalizations of the Nerode and Myhill theorems*, Bull. EATCS **48** (1992), 191–196.

[1994] *Classifying regular languages by their syntactic algebras*, in: Results and trends in theoretical computer science (Graz, 1994), Lect. Notes in Comput. Sci., 812, Springer, Berlin, 1994, 396–409.

Stojaković, M.

[1972] *Algoritmi i automati*, Radnički univerzitet, Novi Sad, 1972.

Szàsz, G.

[1971] *Théorie des treillis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, et Dunod, Paris, 1971.

Székely, I.

[1998] *Isomorphic representation of nondeterministic nilpotent automata*, Acta Cybernetica **13** (1998), 243–256.

Tamura, T.

[1975] *Quasi-orders, generalized archimedeaness and semilattice decompositions*, Math. Nachr. **68** (1975), 201–220.

Tarski, A.

[1946] *A remark on functionally free algebras*, Ann. of Math. **47** (1946), 163–165.

Taylor, W.

[1979] *Equational logic*, Houston J. Math. **5** (1979), 1–83.

Teissier, M.

[1951] *Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes*, C. R. Acad. Sci. Paris. **232** (1951), 1987–1989.

Thérien, D.

[1980] *Classification of regular languages by congruences*, Rep. CS-80-19, University of Waterloo, Dept. Comput. Sci. Waterloo, Ontario, 1980.

[1981] *Recognizable languages and congruences*, Semigroup Forum **23** (1981), 371–373.

Thierrin, G.

[1972] *Decompositions of locally transitive semiautomata*, Utilitas Mathematica **2** (1972), 25–32.

Thomas, W.

[1997] *Languages, automata and logic*, in: Handbook of formal languages, Vol. 3 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 389–455.

Thue, A.

[1906] *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl., Kristiania, 7 (1906), 1–22.

[1912] *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl., Kristiania, 1 (1912), 1–67.

Tošić, R.

[1971] *Zbirka zadataka iz algebarskih osnova teorije automata*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 1971.

Turing, A. M.

[1936] *On computible numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. Ser 2, **42** (1936), 230–265, correction **43**, 544–546.

Vojvodić, G.

[1998] *Predavanja iz matematičke logike i algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 1998.

Wechler, H.

[1983] *Characterization of rational and algebraic power series*, RAIRO Inform. Théor. **17** (1983), 3–11.

Wenzel, G. H.

[1967] *Note on a subdirect representation of universal algebras*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 329–333.

[1970] *Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras* $\langle A; f\rangle$, Arch. Math. (Basel) **21** (1970), 256–263.

Yoeli, M.

[1967] *Subdirectly irreducible unary algebras*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 957–960.

Yu, S.

[1997] *Regular languages*, in: Handbook of formal languages, Vol. 2 (G. Rozenberg and A. Salomaa, eds.), Springer Verlag, 1997, 41–110.

Languages and Automata

Miroslav D. Ćirić, Tatjana S. Petković and Stojan M. Bogdanović

University of Niš

Preface

The main purpose of this book is to be the textbook for the subject *Theory of automata and languages* for the third year students of Computer Science on the Department of Mathematics of the Faculty of Sciences and Mathematics at the University of Niš. Besides that, it is written so that it is also useful for Ph.D. students of Computer Science for the subject *Theory of algorithms, languages and automata*, as well as for Ph.D. students of Algebra and Combinatorial Mathematics for the subject *Theory of languages and automata*. Certainly, anyone else interested in studying formal languages and automata can found it useful. A part of the book contains new, original, results due to the authors, that were presented in many occasions on Seminar for algebra in Niš, as well as on remarkable international conferences.

Concepts of information, their processing, transmission and storage, have became crucial in many areas of contemporary science during the last fifty years. Using exact mathematical methods in these investigations became one of the most important missions and that required mathematical abstractions of those concepts. Mathematical notions of languages and automata are among the most significant concepts derived in that way.

Mathematical theories of languages and automata appeared as particular disciplines of Computer Science in fifty's of the twentieth century. Their development has been influenced by many other scientific disciplines. Among mathematical disciplines, the most important influence has been achieved by mathematical logic and algebra, whose ideas and results have been successfully used in theories of automata and languages from their very beginning. Besides that, the development of those two theories has been influenced by many other natural, humanistic and technical sciences, as well as their significant applications in other areas, first of all in information theory and Computer Science - in both of its components: hardware and software. The most important applications of languages and automata are in designing the architecture of digital computer systems and digital circuits, construction of systems for transmission, processing and storage information, formal description of the syntax of programming languages, lexical analysis in programming language compilation and user-interface translations, text editing, pattern matching, parallel processing, image generation and compression, coding theory, cryptography, etc. The latest investigations in theories of languages and automata have also motivation in biology, chemistry and medicine, and their results are successfully applied in modeling of certain objects and phenomena from these sciences. As a result of those tendencies new disciplines have appeared, such as Lindenmayer or L-systems, DNK-computing, cell-computing, cellular automata, etc. More information on development and contemporary trends in theories of languages and automata can be found in *Handbook of Formal Languages*, edited by Rozenberg and Salomaa ([1997a, 1997b, 1997c]) and Perrin's paper [1995b], as well as in other sources quoted in the list of references.

The book is an attempt to process in a new way the basics of theory of languages and automata. The innovation is in specific approach to this problematic which is mostly based on certain applying of exact algebraic methods, first of all semigroup theory methods.

The book contains eight chapters. In the first chapter algebraic notions, notations and results that are needed for successful reading of the rest of the book are given. The second chapter is devoted to the definition of the free semigroup and its equivalents, the notions of languages and grammars are introduced, their classification is given and basic properties of derivations in grammars are proved. Mealy's and Moore's automata as well as mappings realized by them and the problems of equivalence and minimization of those automata are studied in the third chapter. The forth chapter is devoted to automata without outputs, where special attention is paid to their transition semigroups, direct sum decompositions and to certain varieties, generalized varieties and pseudovarieties of automata. The fifth chapter deals with languages that can be recognized by finite automata and it is proved that the class of such languages coincides with the class of rational languages, as well as with the classes of languages recognizable by finite monoids or finite non-deterministic automata or those generated by regular grammars. Context-free languages and their recognition by push-down automata are considered in the sixth chapter. On the other hand, context-sensitive languages and their recognition by linear bounded automata, as well as languages that can be generated by grammars at all and their recognition by Turing machines, are investigated in the seventh chapter. Eventually, the eight chapter is devoted to some decidability problems in language theory.

The authors are very grateful to prof. dr Siniša Crvenković and prof. dr Predrag Stanimirović, who were referees for the book, for valuable suggestions that improved the quality of the book. We are also grateful to our students and members of Seminar for algebra who read this book during its manufacturing and whose discussions helped the authors. We express special thanks to our friends Miss Jelena Kovačević and Mr. Žarko Popović, who were waking over the manuscript of the book from its beginning. Eventually, we owe special gratitude to our families for being patient and tolerant and encouraging us to persist in writing the book.

University of Niš, 2000.

The authors

Contents

1 Algebraic fundamentals **5**

1.1. Sets, relations and mappings . . . 5
1.2. Orders, equivalences and graphs . . . 8
1.3. Algebras, subalgebras, homomorphisms and congruences . . . 15
1.4. Semigroups . . . 24
1.5. Subsemigroups and congruences . . . 33
1.6. Lattices and Boolean algebras . . . 38
1.7. Direct and subdirect products. Direct limits . . . 44
1.8. Identities and varieties . . . 49
1.9. Generalized varieties and pseudovarieties . . . 56
1.10. Regularity of varieties, generalized varieties and pseudovarieties . 60
1.11. Exercises . . . 67

2 Free semigroups. Languages and grammars **75**

2.1. Words. Definition of a free semigroup . . . 75
2.2. Equivalent definitions of a free semigroup . . . 77
2.3. Languages and grammars . . . 83
2.4. Compatibility of derivations . . . 87
2.5. Exercises . . . 90

3 Automata with output **93**

3.1. The notion of an automaton . . . 94
3.2. Presentation of automata . . . 97

3.3. Homomorphisms, congruences, subautomata and generating sets . . . 101
3.4. Mappings induced by automata . . . 105
3.5. Equivalent automata. Reduced automata . . . 114
3.6. Minimization of automata with output . . . 118
3.7. Moore-type automata . . . 121
3.8. Composition of automata . . . 128
3.9. Exercises . . . 131

4 Automata without outputs 133

4.1. Automata as unary algebras . . . 134
4.2. Relations of Nerode and Myhill . . . 137
4.3. Transition semigroup of an automaton . . . 141
4.4. Direct sums of automata . . . 145
4.5. Locally connected automata . . . 153
4.6. Localization of varieties, generalized varieties and pseudovarieties of automata . . . 158
4.7. Generalized directable automata . . . 165
4.8. Structural properties and transition semigroups of generalized directable automata . . . 175
4.9. Reversible states of automata . . . 187
4.10. Exercises . . . 193

5 Recognition of languages by automata 197

5.1. Minimal automaton of a language . . . 198
5.2. Minimization of automata without outputs . . . 204
5.3. Syntactic monoid of a language . . . 212
5.4. Recognition of languages by finite automata . . . 219
5.5. Nondeterministic automata . . . 225
5.6. Product of languages . . . 227
5.7. Generation of a subsemigroup and a submonoid by a language . 232
5.8. Rational languages. Regular expressions. Kleene Theorem . . . 237
5.9. Languages generated by regular grammars . . . 242
5.10. Exercises . . . 247

6 Context-free languages **253**

6.1. Context-free grammars 254
6.2. Elimination of e-productions and trivial productions 259
6.3. Grammars in Chomsky normal form 266
6.4. Tree of a derivation. Pumping lemma 272
6.5. Pushdown automata 277
6.6. Recognition of languages by pushdown automata 282
6.7. Context-free languages and pushdown automata 288
6.8. Exercises 289

7 Recognition of type 0 and type 1 languages **291**

7.1. Turing machines 292
7.2. Turing machines and type 0 languages 299
7.3. Linear-bounded automata 304
7.4. Exercises 310

8 Decidability in Theory of languages **313**

8.1. Computability and decidability. Church thesis 314
8.2. Recursive and recursive enumerable languages 316
8.3. Decidable and undecidable problems in Theory of languages 326
8.4. Exercises 332

Bibliography **335**

Preface **363**

Contents **367**

Index **371**

Indeks

$(A, \leq)$, 9
$(A, \preccurlyeq)$, 9
$(a, \alpha, i) \xrightarrow[A]{*} (b, \beta, j)$, 295
$(a, \alpha, i) \xrightarrow[A]{} (b, \beta, j)$, 294
$A \models \Sigma$, 50
A_θ, 139
$CL(\boldsymbol{K})$, 154
C_L, 316
$DW(A)$, 165
$E(S)$, 28
$G(\boldsymbol{K})$, 58
$G = (V, X, \pi)$, 83
$GDW(A)$, 167
$H.a$, 201
$H : \boldsymbol{K} \mapsto H(\boldsymbol{K})$, 19
$H \between K$, 147
$H \setminus K$, 5
$Ha^{-1},\ a^{-1}H$, 200
$L(G, \sigma)$, 83
$L(\boldsymbol{K})$, 153
$L^{(*)}$, 233
$L^{(+)}$, 233
$L_{ij}^{(k)}$, 237
$P(\boldsymbol{K})$, 44
P_H, R_H, L_H, 37
P_L, 213, 317
$P_f(\boldsymbol{K})$, 45
$P_s(\boldsymbol{K})$, 47
$Pow(\boldsymbol{K}$, 45
$Pv(\boldsymbol{K})$, 60
$R(A)$, 187
$R(\boldsymbol{K})$, 63
R_H, 200
$S : \boldsymbol{K} \mapsto S(\boldsymbol{K})$, 17
$S \mid T$, 214
$T(G, X)$, 158
$T(X)$, 21
$TDW(A)$, 166
$TW(A)$, 167
T_ω, 50
$ULDW(A)$, 166
$ULTDW(A)$, 167
X^*, 76
$X^*_@$, 138
X^+, 76
$X^+_@$, 138
Δ_H, Δ, 6
$\mathbf{D}$, 137
$\bigvee$, 10
$\bigwedge$, 10
$\mathrm{Cont}_L(u)$, 213
δ_θ, 139
$\overset{*}{\Rightarrow}_G$, 87
ε_K, 12
$\Rightarrow_G$, 87
$\mathrm{ind}\,\theta$, 219
ι_H, 8
$\langle H \rangle$, 17, 33
$\langle H]$, 34
$\langle H \rangle^*$, 34
$\mathbb{N}$, 5
$\mathbb{N}^0$, 5
$\boldsymbol{K}_1 \circ \boldsymbol{K}_2$, 21, 160
$\mathrm{Con}(A)$, 42
$\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$, 51
$\mathrm{Sub}(A)$, 42
∇_H, ∇, 6
$\phi : H \to K$, 7
π_i, 44
π_T, 207
$\theta^\natural$, 11

$\theta^\flat$, 44
$\theta^\flat$, $\theta^\flat_l$, $\theta^\flat_r$, 36
$\theta^\natural$, 21
$\theta^\flat_l$, 44
$\theta^\flat_r$, 44
$\underline{\boldsymbol{K}}$, 66
ϱ_B, 136
ϱ_I, 31
ξ^∞, 12
ξ^e, 12
ξ^∞, 43
ξ^c, 43
ξ^e, 43
$c(u)$, 76
d_u, 165
e, 76
$f(u)$, 77
$h(u)$, 77
$i(u)$, 77
$l(u)$, 77
$l_k(u)$, 77
$r(u)$, 77
$r_k(u)$, 77
$t(u)$, 77
$u \to v$, 83
$w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, 83, 87
$w \Rightarrow w'$, 83, 87
$\mathbf{2}_\tau$, 61
Conn, 154
Def, 166
$\mathbf{Def}_k$, 166
Dir, 165
$\mathbf{Dir}_u$, 165
GDef, 167
$\mathbf{GDef}_k$, 167
GDir, 167
$\mathbf{Gdir}_u$, 167
$\mathbf{LDir}_u$, 166
Nilp, 166
$\mathbf{Nilp}_k$, 166
O, 63
RDef, 167
$\mathbf{RDef}_k$, 167
$\mathbf{S}_\tau$, 61
TDir, 166
$\mathbf{TDir}_u$, 166
Trap, 167
$\mathbf{Trap}_u$, 167
ULDir, 166
$\mathcal{B}(H)$, 6
$\mathcal{PT}(H)$, 7
$\mathcal{P}(A)$, 226
$\mathcal{P}(S)$, 31
$\boldsymbol{K} \models \Sigma$, 50
$\mathrm{Id}(A)$, 158
$\mathrm{Id}(\boldsymbol{K})$, 158
$\mathrm{Id}_N(A)$, 158
$\mathrm{Id}_N(\boldsymbol{K})$, 158
$\mathrm{Id}_R(A)$, 158
$\mathrm{Id}_R(\boldsymbol{K})$, 158
Id_X, 50
$\mathrm{Id}_X(A)$, 50
$\mathrm{Id}_X(\boldsymbol{K})$, 50
Id_ω, 50
$\mathrm{Id}_\omega(A)$, 50
$\mathrm{Id}_\omega(\boldsymbol{K})$, 50
Id^R_ω, 61
$\mathrm{Id}^R_\omega(A)$, 61
$\mathrm{Id}^R_\omega(\boldsymbol{K})$, 61

alfabet, 75
  izlazni, 96
  pomoćni, 83
  terminalni, 83
  ulazni, 96
algebra, 16
  Booleova, 41
  direktno nerazloživa, 71
  konačno generisana, 18
  konačnog tipa, 17
  monogena, 18
  poddirektno nerazloživa, 71
  trivijalna (jednoelementna), 16
  unarna, 17
algoritam minimizacije, 119
anti-homomorfizam, 27
anti-izomorfizam, 27
arnost operacije, 16
asocijativni zakon, 17, 25
  uopšteni, 25

atom, 42
automat, 94
- k-definitan, 166
- k-nilpotentan, 166
- u-direktabilan, 165
- u-utrapljiv, 167
- bez izlaza, 95
- definitan, 166
- deterministički, 225
- direktabilan, 165
- donji, 110
- generisan skupom, 104
- gornji, 109
- inicijalni, 95
- jako povezan, 104, 157
- konačan, 95
- konačno generisan, 104
- linearno ograničeni, 304
  - deterministički, 304
  - nedeterministički, 305
- lokalno
  - k-definitan, 167
  - k-nilpotentan, 167
  - u-direktabilan, 166
  - jako povezan, 157
  - povezan, 154
  - trap-u-direktabilan, 167
  - trap-povezan, 155
- Mealyevog tipa, 94
- minimalni jezika, 200
- monogeni, 104
- Mooreovog tipa, 95
- Mooreovski redukovani, 126
- Myhillov, 139
- nedeterministički, 225
  - inicijalni, 226
  - konačan, 226
  - raspoznaje jezik, 226
- Nerodeov, 139
- nilpotentan, 166
- povezan, 154
- povezan inicijalni, 104
- raspoznaje jezik skupom, 198
- redukovan (prost), 116
- reset, 166
  - lokalno, 184
- reverzibilan, 187
- reverzno
  - k-definitan, 167
  - definitan, 167
- term, 158
- trap-u-direktabilan, 166
- trap-direktabilan, 166
- trap-povezan, 155
- uniformno lokalno
  - definitan, 167
  - direktabilan, 166
  - nilpotentan, 167
  - trap-direktabilan, 167
- uopšteno
  - k-definitan, 167
  - u-direktabilan, 167
  - definitan, 167
  - direktabilan, 167
- utrapljiv, 167

automati
- ekvivalentni, 114
- istog tipa, 102
- izomorfni, 103

automatovni identitet, 158
- neregularan, 158
- regularan, 158

automorfizam, 19

bijekcija, 8
Birkhoffova teorema, 51

Churchova teza, 315
čvor grafa, 13

deo reči
- desni, 77
- finalni, 77
- inicijalni, 77
- levi, 77

dijagonala, 6
direktan limit, 48
direktan proizvod, 44
- automata, 129
- konačan, 44

direktan stepen, 44

direktna familija algebri, 47
direktna suma, 145
direktna suma automata, 130
domen relacije, 6
dopisivanje, 27
Druga teorema o izomorfizmu, 21
dužina
izračunavanja, 294
izvođenja, 87
reči, 76
dužina operacije, 16
dual, 27

ekstenzija
automata, 136
retraktivna, 191
idealska, 32
ekvivalencija
direktno sumska, 145
generisana relacijom, 12, 43
glavna, 13
koja zasićuje skup, 12
element
maksimalan, 9
minimalan, 9
najmanji, 10
najveći, 10
endomorfizam, 19
epimorfizam, 18

faktor, 10
faktor-
algebra, 20
automat, 104
skup, 10
filter, 150
glavni, 150
kvazi-uređenog skupa, 39
mreže, 39
uređenog skupa, 39
kvazi-uređenog skupa, 39
mreže, 39
uređenog skupa, 39
usmerenog skupa identiteta, 64
funkcija, 7
izlaza, 94
izračunljiva, 314
karakteristična
parcijalna, 317
parcijalna, 7
prelaza, 94, 101
totalna, 7
Turing-izračunljiva, 315
znaka, 95

generatori, 33
glava reči, 77
graf, 13
označeni, 14
prelaza, 101
prelazno-izlazni, 98
gramatika, 83
desno-linearna, 84
kontekstno-nezavisna, 84
kontekstno-slobodna, 84
kontekstno-zavisna, 84
linearno ograničena, 306
racionalna, 84
regularna, 84, 242
tipa 1, 84
tipa 2, 84
tipa 3, 84
grana grafa, 13
granica skupa
donja, 10
gornja, 10
najmanja, 10
najveća, 10
grupoid, 17, 24

homomorfizam, 18
automata, 102
inicijalnih automata, 103
Mooreovog automata, 125
prirodni, 21
projekcijski, 44
sintaksički, 213
homomorfna slika
automata, 102

i-ta

koordinata, 6
projekcija, 6
ideal, 31
dualni
mreže, 39
uređenog skupa, 39
glavni
kvazi-uređenog skupa, 39
mreže, 39
uređenog skupa, 39
kvazi-uređenog skupa, 39
levi (desni), 31
mreže, 39
uređenog skupa, 39
idempotent, 28
identitet, 50
lokalno zadovoljen, 158
neregularan, 61
regularan, 61
zadovoljen na algebri, 50
indeks relacije, 219
infiks, 77
pravi, 77
infimum, 10
injekcija, 8
izomorfizam, 9, 19
algebri, 19
automata, 102
dualni, 9
uređajni, 9
dualni, 9
izračunavanje
u potisnom automatu, 281
u Turingovoj mašini, 294
izvođenje, 83, 87
neposredno, 83, 87

jedinica, 29
leva (desna), 29
mreže, 40
jezgro
homomorfizma, 21
preslikavanja, 11
jezgro automata, 190
jezik, 83
elementaran, 239
generisan gramatikom, 83
kontekstno-nezavisan, 84
kontekstno-zavisan, 84
predstavljen regularnim
izrazom, 241
racionalan, 239
raspoznatljiv, 219
regularan, 84, 242
rekurzivan, 317
rekurzivno nabrojiv, 317
tipa 0, 83
tipa 1, 84
tipa 2, 84
tipa 3, 84

karakteristična funkcija
jezika, 316
problema, 315
klasa, 5
ekvivalencije, 10
klasa algebri, 17
algebarska, 19
definisana skupom identiteta, 50
ultimativno definisana
nizom identiteta, 56
usmerenim skupom
identiteta, 56
zatvorena
za direktne proizvode, 45
za direktne stepene, 45
za homomorfne slike, 19
za konačne direktne
proizvode, 45
za podalgebre, 17
za poddirektne proizvode, 47
komplement, 40
konfiguracija Turingove mašine, 293
kongruencija, 19, 36
generisana relacijom, 43
glavna, 37, 208, 213
glavna desna, 37, 200
glavna leva, 37
leva (desna), 36
na automatu, 103

na Mooreovom automatu, 125
sintaksička, 213
K-kongruencija, 51
konkatenacija, 27
kontekst reči, 213
korak izračunavanja
u potisnom automatu, 281
u Turingovoj mašini, 294
korak izvođenja, 87
kvazi-uređenje, 8
generisano relacijom, 43

lanac, 9, 28
Lema o napumpavanju, 223
lokalizacija klase, 153

Maljcevljev proizvod, 21
klasa automata, 160
međustanje, 96
metod kompozicije (slaganja), 128
minimizacija automata, 118, 204
monoid, 29
deli, 214
izlazni, 96
prelaza, 142
sintaksički, 213
slobodan, 76
ulazni, 96
monomorfizam, 18
mreža, 38
potpuna (kompletna), 41
atomična, 42
atomistična, 42

nil-polugrupa, 33
nula, 29
bi-nula, 29
leva (desna), 29
mreže, 40

odsečak, 77
desni, 77
dužine k, 77
levi, 77
dužine k, 77
pravi, 77
pravi desni, 77
pravi levi, 77
operacija
n-arna, 16
binarna, 16
dopisivanja, 76
iteracija, 233
konkatenacije, 76
nularna, 16
plus, 233
spajanje, 76
unarna, 16
zvezda (Kleenea), 233
operacije
Booleove, 227
operator
lokalizacije, 153
potpune lokalizacije, 154
otvorenje
kongruencijsko, 44
levo (desno) kongruencijsko, 44
označavanje, 28
desno, 7
levo, 28

paralelna kompozicija, 137
particija, 11
permutabilne kongruencije, 71
petlja, 13
podalgebra, 17
generisana skupom, 17
podautomat, 102, 135
dualni
pravi, 135
generisan skupom, 104
inicijalni, 102
pravi, 102, 135
poddirektan proizvod, 45
poddirektan stepen, 45
podmonoid, 34
podpolugrupa, 33
podreč, 77
prava, 77
podskup
automata, 102

disjunktivni, 215
kvazi-uređenog skupa
kofinalan, 64
skupa identiteta
neregularan, 62
regularan, 62
usmerenog skupa identiteta
kofinalan, 64
zatvoren za prelaze, 102
polu-kongruencija, 43
generisana relacijom, 43
polugrupa, 17, 25
aditivna, 30
anti-komutativna, 28
dualna, 27
izlazna, 96
kancelativna, 30
komutativna, 28
levo (desno) kancelativna, 30
multiplikativna, 30
nilpotentna, 33
parcijalna, 30
partitivna, 31
prelaza, 142
preslikavanja, 28
ravnodeljiva, 80
slobodna, 76
ulazna, 96
polumreža
dvoelementna, 61
potapanje, 18
povratni proizvod, 71
pravila gramatike, 83
predikat, 314
prefiks, 77
pravi, 77
preslikavanje, 7
antitono, 9
automatovno, 105
bijektivno (obostrano jednoznačno), 8
identičko, 8
indukovano automatom, 105
indukovano stanjem, 105
injektivno (jedan-jedan), 8
inverzno, 8
izotono, 9
opadajuće, 9
parcijalno, 6
prirodno, 11
rastuće, 9
sirjektivno (na), 8
prirodno proširenje nedeterminističkog automata, 226
proširenje
jedinično, 29
nulto, 30, 31
preslikavanja, 7
problem, 314
neodlučiv, 314
odlučiv, 314
proizvod
Descartesov, 5
relacija, 6
proizvod jezika, 228
promenljiva, 21
pseudovarijetet, 58
generisan klasom, 60
regularan, 64

rang relacije, 6
raspoznavanje jezika
automatom, 198
monoidom, 212
nedeterminističkim automatom, 227
nedeterminističkom Turingovom mašinom, 297
Turingovom mašinom, 296
razbijanje, 11
razlomak
desni skupa, 200
levi skupa, 200
podskupa automata, 204
reč, 75
dualna, 77
izlazna, 96
izvodljiva, 83, 87
neposredno izvodljiva, 87
neposredno izvodljiva, 83

prazna, 76
trap-usmeravajuća, 166
ulazna, 96
uniformno lokalno
trap-usmeravajuća, 167
usmeravajuća, 166
uopšteno usmeravajuća, 167
usmeravajuća, 165
utrapljujuća, 167
rečnik, 83
red
gramatike, 306
Reesov faktor-automat, 136
Reesova faktor-polugrupa, 32
Reesova kongruencija
ideala, 32
podautomata, 136
regularan izraz, 240
regularizacija varijeteta, 64
relacija
anti-simetrična, 8
ekvivalencije, 9
identička, 6
inverzna, 6
između skupova, 6
izvođenja, 87
jednakosti, 6
kompatibilna, 19
konačnog indeksa, 219
na skupu, 6
neposrednog izvodjenja, 87
poretka (uređenje), 9
pozitivna, 136
puna, 6
refleksivna, 8
saglasna, 19
levo (desno), 36
simetrična, 8
stabilna, 36, 88
tranzitivna, 8
univerzalna, 6
rep reči, 77
restrikcija preslikavanja, 7
retrakcija, 191
reverzibilni deo, 187
sadržaj reči, 76
saržaj
terma, 23
simbol
konstante, 16
operacijski, 16
pomćni, 83
sirjekcija, 8
skup
(parcijalno) uređen, 9
generatorni, 33, 104
generatorni algebre, 18
izlaza, 94
kvazi-uređen, 9
usmeren, 9
stanja, 94
ulaza, 94
uređen
linearno, 9
usmeren, 9
slika
homomorfna, 19
inverzna homomorfna, 19
slika podskupa, 7
inverzna, 7
slovo, 75
stablo, 14
binarno, 15
obeleženo, 15
potpuno, 15
stablo automata, 104
stanja
ekvivalentna, 114
stanje
automatovnog preslikavanja, 107
početno (inicijalno), 95
reverzibilno, 187
stanje automata
finalno, 198
terminalno, 198
završno, 198
stepen
definitnosti, 166
Descartesov, 6
nilpotentnosti, 166

sufiks, 77
    pravi, 77
sumand, 146
superpozicija automata, 129
supremum, 10

tablica
    prelaza, 100
    prelazno-izlazna, 97
τ-polumreža, 61
Teorema
    o homomorfizmu
        algebri, 20
        automata, 104
    o korespondenciji, 46
term, 21
    n-arni, 23
    tipa X, 158
term algebra, 22
term operacija, 24
tip algebre, 16
tip algebri
    konačan, 17
traka, 28
    levo (desno) nulta, 29
    pravougaona, 29
tranzitivni sistem homomorfizama, 47
Turingova mašina, 292
    deterministička, 293, 297
    nedeterministička, 297
        raspoznaje jezik, 297

uopšteni varijetet, 56
    generisan klasom, 58
    neregularan, 64
    regularan, 64
uređenje
    linearno, 9
uređenje (parcijalno), 8
usmerena familija skupova, 56
usmerena unija, 56

varijetet, 51
    generisan klasom, 54
    neregularan, 62
    regularan, 62
        generisan klasom, 64
    trivijalnih algebri, 63
veza
    paralelna, 129
    serijska, 129
vrat, 165

zatvorenje
    ekvivalencijsko, 43
    kongruencijsko, 43
    refleksivno-tranzitivno, 43
    saglasno, 43
    tranzitivno, 12, 43