Polugrupe

Stojan M. Bogdanović
Miroslav D. Ćirić

POLUGRUPE

Stojan M. Bogdanović i Miroslav D. Ćirić

Univerzitet u Nišu

PROSVETA, NIŠ

Dr Stojan M. Bogdanović
redovni profesor Univerziteta u Nišu
Dr Miroslav D. Ćirić
docent Univerziteta u Nišu

POLUGRUPE
prvo izdanje, 1993.

urednik
Dobrivoje Jevtić

recenzent
Dr Siniša Crvenković
redovni profesor Univerziteta u Novom Sadu

izdavač
Prosveta, Niš

za izdavača
Božidar Marković, direktor

štampa
Prosveta, Niš

Tiraž: 1 000 primeraka

ISBN 86–7455–120–3

IN MEMORIAM

Miodrag S. Bogdanović

1967–1992

Predgovor

Ova knjiga je zamišljena kao viši kurs iz Teorije polugrupa i namenjena je prvenstveno specijalistima za ovu oblast i onima koji nameravaju da to postanu. Ona, svakako, može korisno poslužiti i onima iz drugih oblasti koji koriste rezultate ove teorije.

Veći deo sadržaja ove knjige, deo je predavanja koja su autori držali na Seminaru za teoriju polugrupa u Nišu, koji radi u organizaciji Matematičkog instituta SANU. Takodje, deo materijala je izlagan i na brojnim medjunarodnim konferencijama.

Teorija polugrupa je aktuelna oblast matematike. Nastala je uopštavanjem nekih drugih matematičkih teorija, u prvom redu Teorije grupa i Teorije prstena. Sa druge strane, ova teorija je izgradila sopstvene metode i razvija se prvenstveno kao algebarska apstrakcija slaganja relacija (preslikavanja) i spajanja reči. Kao takva, ona ima značajnu primenu u mnogim oblastima matematike. Rezultati Teorije polugrupa primenjuju se u Topologiji, Funkcionalnoj analizi, Diferencijalnoj geometriji, Teoriji diferencijalnih jednačina itd. Poseban je značaj Teorije polugrupa za Algebre računarskih jezika i Algebarsku teoriju automata.

Početkom proučavanja polugrupa smatra se rad A.K.Suškeviča iz 1928. godine. Teorija polugrupa se poslednjih decenija intenzivno razvija, o čemu svedoči veći broj monografija koje pokrivaju razne njene oblasti i koje su, svaka na svoj način, usmeravale i inicirale istraživanja. Istaknimo autore nekih od njih: E.S.Ljapin (1960), A.H.Clifford i G.B.Preston (1961,1967), M.Petrich (1973, 1977, 1984), J.M.Howie (1976), G.Lallement (1979) i drugi. Od ogromonog značaja za razvoj ove teorije je i specijalizovani časopis *Semigroup Forum.*

Teme koje će se obradjivati u ovoj knjizi deo su Opšte teorije polugrupa. Osnovni zadatak Opšte teorije polugrupa je izučavanje strukture polugrupa. Medju metodama za to najpoznatije su razlaganja i slaganja. Metoda razlaganja počiva na razbijanju polugrupe, opisivanju strukture svake od komponenti i ustanovljavanju veza izmedju njih. Metoda slaganja je obrnuta, i sastoji se od konstrukcije polugrupe željenih osobina iz unapred datih komponenti. Najčešći tipovi razlaganja i slaganja su tračna razlaganja i slaganja i idealske ekstenzije. Kod slaganja, jedno od najefikasnijih sredstava su homomofizmi.

Centralno mesto u ovoj knjizi zauzima Teorija polumrežnih razlaganja. Poseban doprinos razvoju ove teorije dao je T.Tamura, zatim M.Petrich, M.S.Putcha, L.N.Ševrin i autori ove knjige. Jedan deo Teorije polumrežnih razlaganja je izložen u monografiji M.Petricha iz 1973. godine. Ovde će ova teorija, sobzirom na rezultate nastale u medjuvremenu, biti izložena potpunije, novim metodama koje objedinjuju ranije rezultate iz ove oblasti.

Drugo važno pitanje koje tretira ova knjiga jesu razlaganja polugrupa sa nulom. Zbog specifičnosti svoje strukture, polugrupe sa nulom zahtevaju i posebne tipove razlaganja. Teorija razlaganja polugrupa sa nulom, izložena u ovoj knjizi, zasniva se na razlaganjima u desnu sumu polugrupa i na ortogonalnim razlaganjima.

Kao treće važno pitanje ove knjige izdvajamo tračna slaganja polugrupa. Značajniji doprinos razvoju ove teorije dali su A.H.Clifford, M.Petrich, M.Yamada, B.M.Schein i autori ove knjige.

U Glavi 1. izlažu se osnovni pojmovi i rezulatati Teorije polugrupa koji se koriste u daljem tekstu. U Glavi 2. daju se, uglavnom opšta, svojstva π-regularnih i potpuno π-regularnih polugrupa. Razna razlaganja ovih polugrupa sistematski će biti obradjivana tokom ove knjige. Strukturom (0)-Arhimedovih polugrupa bavićemo se u Glavi 3. Glava 4. biće posvećena polugrupama sa potpuno prostim jezgrom. U Glavi 5. izlaže se Teorija polumrežnih razlaganja. Biće reči o najvećem polumrežnom razlaganju i o raznim njegovim tipovima. Glava 6. je prirodan nastavak prethodne glave. U njoj će biti izložena Teorija polumrežnih razlaganja (potpuno) π-regularnih polugrupa na potpuno Arhimedove komponente. Sadržaj Glave 7. čine rezultati o nil-ekstenzijama unija grupa, posebno o retraktivnim. U Glavi 8. obradjuju se najveća razlaganja polugrupe sa nulom u desnu sumu i ortogonalnu sumu. Dobijeni rezultati primenjuju se na razne posebne slučajeve, kao i na mreže ideala polugrupe sa nulom. Glava 9. bavi se tračnim slaganjima polugrupa. Prave se konstrukcije pomoću sistema homomorfizama i daju njihove veze sa poddirektnim proizvodima, posebno sa kičmenim proizvodima.

Koristimo priliku da se zahvalimo našem učitelju, profesoru dr. Svetozaru Miliću, za savete koji su ugradjeni u ovaj rukopis. Zahvaljujemo se i svim učesnicima Seminara za teoriju polugrupa u Nišu, čije su diskusije, pitanja i predlozi doprineli da ovaj rukopis bude bolji. Posebna zahvalnost za ogromno strpljenje i stalnu podršku tokom pisanja ove knjige pripada gospodjama Gordani Bogdanović i Vesni Randjelović-Ćirić. Autori duguju zahvalnost i svom velikom prijatelju gospodinu Božidaru Markoviću, čije razumevanje za izdavačke muke naučnika ni ovaj put nije izostalo, bez čijeg velikog truda ovaj rukopis još ne bi bio dostupan javnosti.

Autori

Avgusta 1993, Univezitet u Nišu.

Sadržaj

GLAVA 1

Uvod

U ovoj glavi su izloženi osnovni pojmovi i rezulatati Teorije polugrupa koji će biti korišćeni u glavnom delu ove knjige. Takodje, dati su i neki pojmovi iz Opšte teorije mreža i Booleovih algebri. Za dodatne informacije čitaoca upućujemo na specijalizovane monografije iz ovih oblasti.

1.1. Definicija polugrupe.

Neka je S neprazan skup. Preslikavanje $\circ$ Dekartovog proizvoda $S \times S$ u skup S, koje svakom uredjenom paru (a, b) elemenata iz S pridružuje jedan element iz S, označen sa $a \circ b$, nazivamo (*binarna*) *operacija* na skupu S, ili (binarna) operacija skupa S. Uredjen par $(S, \circ)$ nazivamo *grupoid*.

Operacija $\circ$ grupoida $(S, \circ)$ je *asocijativna* ako je $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, za sve $a, b, c \in S$. U tom slučaju, par $(S, \circ)$ je *polugrupa*.

Radi jednostavnijeg pisanja, uvodimo sledeći dogovor: Operaciju grupoida označavamo sa "$\cdot$", i nazivamo je *množenje* ili *proizvod*, i element $a \cdot b$ nazivamo *proizvod elemenata* a *i* b. Bez opasnosti od zabune, par $(S, \cdot)$ označavamo kraće sa S, pa umesto "*grupoid* $(S, \cdot)$", govorimo kraće "*grupoid* S". Kao zamenu za izraz "$a \cdot b$" koristimo izraz "ab". U slučajevima kada koristimo neke druge simbole za označavanje operacija, to će biti posebno naznačeno.

Ustanoviti da li je operacija grupoida asocijativna često nije jednostavno. A.H.Clifford i G.B.Preston u svojoj knjizi "*The algebraic theory of semigroups* I" navode Lightov test za asocijativnost konačnih grupoida. On se sastoji u sledećem: Neka je $(S, \cdot)$ grupoid. Definišimo na S dve nove operacije $*$ i $\circ$ sa:

$$x * y = x \cdot (a \cdot y), \quad x \circ y = (x \cdot a) \cdot y, \qquad (x, y \in S),$$

gde je $a \in S$ fiksirani element. Jasno je da na S važi asocijativni zakon ako i samo ako su operacije $*$ i $\circ$ jednake za svaki $a \in S$.

Oslikajmo ovaj postupak na jednom primeru. Neka je $(S, \cdot)$ grupoid dat tablicom:

	α	β
α	α	α
β	β	α

Tada za $a = \alpha$ proizvod $a \cdot y$ je u prvoj vrsti $(\alpha\alpha)$, i za $a = \beta$ proizvod $a \cdot y$ je u drugoj vrsti $(\beta\alpha)$.

Proširimo sada datu tablicu na desno najpre pomoću prve, a potom pomoću druge vrste, i izvršimo sva množenja pomoću elemenata iz S. Na taj način dobijamo operaciju $*$ za oba elementa grupoida S. Slično, proširimo tablicu na dole pomoću kolona iz S. Tako dobijamo operaciju $\circ$ za sve elemente iz S.

$\cdot$	α	β	α	α	β	α
α	α	α	α	α	α	α
β	β	α	β	$\boxed{\beta}$	α	β
α	α	α				
β	β	$\boxed{\alpha}$				
α	α	α				
α	α	α				

Sada nije teško videti da se za $a = \alpha$ tablice za $*$ i $\circ$ ne poklapaju, jer je

$$\beta * \beta = \beta \cdot (\alpha \cdot \beta) = \beta \cdot \alpha = \beta, \quad \beta \circ \beta = (\beta \cdot \alpha) \cdot \beta = \beta \cdot \beta = \alpha \ ,$$

što se vidi u proširenoj tablici. Dakle, gornjom tablicom nije definisana polugrupa.

Sa $\mathbf{Z}^+$ ćemo označavati skup svih pozitivnih celih brojeva.

Teorema 1.1. *Svaka polugrupa S zadovoljava uopšteni asocijativni zakon, tj. za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, proizvod n elemenata iz S ne zavisi od rasporeda zagrada.*

Dokaz. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, i neka je

$$a_1 a_2 \cdots a_n = a_1(a_2(a_3 \cdots (a_{n-1}a_n) \dots)).$$

Tvrdjenje teoreme neposredno sledi za $n = 1$ i $n = 2$. Ono je, takodje, tačno za $n = 3$, jer po pretpostavci, S jeste polugrupa.

Uzmimo da je $n > 3$ i da tvrdjenje teoreme važi za svaki $r < n$. Uzmimo da je u element iz S jednak proizvodu elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$, sa proizvoljnim razmeštajem zagrada. Tada se u može zapisati u obliku $u = vw$, gde je v proizvod elemenata $a_1, a_2, \dots, a_r$ i w je proizvod elemenata $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$, (sa nekim razmeštajima zagrada), gde je $1 \leq r < n$. Indukcijom dobijamo da je $v = a_1 a_2 \cdots a_r$ i $w = a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n$, i

$$\begin{aligned} u = vw &= (a_1 a_2 \cdots a_r)(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) = (a_1(a_2 \cdots a_r))(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1((a_2 \cdots a_r)(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n)) = a_1(a_2 \cdots a_r a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

za $r > 1$, i $u = vw = a_1(a_2 \cdots a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$, za $r = 1$. Ovim je dokazano tvrdjenje teoreme. $\square$

Drugim rečima, *uopšteni asocijativni zakon* tvrdi da proizvod n elemenata polugrupe ne zavisi od redosleda kojim ćemo taj proizvod izračunavati, već zavisi samo od redosleda (posmatrano sleva na desno) kojim se ti elementi javljaju u tom proizvodu. Uzimajući u obzir Teoremu 1.1, u polugrupi S možemo izostaviti sve zagrade u proizvodima elemenata iz S, pa ćemo proizvod elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ (tim redosledom) označavati prosto sa $a_1 a_2 \cdots a_n$, $(n \in \mathbf{Z}^+)$. Ako je $a_i = a$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tada proizvod $a_1 a_2 \cdots a_n$ označavamo sa a^n, i nazivamo ga *n-ti stepen* elementa $a \in S$. Ako je A neprazan podskup polugrupe S, skup $\sqrt{A} = \{x \in S \mid (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ x^n \in A\}$ nazivamo *radikal* skupa A.

Neka je S polugrupa. Elementi $a, b \in S$ *komutiraju* ako je $ab = ba$. Ako je A neprazan podskup polugrupe S, tada sa $C(A)$ označavamo skup svih elemenata iz S koji komutiraju sa svakim elementom iz A. Skup $C(S)$ nazivamo *centar* polugrupe S a njegove elemente *centralni elementi*. Polugrupa S je *komutativna* ako svaka dva njena elementa komutiraju. Polugrupa S je *anti-komutativna* ako za $a, b \in S$, iz $ab = ba$ sledi $a = b$.

Ako je S proizvoljna polugrupa, tada na skupu S možemo definisati još jednu operaciju $*$ sa: $a * b = ba$. Skup S sa tako definisanom operacijom je polugrupa, koju nazivamo *dualna polugrupa* polugrupe S, u oznaci $\overleftarrow{S}$. Polugrupa ne mora biti komutativna, tj. vrednost proizvoda zavisi od redosleda elemenata koji se u njemu javljaju, i kao posledica toga u izrazima koji se odnose na polugrupe, njihove podskupove ili elemente se često javljaju odrednice "levi" i "desni". *Dual* izraza koji se odnosi na polugrupu, njene podskupove ili njene elemente je izraz koji dobijamo zamenom svake od odrednica "levi" sa "desni" i obratno, i zamenom svakog proizvoda ab sa ba. Ako neko tvrdjenje A povlači tvrdjenje B, tada dual od A povlači dual od B. Zbog toga, ako je B neko tvrdjenje koje smo dokazali i ako je C njegov dual, tada C često koristimo ravnopravno sa B, iako ga ne dokazujemo.

Element a polugrupe S je *idempotent* (*idempotentan*) ako je $a^2 = a$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$. Polugrupa čiji svi elementi su idempotenti je *traka*. Komutativnu traku nazivamo *polumreža*. Polumreža S je *lanac* ako za sve $a, b \in S$ je $ab = a$ ili $ab = b$.

Neka je S polugrupa i neka je $a \in S$. Element $e \in S$ je *leva* (*desna*) *jedinica elementa* a ako je $ea = a$ ($ae = a$), i e je *jedinica elementa* a ako je $ae = ea = a$. Ako je $e \in S$ jedinica (leva jedinica, desna jedinica) za sve elemente iz S, tada je e *jedinica* (*leva jedinica, desna jedinica*) *polugrupe*

S. Prema definicji, svaka (leva, desna) jedinica polugrupe je idempotent. Neposredno se proverava da polugrupa može imati najviše jednu jedinicu. Polugrupu koja ima jedinicu nazivamo *polugrupa sa jedinicom* ili *monoid*.

Neka je S polugrupa i neka je e element koji nije sadržan u S. Na skupu $S \cup \{e\}$ dodefinišimo množenje sa: $ae = ea = a$, $(a \in S)$, $ee = e$ (proizvod elemenata iz S ostaje isti). Tada $S \cup \{e\}$ sa tako definisanim množenjem jeste polugrupa sa jedinicom e, i nazivamo je *jedinično proširenje* polugrupe S pomoću elementa e. Ako je S polugrupa, tada sa S^1 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način: ako S ima jedinicu, tada je $S^1 = S$, a ako S nema jedinicu, tada S^1 jeste jedinično proširenje od S pomoću elementa 1. Jedinicu polugrupe najčešće označavamo simbolom e ili 1. Koristeći jedinično proširenje polugrupe, proširujemo i definiciju stepena u polugrupi: ako je S polugrupa i a je element iz S, tada je a^0 jedinica monoida S^1.

Neka je S polugrupa i neka je $z \in S$. Element z je *leva* (*desna*) *nula* od S ako je $za = z$ ($az = z$), i z je *nula* od S ako z jeste leva i desna nula od S. Svaka (leva, desna) nula polugrupe je idempotent. Prema tome, polugrupa u kojoj je svaki element leva (desna) nula je traka, koju nazivamo *levo* (*desno*) *nulta traka*. Drugim rečima, polugrupa S je levo (desno) nulta traka ako je $ab = a$ ($ab = b$), za sve $a, b \in S$. Neposredno se proverava da polugrupa može imati najviše jednu nulu. Polugrupu koja ima nulu nazivamo *polugrupa sa nulom*.

Ako je S polugrupa i ako je z element koji nije sadržan u S, na skupu $S \cup \{z\}$ dodefinišemo množenje sa: $az = za = z$, $(a \in S)$, $zz = z$ (proizvodi elemenata iz S ostaju isti), i tada $S \cup \{z\}$ jeste polugrupa sa nulom z, koju nazivamo *nulto proširenje* od S *pomoću elementa* z. Ako je S polugrupa, tada sa S^0 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način: ako S ima nulu, tada je $S^0 = S$, a ako S nema nulu, tada S^0 jeste nulto proširenje od S pomoću elementa 0. Nulu polugrupe obično označavamo simbolom 0, i često izraz "$\{0\}$" zamenjujemo izrazom "0". U skladu sa prethodnim oznakama, sa $S = S^0$ označavamo da je S polugrupa sa nulom 0. Ako je $S = S^0$ i $A \subseteq S$, tada koristimo oznake: $A^0 = A \cup 0$, $A^\bullet = A - 0$. Ako je $S = S^0$, element $a \in S^\bullet$ je *delitelj nule* ako postoji $b \in S^\bullet$ tako da je $ab = 0$ ili $ba = 0$. Polugrupu $S = S^0$ koja nema delitelja nule, tj. kod koje je $S^\bullet$ podpolugrupa, nazivamo *polugrupa bez delitelja nule*.

Parcijalna (*binarna*) *operacija* nepraznog skupa S je preslikavanje nepraznog podskupa skupa $S \times S$ u S. Neprazan skup snabdeven parcijalnom operacijom nazivamo *parcijalni grupoid*. Ako je S parcijalni grupoid sa parcijalnom operacijom "$\cdot$", i za proizvoljne $x, y, z \in S$, proizvod $x \cdot (y \cdot z)$ je definisan ako i samo ako je definisan proizvod $(x \cdot y) \cdot z$, i pri tome su ti proizvodi jednaki, tada je S *parcijalna polugrupa*. Jasno je da svaki podskup polugrupe jeste parcijalna polugrupa. Sa druge strane, ako je Q parcijalna polugrupa, i ako je 0 element koji nije sadržan u Q, tada $Q \cup \{0\}$ sa operacijom "$\cdot$" definisanom sa:

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{ako su } x, y, xy \in Q \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

gde je xy proizvod u Q, jeste polugrupa koju označavamo sa Q^0, i nazivamo *nulto proširenje parcijalne polugrupe* Q.

Ako je X neprazan skup, tada sa $\mathcal{P}(X)$ označavamo *partitivni skup* skupa X, tj. skup svih podskupova skupa X. Neka je S polugrupa. Na partitivnom skupu polugrupe S definišimo množenje sa:

$$AB = \{x \in S \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\ x = ab\}, \qquad (\,A, B \in \mathcal{P}(S)\,).$$

Tada u odnosu na ovu operaciju $\mathcal{P}(S)$ jeste polugrupa koju nazivamo *partitivna polugrupa* polugrupe S. Jasno je da je $\mathcal{P}(S)$ polugrupa sa nulom $\varnothing$ (prazan skup), bez delitelja nule. Definicije i oznake koje smo uveli za množenje elemenata polugrupe S, koristićemo i za množenje elemenata polugrupe $\mathcal{P}(S)$. Za element a polugrupe S, u proizvodima podskupova od S, često izraz "$\{a\}$" zamenjujemo izrazom "a".

Neprazan podskup polugrupe S je *podpolugrupa* od S ako je T *zatvoren za operaciju* polugrupe S, tj. ako je $ab \in T$, za sve $a, b \in T$. Ako je T podpolugrupa polugrupe S, tada kažemo i da je S *nadpolugrupa* od S. Neposredno se proverava da presek proizvoljne familije podpolugrupa polugrupe S, ukoliko je neprazan, jeste takodje podpolugrupa od S. Prema tome, ako je A neprazan podskup od S, tada presek svih podpolugrupa od S koje sadrže A jeste podpolugrupa od S, koju označavamo sa $\langle A\rangle$ i nazivamo je podpolugrupa od S *generisana skupom* A. Polugrupa $\langle A\rangle$ je, u odnosu na skupovnu inkluziju, najmanja podpolugrupa od S koja sadrži A. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tada pišemo $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ umesto $\langle\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\rangle$, i kažemo da je $\langle A\rangle$ *generisana elementima* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Podpolugrupu $\langle a\rangle$ polugrupe S generisanu jednoelementnim podskupom $\{a\}$ od S nazivamo *monogena* ili *ciklična* podpolugrupa od S. Ako je A podskup polugrupe S takav da je $\langle A\rangle = S$, tada kažemo da A *generiše polugrupu* S i da je A *generatorni skup* polugrupe S. Elemente iz A nazivamo *generatorni elementi* ili *generatori* od S. Polugrupu generisanu svojim jednoelementnim podskupom nazivamo *monogena* ili *ciklična* polugrupa. Dokaz sledećeg tvrdjenja je elementaran, pa ga izostavljamo:

Propozicija 1.1. *Neka je A neprazan podskup polugrupe S. Tada je $\langle A\rangle = \cup_{n\in\mathbf{Z}^+} A^n$.* $\square$

Neka je A neprazan podskup polugrupe S. Element $a \in S$ *ima razlaganje u proizvod elemenata iz* A ako postoje $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tako da je $a = a_1 a_2 \cdots a_n$. Prema Propoziciji 1.1, A je generatorni skup polugrupe S ako i samo ako svaki element iz S ima ralaganje u proizvod elemenata iz A. Element $a \in S$ ima *jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz* A ako iz $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ i $a = b_1 b_2 \cdots b_m$, $a_i, b_j \in A$, sledi da je $n = m$ i $a_i = b_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Zadaci.

1. Ako je e leva jedinica (leva nula) i f je desna jedinica (desna nula) polugrupe S, tada je $e = f$ i e je jedinica (nula) polugrupe S.
2. Dokazati da podpolugrupa monogene polugrupe ne mora biti monogena.
3. Polugrupa S je levo nulta traka ako i samo ako njena dualna polugrupa jeste desno nulta traka.
4. Navesti primer (konačne) polugrupe u kojoj idempotenti ne čine podpolugrupu.
5. Navesti primere polugrupa sa nulom, sa i bez delitelja nule.

1.2. Polugrupe relacija i preslikavanja.

Neka je A neprazan skup. Svaki podskup Dekartovog proizvoda $A \times A$ (uključujući i prazan) nazivamo (*binarna*) *relacija skupa* A, ili (*binarna*) *relacija na* A. Skup $\epsilon_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ nazivamo *identička relacija* (*dijagonala* ili *jednakost*) skupa A. Skup $\omega_A = A \times A$ nazivamo *univerzalna* (*puna*) *relacija* skupa A. Ukoliko se zna na koji se skup misli, identičku i univerzalnu relacuju tog skupa označavamo kraće sa ϵ i ω, tim redom. Prazan podskup od $A \times A$ nazivamo *prazna relacija* skupa A. Ako je ξ relacija skupa A, i ako je $(a, b) \in \xi$, tada kažemo da su a i b *u relaciji* ξ, i često izraz "$(a, b) \in \xi$" zamenjujemo sa "$a \, \xi \, b$".

Neka je A neprazan skup i neka je $\mathcal{B}(A)$ skup svih binarnih relacija na A. Za $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(A)$, *proizvod relacija* α i β je relacija $\alpha\beta$ na A definisana sa:

$$\alpha\beta = \{(a, b) \in A \times A \mid (\exists x \in A) \; (a, x) \in \alpha, \; (x, b) \in \beta\}.$$

Skup $\mathcal{B}(A)$ sa ovako definisanim množenjem je polugrupa koju nazivamo *polugrupa* (*binarnih*) *relacija* skupa A. Za $n \in \mathbf{Z}^+$, sa ξ^n označavamo n-ti stepen relacije ξ skupa A u polugrupi $\mathcal{B}(A)$.

Neka je A neprazan skup i neka je $\xi \in \mathcal{B}(A)$. Skup $\mathrm{dom}\xi = \{a \in A \mid (\exists b \in A) \, a \, \xi \, b\}$ nazivamo *domen relacije* ξ. Skup $\mathrm{ran}\xi = \{b \in A \mid (\exists a \in A) \; a \, \xi \, b\}$ nazivamo *rang relacije* ξ. Za $a \in A$, $a\xi = \{x \in A \mid a \, \xi \, x\}$, $\xi a = \{x \in A \mid x \, \xi \, a\}$, i za $X \subseteq A$, $X\xi = \cup\{a\xi \mid a \in X\}$, $\xi X = \cup\{\xi a \mid a \in X\}$. Relaciju $\xi^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \mid b \, \xi \, a\}$ nazivamo *inverzna relacija* relacije ξ. Jasno je da je $\mathrm{dom}(\xi^{-1}) = \mathrm{ran}\xi$, $\mathrm{ran}(\xi^{-1}) = \mathrm{dom}\xi$. Relaciju $\{(a,b) \in A \times A \mid (a,b) \notin \xi\}$ nazivamo *suprotna relacija relacije* ξ.

Neka je A neprazan skup. Element $\phi \in \mathcal{B}(A)$ je *parcijalno preslikavanje* (*parcijalna transformacija*) skupa A ako je $|a\phi| = 1$, za svaki $a \in \mathrm{dom}\phi$ (sa $|X|$ označavamo *kardinalni broj* skupa X), tj. ako za svaki $a \in \mathrm{dom}\phi$ postoji tačno jedan $b \in A$ takav da je $(a,b) \in \phi$. Pri ovakvoj definiciji, i prazna relacija na A je parcijalno preslikavanje skupa A. Skup $\mathcal{PT}(A)$ svih parcijalnih preslikavanja skupa A je podpolugrupa polugrupe $\mathcal{B}(A)$, koju nazivamo polugrupa *parcijalnih preslikavanja* (*transformacija*) skupa A. Za $\varphi, \psi \in \mathcal{PT}(A)$ je $\mathrm{dom}(\varphi\psi) = [\mathrm{ran}\varphi \cap \mathrm{dom}\psi]\varphi^{-1}$, $\mathrm{ran}(\varphi\psi) = [\mathrm{ran}\varphi \cap \mathrm{dom}\psi]\psi$, i važi sledeći uslov:

$$a(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi, \qquad \text{za svaki } a \in \mathrm{dom}(\varphi\psi),$$

koji se koristi kao ekvivalent definicije množenja parcijalnih preslikavanja.

Neka su φ i ψ parcijalna preslikavanja skupa A takva da je $\varphi \subseteq \psi$. Tada je $\mathrm{dom}\varphi \subseteq \mathrm{dom}\psi$ i $\mathrm{ran}\varphi \subseteq \mathrm{ran}\psi$. Ako uvedemo oznake $X = \mathrm{dom}\varphi$, $Y = \mathrm{dom}\psi$, tada kažemo da je φ *restrikcija od* ψ *na* X, u oznaci $\varphi = \psi|X$, i da je ψ *proširenje od* φ *na* Y.

Neka su X i Y neprazni skupovi. Ako je ϕ parcijalno preslikavanje nekog skupa tako da je $\mathrm{dom}\phi = X$ i $\mathrm{ran}\phi \subseteq Y$, tada kažemo da je ϕ *preslikavanje skupa* X *u skup* Y (ili da ϕ *slika* X *u* Y), i pišemo $\phi : X \to Y$. Prema definiciji parcijalnog preslikavanja, za svaki $x \in X$ postoji tačno jedan $y \in Y$ tako da je $(x,y) \in \phi$, i tada pišemo $y = x\phi$ i $\phi : x \mapsto y$, i kažemo da ϕ *slika* x *u* y. Ako je $\phi : X \to Y$, i ako je $X = Y$, tada kažemo da je ϕ *preslikavanje skupa* X (*u sebe*). Ako $\phi : X \to Y$, $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$, tada skup $U\phi = \{y \in Y \mid (\exists u \in U)\ u\phi = y\}$ nazivamo *slika podskupa* U (u odnosu na ϕ), i skup $V\phi^{-1} = \{x \in X \mid x\phi \in V\}$ nazivamo *inverzna slika podskupa* V (u odnosu na ϕ).

Neka su X i Y neprazni skupovi i $\phi : X \to Y$. Preslikavanje ϕ je *injekcija* (*injektivno, jedan-jedan*) ako za $a, b \in X$, iz $a\varphi = b\varphi$ sledi da je $a = b$. Preslikavanje ϕ je *sirjekcija* (*sirjektivno, na*) ako je $X\varphi = Y$, tj. ako za svaki $y \in X$ postoji $x \in X$ tako da je $x\phi = y$. Ako je ϕ sirjekcija, tada kažemo da je ϕ *preslikavanje iz* X *na* Y ili da *slika* X *na* Y. Preslikavanje ϕ je *bijekcija* (*bijektivno, obostrano jednoznačno*) ako ϕ jeste injekcija i sirjekcija.

Preslikavanje $\iota_X : X \to X$ nepraznog skupa X definisano sa $x\iota_X = x$, $(x \in X)$, je *identičko preslikavanje skupa* X. Neka su X i Y neprazni skupovi i neka $\varphi : X \to Y$. Ako postoji $\psi : Y \to X$ tako da je $\varphi\psi = \iota_X$, $\psi\varphi = \iota_Y$, tada kažemo da je ψ *inverzno preslikavanje* od φ. Posmatrajmo sada preslikavanje φ kao parcijalno preslikavanje nekog skupa A. Ako je ψ inverzno preslikavanje od φ, tada je $\psi = \varphi^{-1}$, gde je φ^{-1} inverzna relacija od φ. Obratno, ako je φ^{-1} parcijalno preslikavanje skupa

A, tada $\varphi^{-1} : Y \to X$ i φ^{-1} je inverzno preslikavanje od φ. Dokaz sledeće propozicije je elementaran.

Propozicija 1.2. *Neka su X i Y neprazni skupovi. Preslikavanje $\varphi : X \to Y$ ima inverzno preslikavanje ako i samo ako φ jeste bijekcija.* $\square$

Neka je X neprazan skup. Za preslikavanje φ skupa X koristićemo dva načina označavanja. Prvi način je *desno označavanje* preslikavanja: $\varphi : x \mapsto x\varphi$, $(x \in X)$. Pri ovakvom označavanju kažemo da je φ *preslikavanje skupa X pisano zdesna*. Proizvod preslikavanja α i β skupa X pisanih zdesna je preslikavanje $\alpha\beta$ skupa X koje se definiše sa

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \qquad (x \in X).$$

Skup $\mathcal{T}_r(X)$ svih preslikavanja skupa X pisanih zdesna sa ovom operacijom je polugrupa koju nazivamo *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) *skupa X pisanih zdesna*. Polugrupa $\mathcal{T}_r(X)$ je podpolugrupa polugrupe $\mathcal{PT}(X)$. Drugi način označavanja je *levo označavanje* preslikavanja: $\varphi : x \mapsto \varphi x$, $(x \in X)$. U ovom slučaju kažemo da je φ *preslikavanje skupa A pisano sleva*. Proizvod preslikavanja α i β skupa X pisanih sleva je preslikavanje $\alpha\beta$ skupa X koje definišemo sa:

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \qquad (x \in X).$$

Skup $\mathcal{T}_l(X)$ svih preslikavanja skupa X pisanih sleva sa ovom operacijom je polugrupa koju nazivamo *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) *skupa X pisanih sleva*. Jasno, polugrupe $\mathcal{T}_l(X)$ i $\mathcal{T}_r(X)$ su dualne. Zbog toga, obično razmatramo samo jednu od tih polugrupa, najčešće polugrupu $\mathcal{T}_r(X)$, pa ćemo tu polugrupu kraće nazivati *puna polugrupa transformacija* (*preslikavanja*) skupa X.

Neka je a element polugrupe S. Preslikavanje $\lambda_a \in \mathcal{T}_r(S)$ definisano sa $x\lambda_a = ax$, $(x \in S)$, nazivamo *unutrašnja leva translacija* polugrupe S. Preslikavanje $\varrho_a \in \mathcal{T}_r(S)$ definisano sa $x\varrho_a = xa$, $(x \in S)$, nazivamo *unutrašnja desna translacija* polugrupe S.

Osim (parcijalnih) preslikavanja, interesantni su i neki drugi tipovi relacija, pre svega *uredjenja* i *relacije ekvivalencije*. Neka je A neprazan skup. Relacija ξ skupa A je:

- *refleksivna* ako je $a\,\xi\,a$, za svaki $a \in S$, tj. ako je $\epsilon \subseteq \xi$;
- *simetrična* ako za $a, b \in A$, iz $a\,\xi\,b$ sledi $b\,\xi\,a$, tj. ako je $\xi \subseteq \xi^{-1}$;
- *anti-simetrična* ako za $a, b \in A$, iz $a\,\xi\,b$ i $b\,\xi\,a$ sledi da je $a = b$, tj. ako je $\xi \cap \xi^{-1} \subseteq \epsilon$;
- *tranzitivna* ako za $a, b, c \in A$, iz $a\,\xi\,b$ i $b\,\xi\,c$ sledi $a\,\xi\,c$, tj. ako je $\xi^2 \subseteq \xi$.

Refleksivnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *kvazi-uredjenje*. Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *uredjenje* (*relacija poretka*).

Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacija ekvivalencije*, ili kraće *ekvivalencija*. O uredjenjima će biti reči u Tački 1.5. Ovde ćemo se više zadržati na relacijama ekvivalencije.

Neka je ξ relacija ekvivalencije skupa A. Elementi $a, b \in A$ su *ξ-ekvivalentni* ako je $a\,\xi\,b$. Skup $a\xi$ nazivamo *klasa ekvivalencije elementa* a (u odnosu na ξ), ili *ξ-klasa elementa* a. Jasno je da je u tom slučaju $a \in a\xi$. Skup svih ξ-klasa označavamo sa A/ξ i nazivamo ga *faktor skup* skupa A. Preslikavanje $\xi^\natural : a \mapsto a\xi$ skupa A na faktor skup A/ξ nazivamo *prirodno preslikavanje* skupa A odredjeno relacijom ekvivalencije ξ. Neka su A i B neprazni skupovi i $\phi : A \to B$. Relaciju $\ker\phi = \{(x, y) \in A \times A \mid x\phi = y\phi\}$ skupa A nazivamo *jezgro preslikavanja* ϕ. Vezu izmedju relacija ekvivalencije i preslikavanja daje sledeća propozicija, čiji je dokaz elementaran, pa ga zbog toga izostavljamo.

Propozicija 1.3. *Neka je A neprazan skup. Ako je ϕ preslikavanje skupa A u skup B, tada* $\ker\phi$ *jeste relacija ekvivalencije na A.*

Osim toga, ako je ξ relacija ekvivalencije na A, tada je $\ker(\xi^\natural) = \xi$. $\square$

Familija $\{A_i \mid i \in I\}$ podskupova skupa A je *razbijanje skupa* A ako je $A_i \neq \varnothing$, za svaki $i \in I$, $A = \cup_{i\in I} A_i$, i za sve $i, j \in I$ je $A_i = A_j$ ili $A_i \cap A_j = \varnothing$. Sledeća propozicija, čiji je dokaz elementaran, pa ga izostavljamo, daje nam vezu izmedju razbijanja skupa A i relacija ekvivalencija na tom skupu:

Propozicija 1.4. *Neka je $\varpi = \{A_i \mid i \in I\}$ razbijanje skupa A. Tada relacija ξ_ϖ skupa A definisana sa:*

$$a\,\xi_\varpi\,b \quad\Leftrightarrow\quad (\exists i \in I)\ a, b \in A_i, \qquad\qquad (a, b \in A),$$

jeste relacija ekvivalencije skupa A.

Obratno, neka je ξ relacija ekvivalencije skupa A. Tada familija $\varpi_\xi = \{a\xi \mid a \in A\}$ jeste razbijanje skupa A.

Osim toga, preslikavanja $\varpi \mapsto \xi_\varpi$ i $\xi \mapsto \varpi_\xi$ su uzajamno inverzne bijekcije iz skupa svih razbijanja skupa A na skup svih relacija ekvivalencije skupa A, i obratno. $\square$

Neka je A neprazan skup. Presek proizvoljne familije tranzitivnih relacija na A, ukoliko je neprazan, je tranzitivna relacija na A. Ako je ξ relacija na A, presek svih tranzitivnih relacija na A koje sadrže ξ je tranzitivna relacija koju označavamo sa ξ^∞. Neposredno se provarava da je $\xi^\infty = \cup_{n\in\mathbf{Z}^+}\xi^n$. Relaciju ξ^∞ nazivamo *tranzitivno zatvorenje* relacije ξ. Presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije skupa A je neprazan, jer sadrži identičku relaciju na A, i taj presek je relacija ekvivalencije na A. Ako je ξ

relacija skupa A, tada presek svih relacija ekvivalencije koje sadrže relaciju ξ nazivamo *relacija ekvivalencije generisana relacijom* ξ, i označavamo je sa ξ^e. Neposredno se proverava da je $\xi^e = (\xi \cup \xi^{-1} \cup \epsilon)^\infty$.

Preslikavanje ϑ koje svakoj polugrupi S pridružuje jednu relaciju polugrupe S, koju označavamo sa ϑ_S, nazivamo *tip relacija*, i kažemo da je ϑ_S *relacija tipa* ϑ na S. U slučajevima kada razmatramo jednu fiksnu polugrupu, oznaku "ϑ_S" zamenjujemo sa "ϑ". Ako je ϑ neki tip relacija i ako je ϑ_S relacija ekvivalencije, za svaku polugrupu S, tada kažemo da je ϑ *tip relacija ekvivalencije*. Neka je ϑ neki tip relacija ekvivalencije. Polugrupa S je *ϑ-prosta* ako je ϑ_S univerzalna relacija na S, tj. ako S ima samo jednu ϑ_S-klasu.

Zadaci.

1. Prazna relacija skupa A je nula polugrupe $\mathcal{B}(A)$.

2. Neka je ξ kvazi-uredjenje skupa A. Dokazati da:

(a) $\widetilde{\xi} = \xi \cap \xi^{-1}$ je relacija ekvivalencije na A;

(b) za $\alpha, \beta \in A/\widetilde{\xi}$ važi: $(\exists a \in \alpha)(\exists b \in \beta)\, a\,\xi\, b \Leftrightarrow (\forall a \in \alpha)(\forall b \in \beta)\, a\,\xi\, b$;

(c) relacija $\leq$ na $A/\widetilde{\xi}$ definisana sa: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\exists a \in \alpha)(\exists b \in \beta)\, a\,\xi\, b$, $(\alpha, \beta \in A/\widetilde{\xi})$, je uredjenje na $A/\widetilde{\xi}$;

(d) za $a, b \in S$, iz $a\,\xi\, b$ sledi $b\xi \subseteq a\xi$ i $\xi a \subseteq \xi b$;

(e) za $a, b \in S$ važi: $a\,\widetilde{\xi}\, b \Leftrightarrow a\xi = b\xi$, $a\,\widetilde{\xi}\, b \Leftrightarrow \xi a = \xi b$.

3. Neka je $\phi \in \mathcal{PT}(A)$. Tada je $\ker\phi = \phi\phi^{-1}$.

4. Za $\phi \in \mathcal{PT}(A)$, element $a \in \mathrm{dom}\phi$ je *fiksna tačka* parcijalnog preslikavanja ϕ ako je $a\phi = a$. Skup svih fiksnih tačaka parcijalnog preslikavanja ϕ označavamo sa $\mathrm{fix}\phi$. Dokazati da je ϕ idempotent polugrupe $\mathcal{PT}(A)$ ako i samo ako je $\mathrm{fix}\phi = \mathrm{ran}\phi$.

5. Za beskonačan prebrojiv skup A, $S = \{\alpha \in \mathcal{T}_r(A) \mid A - A\alpha$ je beskonačan skup$\}$ je podpolugrupa od $\mathcal{T}_r(A)$ koju nazivamo *Baer-Levijeva polugrupa*. Dokazati da Baer-Levijeva polugrupa nema idempotenata.

Literatura. Birkhoff [1], Howie [1], [2], Madarász i Crvenković [1], Schein [5], Tamura [20], Thierrin [8].

1.3. Kongruencije i homomorfizmi.

Neka je ξ relacija ekvivalencije polugrupe S. Relacija ξ je *leva* (*desna*) *kongruencija* ako za sve $a, b, c \in S$, $a\,\xi\, b$ povlači $ca\,\xi\, cb$ ($ac\,\xi\, bc$). Relacija ξ je *kongruencija* ako je istovremeno i leva i desna kongruencija. Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 1.1. *Relacija ekvivalencije* ξ *polugrupe* S *je kongruencija ako i samo ako za sve* $a, b, c, d \in S$, $a \,\xi\, b$ *i* $c \,\xi\, d$ *povlači* $ac \,\xi\, bd$. $\square$

Neposredno se proverava da presek proizvoljne familije kongruencija polugrupe S jeste takodje kongruencija na S. Odavde dobijamo da za proizvoljnu relaciju ξ polugrupe S, presek svih kongruencija na S koje sadrže ξ jeste konguencija na S koju nazivamo *kongruencija generisana relacijom* ξ, i označavamo je sa $\xi^{\#}$.

Neka je ξ relacija ekvivalencije polugrupe S. Tada je

$$\xi^{\flat} = \{(a, b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in \xi\}.$$

Važna osobina relacije $\xi^{\flat}$ data je sledećom teoremom:

Teorema 1.2. *Neka je* ξ *relacija ekvivalencije polugrupe* S. *Tada relacija* $\xi^{\flat}$ *jeste kongruencija na* S *sadržana u* ξ.

Osim toga, za proizvoljnu kongruenciju η *na* S *sadržanu u* ξ *je* $\eta \subseteq \xi^{\flat}$.

Dokaz. Jasno je da je $\xi^{\flat}$ relacija ekvivalencije na S. Takodje, ako je $(a, b) \in \xi^{\flat}$ i $c \in S$, tada je $(xcay, xcby) \in \xi$, za sve $x, y \in S^1$. Dakle, $(ca, cb) \in \xi^{\flat}$. Slično dobijamo da je $(ac, bc) \in \xi^{\flat}$. Dakle, $\xi^{\flat}$ je kongruencija. Jasno, $\xi^{\flat} \subseteq \xi$.

Neka je η proizvoljna kongruencija na S sadržana u ξ. Uzmimo $(a, b) \in \eta$. Kako je η kongruencija, to je $(xay, xby) \in \eta$, za sve $x, y \in S^1$, odakle je $(xay, xby) \in \xi$, za sve $x, y \in S^1$, pa je $(a, b) \in \xi^{\flat}$. Prema tome, $\eta \subseteq \xi^{\flat}$. $\square$

Neka su S i T polugrupe. Preslikavanje $\phi : S \to T$ je *homomorfizam* ako je $(a\phi)(b\phi) = (ab)\phi$, za sve $a, b \in S$. Neka je ϕ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T. Ako je ϕ injektivan, tada kažemo da je ϕ *monomorfizam* ili *potapanje*, i da se S *može potopiti u* T. Ako je ϕ sirjektivan, tada je ϕ *epimorfizam*. Ako je ϕ bijekcija, tada kažemo da je ϕ *izomorfizam* a da su polugrupe S i T *izomorfne*, i pišemo $S \cong T$. Lako se dokazuje da je inverzno preslikavanje izomorfizma takodje izomorfizam. Neformalno, dve polugrupe su izomorfne ako i samo ako se jedna od njih može dobiti iz druge drugačijim označavanjem elemenata. Zbog toga obično poistovećujemo izomorfne polugrupe. Homomorfizam polugrupe S u sebe nazivamo *endomorfizam*, a izomorfizam iz S u sebe nazivamo *automorfizam*. Ako je ϕ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T, tada je $S\phi$ podpolugrupa od T. Polugrupa T je *homomorfna slika* polugrupe S ako postoji epimorfizam iz S na T.

Neka je A podpolugrupa polugrupa S i T. Homomorfizam $\phi : S \to T$ je A-*homomorfizam* ako je $a\phi = a$, za svaki $a \in A$.

Neka su S i T polugrupe. Preslikavanje $\phi : S \to T$ je *antihomomorfizam* ako je $(ab)\phi = (b\phi)(a\phi)$, za sve $a, b \in S$. Bijektivni anti-homomorfizam nazivamo *anti-izomorfizam*. Polugrupe S i T su *anti-izomorfne* ako postoji anti-izomorfizam iz S na T. Jasno je da su polugrupe S i T anti-izomorfne ako i samo ako je S izomorfna polugrupi $\overleftarrow{T}$.

Preslikavanje $\phi : S \to T$ je *parcijalni homomorfizam* parcijalne polugrupe S u parcijalnu polugrupu T ako za sve $a, b \in S$ važi: ako je proizvod ab definisan u S, onda je i proizvod $(a\phi)(b\phi)$ definisan u T i $(a\phi)(b\phi) = (ab)\phi$. Bijektivni parcijalni homomorfizam nazivamo *parcijalni izomorfizam*.

Neka je ξ kongruencija polugrupe S. Tada faktor skup S/ξ sa množenjem definisanim sa: $(a\xi)(b\xi) = (ab)\xi$, jeste polugrupa koju nazivamo *faktor polugrupa*, ili kraće *faktor*, polugrupe S u odnosu na kongruenciju ξ. Neposredno se dokazuje sledeća propozicija koja daje vezu izmedju kongruencija i homomorfizama:

Teorema 1.3. (**Teorema o homomorfizmu**) *Ako je ξ kongruencija polugrupe S, tada je $\xi^\natural$ homomorfizam iz S na S/ξ.*

Obratno, ako je ϕ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T, tada je $\ker\phi$ *kongruencija na S i preslikavanje $\Phi : S/\ker\phi \to T$ definisano sa:* $(a\ker\phi)\Phi = a\phi$, $(a \in S)$, *je izomorfizam.* $\square$

Za kongruenciju ξ, homomorfizam $\xi^\natural$ nazivamo *prirodni homomorfizam* indukovan kongruencijom ξ, dok za homomorfizam ϕ, kongruenciju $\ker\phi$ nazivamo *jezgro homomorfizma* ϕ. Sobzirom na Teoremu o homomorfizmu, nećemo praviti razlike izmedju pojmova "faktor" i "homomorfna slika".

Teorema 1.4. *Neka su ξ i η kongruencije polugrupe S i $\xi \subseteq \eta$. Tada*

$$\eta/\xi = \{(a\xi, b\xi) \in S/\xi \times S/\xi \mid (a, b) \in \eta\}$$

jeste kongruencija na S/ξ i $(S/\xi)/(\eta/\xi) \cong S/\eta$.

Dokaz. Neka je $\phi : S/\xi \to S/\eta$ preslikavanje definisano sa: $(a\xi)\phi = a\eta$. Za $a\xi, b\xi \in S/\xi$, $[(a\xi)(b\xi)]\phi = [(ab)\xi]\phi = (ab)\eta = (a\eta)(b\eta) = [(a\xi)\phi][(b\xi)\phi]$. Prema tome, ϕ je homomorfizam. Osim toga, $(a\xi)\phi = (b\xi)\phi$ ako i samo ako je $a\eta = b\eta$, tj. $(a, b) \in \eta$. Dakle, $\ker\phi = \eta/\xi$, pa je η/ξ kongruencija i prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da je $(S/\xi)/(\eta/\xi) \cong S/\eta$. $\square$

Neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ familija skupova i neka je $A = \Pi_{i\in I} S_i$ Dekartov proizvod familije $\{A_i \mid i \in I\}$. Elemente iz A označavaćemo sa $(a_i)_{i\in I}$ ($a_i \in A_i$, za svaki $i \in I$), ili kraće (a_i), ako se zna o kom skupu indeksa je reč. Za $i \in I$, preslikavanje $\pi_i : A \to A_i$ definisano sa: $a\pi_i = a_i$, ako je $a = (a_j)_{j\in I}$, nazivamo *i-ta projekcija*), i element a_i nazivamo *i-ta koordinata* elementa a.

Neka je $\{S_i \mid i \in I\}$ familija polugrupa i neka je S Dekartov proizvod familije $\{S_i \mid i \in I\}$. Definišimo množenje na S *pokoordinatno*, tj. sa: $(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I} = (a_ib_i)_{i\in I}$, za $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in S$. Tada S sa ovom operacijom jeste polugrupa, i za svaki $i \in I$, projekcija π_i je epimomorfizam. Svaku polugrupu izomorfnu polugrupi S nazivamo *direktan proizvod familije polugrupa* $\{S_i,\ i \in I\}$.

Polugrupa S je *poddirektan proizvod familije polugrupa* $\{S_i,\ i \in I\}$, ako je S izomorfna nekoj podpolugrupi T direktnog proizvoda $\Pi_{i\in I}S_i$ za koju važi: za svaki $i \in I$, $T\pi_i = S_i$.

Kongruencija ξ polugrupe S *razdvaja elemente* a i b iz S ako su a i b u različitim ξ-klasama, tj. ako $(a, b) \notin \xi$. Familija $\{\xi_i \mid i \in I\}$ neidentičkih kongruencija polugrupe S razdvaja elemente iz S ako za svaki par a i b različitih elemenata iz S postoji kongruencija te familije koja ih razdvaja. Lako se proverava da važi:

Lema 1.2. *Familija $\{\xi_i \mid i \in I\}$ neidentičkih kongruencija polugrupe S razdvaja elemente iz S ako i samo ako je $\cap_{i\in I}\xi_i = \epsilon$.* $\square$

Teorema 1.5. *Neka je polugrupa S poddirektan proizvod familije polugrupa $\{S_i,\ i \in I\}$. Tada familija $\{\xi_i \mid i \in I\}$ kongruencija na S koje odgovaraju kongruencijama $\ker\pi_i, i \in I$, jeste familija kongruencija na S koja razdvaja elemente iz S.*

Obratno, ako $\{\xi_i \mid i \in I\}$ jeste familija neidentičkih kongruencija polugrupe S koja razdvaja elemente iz S, tada je S poddirektan proizvod familije polugrupa $\{S/\xi_i \mid i \in I\}$.

Dokaz. Neka je $\{\xi_i \mid i \in I\}$ familija neidentičkih kongruencija polugrupe S koja razdvaja elemente iz S. Definišimo preslikavanje $\phi : S \to \Pi_{i\in I}S_i$, sa: $a\phi = (a\xi)_{i\in I}$, $(a \in S)$. Neposredno se proverava da je ϕ homomorfizam i da je $(S\phi)\pi_i = S/\xi_i$, za svaki $i \in I$. Ako su $a, b \in S$ različiti elementi, tada postoji $i \in I$ tako da $(a, b) \notin \xi_i$, tj. $a\xi_i \neq b\xi_i$, pa je $a\phi \neq b\phi$. Prema tome, ϕ je monomorfizam. Dakle, S je poddirektan proizvod familije $\{S/\xi \mid i \in I\}$.

Obrat se dokazuje neposredno. $\square$

Sobzirom na Teoremu o homomorfizmu, Teorema 1.5. se može iskazati i na sledeći način:

Posledica 1.1. *Neka je S polugrupa i neka je $\{S_i \mid i \in I\}$ familija polugrupa. Tada je S poddirektan proizvod familije $\{S_i \mid i \in I\}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(a) *za svaki $i \in I$ postoji epimorfizam φ_i iz S na S_i;*

(b) *za $a, b \in S$, $a \neq b$, postoji $i \in I$ tako da je $a\varphi_i \neq b\varphi_i$.* $\square$

Iz Posledice 1.1. dobijamo

Posledica 1.2. *Neka je polugrupa* S *poddirektan proizvod familije polugrupa* $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$, *i za svaki* $\alpha \in Y$ *neka je* S_α *poddirektan proizvod familije polugrupa* $\{T_i^\alpha \mid i \in I_\alpha\}$. *Tada* S *jeste poddirektan proizvod familije polugrupa* $\{T_i^\alpha \mid i \in I_\alpha,\ \alpha \in Y\}$. □

Definišimo množenje na Dekartovom proizvodu $I \times \Lambda$ nepraznih skupova I i Λ sa:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = (i,\mu), \qquad ((i,j \in I,\ \lambda,\mu \in \Lambda).$$

Tada $I \times \Lambda$ sa tako definisanim množenjem jeste traka, $I \times \Lambda$ je izomorfna direktnom proizvodu levo nulte i desno nulte trake. Svaku polugrupu izomorfnu direktnom proizvodu levo nulte i desno nulte trake nazivamo *pravougaona traka*.

Neka je $\mathfrak{C}$ neka klasa polugrupa. Kongruencija ξ polugrupe S je $\mathfrak{C}$-*kongruencija* na S ako je faktor S/ξ iz klase $\mathfrak{C}$. Razbijanje polugrupe S koje odgovara $\mathfrak{C}$-kongruenciji nazivamo $\mathfrak{C}$-*razlaganje* polugrupe S, a odgovarajuću faktor polugrupu nazivamo $\mathfrak{C}$-*homomorfna slika od* S.

Ako je $\mathfrak{C}$ klasa traka, tada kažemo: *tračna kongruencija, tračno razlaganje* odnosno *tračna homomorfna slika*. Ako je $\mathfrak{C}$ klasa polumreža, tada kažemo: *polumrežna kongruencija, polumrežno razlaganje* odnosno *polumrežna homomorfna slika*. Ako je $\mathfrak{C}$ klasa pravougaonih traka, tada kažemo: *matrična kongruencija* odnosno *matrično razlaganje*, a ako je $\mathfrak{C}$ klasa levo (desno) nultih traka, tada kažemo: *levo* (*desno*) *nulta kongruencija* odnosno *levo* (*desno*) *nulto razlaganje*.

Kongruencija ξ polugrupe S je tračna kongruencija ako i samo ako je $a\,\xi\,a^2$, za svaki $a \in S$, tj. ako i samo ako svaka ξ-klasa od S jeste podpolugrupa od S. Neka je ξ tračna kongruencija polugrupe S i neka je $B = S/\xi$. Za $i \in B$, neka je $S_i = i(\xi^\natural)^{-1}$. Tada je S_i podpolugrupa od S, za svaki $i \in B$, $S = \cup_{i\in B} S_i$, i za sve $i,j \in B$ je $S_iS_j \subseteq S_{ij}$, i kažemo da je S *traka* B *polugrupa* S_i, $i \in B$. Polugrupe S_i, $i \in B$, su *komponente* tog tračnog razlaganja. Ako je $\mathfrak{C}$ neka klasa polugrupa i ako za svaki $i \in B$, S_i je iz klase $\mathfrak{C}$, tada kažemo da je S *traka* B *polugrupa* S_i, $i \in B$, *iz klase* $\mathfrak{C}$. Ako je pri tome B polumreža (lanac, pravougaona traka, levo nulta traka, desno nulta traka), tada je S *polumreža* (*lanac, matrica, levo nulta traka, desno nulta traka*) B *polugrupa* S_i, $i \in B$, (*iz klase* $\mathfrak{C}$). Analogne definicije uvodimo i za druge tipove traka.

Zadaci.

1. Svaka polugrupa S se može potopiti u polugrupu $\mathcal{T}_r(S^1)$.

2. Neka su φ i ψ homomorfizmi polugrupe S na polugrupe T i U, tim redom, tako da je $\ker\varphi \subseteq \ker\psi$. Tada postoji jedinstven homomorfizam θ iz T na U takav da je $\varphi\theta = \psi$.

3. Ako je ξ relacija polugrupe S, tada je $\xi^{\#} = (\xi^c)^e = [\xi^c \cup (\xi^c)^{-1} \cup \epsilon_S]^\infty$, gde je $\eta^c = \{(xay, xby) \mid x, y \in S^1, \ (a,b) \in \xi\}$, za $\eta \in \mathcal{B}(S)$.
4. Polugrupa S je *poddirektno nesvodljiva* ako zadovoljava sledeći uslov: kad god je S poddirektan proizvod familije polugrupa $\{S_i \mid i \in I\}$, tada je π_i izomorfizam, za neki $i \in I$.
Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(*i*) S je poddirektno nesvodljiva;
(*ii*) presek proizvoljne familije neidentičkih kongruencija na S je neidentička kongruencija na S;
(*iii*) S ima najmanju neidentičku kongruenciju.
5. Svaka polugrupa je poddirektan proizvod poddirektno nesvodljivih polugrupa.

Literatura. Clifford [1], [4], Clifford and Preston [1], Howie [1], Petrich [16], Schein [4], Thierrin [8].

1.4. Maksimalne podgrupe i monogene polugrupe.

Polugrupa S je *grupa* ako S ima jedinicu e i ako za svaki $a \in S$ postoji $b \in S$ takav da je $ab = ba = e$. Element b je jedini element iz G sa takvom osobinom, označavamo ga sa a^{-1} i nazivamo ga *grupni inverz* od a, ili *inverz od* a *u grupi* G. Podpolugrupa G polugrupe S je *podgrupa* od S, ako je G grupa. Neposredno se proverava da neprazan podskup G polugrupe S jeste podgrupa od S ako i samo ako je $aG = Ga = G$, za svaki $a \in G$.

Podgrupa G polugrupe S je *maksimalna podgrupa* od S ako ne postoji podgrupa H od S takva da je $G \subset H$. Sledećom teoremom opisuju se maksimalne podgrupe polugrupe:

Teorema 1.6. *Neka je e idempotent polugrupe S. Tada postoji maksimalna podgrupa od S sa jedinicom e, koju označavamo sa G_e, i važi:*

$$\begin{aligned} G_e &= \{a \in S \mid a = ea = ae, \ (\exists a' \in S)\ e = aa' = a'a\} \\ &= \{a \in S \mid a \in eS \cap Se, \ e \in aS \cap Sa\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Jasno je da je svaka podgrupa od S sa jedinicom e sadržana u prvom skupu i da je prvi skup sadržan u drugom. Prvi skup je podgrupa od S sa jedinicom e. Neka je a element drugog skupa. Tada je $a = ex = ye$, $e = az = wa$, za neke $x, y, z, w \in S$. Odavde sledi da je $ea = eex = ex = a$, i slično, $ae = a$. Dalje, $eze = eeze = ewaze = ewee =$

ewe, odakle je $e = ee = aze = a(eze)$ i $e = ee = ewa = (ewe)a$. Dakle, $e = aa' = a'a$, gde je $a' = eze = ewe$, pa je a element prvog skupa. $\square$

Teorema 1.7. *Ako su e i f različiti idempotenti polugrupe S, tada je $G_e \cap G_f = \varnothing$.*

Dokaz. Uzmimo da je $a \in G_e \cap G_f$. Tada je $a = ea = ae = fa = af$, $e = aa' = a'a$ i $f = aa'' = a''a$, za neke $a', a'' \in S$. Odavde je $e = aa' = faa' = fe = a''ae = a''a = f$. Prema tome, iz $e \neq f$ sledi da je $G_e \cap G_f \neq \varnothing$. $\square$

Ako je S polugrupa sa jedinicom e, element $a \in S$ je *invertibilan* ako postoji $b \in S$ tako da je $ab = ba = e$. Maksimalnu podgrupu G_e tada nazivamo *grupa jedinice*, a njeni elementi su svi invertibilni elementi polugrupe S.

Lema 1.3. *Element a polugrupe S sa jedinicom je invertibilan ako i samo ako je $aS = Sa = S$.* $\square$

Sledeća teorema će biti vrlo korisna u daljim razmatranjima.

Teorema 1.8. (**Munnova lema**) *Neka je x element polugrupe S takav da je x^n element neke podgrupe G od S, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Ako je e jedinica od G, tada je*

(*a*) $ex = xe \in G_e$;

(*b*) $x^m \in G_e$, *za svaki* $m \in \mathbf{Z}^+$, $m \geq n$.

Dokaz. (*a*) Neka je y inverz elementa x^n u G. Tada je

$$ex = yx^{n+1} = yxx^n = yxx^n e = yxx^n x^n y = yx^{2n+1}y,$$

i slično se dokazuje da je $xe = yx^{2n+1}y$. Prema tome, $ex = xe$. Kako je $ey = ye = y$, to je

$$xy = xey = exy = yx^n xy = yxx^n y = yxe = yex = yx,$$

odakle indukcijom dobijamo da je $x^k y = yx^k$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo da je $z = x^{n-1}y = yx^{n-1}$. Tada je $zxe = yx^{n-1}xe = yx^n e = e$, i slično, $exz = e$. Dalje je $e(ex) = (ex)e = ex$, pa $ex = xe \in G_e$.

(*b*) Neka je $m \in \mathbf{Z}^+$, $m > n$. Uzmimo $r \in \mathbf{Z}^+$ takav da je $nr > m$, i uzmimo da je y inverz elementa x^n u G_e. Tada je $x^{nr-m}y^r = y^r x^{nr-m}$, i ako stavimo da je $w = x^{nr-m}y^r$, tada je

$$wx^m = y^r x^{nr-m} x^m = y^r x^{nr} = (yx^n)^r = e.$$

Slično dokazujemo da je $x^m w = e$. Sa druge strane, $ex^m = ex^n x^{m-n} = x^n x^{m-n} = x^m$, i slično, $x^m e = x^m$. Dakle, prema Teoremi 1.6, $x^m \in G_e$. $\square$

Neka je S polugrupa. Kardinalni broj $|S|$ nazivamo *red polugrupe* S. Ako je $|S|$ konačan broj, tada kažemo da je S *konačnog reda* ili da je *konačna*. U suprotnom kažemo da je S *beskonačnog reda* ili da je *beskonačna*. Polugrupa S je *trivijalna* ako je $|S| = 1$. Za element $a \in S$, *red elementa* a je red monogene podpolugrupe $\langle a \rangle$ od S. Red elementa a označavamo sa $r(a)$. Ako je $\langle a \rangle$ konačna polugrupa, tada je a *element konačnog reda*. U suprotnom je a *element beskonačnog reda*.

Element a polugrupe S je *periodičan* ako postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^m = a^{m+n}$. Neka je a periodičan element polugrupe S. Skup $\{m \in \mathbf{Z}^+ \mid (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^m = a^{m+n}\}$ je podskup skupa prirodnih brojeva, pa ima najmanji element koji nazivamo *indeks elementa* a (*indeks polugrupe* $\langle a \rangle$), i označavamo ga sa $i(a)$. Najmanji element skupa $\{n \in \mathbf{Z}^+ \mid a^{i(a)} = a^{i(a)+n}\}$ nazivamo *period elementa* a (*period polugrupe* $\langle a \rangle$), i označavamo ga sa $p(a)$.

Teorema 1.9. *Neka je a element polugrupe S.*

Ako a nije periodičan element, tada je a beskonačnog reda i monogena podpolugrupa $\langle a \rangle$ od S je izomorfna aditivnoj polugrupi $(\mathbf{Z}^+, +)$ prirodnih brojeva.

Ako je a periodičan element, tada je a konačnog reda $r(a) = i(a) + p(a) - 1$, $K_a = \{a^{i(a)}, a^{i(a)+1}, \dots, a^{i(a)+p(a)-1}\}$ je maksimalna podgrupa od $\langle a \rangle$, i K_a je monogena grupa reda $p(a)$.

Dokaz. Ako je a neperiodičan element, tada je jasno da je a beskonačnog reda i preslikavanje $\phi : \mathbf{Z}^+ \to \langle a \rangle$ definisano sa $n\phi = a^n$, $(n \in \mathbf{Z}^+)$, je izomorfizam.

Neka je a periodičan element. Prema definiciji indeksa i perioda elementa, jasno je da su $a, a^2, \dots, a^{i(a)+p(a)-1}$ medjusobno različiti elementi. Uzmimo proizvoljan $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada je $n = kp(a) + m$, $0 \leq k$, $0 \leq m \leq p(a) - 1$, pa je $a^{i(a)+n} = a^{i(a)+kp(a)+m} = a^{i(a)+m} \in K_a$. Prema tome, $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{i(a)+p(a)-1}\}$, i $\langle a \rangle$ je reda $r(a) = i(a) + p(a) - 1$. Jasno je da je K_a grupa izomorfna aditivnoj grupi ostataka celih brojeva po modulu $p(a)$, da je K_a reda $p(a)$ i da je K_a maksimalna podgrupa od $\langle a \rangle$. $\square$

Prema prethodnoj teoremi, dve monogene polugrupe su izomorfne ako i samo ako su istog indeksa i perioda. Monogenu polugrupu indeksa i i perioda p označavamo sa $M(i, p)$.

Polugrupa S je *periodična* ako je svaki njen element periodičan.

Zadaci.

1. Označimo sa $\mathcal{S}(X)$ skup svih bijektivnih preslikavanja skupa X. Tada je $\mathcal{S}(X)$ grupa jedinice monoida $\mathcal{T}_r(X)$.

Grupu $\mathcal{S}(X)$ nazivamo *simetrična grupa* ili *grupa permutacija* skupa X.

2. Svaka grupa se može potopiti u grupu permutacija nekog skupa.
3. Element a polugrupe S je periodičan ako i samo ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in E(S)$.
4. Svaka konačna polugrupa je periodična.
5. Beskonačna monogena polugrupa je poddirektan proizvod konačnih monogenih polugrupa.

Literatura. Bosák [1], Clifford and Miller [1], Clifford and Preston [1], Howie [1], Kimura [1], Munn [2], Schwarz [3].

1.5. Uredjeni skupovi i mreže.

Podsetimo se da refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju skupa A nazivamo *uredjenje*. Najčešće, uredjenje označavamo sa $\leq$. Skup A snabdeven uredjenjem nazivamo *uredjen skup*. Ako je uredjenje $\leq$ skupa A *linearno*, tj. ako za sve $a, b \in A$ je $a \leq b$ ili $b \leq a$, tada je A *linearno uredjen skup* ili *lanac*. Ako je $\leq$ uredjenje skupa A, tada sa $<$ označavamo relaciju na A definisanu sa:

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \ \wedge \ a \neq b \qquad (a, b \in A),$$

i sa $\geq$ i $>$ označavamo inverzne relacije relacija $\leq$ i $<$, redom.

Neka su A i B uredjeni skupovi i $\varphi : A \to B$. Preslikavanje φ je *izotono* (*očuvava uredjenje*) ako za $a, b \in A$, iz $a \leq b$ sledi da je $a\varphi \leq b\varphi$. Preslikavanje φ je *antitono* ako za $a, b \in S$, iz $a \leq b$ sledi $a\varphi \geq b\varphi$.

Neka je A uredjen skup. Element $a \in A$ je *minimalan* (*maksimalan*) *element* skupa A ako ne postoji $x \in A$ tako da je $x < a$ $(x > a)$, tj. ako za $x \in A$, iz $x \leq a$ $(x \geq a)$ sledi $x = a$. Element $a \in A$ je *najmanji* (*najveći*) *element* skupa S ako je $a \leq x$ $(a \geq x)$, za svaki $x \in A$. Najmanji (najveći) element skupa A, ukoliko takav postoji, je minimalan (maksimalan) element skupa A, dok obratno ne mora da važi. Skup A može imati proizvoljno mnogo minimalnih (maksimalnih) elemenata, dok može imati najviše jedan najmanji (najveći) element.

Neka je X neprazan podskup uredjenog skupa A. Element $a \in A$ je *gornja granica* (*donja granica*) skupa X ako je $x \leq a$ $(x \geq a)$, za svaki $x \in X$. Element $a \in A$ je *najmanja gornja granica* ili *supremum* (*najveća donja granica* ili *infimum*) skupa X, u oznaci $a = \vee X$ ($a = \wedge X$), ako važi:

(a) a je gornja (donja) granica skupa X;

(b) ako je $b \in A$ gornja (donja) granica skupa X, tada je $a \leq b$ $(a \geq b)$.

Ako je $X = \{x_i \mid i \in I\}$, tada pišemo $\vee_{i \in I} x_i$ ($\wedge_{i \in I} x_i$) umesto $\vee X$ ($\wedge X$), i ako je $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$, tada pišemo

$$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \qquad (\, x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \,)$$

umesto $\vee_{i\in I} x_i$ ($\wedge_{i\in I} x_i$).

Uredjen skup A je *gornja* (*donja*) *polumreža* ako svaki dvoelementni podskup od A ima supremum (infimum). Indukcijom se dokazuje da u tom slučaju svaki konačan podskup od A ima supremum (infimum). Za beskonačne podskupove od A to ne mora da važi. Uredjen skup A je mreža ako je A gornja i donja polumreža.

Ako je A gornja (donja) polumreža, tada je preslikavanje $\vee : A\times A \to A$ ($\wedge : A \times A \to A$) dato sa:

(1) $\vee : (a,b) \mapsto a \vee b, \quad (a,b \in A), \qquad (\wedge : (a,b) \mapsto a \wedge b, \quad (a,b\in A))$,

asocijativna i komutativna operacija skupa A. To nam omogućuje da pojam donje polumreže (gornje polumreže, mreže) definišemo i na drugi način.

Podsetimo se da naziv *polumreža* koristimo u Teoriji polugrupa za označavanje komutativne trake. Objasnićemo vezu izmedju ovog pojma i pojma donje polumreže. Ako je S polugrupa, tada relacija $\leq$ skupa $E(S)$ svih idempotenata iz S, definisana sa:

$$e \leq f \quad \Leftrightarrow \quad ef = fe = e, \qquad (e, f \in E(S)),$$

je uredjenje koje nazivamo *prirodno uredjenje na* $E(S)$. Ako je S traka, tada imamo uredjenje na S. Ako je S komutativna traka, tada u odnosu na svoje prirodno uredjenje, S jeste donja polumreža. Obratno, ako je A donja polumreža, tada u odnosu na operaciju $\wedge$, A jeste komutativna traka. Operacije $\vee$ i $\wedge$ nazivamo redom *unija* i *presek*.

Možemo dati i drugu definiciju mreže: Ako je L neprazan skup i ako su $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije skupa L koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(L1) *Idempotentnost*: $x \wedge x = x,\ x \vee x = x,$
(L2) *Komutativnost*: $x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x,$
(L3) *Asocijativnost*: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$
(L4) *Apsorpcija*: $x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x,$

za sve $x, y, z \in L$, tada kažemo da je L *mreža*. Ako je L mreža u smislu prve definicije, tada u odnosu na operacije $\vee$ i $\wedge$ definisane u (1), L jeste mreža u smislu druge definicije. Obratno, ako je L mreža u smislu druge definicije, tada definišemo uredjenje na L sa

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a, \qquad (a,b \in L),$$

ili, što je ekvivalentno, sa

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b, \qquad (a,b \in L),$$

i u odnosu na to uredjenje, L je mreža u smislu prve definicije. U izučavanju mreža, ravnopravno i uporedo se koriste obe ove definicije.

Neposredno se dokazuje da su ekvivalentne definicija lanca kao linearno uredjenog skupa i definicija lanca kao polumreže u kojoj je $xy = x$ ili $xy = y$, za sve x, y.

Podskup K mreže L je *podmreža* od S ako je $x \wedge y,\ x \vee y \in K$, za sve

$x, y \in K$. Ako je L mreža i $a, b \in L$ tako da je $a \leq b$, tada *interval* $[a, b]$ mreže L jeste podmreža od L odredjena sa: $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$.

Neka su L i K mreže i $\phi : L \to K$. Preslikavanje ϕ je *homomorfizam mreže L u mrežu K* ako je $(a \vee b)\phi = a\phi \wedge b\phi$ i $(a \wedge b)\phi = a\phi \wedge b\phi$, za sve $a, b \in L$. Preslikavanje ϕ je *monomorfizam* ili *potapanje mreže L u K* ako je ϕ homomorfizam i injekcija, i u tom slučaju kažemo da se L *može potopiti u K*. Preslikavanje ϕ je *izomorfizam mreža L i K* ako je ϕ homomorfizam i bijekcija.

Neka je $\{L_i \mid i \in I\}$ familija mreža. Na Dekartovom proizvodu $L = \Pi_{i\in I} L_i$ definišimo binarne operacije $\vee$ i $\wedge$ pokoordinatno, tj. sa:

$$(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee y_i)_{i\in I}, \quad (x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge y_i)_{i\in I},$$

za $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in L$. Tada L sa tako definisanom operacijom jeste mreža i svaku mrežu izomorfnu sa L nazivamo *direktan proizvod mreža* L_i, $i \in I$. Kao i u Teoriji polugrupa, za svaki $i \in I$, projekcija π_i je homomorfizam mreže L na mrežu K. Svaka mreža L je izomorfna direktnom proizvodu $\Pi_{i\in I} L_i$, gde je, za neki $i \in I$, L_i mreža izomorfna sa L i $|L_j| = 1$, za svaki $j \in I$, $j \neq i$. Ovakvo razlaganje nazivamo *trivijalno razlaganje u direktan proizvod* mreža. Mreža L je *direktno nerazloživa* ako L ima samo trivijalna razlaganja u direktan proizvod mreža.

Mreža L je *distributivna za presek* (*za uniju* ako je

$$(2) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \qquad (\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\ ),$$

za sve $x, y, z \in L$. Neposredno se proverava da je mreža L distributivna za presek ako i samo ako je distributivna za uniju, pa mrežu u kojoj važi bar jedan od uslova iz (2) nazivamo *distributivna mreža*.

Element $0 \in L$ je *nula* mreže L ako je $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$, za svaki $x \in L$. Ako mreža L ima nulu, tada je ona jedinstvena i nula je najmanji element u L, i obratno, ako L ima najmanji element, onda je on nula u L. Element $1 \in L$ je *jedinica* mreže L ako je $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$, za svaki $x \in L$. Ako mreža L ima jedinicu, tada je ona jedinstvena i jedinica je najveći element u L, i obratno, ako L ima najveći element, onda je on jedinica u L. Ako mreža L ima nulu (jedinicu), najčešće je označavamo sa 0 (1). Mrežu sa nulom i jedinicom nazivamo *ograničena mreža*.

Mreža L je *potpuna za uniju* (*potpuna za presek*) ako za svaki $A \subseteq L$ postoji $\vee A$ ($\wedge A$), i *potpuna* ako je potpuna i za uniju i za presek. Ako je mreža L potpuna za uniju (presek), onda je $\vee L$ ($\wedge L$) jedinica (nula) mreže L. Ako je mreža L potpuna za uniju (presek) i ima nulu (jedinicu), tada se može dokazati da je L potpuna i za presek (uniju).

Indukcijom se dokazuje da u distributivnoj mreži L, za svaki $a \in L$ i svaki konačan podskup $\{x_i \mid i \in I\}$ od L važi:

$$a \wedge (\vee_{i\in I} x_i) = \vee_{i\in I}(a \wedge x_i), \qquad a \vee (\wedge_{i\in I} x_i) = \wedge_{i\in I}(a \vee x_i).$$

Ako je $\{x_i \mid i \in I\}$ beskonačan podskup, prethodne jednakosti u distributivnoj mreži ne moraju da važe. Stoga uvodimo sledeće definicije: Mreža L, potpuna za uniju (presek), je *beskonačno distributivna za presek* (*za uniju*) ako za svaki $a \in L$ i svaki podskup $\{x_i \mid i \in I\}$ od L važi:

$$a \wedge (\vee_{i\in I} x_i) = \vee_{i\in I}(a \wedge x_i), \qquad (a \vee (\wedge_{i\in I} x_i) = \wedge_{i\in I}(a \vee x_i).\ )$$

Mreža L je *beskonačno distributivna* ako je beskonačno distributivna i za uniju i za presek.

Neka je L mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Element $y \in L$ je *dopuna elementa* $x \in L$ ako je $x \wedge y = 0$ i $x \vee y = 1$. U tom slučaju je i x dopuna za y, tj. relacija "biti dopuna" je simetrična. Ako je L distributivna mreža sa nulom i jedinicom, tada svaki element iz L može imati najviše jednu dopunu, i dopunu elementa $x \in L$ označavamo sa x'. *Booleova algebra* je ograničena distributivna mreža u kojoj svaki element ima dopunu. Jedan primer Booleove algebre je partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ podskupova skupa A, sa operacijama skupovne unije i preseka. Booleovu algebru $\mathcal{P}(A)$ nazivamo *Booleova algebra podskupova skupa* A.

Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 1.4. *Neka je L distributivna mreža sa nulom 0 i jedinicom 1, i neka je $\mathfrak{B}(L)$ skup svih elemenata iz L koji imaju dopunu. Tada je $\mathfrak{B}(L)$ Booleova algebra.*

Ako je B proizvoljna podmreža od L koja je Booleova algebra sa nulom 0 i jedinicom 1, onda je $B \subseteq \mathfrak{B}(L)$. $\square$

Booleovu algebru $\mathfrak{B}(L)$ nazivamo *najveća Booleova podalgebra* distributivne mreže L.

Teorema 1.10. *Svaka potpuna Booleova algebra je beskonačno distributivna.*

Dokaz. Neka je B potpuna Booleova algebra, neka je $a \in B$ i neka je $\{x_i \mid i \in I\}$ podskup od B. Uzmimo da je $u = \vee_{i\in I}(a \wedge x_i)$. Za svaki $i \in I$ je $a \wedge x_i \leq a \wedge (\vee_{j\in I} x_j)$, odakle je

$$u = \vee_{i\in I}(a \wedge x_i) \leq a \wedge (\vee_{j\in I} x_j).$$

Sa druge strane, $a \wedge x_i \leq u$, za svaki $i \in I$, pa je

$$x_i = 1 \wedge x_i = (a \wedge x_i) \vee (a' \wedge x_i) \leq u \vee a',$$

za svaki $i \in I$. Sada dobijamo da je $\vee_{i\in I} x_i \leq u \vee a'$, odakle je

$$a \wedge (\vee_{i\in I} x_i) \leq a \wedge (u \vee a') = (a \wedge u) \vee (a \wedge a') = a \wedge u \leq u.$$

Dakle, B je beskonačno distributivna za presek. Slično se dokazuje da je B beskonačno distributivna i za uniju. $\square$

Neka L jeste mreža sa nulom 0. Element $a \in L$, $a \neq 0$, je *atom* mreže L ako ne postoji $x \in L$ tako da je $0 < x < a$, tj. ako je a minimalan element u uredjenom skupu $L - \{0\}$. Mreža L sa nulom je *atomična* ako za svaki $x \in L$, $x \neq 0$, postoji atom $a \in L$ tako da je $a \leq x$.

Teorema 1.11. *Neka B jeste potpuna Booleova algebra sa skupom atoma A. Tada B jeste atomična ako i samo ako za svaki $x \in B$ postoji $A_x \subseteq A$ tako da je $x = \vee A_x$.*

Pri tome, skup A_x sa takvom osobinom je jedinstven.

Dokaz. Neka je B atomična Booleova algebra i neka je $x \in B$. Neka je A_x skup svih atoma sadržanih u intervalu $[0, x]$, i neka je $y = \vee A_x$. Neka je $z = y' \wedge x$. Ako je $z \neq 0$, tada postoji $b \in A$ tako da je $b \leq z$. Kako je $z \leq x$, to je $b \leq x$, pa je $b \in A_x$, odakle sledi da je $b \leq \vee A_x = y$, tj. $b \wedge y = b$. Sa druge strane,

$$b = b \wedge z = b \wedge y \wedge z = b \wedge y \wedge y' \wedge x = 0,$$

što je u suprotnosti sa definicijom atoma. Prema tome, $z = 0$, odakle je

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y,$$

pa je $x \leq y$. Kako je jasno da je $y \leq x$, to je $x = y$, tj. $x = \vee A_x$.

Obrat sledi neposredno.

Dokazžimo drugi deo teoreme. Uzmimo da je $\vee P = \vee Q$, za neke $P, Q \subseteq A$. Uzmimo $a \in P$. Tada je $a \leq \vee X = \vee Q$, tj. $a \wedge (\vee Q) = a$. Ako $a \notin Q$, tada je $a \wedge b = 0$, za svaki $b \in Q$, jer su a i b atomi. Iz Teoreme 1.10. imamo da je B beskonačno distributivna, pa je $a = a \wedge (\vee Q) = \vee_{b \in Q}(a \wedge b) = 0$, što je u suprotnosti sa definicijom atoma. Prema tome, $a \in Q$, pa je $P \subseteq Q$. Slično dokazujemo obratnu inkluziju. Dakle, $P = Q$. $\square$

Posledica 1.3. *Neka B jeste potpuna Booleova algebra. Tada B jeste atomična ako i samo ako B jeste izomorfna Booleovoj algebri podskupova nekog skupa.*

Dokaz. Ako je B potpuna atomična Booleova algebra sa skupom atoma A, tada je B izomorfna Booleovoj algebri $\mathcal{P}(A)$.

Obratno, Booleova algebra $\mathcal{P}(A)$ podskupova nepraznog skupa A je atomična i atomi u $\mathcal{P}(A)$ su jednoelementni skupovi $\{a\}$, $a \in A$. $\square$

Na kraju ovog poglavlja navodimo Aksiomu izbora i bez dokaza navodimo jedan od njenih najpoznatijih ekvivalenata - Zornovu lemu.

Aksioma izbora. *Ako je A neprazan skup, tada postoji preslikavanje $\psi : \mathcal{P}(A) \to A$ takvo da je $X\psi \in X$, za svaki neprazan podskup X od A.*

Lema 1.5. (**Zornova lema**) *Neka je* A *uredjen skup sa osobinom da svaki lanac u* A *ima gornju granicu. Tada za svaki element* $x \in A$ *postoji bar jedan maksimalan element* $a \in A$ *takav da je* $x \leq a$. $\square$

Više o Aksiomi izbora i njenim ekvivalentima, kao i uopšte o uredjenim skupovima, čitalac može naći u knjigama M.R.Tasković [1], [2]. Za detaljnije upoznavanje sa Teorijom mreža upućujemo na: G.Birkhoff, [1], G.Szász, [1], i G.Grätzer, [1].

Zadaci.

1. Skup $\mathcal{E}(A)$ svih relacija ekvivalencije skupa A, uredjen inkluzijom, je mreža, pri čemu je $\xi \wedge \eta = \xi \cap \eta$ i $\xi \vee \eta = (\xi \cup \eta)^e$, za sve $\xi, \eta \in \mathcal{E}(A)$. Mreža $\mathcal{E}(A)$ je potpuna i ima jedinicu ω_S i nulu ϵ_S.

Mrežu $\mathcal{E}(A)$ nazivamo *mreža ekvivalencija* skupa A.

2. Neka su $\xi, \eta \in \mathcal{E}(A)$. Tada je $\xi \vee \eta = (\xi\eta)^\infty$. Ako je $\xi\eta = \eta\xi$, tada je $\xi\eta \in \mathcal{E}(A)$ i $\xi \vee \eta = \xi\eta$.

3. Skup $\mathcal{C}on(S)$ svih kongruencija polugrupe S, uredjen inkluzijom, je mreža, pri čemu je $\xi \wedge \eta = \xi \cap \eta$ i $\xi \vee \eta = (\xi \cup \eta)^\#$, za sve $\xi, \eta \in \mathcal{C}on(S)$. Mreža $\mathcal{C}on(S)$ je potpuna i ima jedinicu ω_S i nulu ϵ_S.

Mrežu $\mathcal{C}on(S)$ nazivamo *mreža kongruencija* polugrupe S.

4. Neka je L mreža. Tada za $a, b, c \in L$, iz $a \leq c$ sledi $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

5. Mreža L je *modularna* ako za sve $a, b, c \in S$, iz $a \leq c$ sledi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Dokazati da je mreža L modularna ako i samo ako je $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, za sve $a, b, c \in L$.

6. Neka $\mathfrak{S}(S)$ jeste *skup svih podpolugrupa polugrupe* S, i neka je skup $\mathfrak{S}^0(S)$ nastao dodavanjem praznog skupa skupu $\mathfrak{S}(S)$. Tada skup $\mathfrak{S}^0(S)$, uredjen inkluzijom, jeste mreža, pri čemu je $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$, za sve $A, B \in \mathfrak{S}(S)$. Prazan skup je nula ove mreže.

Mrežu $\mathfrak{S}^0(S)$ nazivamo *mreža podpolugrupa* polugrupe S.

7. Skup $\mathfrak{L}(G)$ svih podgrupa grupe G, uredjen inkluzijom, je mreža, pri čemu, za sve $A, B \in \mathfrak{L}(G)$, $A \wedge B = A \cap B$ i $A \vee B$ je presek svih podgrupa od G koje sadrže skup $A \cup B$.

Mrežu $\mathfrak{L}(G)$ nazivamo *mreža podgrupa* grupe G.

8. Relacija $\leq$ definisana sa: $a \leq b \Leftrightarrow (\exists x, y \in S^1)\ a = xb = by, xa = a = ay$, $(a, b \in S)$, je uredjenje proizvoljne polugrupe S. To uredjenje nazivamo *prirodno uredjenje polugrupe* S. Restrikcija ovog uredjenja na $E(S)$ (ako je $E(S) \neq \varnothing$) je prirodno uredjenje na $E(S)$.

Literatura. Birkhoff [1], Burris anh Sankanappanavar [1], Clifford and Preston [1], Grätzer [1], Howie [1], Mitsch [1], Petrich [19], Шеврин [1], Шеврин и Овсянников [1], [2], Szász [1], Tasković [1], [2].

1.6. Ideali.

Neka je S polugrupa. Podpolugrupa A polugrupe S je:

- *levi ideal* od S, ako je $SA \subseteq A$;
- *desni ideal* od S, ako je $AS \subseteq A$;
- (*dvostrani*) *ideal* od S, ako je A i levi i desni ideal od S, tj. ako je $SA \cup AS \subseteq A$;
- *kvazi-ideal* od S, ako je $SA \cap AS \subseteq A$;
- *bi-ideal* od S, ako je $ASA \subseteq A$.

Svaki kvazi-ideal polugrupe je njen bi-ideal, svaki levi (desni) ideal polugrupe je njen kvazi-ideal, i svaki ideal polugrupe je njen levi (desni) ideal. Polugrupa S je sama svoj ideal, dok (levi, desni, kvazi-, bi-) ideal od S različit od S nazivamo *pravi* (*levi, desni, kvazi-, bi-*) *ideal* od S. Ako je L levi ideal od S, R je desni ideal od S i A je podskup od S, tada je LA levi ideal, AR je desni ideal i LR je ideal od S. Osim toga, $RL \subseteq L \cap R$, pa je presek levog i desnog ideala polugrupe uvek neprazan. Štaviše, presek levog i desnog ideala polugrupe je njen kvazi-ideal. Obratno, ako je A kvazi-ideal od S, tada $A \cup SA$ levi i $A \cup AS$ je desni ideal od S, pri čemu je $(A \cup AS) \cap (A \cup SA) = A$. Prema tome, podpolugrupa A polugrupe S je njen kvazi-ideal ako i samo ako je A jednak preseku nekog levog i nekog desnog ideala od S.

Iz prethodnog imamo i da je presek dva ideala A i B polugrupe S neprazan, i da su AB i BA ideali od S sadržani u $A \cap B$. Takodje se može dokazati da presek proizvoljne konačne familije ideala polugrupe jeste neprazan. Za beskonačne familije ideala to ne mora da važi. Medjutim, ukoliko je presek neke familije (levih, desnih) ideala polugrupe S neprazan, onda je on (levi, desni) ideal od S. Prema tome, ako je A neprazan podskup polugrupe S, presek svih (levih, desnih) ideala od S koji sadrže A je (levi, desni) ideal od S koji nazivamo (*levi, desni*) *ideal od* S *generisan sa* A. Skup A je u tom slučaju *generatorni skup* tog (levog, desnog) ideala, i elementi skupa A su njegovi *generatorni elementi* ili *generatori*. Za element a polugrupe S, levi ideal, desni ideal i ideal od S generisan sa a označavamo redom sa $L(a)$, $R(a)$ i $J(a)$, i nazivamo ih *glavni levi ideal, glavni desni ideal* i *glavni ideal od* S *generisan sa* a. Lako se proverava da je

$$L(a) = S^1 a, \quad R(a) = aS^1, \quad J(a) = S^1 aS^1.$$

Neka su a i b elementi polugrupe S. Tada:

$$a \mid b \;\Leftrightarrow\; b \in J(a), \qquad a \mathop{\mid}_{l} b \;\Leftrightarrow\; b \in L(a), \qquad a \mathop{\mid}_{r} b \;\Leftrightarrow\; b \in R(a).$$

Ako $a \mid b$ ($a \mathop{\mid}_{l} b$, $a \mathop{\mid}_{r} b$), tada kažemo da $a \in S$ jeste *faktor* (*desni faktor,* *levi faktor*) *elementa* b. Relacije $|$, $\underset{l}{|}$ i $\underset{r}{|}$ su kvazi-uredjenja na S. Sa $\nmid$ označavamo suprotnu relaciju relacije $|$. Pomoću prethodnih relacija definišemo i sledeće relacije:

$$a \longrightarrow b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a \mid b^n, \quad a \xrightarrow{l} b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a \underset{l}{|} b^n,$$

$$a \xrightarrow{r} b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a \underset{r}{|} b^n,\ \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\text{—}\ = \longrightarrow \cap (\longrightarrow)^{-1},\ \overset{l}{—} = \xrightarrow{l} \cap (\xrightarrow{l})^{-1},$$

$$\overset{r}{—} = \xrightarrow{r} \cap (\xrightarrow{r})^{-1},\ \overset{t}{—} = \overset{r}{—} \cap \overset{l}{—},\ a \overset{p}{—} b \Leftrightarrow (\exists m, n \in \mathbf{Z}^+)\ a^m = b^n.$$

Skup $\mathcal{I}d(S)$ *svih ideala polugrupe* S, uredjen skupovnom inkluzijom, jeste mreža u kojoj se operacije unije i preseka poklapaju sa skupovnom unijom i presekom ideala, i nazivamo je *mreža ideala polugrupe* S. Za leve ideale to ne važi, jer presek dva leva ideala polugrupe može biti prazan. Zbog toga razlikujemo dva slučaja: Ako je S polugrupa sa nulom, tada je presek svaka dva leva ideala od S neprazan, jer sadrži nulu. U tom slučaju, skup $\mathcal{LI}d(S)$, uredjen skupovnom inkluzijom, je mreža sa unijom i presekom koji se poklapaju sa skupovnom unijom i presekom. Ako je S polugrupa bez nule, tada uzimamo da se skup $\mathcal{LI}d(S)$ sastoji od praznog skupa i svih levih ideala od S, i u tom slučaju je $\mathcal{LI}d(S)$ mreža izomorfna mreži $\mathcal{LI}d(S^0)$. U oba slučaja, mrežu $\mathcal{LI}d(S)$ nazivamo *mreža levih ideala polugrupe* S. Slično definišemo *mrežu desnih ideala polugrupe*, u oznaci $\mathcal{RI}d(S)$.

Neka je S polugrupa. Zbog činjenice da je presek svaka dva ideala polugrupe S neprazan, i da je taj presek ideal od S, mreža $\mathcal{I}d(S)$ može imati najviše jedan minimalan element i on je, naravno, najmanji element u $\mathcal{I}d(S)$. Najmanji element mreže $\mathcal{I}d(S)$, ukoliko on postoji, nazivamo *jezgro polugrupe* S. Neposredno se dokazuje da S ima jezgro ako i samo ako je presek svih ideala od S neprazan, i u tom slučaju je jezgro jednako tom preseku. Beskonačna monogena polugrupa je primer polugrupe koja nema jezgro. Minimalne elemente uredjenog skupa svih levih (desnih) ideala od S nazivamo *minimalni levi* (*desni*) *ideali* od S.

Ako je $S = S^0$, tada je $\{0\}$ ideal od S, koji nazivamo *nula ideal*, i nula ideal je jezgro od S. Zbog toga, kod polugrupa sa nulom radije razmatramo neke druge istaknute ideale: Minimalne elemente u uredjenom skupu svih ideala od S različitih od nula ideala nazivamo *0-minimalni ideali* od S, dok najmanji element tog skupa, ako on postoji, nazivamo *0-jezgro* od S. Minimalne elemente uredjenog skupa svih levih (desnih) ideala od S različitih od nula ideala nazivamo *0-minimalni levi* (*desni*) *ideali* od S.

Polugrupa S je *prosta* (*levo prosta, desno prosta*) ako S nema pravih ideala (levih ideala, desnih ideala). Kako polugrupa S sa nulom ima nula ideal kao svoj pravi ideal, to je kod takve polugrupe zanimljiv slučaj kada je nula ideal jedini pravi dvostrani (levi, desni) ideal od S. Uvedimo sledeće definicije: Polugrupa $S = S^0$ je *nul-polugrupa* ako je $S^2 = 0$, tj. ako je $ab = 0$, za sve $a, b \in S$. Polugrupa $S = S^0$ je *0-prosta* (*levo 0-prosta, desno 0-prosta*) ako važe sledeći uslovi:

(a) S nije nul-polugrupa;

(b) nula ideal je jedini pravi dvostrani (levi, desni) ideal od S.

Važnu osobinu 0-minimalnih levih ideala polugrupe sa nulom opisuje

Teorema 1.12. *Neka je L 0-minimalan ideal polugrupe $S = S^0$. Tada važi jedan od sledećih uslova:*

(a) $Sa = L$, *za svaki* $a \in L^\bullet$;

(b) $L = \{0, a\}$ *i* $Sa = 0$.

Dokaz. Za $a \in L^\bullet$, Sa je levi ideal od S sadržan u L, pa je $Sa = L$ ili $Sa = 0$. Ako je $Sa = L$, za svaki $a \in L^\bullet$, tada važi (a). Neka je $Sa = 0$, za neki $a \in L^\bullet$. Tada je $\{0, a\}$ levi ideal od S sadržan u L, odakle je $L = \{0, a\}$, pa važi (b). $\square$

Neposredno iz Teoreme 1.12. dobijamo

Posledica 1.4. *Polugrupa $S = S^0$ je levo 0-prosta ako i samo ako je $Sa = S$, za svaki $a \in S^\bullet$.* $\square$

Ako je S polugrupa bez nule, primenom Posledice 1.4. na polugrupu S^0, dobijamo

Posledica 1.5. *Polugrupa S je levo prosta ako i samo ako je $Sa = S$, za svaki $a \in S$.* $\square$

Sledeća teorema daje jednu značajnu osobinu 0-minimalnih ideala.

Teorema 1.13. *Neka M jeste 0-minimalan ideal polugrupe S. Tada je $M^2 = 0$ ili je $MaM = M$, za svaki $a \in M^\bullet$.*

Dokaz. Neka je $M^2 \neq 0$. Kako je M^2 ideal od S sadržan u M, to je $M^2 = M$, odakle je $M^3 = M$. Neka je $a \in M^\bullet$. Tada je $J(a) = S^1aS^1$ nenula ideal od S sadržan u M, pa je $M = S^1aS^1$. Prema tome, $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$, pa je $M = MaM$. $\square$

Kao posledice Teoreme 1.13. dobijamo

Posledica 1.6. *Polugrupa $S = S^0$ je 0-prosta ako i samo ako je $SaS = S$, za svaki $a \in S^\bullet$.* $\square$

Posledica 1.7. *Neka M jeste 0-minimalan ideal polugrupe S. Tada je $M^2 = 0$ ili M jeste 0-prosta podpolugrupa od S.* $\square$

Za polugrupu S bez nule, primenom Posledice 1.7. na polugrupu S^0, dobijamo

Posledica 1.8. *Polugrupa S je prosta ako i samo ako je $SaS = S$, za svaki $a \in S$.* $\square$

Posledica 1.9. *Neka je K ideal polugrupe S. Tada je K jezgro od S ako i samo ako je K prosta polugrupa.*

Dokaz. Neka je K jezgro od S. Za proizvoljan $a \in S$, KaK je ideal od S sadržan u K, pa kako je K jezgro, to je $K = KaK$. Dakle, prema Posledici 1.8, K je prosta polugrupa.

Obratno, neka je K prosta polugrupa. Za proizvoljan ideal A od S, $A \cap K$ je ideal od K, pa kako je K prost, to je $A \cap K = K$, tj $K \subseteq A$. Prema tome, K je jezgro. $\square$

Maksimalan element uredjenog skupa svih pravih levih (desnih) ideala od S nazivamo *maksimalan levi* (*desni*) *ideal* od S. Sledećom teoremom opisujemo maksimalan levi ideal polugrupe:

Teorema 1.14. *Neka je L pravi levi ideal polugrupe S. Tada je L maksimalan ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*
(a) $S - L = \{a\}$ *i* $a^2 \in L$;
(b) $S - L \subseteq Sa$, *za svaki* $a \in S - L$.

Dokaz. Neka je L maksimalan levi ideal od S. Tada razlikujemo dva slučaja:
(a) Postoji $a \in S - L$ tako da je $Sa \subseteq L$. U tom slučaju je $L \cup \{a\} = S$. Dakle, $S - L = \{a\}$, $a^2 \in L$.
(b) Za svaki $a \in S - L$ je $Sa \nsubseteq L$. Tada je $L \cup Sa = S$. Dakle, $S - L \subseteq Sa$, za svaki $a \in S - L$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Neka $L(S)$ označava *uniju svih pravih levih ideala* polugrupe S.

Teorema 1.15. *Neka je $L(S)$ kao u slučaju (b) Teoreme 1.14. Tada je $S - L(S) = \{a \in S \mid Sa = S\}$ i $S - L(S)$ je podpolugrupa od S.*

Dokaz. Za $a \in S - L(S)$ imamo da je $S = L(S) \cup (S - L(S)) = a \cup Sa$, pa je $L(S) \subseteq Sa$. Odavde i iz $S - L(S) \subseteq Sa$ imamo da je $S = Sa$, za svaki $a \in S - L(S)$.

Obratno, neka je $S = Sa$, za svaki $a \in S - L(S)$. Tada je $S - L(S) \subseteq Sa$, $a \in S - L(S)$. Prema tome, $S - L(S) = \{a \in S \mid Sa = S\}$, i jasno je da je $S - L(S)$ podpolugrupa od S. $\square$

Posledica 1.10. *Neka je A pravi ideal polugrupe S koji nije pravi podskup nijednog levog ideala od S. Tada važi jedan od sledećih uslova:*
(a) $S - A$ *je levo prosta polugrupa;*

(b) $S - A = \{a\}$ i $a^2 \in A$.

Dokaz. Neka (a) $S - A = T$ ima bar dva elementa. Tada na osnovu Teoreme 1.15, T je podpolugrupa od S. Kako je $A \cup Sa = A \cup (A \cup T)a = A \cup T = S$, za svaki $a \in T$, i $A \cap T = \varnothing$, to je $T \subseteq Ta \subseteq T$, tj. $Ta = T$, za svaki $a \in T$, pa je T levo prosta polugrupa. Dakle, u ovom slučaju važi (a).

Neka je $S - A = \{a\}$. Tada je $a^2 = a$ i $S - A$ je grupa, pa važi (a), ili je $a^2 \neq a$, tj. $a^2 \in A$, pa važi (b). $\square$

Ako je A minimalan element skupa svih bi-ideala polugrupe S, onda ga nazivamo *minimalan bi-ideal* od S.

Sledeća lema se dokazuje neposredno.

Lema 1.6. *Neka je A bi-ideal polugrupe S i neka su $x, y \in S$. Tada je xAy takodje bi-ideal od S.* $\square$

Lema 1.7. *Neka je M minimalan bi-ideal polugrupe S, neka su $x, y \in M$, i neka je A bi-ideal od S. Tada je $M = xAy$.*

Dokaz. Prema Lemi 1.6, xAy je bi-ideal od S. Kako je $xAy \subseteq MAM \subseteq MSM \subseteq M$, i kako je M minimalan bi-ideal, to je $xAy = M$. $\square$

Lema 1.8. *Neka je M minimalan bi-ideal polugrupe S, neka su $x, y \in S$. Tada je i xMy minimalan bi-ideal.*

Dokaz. Prema Lemi 1.6, xMy je bi-ideal od S. Uzmimo da je A bi-ideal od S sadržan u xMy. Tada je $A = \{xay \mid a \in H\}$, gde je $H \subseteq M$. Uzmimo $a, b \in H$, $u \in S$. Tada je $xayuxby \in A$, pa je $ayuxb \in H$. Prema tome, $aySxb \subseteq H$. Kako su $a, b \in M$ i ySx je bi-ideal od S, ta prema Lemi 1.7, $M = aySxb \subseteq H$. Dakle, $M = H$, odakle je $A = M$, pa je M minimalan bi-ideal od S. $\square$

Prema Lemama 1.7. i 1.8, dobijamo

Lema 1.9. *Neka je M minimalan bi-ideal od S. Tada svaki minimalan bi-ideal od S je oblika xMy, za $x, y \in S$.* $\square$

Minimalan bi-ideal se karakteriše sledećom lemom.

Lema 1.10. *Bi-ideal M polugrupe S je minimalan ako i samo ako M jeste grupa.*

Dokaz. Neka je M minimalan bi-ideal od S. Za $x, y \in M$, prema Lemi 1.7, $M = xMy$, odakle $M = aM = Ma$, za $a \in M$, pa je M podgrupa od S.

Obratno, neka je M grupa. Neka je A bi-ideal od S sadržan u M. Uzmimo $a \in M$, $x, y \in A$. Neka su x^{-1} i y^{-1} inverzi od x i y u grupi M, tim redom. Tada je $a = x(x^{-1}ay^{-1})y \in ASA \subseteq A$. Prema tome, $M = A$, pa je M minimalan bi-ideal od S. $\square$

Teorema 1.16. *Neka je K unija svih minimalnih bi-ideala polugrupe S. Ako je $K \neq \varnothing$, tada je K jezgro od S.*

Dokaz. Neka je M minimalan bi-ideal od S. Prema Lemi 1.9, $K = \cup\{xMy \mid x, y \in S\} = SMS$, pa je K ideal od S. Uzmimo $a, b \in K$. Tada je $a \in M$, $b \in N$, za neke minimalne bi-ideale M i N od S, i prema Lemi 1.9, $N = xMy$, za neke $x, y \in S$, odakle je $b = xcy$, za neki $c \in M$. Kako je M grupa, to je $c = caa^{-1}$, pa je $b = xcy = (xc)a(a^{-1}y) \in KaK$. Dakle, $KaK = K$, za svaki $a \in K$, pa prema Posledicama 1.8. i 1.9, K je jezgro od S. $\square$

Neka su A i B podskupovi polugrupe S, i neka je $A \subseteq B$. Tada je A *dosledan* (*desno dosledan, levo dosledan*) *podskup* od B, u oznaci $A \leq_C B$ $(A \leq_{RC} B,\ A \leq_{LC} B)$, ako za $x, y \in B$,

$$xy \in A \ \Rightarrow\ x \in A \ \wedge\ y \in A \qquad (\ xy \in A \ \Rightarrow\ y \in A, \quad xy \in A \ \Rightarrow x \in A\ ).$$

Prazan podskup takodje smatramo doslednim podskupom od B. Ako je $A \leq_C S$ $(A \leq_{RC} S,\ A \leq_{LC} S)$, tada kažemo, kraće, da je A *dosledan* (*desno dosledan, levo dosledan*) *podskup*.

Dokazi sledećih lema su elementarni.

Lema 1.11. *Relacija $\leq_C$ je uredjenje na partitivnom skupu $\mathcal{P}(S)$ polugrupe S, $\leq_C = \leq_{LC} \cap \leq_{RC}$, $\leq_{RC} \cdot \leq_C = \leq_{RC}$ i $\leq_{LC} \cdot \leq_C = \leq_{LC}$, gde sa "$\cdot$" označavamo množenje relacija.* $\square$

Lema 1.12. *Presek i unija proizvoljne familije doslednih* (*desno doslednih, levo doslednih*) *podskupova podskupa A polugrupe S su dosledni* (*desno dosledni, levo dosledni*) *podskupovi od A.*

Lema 1.13. *Neka je A podskup polugrupe S različit od S.*

(*a*) *$A \leq_{RC} S$ ($A \leq_{LC} S$) ako i samo ako $S - A$ jeste levi* (*desni*) *ideal od S.*

(*b*) *$A \leq_C S$ ako i samo ako $S - A$ jeste ideal od S.* $\square$

Podskup A polugrupe S je *potpuno prim podskup* od S ako za $x, y \in S$,

$$xy \in A \ \Rightarrow\ (\ x \in A \ \vee\ y \in A\ ).$$

Podskup A polugrupe S je *potpuno poluprim podskup* od S ako za $x \in S$, iz $x^2 \in A$ sledi da je $x \in A$. Jasno je da svaki potpuno prim podskup od S jeste potpuno poluprim. Prazan skup takodje smatramo potpuno prim podskupom od S.

Podpolugrupa A polugrupe S je *filter* (*levi filter, desni filter*) od S ako A jeste dosledan (desno dosledan, levo dosledan) podskup od S. Za element a polugrupe S, presek svih filtera od S koji sadrže a nazivamo *glavni filter od* S *generisan sa* a, i označavamo ga sa $N(a)$.

Neposredno se dokazuju

Lema 1.14. *Neka A jeste neprazan podskup polugrupe S različit od S.*

(a) *A je potpuno prim podskup od S ako i samo ako $S - A$ jeste podpolugrupa od S.*

(b) *A je potpuno prim levi (desni) ideal od S ako i samo ako $S - A$ jeste levi (desni) filter od S.*

(c) *A je potpuno prim ideal od S ako i samo ako $S - A$ jeste filter od S.* $\square$

Lema 1.15. *Presek proizvoljne familije potpuno poluprim podskupova polugrupe S je potpuno poluprim podskup od S.* $\square$

Posledica 1.11. *Presek proizvoljne familije potpuno prim (potpuno poluprim) ideala polugrupe S, ukoliko je neprazan, je potpuno poluprim ideal od S.* $\square$

Neka je A ideal polugrupe S. Ideal A je *poluprim ideal* od S ako za $a \in S$, iz $aSa \subseteq A$ sledi $a \in A$. Ideal A je *prim ideal* od S ako za $a, b \in S$, iz $aSb \subseteq A$ sledi da je $a \in A$ ili $b \in A$.

Sledeća lema daje alternativnu definiciju prim ideala.

Lema 1.16. *Neka je A ideal polugrupe S. Tada je A prim ideal od S ako i samo ako za ideale M, N od S, iz $MN \subseteq A$ sledi $M \subseteq A$ ili $N \subseteq A$.*

Dokaz. Neka je A prim ideal od S, i neka su M i N ideali od S takvi da je $MN \subseteq A$. Uzmimo da postoje $x \in M - A$, $y \in N - A$. Tada je $xSy \subseteq MSN \subseteq MN \subseteq A$, pa je $x \in A$ ili $y \in A$, jer je A prim ideal. Medjutim, to protivreči polaznoj pretpostavci. Dakle, $M - A = \varnothing$ ili $N - A = \varnothing$, tj. $M \subseteq A$ ili $N \subseteq A$.

Obratno, neka za ideale M i N od S, iz $MN \subseteq A$ sledi $M \subseteq A$ ili $N \subseteq A$. Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xSy \subseteq A$. Tada je $J(x)J(y) \subseteq A$, odakle je $J(x) \subseteq A$ ili $J(y) \subseteq A$, tj. $x \in A$ ili $y \in A$. Dakle, A je prim ideal od A. $\square$

Zadaci.

1. Neka je ϕ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T. Ako je A levi (desni) ideal od S, tada je $A\phi$ levi (desni) ideal od T. Ako je B levi (desni) ideal od T, tada je $B\phi^{-1}$ levi (desni) ideal od S.

2. Ako je X konačan skup, tada je svaki ideal polugrupe $\mathcal{T}_r(X)$ glavni. Ako je X beskonačan prebrojiv skup, tada jedini neglavni ideal od $\mathcal{T}_r(X)$ jeste skup svih preslikavanja iz $\mathcal{T}_r(X)$ čija je slika konačan podskup od X.
3. Polugrupa S je levo (desno) 0-prosta ako i samo ako $S^\bullet$ jeste levo (desno) prosta podpolugrupa od S.
4. Neka je M 0-minimalan ideal polugrupe $S = S^0$ koji sadrži bar jedan 0-minimalan levi ideal od S. Tada je M unija svih 0-minimalnih levih ideala od S sadržanih u M.

Ako je, pri tome, $M^2 \neq 0$, tada svaki levi ideal od M jeste levi ideal od S.
5. Polugrupa S nema pravih kvazi-ideala (bi-ideala) ako i samo ako S jeste grupa.
6. Ako je L levi ideal i R je desni ideal polugrupe S, ako je B je podskup od S takav da je $RL \subseteq B \subseteq R \cap L$, tada je B bi-ideal od S.
7. Polugrupa S je grupa ako i samo ako je levo prosta i desno prosta.
8. Dokazati da u monogenoj polugrupi $S = \langle a \rangle = M(i,p)$, grupa $K_a = \{a^i, a^{i+1}, \dots, a^{i+p+}\}$ jeste jezgro od S.
9. Polugrupa ne može imati pravih levo doslednih levih ideala i ne može imati pravih doslednih ideala.

Literatura. Bogdanović [9], Carman [1], Clifford [2], Clifford and Preston [1], [2], Dubreil [1], Good and Hughes [1], Grimble [1], Howie [1], Kist [1], Krgović [1], [2], [3], Lajos [1], Lallement [1], [2], [3], Malinović [1], [2], Milić and Pavlović [1], Saito and Hori [1], Schwarz [2], [3], 4[], [6], Steinfeld [3], Wallace [2], [3].

1.7. Idealske i retraktivne ekstenzije.

Neka je T ideal polugrupe S. Definišimo relaciju θ na S sa:

$$a\,\theta\,b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \ \vee \ a, b \in T, \qquad\qquad (a, b \in S),$$

tj. $\theta = \epsilon_S \cup T \times T$. Neposredno se proverava da je θ kongruencija na S, i nazivamo je *Reesova kongruencija* odredjena idealom T. Faktor polugrupu S/θ nazivamo *Reesova faktor polugrupa* po idealu T, i označavamo je sa S/T. Uzmimo da je $S/T = Q$. Iz definicije Reesove kongruencije vidi se da T jeste jedna θ-klasa od S, koja je nula u Q. Prema tome, Reesova faktor polugrupa je polugrupa sa nulom. Za $a \in S - T$, θ-klasa elementa a je jednoelementna. Prema tome, polugrupu Q možemo, neformalno, posmatrati kao polugrupu dobijenu iz S sažimanjem ideala T u jedan element (nulu), dok je parcijalna polugrupa $S - T$ ostala nepromenjena. Formalno, polugrupa Q je izomorfna nultom proširenju parcijalne polugrupe $S - T$. Zbog toga, obično poistovećujemo parcijalne polugrupe $Q^\bullet$ i $S - T$.

Polugrupa S je *idealska ekstenzija* polugrupe T pomoću polugrupe Q sa nulom ako je T izomorfna idealu T' od S i faktor polugrupa S/T je izomorfna sa Q. U tom slučaju poistovećujemo polugrupe T i T', polugrupe S/T' i Q, i parcijalne polugrupe $S-T$ i $Q^\bullet$. Jedan od glavnih problema u vezi idealskih ekstenzija je sledeći: Ako su date polugrupa T i polugrupa Q sa nulom, kako konstruisati idealsku ekstenziju S od T pomoću Q? Drugim rečima, ako uzmemo da je $S = T \cup Q^\bullet$, postavlja se pitanje: Kako definisati množenje $*$ na S tako da S bude polugrupa, T bude ideal od S i faktor polugrupa S/T bude izomorfna sa Q, tj. da važe sledeći uslovi:

$(M1)$ $x * y = xy$, ako je $xy \neq 0$; $(M2)$ $x * y \in T$, ako je $xy = 0$;
$(M3)$ $a * b = ab$; $(M4)$ $a * x \in T$; $(M5)$ $x * a \in T$;

za sve $x, y \in Q^\bullet$, $a, b \in T$? Jedan pogodan način za konstrukciju nekih idealskih ekstenzija daju nam parcijalni homomorfizmi. Parcijalne homomorfizme smo definisali u Tački 1.3. Sledećom lemom prikazujemo njihovu ulogu u konstrukciji nekih idealskih ekstenzija:

Lema 1.17. *Neka T i $Q = Q^0$ jesu polugrupe, i neka je $\varphi : Q^\bullet \to T$ parcijalni homomorfizam. Definišimo množenje $*$ na $S = T \cup Q^\bullet$ sa:*

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{ako je } xy \neq 0 \text{ u } Q \\ (x\varphi)(y\varphi) & \text{ako je } xy = 0 \text{ u } Q \end{cases},$$
$$a * x = a(x\varphi), \quad x * a = (x\varphi)a, \quad a * b = ab,$$

za $x, y \in Q^\bullet$, $a, b \in T$. Tada S sa tako definisanom operacijom jeste polugrupa i S je idealska ekstenzija od T pomoću Q.

Dokaz. Dokazuje se neposredno. $\square$

Idealsku ekstenziju konstruisanu kao u Lemi 1.17. nazivamo *ekstenzija od T pomoću Q odredjena parcijalnim homomorfizmom.*

U tesnoj vezi sa idealskim ekstenzijama odredjenim parcijalnim homomorfizmima su tzv. retraktivne ekstenzije, o kojima će sada biti reči.

Endomorfizam φ polugrupe S je *retrakcija* ako je $\varphi^2 = \varphi$, tj. ako je $(x\varphi)\varphi = x\varphi$, za svaki $x \in S$. Ako je φ retrakcija polugrupe S, tada podpolugrupu $T = S\varphi$ od S nazivamo *retrakt od S* i kažemo da je *φ retrakcija od S na T*. Drugim rečima, podpolugrupa T polugrupe S je retrakt od S ako postoji retrakcija od S na T, tj. ako postoji homomorfizam φ od S na T takav da je $x\varphi = x$, za svaki $x \in T$.

Ovde će nas posebno interesovati retrakti date polugrupe koji su istovremeno njeni ideali. Ako je T retrakt polugrupe S i ideal od S, tada T jeste *retraktivni ideal od S* i odgovarajuća retrakcija od S na T je *idealska retrakcija*. Drugim rečima, retrakcija φ polugrupe S je *idelaska retrakcija od S* ako $S\varphi$ jeste ideal od S. Sledećom lemom dajemo jednu karakterizaciju idealskih retrakcija:

Lema 1.18. *Retrakcija* φ *polugrupe* S *je idealska retrakcija od* S *ako i samo ako je* $(xy)\varphi = x(y\varphi) = (x\varphi)y$, *za sve* $x, y \in S$.

Dokaz. Neka φ jeste idealska retrakcija od S, tj. neka $T = S\varphi$ jeste ideal od S. Uzmimo $x, y \in S$. Kako je $y\varphi \in T$, to je $x(y\varphi) \in T$, odakle

$$x(y\varphi) = [x(y\varphi)]\varphi = (x\varphi)(y\varphi^2) = (x\varphi)(y\varphi) = (xy)\varphi.$$

Slično dokazujemo da je $x(y\varphi) = (xy)\varphi$.

Obratno, neka je $(xy)\varphi = x(y\varphi) = (x\varphi)y$, za sve $x, y \in S$, i neka je $T = S\varphi$. Uzmimo $a \in T$, $x \in S$. Tada je $ax = (a\varphi)x = (ax)\varphi \in T$, i slično, $xa \in T$. Dakle, T je ideal od S. □

Lema 1.19. *Neka je* T *polugrupa. Svakom elementu* $a \in T$ *pridružimo skup* Y_a *tako da je*

$$a \in Y_a, \quad Y_a \cap Y_b = \varnothing \text{ ako je } a \neq b, \qquad (a, b \in T).$$

Za $a, b \in T$, *neka su* $\varphi^{(a,b)} : Y_a \times Y_b \to Y_{ab}$ *preslikavanja za koja važi:*

$$(x, b)\varphi^{(a,b)} = (a, y)\varphi^{(a,b)} = ab, \tag{3}$$

za sve $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, $a, b \in T$, *i*

$$\big((x, y)\varphi^{(a,b)}, z\big)\,\varphi^{(ab,c)} = \big(x, (y, z)\varphi^{(b,c)}\big)\,\varphi^{(a,bc)}, \tag{4}$$

za sve $x \in Y_a - \{a\}$, $y \in Y_b - \{b\}$, $z \in Y_c - \{c\}$, $a, b, c \in T$. *Definišimo množenje* $*$ *na* $S = \cup_{a\in T} Y_a$ *sa:*

$$x * y = (x, y)\varphi^{(a,b)}, \qquad \text{ako } x \in Y_a,\ y \in Y_b,\ a, b \in T.$$

Tada je S *sa tako definisanim množenjem polugrupa, u oznaci* $(T; Y_a, \varphi^{(a,b)})$.

Dokaz. Uzmimo $x, y, z \in S$, $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, $z \in Y_c$, $a, b, c \in T$. Na osnovu (4) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x, y)\varphi^{(a,b)} * z = \big((x, y)\varphi^{(a,b)}, z\big)\,\varphi^{(ab,c)} \\ &= \big(x, (y, z)\varphi^{(b,c)}\big)\,\varphi^{(a,bc)} = x * (y, z)\varphi^{(b,c)} = x * (y * z).\end{aligned}$$

Dakle, S je polugrupa. □

Podskup A polugrupe S je *transverzala* od S ako postoji kongruencija ξ na S tako da svaka ξ-klasa sadrži tačno jedan element iz A.

Sledećom teoremom se karakteriše retraktivna ekstenzija, odnosno idealska ekstenzija odredjena parcijalnim homomorfizmom:

Teorema 1.17. *Neka* T *jeste ideal polugrupe* S. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(*i*) S *je idealska ekstenzija od* T *odredjena parcijalnim homomorfizmom;*

(*ii*) S *je retraktivna ekstenzija od* T*;*

(*iii*) T *je transverzala od* S*;*

(*iv*) *S je izomorfna nekoj polugrupi $(T; Y_a, \varphi^{(a,b)})$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka φ jeste parcijalni homomorfizam kojim je odredjeno množenje na S. Definišimo preslikavanje $\psi : S \to T$ sa:

$$x\psi = \begin{cases} x\varphi & \text{ako je } x \in S_T \\ x & \text{ako je } x \in T \end{cases}.$$

Lako se proverava da ψ jeste retrakcija od S na T.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je φ retrakcija od S na T. Tada, u uobičajenom poistovećivanju parcijalnih polugrupa $S - T$ i $Q^\bullet$, gde je $Q = S/T$, restrikcija ψ retrakcije φ na $Q^\bullet$ je parcijalni homomorfizam iz $Q^\bullet$ u T i množenje na S je odredjeno tim parcijalnim homomorfizmom, na način prikazan u Lemi 1.17.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka φ jeste retrakcija od S na T. Za $a \in T$, neka je $Y_a = a\varphi^{-1} = \{x \in S \mid x\varphi = a\}$. Tada je $S = \cup_{a\in T} Y_a$, i za skupove Y_a, $a \in T$, su ispunjeni uslovi Leme 1.19.

Za proizvoljne $x, y \in S$ postoje $a, b \in T$ tako da je $x \in Y_a$, $y \in Y_b$, tj. $x\varphi = a$, $y\varphi = b$, odakle je $(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) = ab \in Y_{ab}$. Leko se proverava da za $a, b \in T$, preslikavanje $\varphi^{(a,b)} : Y_a \times Y_b \to Y_{ab}$ definisano sa:

$$(x, y)\varphi^{(a,b)} = (xy)\varphi,$$

zadovoljava uslov (4) i da je množenje na S definisano kao u Lemi 1.19. Kako T jeste ideal od S, to važi (3).

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Neka je $S = (T; Y_a, \varphi^{(a,b)})$. Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to T$ sa $x\varphi = a$ ako je $x \in Y_a$, $a \in T$. Lako se proverava da je φ retrakcija od S na T.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Neka je ξ kongruencija na S takva da u svakoj ξ-klasi je tačno po jedan element iz T. Za $a \in T$, neka je $C_a = \{x \in S \mid a\,\xi\,x\}$, i definišimo preslikavanje $\varphi : S \to T$ sa $x\varphi = a$ ako je $x \in C_a$, $a \in T$. Jasno je da je φ retrakcija od S na T.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $\varphi : S \to T$ retrakcija. Tada je $\xi = \ker\varphi$ kongruencija na S. Neka C jeste proizvoljna ξ-klasa od S, i neka su $a, b \in C \cap T$. Tada je $a = a\varphi = b\varphi = b$. Prema tome, T je transverzala od S. $\square$

Teorema 1.18. *Polugrupa T je retrakt svake svoje idealske ekstenzije ako i samo ako T ima jedinicu.*

Dokaz. Neka T jeste retrakt svake svoje idealske ekstenzije. Tada T jeste i retrakt polugrupe $S = T^1$. Neka φ jeste retrakcija od S na T. Tada za proizvoljan $x \in T$ je

$$x(1\varphi) = (x\varphi)(1\varphi) = (x1)\varphi = x\varphi = x = (1x)\varphi = (1\varphi)(x\varphi) = (1\varphi)x,$$

pa 1φ jeste jedinica u T.

Obratno, neka T jeste polugrupa sa jedinicom e. Neka S jeste proizvoljna idealska ekstenzija od T. Tada se lako proverava da preslikavanje $\varphi : S \to T$ definisano sa:

$$x\varphi = xe, \qquad (x \in S),$$

jeste retrakcija od S na T. $\square$

Lema 1.20. *Neka je ξ kongruencija polugrupe S. Za svaku kongruenciju η na S koja sadrži ξ definišimo relaciju η' na S/ξ sa:*

$$(x\xi)\,\eta'(y\xi) \quad \Leftrightarrow \quad x\,\eta\,y, \qquad (x, y \in S).$$

Tada η' jeste kongruencija na S/ξ i preslikavanje $\eta \mapsto \eta'$ skupa svih kongruencija polugrupe S koje sadrže ξ u skup svih kongruencija polugrupe S/ξ je bijekcija koja očuvava uredjenje.

Dokaz. Sledi neposredno. $\square$

Neka T jeste ideal polugrupe S. Kongruencija ξ na S je *T-kongruencija* ako njena restrikcija na T je ϵ_T. Idealska ekstenzija S polugrupe T je *gusta ekstenzija* od S ako jednakost jeste jedina T-kongruencija na S.

Lema 1.21. *Neka je S idealska ekstenzija polugrupe T, neka ξ jeste T-kongruencija na S i neka je S/ξ idealska ekstenzija od T. Tada S/ξ jeste gusta ekstenzija od T ako i samo ako ξ jeste maksimalna T-kongruencija na S.*

Dokaz. Sledi na osnovu Leme 1.20. $\square$

Teorema 1.19. *Neka je D idealska ekstenzija polugrupe T, i neka je $Q = Q^0$ polugrupa takva da je $T \cap Q = \varnothing$. Neka je $\varphi : Q^\bullet \to D$ parcijalni homomorfizam za koji je $(a\varphi)(b\varphi) \in T$, kad god je $ab = 0$ u Q, $(a, b \in Q)$. Definišimo množenje $*$ na $S = T \cup Q^\bullet$ sa:*

$$a * b = \begin{cases} (a\varphi)b & \text{za } a \in Q^\bullet,\ b \in T, \\ a(b\varphi) & \text{za } a \in T,\ b \in Q^\bullet, \\ (a\varphi)(b\varphi) & \text{za } a, b \in Q^\bullet,\ ab = 0 \text{ u } Q, \\ ab & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je S idealska ekstenzija od T pomoću Q.

Obratno, svaka idealska ekstenzija polugrupe T pomoću polugrupe Q se može ovako konstruisati, za neku ekstenziju D od T i neki parcijalni homomorfizam φ iz $Q^\bullet$ u D, pri čemu se može uzeti da je D gusta ekstenzija od T i da je $D = T \cup Q^\bullet\varphi$.

Dokaz. Neka je S idealska ekstenzija od T pomoću Q. U parcijalno uredjenom skupu svih T-kongruencija na S, prema Zornovoj lemi, postoji maksimalni element, tj. postoji maksimalna T-kongruencija ξ na S. Neka je $D = S/\xi$, i neka je φ restrikcija prirodnog homomorfizma $\xi^\natural$ na $Q^\bullet = S - T$.

Ako su $a, b \in Q^\bullet$ i $ab \neq 0$ u Q, tada je $(a\varphi)(b\varphi) = (a\xi^\natural)(b\xi^\natural) = (ab)\xi^\natural = (ab)\varphi$, pa je φ je parcijalni homomorfizam. Ako su $a, b \in Q^\bullet$ i $ab = 0$ u Q, tj. $ab \in T$ u S, tada je $(a\varphi)(b\varphi) = (a\xi^\natural)(b\xi^\natural) = (ab)\xi^\natural = ab \in S$. Dalje, $D = S\xi^\natural = T \cup Q^\bullet\varphi$. Prema Lemi 1.21, D je gusta ekstenzija od T.

Za $a \in S$, $b \in Q^\bullet$ je $ab \in S$, pa je $ab = (ab)\xi^\natural = (a\xi^\natural)(b\xi^\natural) = a(b\varphi)$. Slično se dokazuju i ostali slučajevi iz definicije množenja $*$. Prema tome, polugrupa S može biti konstruisana na način prikazan u formulaciji teoreme.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Neka je $S = S^0$. Element $a \in S$ je *nilpotent* ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = 0$. Skup svih nilpotenata polugrupe S označavamo sa $Nil(S)$. Polugrupa S je *nil-polugrupa* ako je $S = Nil(S)$. Idealska ekstenzija S polugrupe T je *nil-ekstenzija* od T ako je S/T nil-polugrupa, tj. ako je $\sqrt{T} = S$. Polugrupa $S = S^0$ je *nilpotentna* ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $S^{n+1} = 0$. Ako je $S^{n+1} = 0$, tada kažemo da je S $(n+1)$-*nilpotentna*. Polugrupa S je *nilpotentna, klase nilpotentnosti* $n+1$, ako je S $(n+1)$-nilpotentna i nije n-nilpotentna. Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Idealsku ekstenziju S polugrupe T pomoću nilpotentne ($(n+1)$-nilpotentne) polugrupe nazivamo *nilpotentna* ($(n+1)$-*nilpotentna*) *ekstenzija* od T. Retraktivnu $(n+1)$-nilpotentnu ekstenziju polugrupe T nazivamo n-*inflacija* polugrupe T, 1-inflaciju nazivamo *inflacija*, a 2-inflaciju nazivamo *jaka inflacija*.

Zadaci.

1. Neka su I i J ideali polugrupe S. Tada su i $I \cap J$ i $I \cup J$ ideali od S i $(I \cup J)/J \cong I/(I \cap J)$.

2. Polugrupa S je *polugrupa sa jedinstvenim razlaganjem* ako svaki nenula element iz S ima jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz $S - S^2$. Neka su $T = T^0$ i S polugrupe. Tada

(a) postoji polugrupa U sa jedinstvenim razlaganjem i homomorfizam ϕ iz U na T takav da je $|0\phi^{-1}| = 1$;

(b) ako je α parcijalni homomorfizam iz $U^\bullet$ u S tako da je $\ker\phi \subseteq \ker\alpha$ na $U^\bullet$, tada preslikavanje $\alpha\colon T^\bullet \to S$ definisano sa: $y\alpha' = x\alpha$, gde je $x \in y\phi^{-1}$, $(y \in T^\bullet)$, jeste parcijalni homomorfizam iz $T^\bullet$ u S.

Obratno, svaki parcijalni homomorfizam iz $T^\bullet$ u S je odredjen na takav način. Pri tome, preslikavanje $\alpha \to \alpha'$ je injektivno.

3. Neka $IR(S)$ jeste skup svih idealskih retrakcija polugrupe S i neka $RI(S)$ jeste skup svih retraktivnih ideala polugrupe S. Tada važi:

(a) Ako je $IR(S)$ polumreža u odnosu na proizvod preslikavanja, onda je $RI(S)$ polumreža u odnosu na presek i $RI(S)$ je homomorfna slika od $IR(S)$.

(b) Ako je ili $S^2 = S$, ili za sve $a, b \in S$, iz $a^2 = b^2 = ab = ba$ sledi da je $a = b$, tada je $IR(S)$ polumreža i $RI(S) \cong IR(S)$.

4. Neka je S polugrupa takva da je $S^2 = S$ ili da za sve $a, b \in S$, iz $a^2 = b^2 = ab = ba$ sledi da je $a = b$, i ako je I ideal od S, tada postoji najviše jedna retrakcija od S na I.

5. Polugrupa S je retraktivna ekstenzija polugrupe T i T je polumreža Y polugrupa T_α, $\alpha \in Y$, ako i samo ako S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu je S_α retraktivna ekstenzija od T_α sa retrakcijom φ_α, $\alpha \in Y$, i za sve $t_\alpha \in T_\alpha$, $x_\alpha \in S_\alpha$, $x_\beta \in S_\beta$ je

(a) $(x_\alpha x_\beta)\varphi_{\alpha\beta} = (x_\alpha\varphi_\alpha)(x_\beta\varphi_\beta)$;

(b) $(t_\alpha x_\beta)\varphi_{\alpha\beta} = t_\alpha x_\beta$;

(c) $(x_\beta t_\alpha)\varphi_{\beta\alpha} = x_\beta t_\alpha$.

6. Neka je T polugrupa, neka je Q neprazan skup i neka je φ proizvoljno preslikavanje iz Q u T. Tada $S = Q \cup T$ sa množenjem definisanim sa: $x * y = (x\varphi)(y\varphi)$, $x * a = (x\varphi)a$, $a * x = a(x\varphi)$, $a * b = ab$, za $x, y \in Q$, $a, b \in T$, jeste polugrupa i S je inflacija polugrupe T. Obratno, svaka inflacija polugrupe T se može dobiti na ovakav način.

Literatura. Arendt and Stuth [2], Bogdanović and Milić [3], Clifford [3], Clifford and Preston [1], Cohn [1], Johnson and McMoris [1], Кривенко [1], [2], Petrich [6], Petrich and Grillet [1], Putcha and Weissglass [4], [5], Tamura [5], Tully [1], Wallace [1], Yamada [2].

1.8. Greenove relacije.

Na proizvoljnoj polugrupi S, definišemo *relacije tipa* $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ i $\mathcal{D}$ sa:

$$\begin{aligned} a\,\mathcal{L}\,b \ &\Leftrightarrow\ L(a) = L(b) \qquad (a, b \in S);\\ a\,\mathcal{R}\,b \ &\Leftrightarrow\ R(a) = R(b) \qquad (a, b \in S);\\ a\,\mathcal{J}\,b \ &\Leftrightarrow\ J(a) = J(b) \qquad (a, b \in S);\\ \mathcal{H} = \mathcal{L} &\cap \mathcal{R}, \qquad \mathcal{D} = \mathcal{L}\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Ove relacije su relacije ekvivalencije i nazivamo ih *Greenove relacije* ili *Greenove ekvivalencije*. Sa L_a (R_a, J_a, H_a, D_a) označavamo $\mathcal{L}$- ($\mathcal{R}$-, $\mathcal{J}$-, $\mathcal{H}$-, $\mathcal{D}$-) klasu elementa a.

Dokazi za sledeće dve leme će biti izostavljeni.

Lema 1.22. *Neka su a i b elementi polugrupe S. Tada je*

$$\begin{aligned} a\,\mathcal{L}\,b &\Leftrightarrow (\exists x, y \in S^1)\ xa = b,\ yb = a; \\ a\,\mathcal{R}\,b &\Leftrightarrow (\exists u, v \in S^1)\ au = b,\ bv = a; \\ a\,\mathcal{J}\,b &\Leftrightarrow (\exists x, y, u, v \in S^1)\ xay = b,\ ubv = a. \quad \square \end{aligned}$$

Neposredno iz Leme 1.22, dobijamo:

Posledica 1.12. *Svaki idempotent e polugrupe S je leva jedinica za elemente iz R_e i desna jedinica za elemente iz L_e.* $\square$

Lema 1.23. *Relacija $\mathcal{L}$ je desna kongruencija a relacija $\mathcal{R}$ je leva kongruencija.* $\square$

Lema 1.24. *Relacije $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ komutiraju.*

Dokaz. Uzmimo da $a\,\mathcal{L}\mathcal{R}\,b$, $a, b \in S$. Tada postoji $c \in S$ tako da je $a\,\mathcal{L}\,c$ i $c\,\mathcal{R}\,b$. Sada na osnovu Leme 1.22. je $a = uc$, $b = cv$, $c = wa = bz$, za neke $u, v, w, z \in S^1$. Uzmimo da je $d = av$. Tada je

$$d = ucv = ub,\ a = uc = ubz = dz,\ b = cv = wav = wd.$$

Dakle, $a\,\mathcal{R}\,d$ i $d\,\mathcal{L}\,b$, pa je $\mathcal{L}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}\mathcal{L}$. Slično se dokazuje da je $\mathcal{R}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}\mathcal{R}$. Prema tome, $\mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{L}$. $\square$

Neposredno proveravamo da je $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ i $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Jasno, postoje polugrupe u kojima neke od Greenovih relacija jesu medjusobno jednake. Na primer, u komutativnoj polugrupi su sve Greenove relacije medjusobno jednake. Postoje primeri polugrupa kod kojih je $\mathcal{D}$ pravi podskup od $\mathcal{J}$ (vidi Zadatak 1.). Ovde ćemo dokazati da se relacije $\mathcal{D}$ i $\mathcal{J}$ poklapaju na jednoj značajnoj klasi polugrupa - na klasi potpuno π-regularnih polugrupa.

Element a polugrupe S je *potpuno π-regularan* ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^n x a^n$ i $a^n x = x a^n$. Polugrupa S je *potpuno π-regularna* ako svaki njen element jeste potpuno π-regularan.

Propozicija 1.5. *Na potpuno π-regularnoj polugrupi je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Dokaz. Neka je S potpuno π-regularna. Uzmimo $a, b \in S$ takve da je $a\,\mathcal{J}\,b$. Tada je $a = xby$, $b = uav$, za neke $x, y, u, v \in S^1$, pa je $a = x(uav)y = (xu)a(vy)$, odakle je $a = (xu)^m a (vy)^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo $n \in \mathbf{Z}^+$, $z \in S$, tako da je $(xu)^n = (xu)^n z (xu)^n$, $(xu)^n z = z(xu)^n$. Tada je $a = (xu)^n a (vy)^n = (xu)^n z (xu)^n a (vy)^n = (xu)^n z a = z(xu)^n a \in S^1 ua$. Prema tome, $a\,\mathcal{L}\,ua$. Slično dokazujemo da je $a\,\mathcal{R}\,av$. Takodje, kako je $\mathcal{L}$ desna kongruencija, to je $b = uav\,\mathcal{L}\,av$. Prema tome, $a\,\mathcal{D}\,b$, odakle je $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$. Kako obratna inkluzija uvek važi, to je $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. $\square$

Više o potpuno π-regularnim polugrupama biće dato u Glavi 2.

Neka je γ relacija ekvivalencije polugrupe S, neka su A i B podskupovi od S, i neka $\phi : A \to B$. Kažemo da preslikavanje ϕ *očuvava γ-klase* ako je $x\,\gamma\,x\phi$, za svaki $x \in A$.

Lema 1.25. (**Greenova lema**) *Neka su* a *i* b $\mathcal{R}$*-ekvivalentni elementi polugrupe* S*, i neka su* $u, v \in S^1$ *elementi za koje je* $au = b$ *i* $bv = a$*. Tada preslikavanja*

$$x \mapsto xu, \quad (x \in L_a), \qquad y \mapsto yv, \quad (y \in L_b), \tag{5}$$

jesu uzajamno inverzne bijekcije iz L_a *na* L_b *i iz* L_b *na* L_a*, redom, koje očuvavaju* $\mathcal{R}$*-klase.*

Dokaz. Primetimo da su preslikavanja data sa (5) restrikcije translacija ϱ_u i ϱ_v na L_a i L_b, redom. Za $x \in L_a$, iz $x\,\mathcal{L}\,a$ dobijamo da je $xu\,\mathcal{L}\,au = b$, jer je $\mathcal{L}$ desna kongruencija. Prema tome, ϱ_u slika L_a u L_b. Slično dokazujemo da ϱ_v slika L_b u L_a. Takodje, za $x \in L_a$, iz $x\,\mathcal{L}\,a$ sledi da je $x = wa$, za neki $w \in S^1$, odakle je $x\varrho_u\varrho_v = xuv = wauv = wbv = wa = x$. Slično dokazijemo da je $y\varrho_v\varrho_u = y$, za svaki $y \in L_b$. Prema tome, preslikavanja (5) su uzajamno inverzne bijekcije iz L_a na L_b i iz L_b na L_a, redom.

Za $x \in L_a$ je $x = x\varrho_u\varrho_v = (xu)v$, odakle je $x\,\mathcal{R}\,xu$. Slično dokazujemo da je $y\,\mathcal{R}\,yv$, za svaki $y \in L_b$. Prema tome, preslikavanja (5) očuvavaju $\mathcal{R}$-klase. $\square$

Slično se dokazuje i dualno tvrdjenje, koje takodje zovemo Greenova lema:

Lema 1.26. (**Greenova lema**) *Neka su* a *i* b $\mathcal{L}$*-ekvivalentni elementi polugrupe* S*, i neka su* $s, t \in S^1$ *elementi za koje je* $sa = b$ *i* $tb = a$*. Tada preslikavanja*

$$x \mapsto sx, \quad (x \in R_a), \qquad y \mapsto ty, \quad (y \in R_b), \tag{6}$$

jesu uzajamno inverzne bijekcije iz R_a *na* R_b *i iz* R_b *na* R_a*, redom, koje očuvavaju* $\mathcal{L}$*-klase.* $\square$

Lema 1.27. *Neka su* a *i* b *elementi polugrupe* S*.*

(*a*) *Ako je* $ab \in H_a$*, tada je preslikavanje* $x \mapsto xb$*,* $(x \in H_a)$*, bijekcija iz* H_a *na sebe;*

(*b*) *Ako je* $ab \in H_b$*, tada je preslikavanje* $x \mapsto ax$*,* $(x \in H_b)$*, bijekcija iz* H_b *na sebe.*

Dokaz. (*a*) Iz $ab \in H_a$ sledi da je $ab\,\mathcal{R}\,a$, odakle je $a = (ab)u$, za neki $u \in S^1$, pa prema Greenovoj lemi, preslikavanja $\xi : x \mapsto xb$, $(x \in L_a)$, i $\xi' : y \mapsto yu$, $(y \in L_{ab} = L_a)$, su uzajamno inverzne bijekcije iz L_a na sebe, koje očuvavaju $\mathcal{R}$-klase. Neka je η i η' restrikcije od ξ i ξ', redom, na H_a. Za $x \in H_a$ je $x\eta = x\xi \in L_a$. Sa druge strane, kako ξ očuvava $\mathcal{R}$-klase, to je $x\,\mathcal{R}\,x\xi = x\eta$, tj. $x\eta \in R_x = R_a$. Prema tome, $x\eta \in L_a \cap R_a = H_a$, pa η slika H_a u sebe. Slično dokazujemo da η' slika H_a u sebe. Jasno je da su η i η' uzajamno inverzne bijekcije iz H_a na sebe.

(b) Dokazuje se slično kao (a). $\square$

Teorema 1.20. (**Greenova teorema**) *Neka* H *jeste* $\mathcal{H}$*-klasa polugrupe* S. *Tada je* $H^2 \cap H = \varnothing$ *ili je* $H^2 = H$.

U slučaju da je $H^2 = H$, H *je (maksimalna) podgrupa od* S.

Dokaz. Uzmimo da je $H^2 \cap H \neq \varnothing$, tj. da postoje $a, b \in H$ tako da $ab \in H$. Prema Lemi 1.27, preslikavanja

$$x \mapsto xb, \quad (x \in H), \qquad y \mapsto ay, \quad (y \in H),$$

su bijekcije od H na sebe. Prema tome, $ah, hb \in H$, za svaki $h \in H$, pa ponovo prema Lemi 1.27. dobijamo da za svaki $h \in H$, preslikavanja

$$x \mapsto xh, \quad (x \in H), \qquad y \mapsto hy, \quad (y \in H),$$

jesu bijekcije iz H na sebe. Dakle, $hH = Hh = H$, za svaki H, odakle dobijamo da je $H^2 = H$ i H je podgrupa od S. Lako se proverava da je H maksimalna podgrupa od S. $\square$

Posledica 1.13. *Ako je* e *idempotent polugrupe* S, *tada je* H_e *podgrupa od* S. *Osim toga,* $\mathcal{H}$*-klasa od* S *ne može sadržati više od jednog idempotenta.* $\square$

Element a polugrupe S je *regularan* ako postoji $x \in S$ tako da je $a = axa$.

Propozicija 1.6. *Ako* $\mathcal{D}$*-klasa* D *polugrupe* S *sadrži regularan element, tada svaki element iz* D *jeste regularan.*

Dokaz. Neka je a regularan element iz D i neka je $b \in D$. Tada je $a\mathcal{D}b$, tj. $ua = c$, $vc = a$, $cs = b$, $bt = c$ za neke $c \in S$, $u, v, s, t \in S^1$. Ako je $x \in S$ tako da je $a = axa$, tada je

$$b = cs = uas = uaxas = cxas = cxvcs = cxvb = btxvb.$$

Prema tome, b je takodje regularan. $\square$

Sobzirom na Propoziciju 1.6, $\mathcal{D}$-klasu polugrupe S koja sadrži regularan element (tj. čiji je svaki element regularan) nazivamo *regularna* $\mathcal{D}$*-klasa*.

Propozicija 1.7. *U regularnoj* $\mathcal{D}$*-klasi* D *polugrupe* S, *svaka* $\mathcal{L}$*-klasa i svaka* $\mathcal{R}$*-klasa sadrže bar po jedan idempotent.*

Dokaz. Ako je $a \in D$, i $a = axa$, za neki $x \in S$, tada $ax, xa \in E(S)$, $xa \in L_a$ i $ax \in R_a$. $\square$

Neka su A i B ideali polugrupe S takvi da je $A \subseteq B$. Neposredno se proverava da se faktor B/A može potopiti u faktor S/A, pa obično uzimamo da je B/A podpolugrupa od S/A.

Neposredno iz Teoreme 1.4. i Leme 1.20, dobijamo

Lema 1.28. *Neka je A ideal polugrupe S.*

(a) *Ako je B ideal od S takav da je $A \subseteq B$, tada je B/A ideal od S/A i $(S/A)/(B/A) \cong S/B$.*

(b) *Preslikavanje $\theta : B \to B/A$ je bijekcija iz $\mathcal{I}d(S)$ na $\mathcal{I}d(S/A)$ koja očuvava uredjenje.* □

Neka je a element polugrupe S. Sa $I(a)$ označavamo skup $I(a) = J(a) - J_a = \{x \in J(a) \mid J(x) \subset J(a)\}$.

Lema 1.29. *Neka je a element polugrupe S takav da je $I(a) \neq \varnothing$. Tada je $I(a)$ ideal od S. Štaviše, $I(a)$ je najveći element uredjenog skupa svih ideala od S strogo sadržanih u $J(a)$.*

Dokaz. Uzmimo $b \in I(a)$, $x \in S$. Tada je $J(bx) \subseteq J(b) \subset J(a)$, i $bx \in J(a)$, pa je $bx \in I(a)$. Slično dokazujemo da je $xb \in I(a)$. Prema tome, $I(a)$ je ideal od $J(a)$.

Neka je A proizvoljan ideal od S strogo sadržan u $J(a)$. Za $x \in A$, $J(x) \subseteq A \subset J(a)$, i $x \in J(a)$, pa je $x \in I(a)$. Prema tome, $A \subseteq I(a)$. Dakle, $I(a)$ je najveći ideal od S strogo sadržan u $J(a)$. □

Zbog pojedostavljenja rada, uvodimo sledeći dogovor: Za polugrupu S, pod faktorom $S/\varnothing$ podrazumevamo samu polugrupu S.

Za element a polugrupe S, faktor polugrupu $J(a)/I(a)$ nazivamo *glavni faktor* polugrupe S koji odgovara elementu a.

Važnu osobinu glavnih faktora daje sledeća

Teorema 1.21. *Neka je a element polugrupe S. Tada važi jedan od sledećih uslova:*

(a) *$J(a)$ je jezgro od S;*

(b) *$I(a) \neq \varnothing$ i glavni faktor $J(a)/I(a)$ je ili 0-prosta polugrupa ili nul-polugrupa.*

Dokaz. Neka $J(a)$ nije jezgro od S. Tada postoji ideal A od S tako da je $A \subset J(a)$. Za $x \in A$ je $J(x) \subseteq A \subset J(a)$, pa je $x \in I(a)$. Prema tome, $I(a) \neq \varnothing$.

Neka je A nenula ideal polugrupe $S/I(a)$. U odnosu na bijekciju θ definisanu kao u Lemi 1.28, idealu A odgovara ideal B od S takav da je $I(a) \subset B \subseteq J(a)$. Prema Lemi 1.29, $B = J(a)$, odakle je $A = J(a)/I(a)$. Dakle $J(a)/I(a)$ je 0-minimalan ideal od $S/I(a)$, pa prema Posledici 1.7. $J(a)/I(a)$ je 0-prosta polugrupa ili nul-polugrupa. □

Zadaci.

1. Neka je T monoid i H njegova grupa jedinice. Neka je θ homomorfizam iz T u H, i N je skup nenegativnih celih brojeva. Tada $S = N \times T \times N$ sa množenjem definisanim sa:

$$(m;a;n)(p;b;q)=(m-n+t;(a\theta^{t-n})(b\theta^{t-p});q-p+t),$$

za $(m;a;n),(p;b;q)\in S$ i za $t=\max\{n,p\}$, jeste polugrupa, u oznaci $S=BR(T,\theta)$, koju nazivamo *Bruck-Reillyeva ekstenzija* od T pomoću θ. Dokazati sledeća tvrdjenja:

(a) S je prosta polugrupa;

(b) $(m;a;n)\,\mathcal{D}_S\,(p;b;q) \ \Leftrightarrow\ a\,\mathcal{D}_T\,b, \qquad ((m;a;n),(p;b;q)\in S)$;

(c) Svaka polugrupa T se može potopiti u $BR(T^1,\theta)$, gde $\theta: T^1\to\{1\}$;

(d) Ako je T polugrupa bez jedinice, $\theta: T^1\to\{1\}$ i $S=BR(T^1,\theta)$, tada je $\mathcal{D}\neq\mathcal{J}$ na S.

2. Ako su $\alpha,\beta\in\mathcal{T}_r(X)$, tada je

(a) $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta \ \Leftrightarrow\ X\alpha=X\beta$;

(b) $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta \ \Leftrightarrow\ \ker\alpha=\ker\beta$;

(c) $\alpha\,\mathcal{D}\,\beta \ \Leftrightarrow\ |X\alpha|=|X\beta|$;

(d) $\mathcal{D}=\mathcal{J}$.

3. Neka su a i b elementi polugrupe S. Tada je $(a,b)\in\mathcal{L}^\dagger$ ako i samo ako su a i b $\mathcal{L}$-ekvivalentni u nekoj nadpolugrupi od S. Relacija $\mathcal{L}^\dagger$ je uopštenje Greenove relacije $\mathcal{L}$. Dualno se definiše relacija $\mathcal{R}^\dagger$. Sa $\mathcal{H}^\dagger$ označavamo presek relacija $\mathcal{L}^\dagger$ i $\mathcal{R}^\dagger$. Dokazati sledeća tvrdjenja:

(a) $a\,\mathcal{L}^\dagger\,b \ \Leftrightarrow\ \big((\forall x,y\in S^1)\ ax=ay \ \Leftrightarrow\ bx=by\big)$;

(a) $a\,\mathcal{R}^\dagger\,b \ \Leftrightarrow\ \big((\forall x,y\in S^1)\ xa=ya \ \Leftrightarrow\ xb=yb\big)$.

(b) $\mathcal{L}^\dagger$ ($\mathcal{R}^\dagger$) je desna (leva) kongruencija polugrupe S.

(c) $\mathcal{H}^\dagger$-klasa koja sadrži idempotent jeste kancelativan monoid.

4. Ako su e i f idempotenti polugrupe S, tada je

$$e\,\mathcal{L}\,f \ \Leftrightarrow\ e=ef,\ f=fe \quad\text{i}\quad e\,\mathcal{R}\,f \ \Leftrightarrow\ e=fe,\ f=ef.$$

Literatura. Bruck [1], Ćirić and Bogdanović [11], Clifford and Preston [1], Drazin [1], Fountain [2], [3], Green [1], Howie [1], Kapp [1], Lallement [3], Márki and Steinfeld [1], Miller [1], Miller and Clifford [1], Munn [1], [2], Sedlock [1], Steinfeld [3].

1.9. Slobodne polugrupe.

Neka je A neprazan skup koji ćemo nazivati *alfabet* i čije ćemo elemente nazivati *slova*. Konačan niz $x_1x_2\cdots x_n$ elemenata iz A nazivamo *reč nad alfabetom* A. Iz ove definicije se vidi da su dve reči $x_1x_2\cdots x_n$ i $y_1y_2\cdots y_m$ nad alfabetom A jednake ako i samo ako je $n=m$ i $x_i=y_i$, za svaki $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Na skupu A^+ svih reči nad alfabetom A definišemo operaciju, koju nazivamo *dopisivanje*, *spajanje* ili *konkatenacija*, na sledeći način:

$$(x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_m)=x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m,$$

$x_1, x_2 \cdots x_n, y_1 y_2 \cdots y_m \in A^+$. Tada A^+ sa tom operacijom jeste polugrupa koju nazivamo *slobodna polugrupa nad alfabetom* A. Jedinično proširenje polugrupe A^+ pomoću elementa ε nazivamo *slobodan monoid nad alfabetom* A, i označavamo ga sa A^*. Jedinicu ε monoida A^* nazivamo *prazna reč*. Ako je $|A| = 1$, tada je A^+ beskonačna monogena polugrupa, tj. polugrupa izomorfna aditivnoj polugrupi pozitivnih celih brojeva, i A^* je monoid izomorfan aditivnom monoidu nenegativnih celih brojeva. Ako je $|A| \geq 2$, tada slobodna polugrupa A^+ ne može biti komutativna. Ako je $n \in \mathbf{Z}^+$, konačan alfabet sa n slova označavamo sa A_n.

Iz definicije slobodne polugrupe se vidi da svaka reč $w \in A^+$ ima jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz A. Neposredna posledica toga je sledeća

Teorema 1.22. *Neka je A neprazan skup, neka je S polugrupa i neka $\varphi : A \to S$. Tada postoji jedinstven homomorfizam $\widehat{\varphi} : A^+ \to S$ takav da je $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za svaki $x \in A$. Pri tome, homomorfizam $\widehat{\varphi}$ je sirjektivan ako i samo ako $A\varphi$ generiše S.*

Dokaz. Definišimo $\widehat{\varphi} : A^+ \to S$ sa:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)\widehat{\varphi} = (x_1)\varphi(x_2\varphi) \cdots (x_n\varphi),$$

za $x_1 x_2 \cdots x_n \in A^+$. Neposredno se provarava da je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam i da je $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za svaki $x \in A$.

Neka je $\psi : A^+ \to S$ homomorfizam takav da je $x\psi = x\varphi$, za svaki $x \in A$. Tada za proizvoljan $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in A^+$ imamo da je

$$\begin{aligned} u\psi &= (x_1 x_2 \cdots x_n)\psi = (x_1\psi)(x_2\psi) \cdots (x_n\psi) = (x_1\varphi)(x_2\varphi) \cdots (x_n\varphi) \\ &= (x_1\widehat{\varphi})(x_2\widehat{\varphi}) \cdots (x_n\widehat{\varphi}) = (x_1 x_2 \cdots x_n)\widehat{\varphi} = u\widehat{\varphi}. \end{aligned}$$

Prema tome, $\psi = \widehat{\varphi}$, čime je dokazana jedinstvenost homomorfizma $\widehat{\varphi}$.

Neka $A\varphi$ generiše S. Uzmimo $a \in S$. Tada je $a = a_1 a_2 \cdots a_n$, za neke $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\varphi$, pa postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, tako da je $x_i\varphi = a_i$, za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odakle je $a = (x_1 x_2 \cdots x_n)\widehat{\varphi}$. Prema tome, $\widehat{\varphi}$ je sirjekcija.

Obratno, ako je $\widehat{\varphi}$ sirjekcija i ako je $a \in S$, tada je $a = u\widehat{\varphi}$, za neki $u \in A^+$, i $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, pa je $a = (x_1\varphi)(x_2\varphi) \cdots (x_n\varphi)$, pri čemu su $x_i\varphi \in A\varphi$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prema tome, $A\varphi$ generiše S. $\square$

Za homomorfizam $\widehat{\varphi}$ iz Teoreme 1.22. kažemo da je *odredjen preslikavanjem* φ. Ako je ϕ neki automorfizam slobodne polugrupe A^+ nad alfabetom A, tada se lako dokazuje da je $A\phi = A$, odakle zaključujemo da je svaki automorfizam slobodne polugrupe A^+ odredjen nekom permutacijom alfabeta A, i obratno.

Iz Teoreme 1.22. dobijamo sledeće posledice:

Posledica 1.14. *Svaka polugrupa je izomorfna nekoj faktor polugrupi neke slobodne polugrupe.*

Dokaz. Ako je A generatorni skup polugrupe S i ako je $\varphi : A \to S$ preslikavanje definisano sa $x\varphi = x$, za svaki $x \in A$, tada prema Teoremi 1.22, postoji homomorfizam $\widehat{\varphi}$ iz A^+ na S takav da je $x\widehat{\varphi} = x$, za svaki $x \in A$. Prema tome, S je homomorfna slika od A^+, pa prema Teoremi o homomorfizmu, faktor polugrupa $S/\ker\widehat{\varphi}$ je izomorfna polugrupi S. $\square$

Posledica 1.15. *Neka je A podskup polugrupe S. Tada je S izomorfna slobodnoj polugrupi A^+ ako i samo ako svaki element iz S ima jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz A.*

Dokaz. Neka svaki element iz S ima jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz A. Neka je $\varphi : A \to S$ preslikavanje definisano sa: $x\varphi = x$, za svaki $x \in A$. Prema Teoremi 1.22, φ se može proširiti do homomorfizma $\widehat{\varphi} : A^+ \to S$. Prema Propoziciji 1.1, $A = A\varphi$ generiše S, pa prema Teoremi 1.22, $\widehat{\varphi}$ je sirjektivan. Kako je razlaganje svakog elementa iz S u proizvod elemenata iz A jedinstveno, to je $\widehat{\varphi}$ injektivan. Prema tome, $\widehat{\varphi}$ je izomorfizam.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Iz Posledice 1.14. vidimo da je svaka polugrupa, do na izomorfizam, odredjena nekim svojim generatornim skupom A i nekom kongruencijom ξ slobodne polugrupe A^+, što nas upućuje na ideju da polugrupu zadajemo parom A, ξ. Sa druge strane, kako težimo što jednostavnijem načinu zadavanja polugrupa, to umesto kongruencije ξ nastojimo da izmemo neku manju relaciju θ na A^+ koja generiše ξ. Sve to nas dovodi do pojma *kopredstavljanja polugrupe*.

Neka je θ relacija slobodne polugrupe A^+ nad alfabetom A. Par $\langle A; \theta\rangle$ nazivamo *kopredstavljanje*. Ako je $\theta = \{(u_i, v_i) \in A^+ \times A^+ \mid i \in I\}$, tada pišemo i $\langle A; u_i = v_i,\ i \in I\rangle$ umesto $\langle A; \theta\rangle$. Kopredstavljanje $\langle A; \theta\rangle$ je *kopredstavljanje polugrupe* S ako je S izomorfna faktor polugrupi $A^+/\theta^\#$ slobodne polugrupe A^+. U tom slučaju kažemo i da je S *zadata* (*data*) *kopredstavljanjem* $\langle A; \theta\rangle$, i kažemo da $u_i = v_i$, $i \in I$, jesu *definicione korelacije polugrupe* S. Ako poistovetimo polugrupe $A^+/\theta^\#$ i S, tada prema Teoremi 1.22. dobijamo da skup $A(\theta^\#)^\natural$ generiše S. Jasno je da polugrupa može imati više različitih kopredstavljanja. Prema tome, problem zadavanja polugrupe putem kopredstavljanja se svodi na izbor generatornog skupa polugrupe i izbor što jednostavnijeg skupa definicionih korelacija. Za više informacija o ovoj temi upućujemo na G.Lallement [3].

Neka je w reč nad alfabetom A. Za $x \in A$, sa $|x|_w$ označavamo broj javljanja slova x u reči w. Broj $|w| = \Sigma_{x\in A}|x|_w$ nazivamo *dužina reči*

w. Skup $c(w) = \{x \in A \mid |x|_w \geq 1\}$, tj. skup svih slova koja se javljaju u reči w nazivamo *sadržaj reči* w. Izraz "$w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$" označava da je $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ako je $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, gde su $x_i \in A$, tada reč $\overleftarrow{w} = x_n x_{n-1} \cdots x_1$ nazivamo *dualna reč* reči w. Svaki faktor (levi faktor, desni faktor) reči w nazivamo *podreč* (*levi rez, desni rez*) reči w. *Glava reči* w, u oznaci $h(w)$, je levi rez od w dužine 1, tj. prvo slovo reči w. *Rep reči* w, u oznaci $t(w)$, definišemo sa $t(w) = h(\overleftarrow{w})$. Sa $h^{(2)}(w)$ označavamo levi rez reči w dužine 2, i $t^{(2)}(w) = h^{(2)}(\overleftarrow{w})$.

Neka je w reč nad alfabetom $A = \{x_i \mid i \in I\}$. Neka je S polugrupa i neka je $(a_i) \in S^I$, gde S^I označava Dekartov proizvod $\Pi_{i \in I} S_i$, gde je $S_i = S$, za svaki $i \in I$. Ako je $\phi : A^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa $x_i \phi = a_i$, za svaki $i \in I$, tada element $w\phi \in S$ nazivamo *vrednost reči* w *u valuaciji* (a_i) *polugrupe* S. Primetimo da ako je $c(w) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$, tada $w\phi$ zavisi samo od elemenata $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$. Drugim rečima, element $w\phi$ je proizvod elemenata $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, dobijen na taj način što smo slova $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ u reči w zamenili elementima $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, i operaciju dopisivanja u A^+ smo zamenili proizvodom u S. Shemu koja opisuje vrednosti reči w u svim valuacijama polugrupe S nazivamo *raspodela reči* w *u polugrupi* S.

Izraz "$u = v$", gde su u i v reči nad alfabetom A, nazivamo *identitet nad alfabetom* A. Identitet $u = u$ nazivamo *trivijalni identitet*. Ostale identitete nazivamo *netrivijalni identiteti*.

Identitet $u = v$ nad alfabetom A je *istotipan* ako je $c(u) = c(v)$. U suprotnom, tj. ako je $c(u) \neq c(v)$, identitet $u = v$ je *raznotipan*.

Neka je $u = v$ identitet nad alfabetom A. Polugrupa S *zadovoljava identitet* $u = v$ ako je $u\phi = v\phi$, za svaki homomorfizam $\phi : A^+ \to S$. Drugim rečima, polugrupa S zadovoljava identitet $u = v$ ako reči u i v imaju istu vrednost u svakoj valuaciji polugrupe S.

Neka Ω jeste neki skup identiteta nad alfabetom A. Polugrupa S *zadovoljava skup identiteta* Ω ako S zadovoljava sve identitete iz Ω. Sa $[\Omega]$ označavamo klasu svih polugrupa koje zadovoljavaju skup identiteta Ω nad alfabetom A. Ako se skup Ω sastoji od konačnog broja identiteta, tj. ako je $\Omega = \{u_1 = v_1, \ldots u_k = v_k\}$, tada pišemo $[u_1 = v_1, \ldots, u_k = v_k]$ umesto $[\Omega]$.

Klasa $\mathcal{V}$ polugrupa je *varijetet* (*mnogostrukost*) ako postoji skup Ω identiteta nad nekim alfabetom A takav da je $\mathcal{V} = [\Omega]$.

Veoma značajnu osobinu varijeteta daje naredna teorema, čiji dokaz ćemo izostaviti. Za dokaz te teoreme upućujemo na P.M.Cohn [1].

Teorema 1.23. (**Teorema Birkhoffa**) *Neprazna klasa* $\mathcal{V}$ *polugrupa je varijetet ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(*a*) *Svaka podpolugrupa proizvoljne polugrupe iz* $\mathcal{V}$ *je iz* $\mathcal{V}$*;*
(*b*) *Svaka homomorfna slika proizvoljne polugrupe iz* $\mathcal{V}$ *je iz* $\mathcal{V}$*;*
(*c*) *Direktan proizvod proizvoljne familije polugrupa iz* $\mathcal{V}$ *je iz* $\mathcal{V}$*.* $\square$

Za klasu $\mathfrak{C}$ polugrupa koja zadovoljava uslov (a) ((b), (c)) kažemo da je *zatvorena za podpolugrupe* (*homomorfne slike, direktne proizvode*).

Skupovi Ω i Ω' identiteta nad alfabetom A su *ekvivalentni* ako odredjuju isti varijetet polugrupa, tj. ako je $[\Omega] = [\Omega']$. Prema tome, identiteti $u = v$ i $u' = v'$ nad alfabetom A su ekvivalentni ako je $[u = v] = [u' = v']$.

Identiteti $u = v$ i $u' = v'$ nad alfabetom A su *p-ekvivalentni* ako postoji automorfizam ϕ polugrupe A^+ da je $u' = u\phi$ i $v' = v\phi$ (tj. ako se identitet $u' = v'$ može dobiti iz identiteta $u = v$ permutacijom slova). Ako je ψ endomorfizam slobodne polugrupe A^+, tada se neposredno proverava da je $[u = v] \subseteq [u\psi = v\psi]$, odakle dobijamo da su p-ekvivalentni identiteti ekvivalentni.

Na kraju ćemo razmotriti nekoliko varijeteta važnih za dalji rad:

Teorema 1.24. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(*i*) S *je pravougaona traka;*
(*ii*) S *je anti-komutativna polugrupa;*
(*iii*) $S \in [xyx = x]$*;*
(*i*) $S \in [x^2 = x, xyz = xz]$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Kako za svaki $a \in S$, a komutira sa a^2, to je $a^2 = a$, pa S jeste traka. Sada za proizvoljne $a, b \in S$ imamo da je $a(aba) = aba = (aba)a$, pa je $aba = a$. Dakle, $S \in [xyx = x]$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Ako je $S \in [xyx = x]$, tada za proizvoljne $a, b, c \in S$ je $ac = acabcac = abc$, pa $S \in [xyz = xz]$. Takodje, za $a \in S$, $a = aa^2a = a^4$ i $a = aaa = a^3$, odakle je $a = a^2$. Dakle, $S \in [x^2 = x, xyz = xz]$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Fiksirajmo $s \in S$. Neka je $I = \{x \in S \mid xs = x\}$, $\Lambda = \{y \in S \mid sy = y\}$. Tada je $I \neq \varnothing$ i $\Lambda \neq \varnothing$, jer je $s \in I \cap \Lambda$. Definišimo preslikavanje $\phi : I \times \Lambda \to S$ sa: $(x, y)\phi = xy$, ($(x, y) \in I \times \Lambda$). Neposredno se proverava da je ϕ homomorfizam.

Uzmimo $(x, y), (a, b) \in I \times \Lambda$ tako da je $(x, y)\phi = (a, b)\phi$, tj. $xy = ab$. Tada je $xa = xya = aba = a$. Sa druge strane, iz $x, a \in I$ dobijamo da je $xs = x$, $as = a$, odakle je $a = xa = xas = xs = x$. Slično dokazujemo da je $y = b$. Prema tome, ϕ je injekcija.

Uzmimo $a \in S$. Tada je $as \in I$, $sa \in \Lambda$ i $(as, sa)\phi = assa = a$. Prema tome, ϕ je sirjekcija. Dakle, ϕ je izomorfizam. $\square$

Teorema 1.25. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) $S \in [x^2 = x, axya = ayxa]$;

(ii) $S \in [x^2 = x, axyb = ayxb]$;

(iii) $S \in [x^2 = x, axy = axyay] \cap [x^2 = x, yxa = yayxa]$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, x, y, b \in S$. Tada je

$$axyb = axybaxyb = aybxaxyb = aybaxyxb = ayxbayxb = ayxb.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Uzmimo $a, x, y \in B$. Tada je

$$axy = axyaxy = axxyay = axyay.$$

Slično dokazujemo i da je $yxa = yayxa$. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, x, y \in B$. Tada je

$$\begin{aligned} axya &= ayaaxya = ayaxya = ayxyaayaxya \\ &= ayx(ya)^2xya = ayxyaxya = ay(xya)^2 = ayxya, \\ ayxa &= ayxaaya = ayxaya = ayxayaayxya \\ &= ayx(ay)^2xya = ayxayxya = (ayx)^2ya = ayxya. \end{aligned}$$

Prema tome, $axya = ayxa$, pa važi (i). $\square$

Polugrupa S je *levo* (*desno*) *polunormalna traka* ako je $S \in [x^2 = x, axy = axyay]$ ($S \in [x^2 = x, yxa = yayxa]$). Polugrupa S je *normalna traka* ako je $S \in [x^2 = x, axya = ayxa] = [x^2 = x, axyb = ayxb]$.

Zadaci.

1. Polugrupa S ima jedinstveno razlaganje ako i samo ako S jeste slobodna ili S jeste Reesov faktor slobodne polugrupe.

2. Neka je U polugrupa sa jedinstvenim razlaganjem i neka je $X = U - U^2$. Tada za proizvoljnu polugrupu S, svako preslikavanje iz X u S se može proširiti do parcijalnog homomorfizma iz $U^\bullet$ u S.

3. Polugrupa zadovoljava identitet $(xy)^n = x^n y^n$ za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$ ako i samo ako ga zadovoljava za $n = 2$ i $n = 3$.

4. Neprazna klasa $\mathcal{V}$ polugrupa je varijetet ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(a) Svaka homomorfna slika proizvoljne polugrupe iz $\mathcal{V}$ je iz $\mathcal{V}$;

(b) Svaki poddirektan proizvod proizvoljne familije polugrupa iz $\mathcal{V}$ je iz $\mathcal{V}$.

5. Neka $\mathcal{V}$ jeste varijetet polugrupa, $\mathcal{X}$ je klasa svih poddirektno nesvodljivih polugrupa iz $\mathcal{V}$ i S je polugrupa. Tada kongruencija ξ polugrupe S, različita od ω_S, jeste $\mathcal{V}$-kongruencija ako i samo ako ξ jeste presek neke familije $\mathcal{X}$-kongruencija.

6. Polugrupa S je pravougaona traka ako i samo ako S jeste direktan proizvod levo nulte i desno nulte trake.

7. Uredjenje $\leq$ polugrupe S je *levo* (*desno*) *saglasno* ako za $a, b, x \in S$, iz $a \leq b$ sledi da je $xa \leq ya$ ($ax \leq bx$), i $\leq$ je *saglasno* ako je levo i desno saglasno. Dokazati da je prirodno uredjenje trake B saglasno ako i samo ako B jeste normalna traka.

Literatura. Arendt and Stuth [1], [2], Burris and Sankappanavar [1], Cohn [1], Lallement [3], Мальцев [2], Petrich [19], Шеврин и Волков [1], Шеврин и Суханов [1], Shyr [1], Tamura and Nordahl [1], Tamura and Shafer [1].

GLAVA 2

π-regularne polugrupe

Da bi uopštio pojam idempotenta J.von Neumann je 1936. godine uveo pojam regularnog elementa. Kasnije, klasa regularnih polugrupa i razne njene podklase su u više monografija postale glavni predmet proučavanja. Opštiji od pojma regularnog je pojam π-regularnog elementa koji su uveli R.Arens i I.Kaplansky 1948. godine. Čitalac će sam primetiti da π-regularne polugrupe, koje će se provlačiti, gotovo, tokom cele ove knjige, jesu u vrlo bliskoj vezi sa nil-ekstenzijama polugrupa. U ovoj glavi će biti izložena neka osnovna svojstva ovih polugrupa. Moglo bi se reći da je ovde glavni rezultat dat Teoremom 2.2. kojom se na razne načine karakterišu potpuno π-regularne polugrupe, tj. polugrupe u kojima za svaki element neki njegov stepen leži u nekoj podgrupi. Primetimo da se ovde sreće i pojam pseudoinverza koji je uveo M.P.Drazin 1958. godine, a koji je opštiji od pojma grupnog inverza. Spomenućemo i Teoremu Munna koja će u daljim razmatranjima biti vrlo korisna, a kojom se opisuju potpuno π-regularne proste polugrupe. Date su i razne mogućnosti definisanja π-inverznosti.

2.1. Opšta svojstva.

Uopštavajući pojam idempotenta von Neumann [1] je uveo pojam regularnog elementa. Element a polugrupe S je *regularan* ako postoji $x \in S$ tako da je $a = axa$. Skup svih regularnih elemenata polugrupe S označavamo sa $Reg(S)$ i nazivamo ga *regularni deo od* S. Polugrupa S je regularna ako svaki njen element jeste regularan, tj. ako je $S = Reg(S)$.

Element a polugrupe S je *π-regularan* ako postoje $n \in Z^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^nxa^n$, tj. ako neki stepen elementa a jeste regularan. Polugrupa S je *π-regularna* ako svaki njen element jeste π-regularan.

Lema 2.1. *Sledeći uslovi za element a polugrupe S su ekvivalentni:*
(i) a je π-regularan;
(ii) postoji $n \in Z^+$ tako da $R(a^n)$ $\big(L(a^n)\big)$ ima idempotentan generator;
(iii) postoji $n \in Z^+$ tako da $R(a^n)$ $\big(L(a^n)\big)$ ima levu (desnu) jedinicu.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je a π-regularan, tj. neka postoje $n \in Z^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^nxa^n$. Uzmimo da je $e = a^nx$. Tada je $R(a^n) = R(e)$ i $e = E(S)$, pa važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Ako važi (ii), tada je $R(a^n) = R(e)$ za neke $n \in Z^+$ i $e \in E(S)$, pa postoje $x, y \in S$ tako da $a^n = ex$, $e = a^n y$, odakle dobijamo da je

$$a^n = ex = e^2x = ea^n = a^n y a^n.$$

Prema tome, a je π-regularan.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je $a^n = a^n x a^n$ za neke $n \in Z^+$, $x \in S$ i neka je $e = a^n x$. Uzmimo proizvoljan $b \in R(a^n)$. Tada je $b = a^n y$ za neki $y \in S$, pa je

$$eb = a^n x b = a^n x a^n y = a^n y = b.$$

Prema tome, e je leva jedinica u $R(a^n)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. neka je $n \in Z^+$ tako da $R(a^n)$ ima levu jedinicu e. Tada ja $e = a^n x$ za neki $x \in S^1$, pa je $a^n = ea^n = a^n x a^n$. Prema tome, a je π-regularan. $\square$

Posledica 2.1. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je π-regularna;*

(ii) *za svaki $a \in S$ postoje $n \in Z^+$ i $e \in E(S)$ tako da je $R(a^n) = eS$ $\big(L(a^n) = Se\big)$;*

(iii) *za svaki $a \in S$ postoji $n \in Z^+$ tako da $R(a^n)$ $\big(L(a^n)\big)$ ima levu $($desnu$)$ jedinicu.* $\square$

Posledica 2.2. *Element a polugrupe S je regularan ako i samo ako postoji idempotemt $e \in E(S)$ tako da je $aS^1 = eS$.* $\square$

Element x polugrupe S je *inverz* elementa $a \in S$ ako je $a = axa$ i $x = xax$. *Skup svih inverza elementa* a označavamo sa $V(a)$. Napomenimo da treba praviti razliku izmedju pojmova "inverz elementa a" i "inverz elementa a u podgrupi - grupni inverz". Polugrupa S je *inverzna* ako svaki njen element ima jedinstven inverz.

Lema 2.2. *Element a polugrupe S ima inverz ako i samo ako a jeste regularan.*

Dokaz. Uzmimo da je a regularan element. Tada je $a = axa$ za neki $x \in S$, pa je element $y = xax$ inverz elementa a.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Lema 2.3. *Neka je ξ kongruencija na π-regularnoj polugrupi S i neka $A, B \in S/\xi$ tako da je $A = ABA$ i $B = BAB$ u S/ξ. Tada postoje elementi $a, b \in S$ tako da $a \in A, b \in B, a = aba$ i $b = bab$ u S.*

Dokaz. Neka $x \in A$, $y \in B$. Neka je $n \in Z^+$ tako da $(xy)^{2n} \in Reg(S)$ i neka je z inverz elementa $(xy)^{2n}$. Ako uzmemo da je $a = xyz(xy)^{2n-1}x$, $b = yz(xy)^{2n-1}$, tada je $a = aba$ i $b = bab$. Sa druge strane iz $A = ABA$, $B = BAB$ u S/ξ, dobijamo da je $x\,\xi\,xyx$, $y\,\xi\,yxy$ pa je

$$xy\,\xi\,(xy)^k \quad \text{za svaki} \quad k \in Z^+.$$

Odavde sledi da je

$$xyz\,\xi\,(xy)^{2n}z, \quad (xy)^{2n-1}x\,\xi\,(xy)^{2n}x,$$

pa prema Lemi 1.1. imamo da je

$$a = xyz(xy)^{2n-1}x\,\xi\,(xy)^{2n}z(xy)^{2n}x = (xy)^{2n}x\,\xi\,xyx\,\xi\,x.$$

Dakle, $a \in A$. Slično dokazujemo da je $b \in B$. $\square$

Posledica 2.3. *Neka je ξ kongruencija na π-regularnoj polugrupi S. Tada svaka ξ-klasa koja je idempotent u S/ξ, sadrži idempotent iz S.*

Dokaz. Neka je E proizvoljni idempotent iz S/ξ. Kako je $E = EEE$ u S/ξ, to postoje $a, b \in S$ tako da je $a = aba$ i $b = bab$ (prema Lemi 2.3.). Sada imamo da je $ab \in EE = E$ i ab je idempotent u S. $\square$

Teorema 2.1. *Neka je ξ kongruencija na π-regularnoj polugrupi S, neka je $n \in \mathbf{Z}^+$ i neka $A, B_1, B_2, \dots, B_n \in S/\xi$ tako da je $A = AB_iA$, $B_i = B_iAB_i$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tada postoje $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in S$ da $a \in A$, $b_i \in B_i$, $a = ab_ia$ i $b_i = b_iab_i$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati indukcijom. Prema Lemi 2.3. imamo da je tvrdjenje tačno za $n = 1$. Uzmimo da je tvrdjenje tačno za neki pozitivan ceo broj $k < n$. Tada postoje elementi $x, y_1, \dots, y_k \in S$ tako da $x \in A$, $y_i \in B_i$, $x = xy_ix$, $y_i = y_ixy_i$ za $i \in \{1, \dots, k\}$. Uzmimo element $y_{k+1} \in B_{k+1}$. Kako je S π-regularna, to imamo da postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(xy_{k+1})^{2m} \in Reg(S)$. Neka je $z \in V((xy_{k+1})^{2m})$ i neka je

$$\begin{aligned} &u = xy_{k+1}z(xy_{k+1})^{2m-1}x, \\ &v_{k+1} = y_{k+1}z(xy_{k+1})^{2m-1}, \\ &v_i = y_ixy_{k+1}z(xy_{k+1})^{2m-1}xy_i, \quad \text{za } i \in \{1, 2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Nije teško dokazati da je $u \in A$, $v_i \in B_i$, $u = uv_iu$, $v_i = v_iuv_i$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. $\square$

Zadaci.

1. Svaki bi-ideal polugrupe S je kvazi-ideal od S ako i samo ako S jeste regularna.

2. Polugrupa S je regularna ako i samo ako je $L \cap R = RL$, za svaki levi ideal L i svaki desni ideal R od S.

3. Neka je S regularna podpolugrupa polugrupe T. Tada Greenove relacije $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ na S jesu restrikcije odgovarajućih relacija na T.

4. Tvrdjenje da je puna polugrupa transformacija $\mathcal{T}_r(X)$ regularna za svaki skup X je ekvivalent Aksiome izbora.

5. Polugrupa zadovoljava uslove TC (term conditions) ako

$(C1)$ $$xy = xz \;\Rightarrow\; uy = uz;$$
$(C2)$ $$yx = zx \;\Rightarrow\; yu = zu;$$
$(C3)$ $$y_1xy_2 = z_1xz_2 \;\Rightarrow\; y_1uy_2 = z_1uz_2.$$

Polugrupu koja zadovoljava uslove TC nazivamo TC-*polugrupa*.

Neka je G komutativna grupa, I, Λ i Q su neprazni skupovi i ϕ, α, β su preslikavanja iz Q u G, I i Λ, tim redom. Tada skup $S = Q\cup(G\times I\times\Lambda)$ sa množenjem definisanim sa

$$p * q = ((p\phi)(q\phi); p\alpha, q\beta),\;\; (a; i, \lambda) * (b; j, \mu) = (ab; i, \mu),$$
$$p * (a; i, \lambda) = ((p\phi)a; p\alpha, \lambda),\;\; (a; i, \lambda) * p = (a(p\phi); i, p\beta),$$

za $p, q \in Q$, $(a; i, \lambda), (b; j, \mu) \in G \times I \times \Lambda$, jeste π-regularna TC-polugrupa.

Obratno, svaka π-regularna TC-polugrupa može biti ovako konstruisana.

6. Polugrupa S je periodična TC-polugrupa ako i samo ako S jeste izomorfna nekoj polugrupi konstruisanoj kao u Zadatku 3, pri čemu je G periodična grupa.

7. Neka je $\mathcal{I}(X)$ skup svih injektivnih parcijalnih preslikavanja skupa X, uključujući tu i praznu relaciju. Dokazati da je $\mathcal{I}(X)$ inverzna podpolugrupa od $\mathcal{B}(X)$.

Polugrupu $\mathcal{I}(X)$ nazivamo *simetrična inverzna polugrupa* skupa X.

6. Svaka inverzna polugrupa se može potopiti u simetričnu inverznu polugrupu nekog skupa.

8. Kongruencija ξ polugrupe S *razdvaja idempotente* ako za sve $e, f \in E(S)$, iz $e\,\xi\, f$ sledi $e = f$. Na proizvoljnoj polugrupi S definišimo relaciju μ sa

$$\mu = \{(a, b) \in S \times S \mid (\forall x \in Reg(S))\,((x\,\mathcal{R}\,xa \vee x\,\mathcal{R}\,xb) \Rightarrow xa\,\mathcal{H}\,xb \;\wedge \\ (x\,\mathcal{L}\,ax \wedge x\,\mathcal{L}\,bx) \Rightarrow ax\,\mathcal{H}\,bx)\}\;.$$

Dokazati da je μ kongruencija koja razdvaja idempotente. Ako je S π-regularna polugrupa, onda je μ najveća kongruencija koja razdvaja idempotente.

9. Sledeći uslovi za kongruenciju ξ polugrupe S su ekvivalentni:

(i) $\xi \subseteq \mu$;

(ii) $(\forall e \in E(S))(\forall b \in S)\; e\,\xi\, b \Rightarrow L(e) \subseteq L(b) \;\wedge\; R(e) \subseteq R(b)$;

(ii) $(\forall a \in Reg(S))(\forall b \in S)\; a\,\xi\, b \Rightarrow L(a) \subseteq L(b) \;\wedge\; R(a) \subseteq R(b)$.

Ako je S π-regularna polugrupa, onda svaki od navedenih uslova je ekvivalentan sa sledećim:

(iv) ξ razdvaja idempotente.

10. Neka su a i x elementi polugrupe S takvi da je $ax \in E(S)$. Tada za $y = xax$ je $ay, ya \in E(S)$.

11. Polugrupa S je E-*inverzivna* ako za svaki $a \in S$ postoji $x \in S$ tako da je $ax \in E(S)$. Dokazati da su sledeći uslovi za polugrupu S

ekvivalentni:
(i) S je E-inverzivna;
(ii) S svaki levi (desni) ideal od S sadrži idempotent;
(iii) S svaki glavni levi (desni) ideal od S sadrži idempotent.

12. Dokazati da su sledeće polugrupe E-inverzivne: (a) π-regularne polugrupe; (b) polugrupe koje sadrže idempotente i čije je prirodno uredjenje linearno.

Literatura. Arens and Kaplansky [1], Bogdanović [11], [15], Edwards [1], Howie [2], Howie and Lallement [1], Iséki [2], Kaplansky [1], Lallement [1], [2], Mitsch [2], Nambooripad [1], von Neumann [1], Petrich [15], [20], Thierrin [6], Warne [8].

2.2. Potpuno π-regularne polugrupe.

Element a polugrupe S je *potpuno regularan* ako postoji $x \in S$ tako da je $a = axa$ i $ax = xa$. Polugrupa S je *potpuno regularna* ako svaki njen element jeste potpuno regularan. Element a polugrupe S je *levo regularan* (*desno regularan*) ako je $a \in Sa^2$ $(a \in a^2S)$. Polugrupa S je *levo regularna* (*desno regurna*) ako svaki njen element jeste levo regularan (desno regularan).

Skup svih potpuno regularnih elemenata polugrupe S označavamo sa $Gr(S)$ i nazivamo *grupni deo od* S. Takav naziv opravdan je sledećom lemom.

Lema 2.4. *Sledeći uslovi za element* a *polugrupe* S *su ekvivalentni:*
(i) a *je potpuno regularan;*
(ii) a *ima inverz koji komutira sa* a*;*
(iii) $a \in a^2Sa^2$*;*
(iv) a *je desno i levo regularan;*
(v) a *je sadržan u nekoj podgrupi od* S*.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $x \in S$ tako da $a = axa$ i $ax = xa$. Tada za $y = xax$ imamo da je $y \in V(a)$ i $ay = ya$.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka je $a \in a^2S \cap Sa^2$. Tada je $a = a^2x = ya^2$ za neke $x, y \in S$, odakle je $ax = ya^2x = ya$. Neka je $e = ax = ya$. Kako je $e^2 = yaax = ya^2x = ya = e$, $e \in aS \cap Sa$, $ae = a(ax) = a^2x = a$, $ea = (ya)a = ya^2 = a$, to $a \in eS \cap Se$, pa prema Teoremi 1.6. dobijamo da je $a \in G_e$.

$(v) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Element a polugrupe S je *potpuno π-regularan* ako postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^n x a^n$ i $a^n x = x a^n$, tj. ako neki stepen elementa a jeste potpuno regularan. Polugrupa S je *potpuno π-regularna* ako svaki njen element jeste potpuno π-regularan.

Element a polugrupe S je *pseudoinvertibilan* ako postoje $x \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = a^{n+1}x$, $ax = xa$ i $x = x^2 a$. U tom slučaju x je *pseudoinverz* za a. Polugrupa S je *pseudoinvertibilna* ako je svaki njen element pseudoinvertibilan.

Element a polugrupe S je *levo π-regularan* (*desno π-regularan*) ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in Sa^{n+1}$ ($a^n \in a^{n+1}S$). Polugrupa S je *levo π-regularna* (*desno π-regularna*) ako svaki njen element jeste levo π-regularan (desno π-regularan).

Teorema 2.2. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je potpuno π-regularna;*
(*ii*) *za svaki element iz S neki njegov stepen je u nekoj podgrupi od S;*
(*iii*) *za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in a^n S a^{n+1}$;*
(*iii′*) *za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in a^{n+1} S a^n$;*
(*iv*) *S je π-regularna i levo π-regularna;*
(*v*) *S je pseudoinvertibilna.*

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Sledi prema Lemi 2.4.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*). Sledi neposredno.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*i*). Neka važi (*iv*). Uzmimo $a \in S$. Kako a jeste levo π-regularan, to postoje $m \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da $a^m = xa^{m+1}$, odakle dobijamo da je

$$a^m = x^k a^{m+k}, \tag{1}$$

za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Kako a^m jeste π-regularan, to postoje $p \in \mathbf{Z}^+$ i $y \in S$ tako da je $a^{mp} = a^{mp} y a^{mp}$. Tada prema (1) dobijamo da je $a^{mp} = a^{mp} y (x^{2mp} a^{m+2mp})^p \in a^{mp} S a^{2mp}$, tj.

$$a^n = a^n z a^{2n}, \tag{2}$$

za $n = mp$ i neki $z \in S$. Iz (2) lako dobijamo da je

$$a^n = a^n (z a^n)^k a^{nk}, \tag{3}$$

za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Kako je za^n levo π-regularan, to postoje $q \in \mathbf{Z}^+$ i $u \in S$ tako da je $(za^n)^q = u(za^n)^{q+1}$. Tada je $(za^n)^q = u^2 (za^n)^{q+2}$, pa prema (3)

$$\begin{aligned} a^n &= a^n (za^n)^q a^{nq} = a^n u^2 (za^n)^{q+2} a^{nq} = a^n u^2 z a^n z \left[a^n (za^n)^{q+2} a^{nq}\right] \\ &= a^n u^2 z a^n z a^n = a^n u^2 (za^n)^2 \ , \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} a^{2n} z a^n &= a^n (a^n z a^n) = a^n u^2 (za^n)^2 (a^n z a^n) = a^n u^2 z (a^n z a^{2n}) z a^n \\ &= a^n u^2 z a^n z a^n = a^n \ . \end{aligned}$$

Odavde i iz (2), prema Lemi 2.4, dobijamo da a jeste potpuno π-regularan element. Prema tome, važi (i).

$(ii) \Rightarrow (v)$. Neka je a proizvoljan element iz S. Tada je $a^n \in G_e$, za neke $e \in E(S)$, $n \in \mathbf{Z}^+$. Na osnovu Munnove leme je $ae = ea \in G_e$, pa postoji $x \in G_e$ da je $xea = aex = e$. Kako je $x = xe = ex$, to je $xa = ax = e$ i $x = xe = x^2a$. Konačno, $a^n = a^n e = a^{n+1}x$. Dakle, a je pseudoinvertibilan.

$(v) \Rightarrow (iii)$. Neka je a pseudoinvertibilan element iz S. Tada postoje $x \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$, da je

$$a^n = a^{n+1}x = a^{n+2}x^2 = \ldots = a^{3n}x^{2n} = a^n x^{2n} a^{2n} \in a^n S a^{n+1}. \qquad \square$$

Jedinstvenost pseudoinverza dokazujemo sledećom lemom.

Lema 2.5. *Element a polugrupe S ima najviše jedan pseudoinverz. Ako je x pseudoinverz elementa a, onda x komutira sa svakim elementom iz S sa kojim komutira i a.*

Dokaz. Neka su x i y pseudoinverzi za a, i neka su k i m odgovarajući postojeći brojevi iz definicije pseudoinverza. Uzmimo da je $n = \max\{k, m\}$. Tada je

$$xa^{n+1} = a^n = a^{n+1}y,\ x = x^2a,\ y = ay^2.$$

Odavde,

$$\begin{aligned} x &= x^2a = x^3a^2 = \ldots = x^{n+1}a^n = x^{n+1}a^{n+1}y = xay = xaay^2 \\ &= xa^2y^2 = \ldots = xa^{n+1}y^{n+1} = a^n y^{n+1} = \ldots = y. \end{aligned}$$

Dakle, a ima najviše jedan pseudoinverz x.

Uzmimo sada $u \in S$ tako da je $au = ua$. Tada je $xa^n u = xua^n = xua^{n+1}x = xa^{n+1}ux = a^n ux$, odakle dobijamo $x^{n+1}a^n u = a^n u x^{n+1}$. Medjutim, $x = x^{n+1}a^n$, pa je $xu = x^{n+1}a^n u = a^n u x^{n+1} = u x^{n+1} a^n = ux$. $\square$

Pseudoinverz je uopštenje grupnog inverza. Za to i neka druga uopštenja grupnog inverza i njihove primene upućujemo čitaoca na V.Rakočević [1].

Element a polugrupe S je *intra-regularan* ako je $a \in Sa^2S$. Skup intra-regularnih elemenata polugrupe S označavamo sa $Intra(S)$ i nazivamo *intra-regularni deo* od S. Polugrupa S je *intra-regularna* ako svaki njen element jeste intra-regularan.

Element a polugrupe S je *intra-π-regularan* ako postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in Sa^{2n}S$, tj. ako neki njegov stepen jeste intra-regularan. Polugrupa S je *intra-π-regularna* ako svaki njen element jeste intra-π-regularan.

Propozicija 2.1. *Neka je $\mathfrak{C}$ jedna od sledećih klasa polugrupa: Regularne, π-regularne, intra-regularne, intra-π-regularne, potpuno regularne, potpuno π-regularne, levo π-regularne, desno π-regularne, i neka je ξ*

polumrežna kongruencija na polugrupi S. *Tada je* S *iz klase* $\mathfrak{C}$ *ako i samo ako svaka* ξ*-klasa jeste iz klase* $\mathfrak{C}$.

Dokaz. Tvrdjenje ćemo dokazati za klasu π-regularnih polugrupa (u ostalim slučajevima dokazi su slični).

Neka S jeste π-regularna, neka je A proizvoljna ξ-klasa od S i neka je $a \in A$. Tada postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^n x a^n$ i $x = x a^n x$. Kako je $x\xi = (xa^n x)\xi = (x\xi)((a^n)\xi)(x\xi) = (x\xi)(a\xi) = ((a^n)\xi)(x\xi)((a^n)\xi) = (a^n)\xi = a\xi$, to $x \in A$. Prema tome, A je π-regularna polugrupa.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Slično se dokazuje sledeća propozicija:

Propozicija 2.2. *Neka je* $\mathfrak{C}$ *klasa potpuno regularnih polugrupa ili klasa potpuno* π*-regularnih polugrupa, i neka je* ξ *tračna kongruencija na polugrupi* S. *Tada je* S *iz klase* $\mathfrak{C}$ *ako i samo ako svaka* ξ*-klasa jeste iz klase* $\mathfrak{C}$. $\square$

Zadaci.

1. Neka je N skup nenegativnih celih brojeva. Tada $S = N \times N$ sa množenjem definisanim sa:

$$(m,n)(p,q) = (m - n + \max\{n,p\}, q - p + \max\{n,p\}),\ (\,(m,n),(p,q) \in S\,)$$

jeste polugrupa koju nazivamo *biciklična polugrupa*. Dokazati da je biciklična polugrupa prosta i inverzna i da nije potpuno prosta, tj. nije potpuno π-regularna.

2. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je potpuno π-regularna;

(ii) S je levo i desno π-regularna;

(iii) svaki glavni bi-ideal od S je π-regularan.

3. Neka S jeste π-regularna polugrupa i $m \in \mathbf{Z}^+$. Ako svaka $\mathcal{D}$-klasa od S sadrži najviše m $\mathcal{L}$-klasa, tada je S potpuno π-regularna i za svaki $a \in S$, a^{mn} je u nekoj podgrupi od S, gde je $n \in \mathbf{Z}^+$ najmanji broj za koji je $a^n \in Reg(S)$.

4. Svaki ideal π-regularne (potpuno π-regularne, regularne, potpuno regularne) polugrupe je π-regularan (potpuno π-regularan, regularan, potpuno regularan).

5. Neka je S potpuno π-regularna polugrupa, i za $e \in E(S)$ neka je $T_e = \sqrt{G_e}$. Tada G_e jeste ideal od $\langle T_e \rangle$, $xe = ex$ za svaki $x \in \langle T_e \rangle$, i $M_e = \{u \in S \mid (\exists x \in \langle T_e \rangle)\ xu \in \langle T_e \rangle\} = \{u \in S \mid (\exists x \in G_e)\ xu \in G_e\}$ je podpolugrupa od S sa idealom G_e.

6. Neka su $e, f \in E(S)$ i $(ef)^n, (fe)^n \in G_g$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada je $(ef)^n = (fe)^n = g$.

7. Polugrupa S je *D-polugrupa* ako za svaki $a \in S$ postoje $b \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = a^n b^2$, $b = a^n b a^n$. Dokazati da je S D-polugrupa ako i samo ako za svaki $a \in S$ neki njegov stepen leži u dijedarskoj podgrupi od S.

8. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je potpuno π-regularna i $E(S) = Gr(S)$;

(ii) S je unija nil-polugrupa;

(iii) $(\forall a \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n = a^{n+1}$.

Literatura. Azumaya [1], Bingjun [2], Bogdanović [11], [15], Bogdanović and Ćirić [7], Catino [1], Drazin [1], Edwards [1], Galbiati e Veronesi [2], [3], Hall [2], Hall and Munn [1], Howie [1], Madison, Mukherjee and Sen [1], [2], Munn [2], Putcha [1], Schein [7], Schützenberger [1].

2.3. Unije grupa.

Idempotent e polugrupe S bez nule je *primitivan* ako je minimalan u odnosu na prirodno uredjenje $\leq$ na $E(S)$, tj. ako

$$f^2 = f = ef = fe \ \Rightarrow\ f = e.$$

Polugrupa S je *potpuno prosta* ako S jeste prosta i sadrži primitivni idempotent.

Sledeća teorema poznata je kao Munnova teorema:

Teorema 2.3. (**Munnova teorema**) *Neka je S prosta polugrupa. Tada je S potpuno prosta ako i samo ako S jeste potpuno π-regularna.*

Dokaz. Neka je S potpuno prosta polugrupa, neka je $a \in S$ proizvoljan element i neka je $e \in E(S)$ primitivni idempotent. Tada je $S = SeS = Sea^3eS$, jer je S prosta, pa postoje $u, v, x, y \in S$ tako da je $a = uev$ i $e = x(ea^3e)y$. Uzmimo da je $f = evaeyexeaue$. Tada je

$$\begin{aligned} f^2 &= evaeyexeaueevaeyexeaue = evaeyexea(uev)aeyexeaue \\ &= evaeye(xea^3ey)exeaue = evaeyeeexeaue = f, \end{aligned}$$

i $f \leq e$, pa je $e = f$. Prema tome,

$$a = uev = ufev = (uev)(aeyexea)(uev) = a^2(eyexe)a^2 \in a^2Sa^2,$$

pa prema Lemi 2.4. dobijamo da element a jeste potpuno regularan.

Obratno, neka je S potpuno π-regularna i neka je $a \in S$. Kako je S prosta, to je $a = xay$, za neke $x, y \in S$. Jasno je da je $a = x^r a y^r$, za svaki $r \in \mathbf{Z}^+$. Kako je S potpuno π-regularna, to $x^s \in G_e$, za neke $s \in \mathbf{Z}^+$, $e \in E(S)$. Dokazaćemo da je e primitivan. Uzmimo da je $ef = fe = f$. Kako je S prosta, to je $e = pfq$, za neke $p, q \in S$. Neka je $h = epf$, $k = fqe$. Tada dobijamo da je $eh = h = hf = hfe = he$, $ke = k = fk = efk = ek$. Osim toga, $hk = epf^2qe = e^3 = e$, pa je

$$e = hk = hek = h(hk)k = h^2k^2 = \cdots = h^rk^r,$$

za svaki $r \in \mathbf{Z}^+$. Kako S jeste potpuno π-regularna, to $h^n \in G_g$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $g \in E(S)$. Uzmimo da je $u = h^n$, $v = k^n$, i da je w inverz elementa u u grupi G_g. Tada je

$$eu = u = ue,\ ev = v = ve,\ e = uv = u^2v^2,\ gu = u = ug,\ wu = g = uw,$$

odakle dobijamo da je $gv^2u^2 = w^2u^2w^2u^2 = w^2eu^2 = w^2u^2 = g$, pa je

$$e = uv = ugv = ugv^2u^2v = (ugv)(vu)(uv) = e(vu)e = vu.$$

Sa druge strane, $fv = fk^n = k^n = v$, jer je $fk = k$. Prema tome, $f = fe = fvu = vu = e$. $\square$

Posledica 2.4. *Polugrupa S je potpuno prosta ako i samo ako S jeste prosta i potpuno regularna.* $\square$

Sledećom teoremom daje se strukturni opis intra-regularnih polugrupa.

Teorema 2.4. *Polugrupa S je intra-regularna ako i samo ako S jeste polumreža prostih polugrupa.*

Dokaz. Neka je S intra-regularna polugrupa. Uzmimo $a \in S$. Tada je $a = xa^2y$, za neke $x, y \in S$, pa je $J(a) \subseteq J(a^2)$. Kako obratna inkluzija uvek važi, to dobijamo da je $J(a) = J(a^2)$, za svaki $a \in S$.

Uzmimo $a, b \in S$. Tada, prema prethodno dokazanom, dobijamo da je $J(ab) = J(abab) \subseteq J(ba)$ i $J(ba) \subseteq J(ab)$. Prema tome, $J(ab) = J(ba)$, za sve $a, b \in S$.

Uzmimo $a, b \in S$ tako da je $J(a) = J(b)$ i uzmimo $x \in S$. Tada je $a = ubv$, za neke $u, v \in S$, pa je

$$J(ax) = J(ubvx) \subseteq J(bvx) = J(bvxbvx) \subseteq J(xb) = J(bx).$$

Slično dobijamo da je $J(bx) \subseteq J(ax)$, odakle je $J(ax) = J(bx)$ i $J(xa) = J(xb)$. Prema tome, $\mathcal{J}$ je polumrežna kongruencija na S.

Jasno je da J_a jeste podpolugrupa od S, za svaki $a \in S$. Uzmimo $a \in S$, $x, y \in J_a$. Tada je $J(y) = J(x) = J(x^3)$, pa je $y = ux^3v = (ux)x(xv)$, za neke $u, v \in S^1$. Kako je

$$J_a = J_y = J_{ux}J_xJ_{xv} = J_{ux}J_aJ_{xv},$$

u $S/\mathcal{J}$, to dobijamo da je

$$J_a = J_{ux}J_a = J_uJ_xJ_a = J_uJ_x = J_{ux},$$

i slično, $J_{xv} = J_a$. Prema tome, $y \in J_axJ_a$, pa J_a jeste prosta polugrupa. Dakle, S je polumreža prostih polugrupa.

Obrat sledi na osnovu činjenice da svaka prosta polugrupa jeste intra-regularna i na osnovu Propozicije 2.1. $\square$

Polugrupa S je *unija grupa* ako se S može predstaviti u obliku unije svojih maksimalnih podgrupa. Prema Teoremi 1.7, ta unija je disjunktna.

Teorema 2.5. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) *S je potpuno regularna;*
(ii) *S je unija grupa;*
(iii) *S je polumreža potpuno prostih polugrupa;*
(iv) $(\forall a \in S)\ a \in aSa^2$*;*
(iv') $(\forall a \in S)\ a \in a^2Sa$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(ii) \Rightarrow (iv)$. Sledi prema Lemi 2.4.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka je $a = axa^2$, za neki $x \in S$. Tada je

$$a = axa^2 = (ax)aa = (ax)(axa^2)a \in Sa^2S,$$

pa S jeste intra-regularna. Prema Teoremi 2.4. dobijamo da S jeste polumreža prostih polugrupa, pa prema Teoremi 2.2, Propoziciji 2.1. i Teoremi 2.3. dobijamo da S jeste polumreža potpuno prostih polugrupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Posledici 2.4. i Propoziciji 2.1. $\square$

Uslov (iv) prethodne teoreme može se izreći i sa: S je regularna i levo (desno) regularna polugrupa.

Zadaci.

1. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(i) S je unija grupa;
(ii) S je levo i desno regularna;
(iii) S je regularna i levo (desno) regularna;
(iv) svaka $\mathcal{H}$-klasa od S je grupa.

2. Polugrupa S zadovoljava *uslov* (m, n), gde su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 2$, ako za svaki $a \in S$ postoji $x \in S$ tako da je $a = a^m x a^n$. Dokazati da su ekvivalentni
(a) svi uslovi $(m, 0)$, $m \geq 2$;
(b) svi uslovi $(0, n)$, $n \geq 2$;
(a) svi uslovi (m, n), $m + n \geq 3$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.
Uslov $(1, 1)$ nije ekvivalentan ni sa jednim od prethodnih uslova.

Literatura. Anderson [1], Clifford [1], Clifford and Preston [1], Croisot [1], Munn [2], Petrich [16], [18].

2.4. π-inverzne polugrupe.

Polugrupa S je *desno* (*levo*) *π-inverzna* ako S jeste π-regularna i za sve $a, x, y \in S$

$$a = axa = aya \ \Rightarrow\ xa = ya\ \big(ax = ay\big).$$

Teorema 2.6. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je desno π-inverzna;*

(*ii*) *S je π-regularna i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (fef)^n$;*

(*iii*) *za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $L(a^n)$ ima jedinstven idempotentan generator;*

(*iv*) *za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $L(a^n)$ ima jedinstvenu desnu jedinicu;*

(*v*) *S je π-regularna i za svaki $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n \mathcal{R} (fe)^n$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka $e, f \in E(S)$ i neka je a inverzni element za $(ef)^n$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada je

$$(ef)^n = (ef)^n a (ef)^n = (ef)^n f a (ef)^n,$$

pa na osnovu pretpostavke imamo da je $a(ef)^n = fa(ef)^n$, pa je $a(ef)^n a = fa(ef)^n a$. Prema tome,

$$a = fa. \tag{4}$$

Sada je

$$a = a(ef)^n a = a(efe)^{n-1} fa = a(efe)^{n-1} a. \tag{2}$$

Odavde, zbog (4)

$$a(efe)^{n-1} = a(efe)^{n-1} a(efe)^{n-1} a(efe)^{n-1} = a(efe)^{n-1} efa(efe)^{n-1} a(efe)^{n-1}$$

pa na osnovu pretpostavke dobijamo

$$a(efe)^{n-1} a(efe)^{n-1} = efa(efe)^{n-1} a(efe)^{n-1},$$

tj.

$$a(efe)^{n-1} = efa(efe)^{n-1}.$$

Odavde i iz (5) sledi da je $a = efa$, pa zbog (4) dobijamo

$$a = ea. \tag{6}$$

Koristeći (4) i (6), imamo da je

$$\begin{aligned}(ef)^n &= (ef)^n a (ef)^n = (ef)^n e a (ef)^n = (ef)^n e f a (ef)^n \\ &= ef (ef)^n a (ef)^n = ef (ef)^n = (ef)^{n+1}.\end{aligned}$$

Sada je $(ef)^n = (ef)^n ef (ef)^n = (ef)^n f (ef)^n$, pa je $ef(ef)^n = f(ef)^n$. Dakle, $(ef)^n = (fef)^n$, pa važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Ako je $a = axa = aya$, tada je $(xaya)^n = (yaxaya)^n$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa je $xa = ya$. Dakle, S je desno π-inverzna.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je $a^n = a^n x a^n$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $x \in S$. Tada na osnovu Leme 2.1, $L(a^n)$ ima idempotentan generator e. Uzmimo $f \in E(S)$ tako da je $L(a^m) = Sf$. Tada je $Se = Sf$, pa je $e = yf$, $f = xe$, za neke $x, y \in S$. Sada je $ef = (yf)f = yf = e$, $fe = f$, pa je $e = efe = e(efe)e$. Odavde, na osnovu pretpostavke, dobijamo da je $fe = efee = efe$. Dakle,

$f = fe = efe = e$. Prema tome, $L(a^n)$ ima jedinstven idempotentan generator.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka $L(a^n)$ ima jedinstven idempotentan generator e. Tada na osnovu Leme 2.1, $L(a^n)$ ima jedinstvenu desnu jedinicu.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka $L(a^n)$ ima jedinstvenu desnu jedinicu. Na osnovu Leme 2.1, A je π-regularan. Uzmimo da je $a = axa = aya$. Tada zbog jedinstvenosti desne jedinice je $za = ya$. Dakle, S je desno π-inverzna.

$(i) \Rightarrow (v)$. Za proizvoljne $e, f \in E(S)$ postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(efe)^m = (fe)^m$ i $(fef)^n = (ef)^n$. Odavde je

$$(ef)^{mn}e = (fe)^{mn} \quad \text{i} \quad (fe)^{mn}f = (ef)^{mn}.$$

Dakle, $(ef)^k \mathcal{R} (fe)^k$, za $k = mn$.

$(v) \Rightarrow (ii)$. Za $e, f \in E(S)$ neka je $(ef)^n \mathcal{R} (fe)^n$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada je $(ef)^n u = (fe)^n$, za neki $u \in S$, pa je $e(fe)^n = e(ef)^n u = (ef)^n u = (fe)^n$, tj. $(efe)^n = (fe)^n$. $\square$

Polugrupa S je *desno* (*levo*) *potpuno π-inverzna* ako S jeste potpuno π-regularna i za sve $a, x, y \in S$, $a = axa = aya$ povlači $xa = ya$ $(ax = ay)$, tj. ako je ona potpuno π-regularna i desno (levo) π-inverzna.

Teorema 2.7. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je desno potpuno π-inverzna;*

(ii) *S je π-regularna i za sve $a \in S$, $f \in E(S)$, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(af)^n = (faf)^n$;*

(iii) *S je π-regularna i za sve $a \in Reg(S)$, $f \in E(S)$, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(af)^n = (faf)^n$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a \in S$ i $f \in E(S)$. Prema Teoremi 2.2, postoje $k, m \in \mathbf{Z}^+$ da je $(af)^k \in G_g$ i $(faf)^m \in G_h$, za neke $g, h \in E(S)$. Na osnovu Munnove leme, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(af)^n \in G_g$ i $(fef)^n \in G_h$. Sada je

$$g = ((af)^n)_{-1}(af)^n = ((af)^n)_{-1}(af)^n f = gf.$$

Slično dobijamo da je $h = hf = fh$. Kako je $f(af)^r = (fa)^r f = (faf)^r$, za sve $r \in \mathbf{Z}^+$, to je $f(af)^n = (faf)^n = h(faf)^n = hf(af)^n = h(af)^n$. Dakle,

$$f(af)^n \left((af)^n\right)^{-1} = h(af)^n \left((af)^n\right)^{-1},$$

tj. $fg = hg$, odakle $g(fg) = g(hg)$. Kako je $gf = g$, to je $g = ghg = g^2$ i kako je S desno π-inverzna, to je $hg = g$. Prema tome, važi

$$fg = hg = g. \tag{7}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} h = hf &= \left((faf)^n\right)^{-1}(faf)^n f = \left((faf)^n\right)^{-1} f(af)^n f \\ &= \left((faf)^n\right)^{-1} f(af)^n gf = \left((faf)^n\right)^{-1}(faf)^n gf = hgf = hg. \end{aligned}$$

Odavde, koristeći (7) dobijamo da je $g = h$. Dakle, elementi $(af)^n$ i $(faf)^n$ pripadaju istoj podgrupi G_g od S, pa kako je $gf = g$, to

$$(faf)^n = g(faf)^n = gf(af)^n = g(af)^n = (af)^n.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Dokažimo da S jeste potpuno π-regularna. Neka je $a = axa$, za neki $x \in S$. Tada na osnovu pretpostavke teoreme postoji $r \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$a^r = (a(xa))^r = ((xa)a)^r = (xa^2)^r = xa^{r+1}.$$

Dakle, svaki regularan element iz S je desno π-regularan. Kako S jeste π-regularna, to za svaki $a \in S$ postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^m \in Reg(S)$. Odavde sledi da postoje $r \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da je $(a^m)^r = x(a^m)^{r+1}$, tj. $a^{mr} \in Sa^{mr+1}$. Dakle, S je π-regularna i levo π-regularna, pa na osnovu Teoreme 2.2. dobijamo da S jeste potpuno π-regularna polugrupa. Da S jeste desno π-inverzna, sledi na osnovu Teoreme 2.6. $\square$

Pojam inverzne polugrupe, kao jedno prirodno uopštenje pojma grupe, zauzima važno mesto u Teoriji polugrupa i nema monografije iz Teorije polugrupa koja mu ne posvećuje posebnu pažnju. U vezi ovih polugrupa, čitaoca upućijemo na monografiju M.Petrich [21]. Ovde će biti reči o jednom opštijem pojmu nego što je pojam inverzne polugrupe.

Polugrupa S je *π-inverzna* ako za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ i jedinstven $x \in S$ tako da je $a^n = a^n x a^n$ i $x = xa^n x$.

Teorema 2.8. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je π-inverzna;*

(ii) *S je π-regularna i za svaki $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (fe)^n$;*

(iii) *S je levo i desno π-inverzna.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Za proizvoljne $e, f \in E(S)$ postoje $x \in S$ i $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^k = (ef)^k z (ef)^k$ i $z = z(ef)^k z$. Odavde je $(ef)^k = (ef)^k ze(ef)^k$ i $ze = ze(ef)^k ze$. Sada, koristeći jedinstvenost, imamo da je $z = ze$, i slično $z = fz$. Razlikovaćemo dva slučaja.

Uzmimo da je $k > 1$. Sada je

$$z = z(ef)^k z = ze(fe)^{k-1} fz = z(fe)^{k-1} z,$$

pa ako stavimo da je $t = (fe)^{k-1} z (fe)^{k-1}$, onda imamo da je $ztz = z$ i $tzt = t$. Odavde zbog jedinstvenosti imamo da je $(ef)^k = t = (fe)^{k-1} z (fe)^{k-1}$, pa je

$$(ef)^k e = (fe)^{k-1} z (fe)^{k-1} e = (ef)^k.$$

Sada je $(ef)^k ef = (ef)^k f$, tj. $(ef)^{k+1} = (ef)^k \in E(S)$, pa zbog jedinstvenosti imamo da je $z = (ef)^k$.

Ako je $k=1$, tada je

$$z^2 = zz = (ze)(fz) = z(ef)z = z,$$

tj. $z \in E(S)$. Odavde zbog jedinstvenosti je $z = ef$.

Dakle, u oba slučaja imamo da je

$$z = (ef)^k = (ef)^{k+1}.$$

Kako je $z = ze = fz$, imamo da je $(ef)^k = z = fze = f(ef)^k e = (fe)^{k+1}$. Prema tome, za $n \geq k+1$ je $(ef)^n = (fe)^n$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi na osnovu Teoreme 2.6. i njenog duala.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo da $a \in Reg(S)$ ima inverzne elemente b i c. Tada je

$$abS = aS = acS \quad \text{i} \quad Sba = Sa = Sca.$$

Na osnovu Teoreme 2.6. i njoj dualne, $L(a)$ i $R(a)$ imaju jedinstven idempotentan generator, pa je $ab = ac$ i $ba = ca$, odakle je $b = bab = bac = cac = c$. $\square$

Polugrupa S je *potpuno π-inverzna* ako ona jeste potpuno π-regularna i π-inverzna. Na osnovu Teorema 2.7. i 2.8, neposredno se dokazuje sledeća:

Teorema 2.9. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno π-inverzna;*

(ii) *S je π-regularna i za sve $a \in S$, $f \in E(S)$, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(af)^n = (fa)^n$;*

(iii) *S je π-regularna i za sve $a \in Reg(S)$, $f \in E(S)$, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(af)^n = (fa)^n$.* $\square$

Polugrupa S je *jako π-inverzna* ako S jeste π-regularna i idempotenti iz S medjusobno komutiraju.

Teorema 2.10. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je jako π-inverzna;*

(ii) *S je π-regularna i $Reg(S)$ je inverzna podpolugrupa od S;*

(iii) *S je π-inverzna i proizvod svaka dva idempotenta iz S jeste idempotent.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 2.8.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Neka $a, b \in Reg(S)$. Tada postoje $x, y \in S$ tako da je $a = axa$ i $b = byb$. Sada je

$$ab = (axa)(byb) = a(xa)(by)b = a(by)(xa)b = ab(yx)ab.$$

Dakle, $Reg^2(S) = Reg(S)$. Neka je $a \in Reg(S)$, $x, y \in V(a)$. Kako idempotenti iz $Reg(S)$ komutiraju, to je

$$x = xax = x(aya)x = x(ay)(ax) = x(ax)(ay) = xay.$$

Slično, $x = yax$. Sada je

$$x = xax = (yax)a(xay) = y(axaxa)y = yay = y.$$

Prema tome, $Reg(S)$ je inverzna polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Polugrupa S je *Cliffordova polugrupa* ako je S regularna i $E(S) \subseteq C(S)$. Neposredno se zaključuje da svaka Cliffordova polugrupa jeste inverzna i potpuno regularna. Nešto opštiji je sledeći koncept: Element b polugrupe S je *σ-inverz* elementa $a \in S$ ako je $a = aba$, $b = bab$ i postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n b = ba^n$. Polugrupa S je *σ-inverzna* ako za svaki element iz S ima jedinstven σ-inverz.

Teorema 2.11. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je σ-inverzna;*

(ii) *S je inverzna i potpuno π-regularna;*

(iii) *S je regularna i za sve $a \in S$, $e \in E(S)$, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ae)^n = (ea)^n$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Za proizvoljan $a \in S$ postoje jedinstveni $b \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a = aba$, $b = bab$, $a^n b = ba^n$, pa je $a^n = aba^n = a^{n+1}b = ba^{n+1}$, što na osnovu Teoreme 2.9. znači da postoje $r, s \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(aax)^r = (axa)^r = a^r \quad \text{i} \quad (xaa)^s = (axa)^s = a^s.$$

Tada je $(a^2x)^t = a^t = (xa^2)^t$, za $t = rs$, pa je

$$\begin{aligned}(a^2x)^t &= a(axa)^{t-1}x = a(axa)^{t-1}axax = a(axa)^t x \\ &= a(xa^2)^t x = (axa)^t ax = a^t ax = a^{t+1}x.\end{aligned}$$

Slično dobijamo da je $(xa^2)^t = xa^{t+1}$. Dakle, $a^{t+1}x = xa^{t+1}$. Prema tome, S je σ-inverzna polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 2.9. $\square$

Zadaci.

1. Ako za svaki $a \in S$ postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da $L(a^m)$ ima jedinicu, onda je S potpuno π-regularna i desno π-inverzna polugrupa.

2. Polugrupa S je π-inverzna ako i samo ako S jeste π-regularna i iz $a = axa = aya$ sledi $xax = yay$.

3. Ako S jeste π-inverzna polugrupa, tada za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n \in E(S)$.

4. Polugrupa S je inverzna ako i samo ako S jeste regularna i idempotenti iz S medjusobno komutiraju.

Literatura. Bailes [1], Bogdanović [15], [16], Bogdanović and Ćirić [7], Galbiati e Veronesi [2], [3], [4], Harinath [1], [2], Howie [1], Petrich [21], Venkatesan [3].

GLAVA 3

(0-) Arhimedove polugrupe

A.K.Suškevič je 1928. godine dao konstrukciju jezgra, tj. najmanjeg ideala za konačne polugrupe. Reč je o potpuno prostoj polugrupi, tj. o prostoj polugrupi sa primitivnim idempotentom. D.Rees je 1941. godine dokazao strukturnu teoremu za potpuno 0-proste polugrupe. Ova teorema, koju ćemo zvati Teorema Suškevič-Reesa, je kasnije poslužila kao jedan od najpoznatijih modela za "pravljenje" novih polugrupa. Izučavajući razlaganja komutativnih polugrupa T.Tamura i N.Kimura i, nezavisno od njih, G.Thierrin su 1954. godine došli do pojma Arhimedove polugrupe. Reč je o polugrupi u kojoj za svaka dva elementa jedan od njih deli neki stepen onog drugog. Proste polugrupe, tj. polugrupe koje nemaju prave ideale, jesu Arhimedove. Obrat ne važi. Arhimedova polugrupa sa primitivnim idempotentom je potpuno Arhimedova. Ove polugrupe će igrati značajnu ulogu u polumrežnim razlaganjima potpuno π-regularnih polugrupa (Glava 6.). Po analogiji sa Reesovim prelazom od potpuno proste na potpuno 0-prostu polugrupu, S.Bogdanović i M.Ćirić 1993. godine uvode pojam (slabo) 0-Arhimedove polugrupe. Reč je o strukturno bogatijoj klasi polugrupa. O Arhimedovim i (slabo) 0-Arhimedovim polugrupama će biti reči u ovoj glavi. Na kraju ove glave su izloženi rezultati o polugrupama u kojima su svi pravi (levi) ideali Arhimedove polugrupe.

3.1. Potpuno 0-proste polugrupe.

Idempotent e polugrupe $S = S^0$ je *0-primitivan* ako je e minimalan element skupa svih nenula idempotenata polugrupe S, u odnosu na prirodno uredjenje na $E(S)$. Polugrupa $S = S^0$ je *potpuno 0-prosta* ako S jeste 0-prosta i sadrži 0-primitivan idempotent.

Slično Teoremi 2.3. se dokazuje i drugi oblik Munnove teoreme:

Teorema 3.1. *Neka je S 0-prosta polugrupa. Tada je S potpuno 0-prosta ako i samo ako S jeste potpuno π-regularna.* $\square$

Lema 3.1. *Neka je e 0-primitivni idempotent 0-proste polugrupe S. Tada je $L_e^0 = Se$.*

Dokaz. Jasno da je $L_e^0 \subseteq Se$. Neka je $b \in Se$, $b \neq 0$. Tada je $be = b$, i kako S jeste 0-prosta, to imamo da je $e = xby$, za neke $x, y \in S$. Za

$f = eyexb$ imamo da je $ef = fe = f$ i $f^2 = eyexbeyexb = eyexbyexb = eyexb = f$, pa zbog 0-primitivnosti idempotenta e, dobijamo da je $f = e$ ili $f = 0$. Ako je $f = 0$, tada je $0 = xbfy = xbeyexby = e$, što je nemoguće. Prema tome, $f = e$, tj. $e = eyexb \in Sb$. Dakle, $e\,\mathcal{L}\,b$, pa $b \in L_e^0$. Time smo dokazali tvrdjenje leme. $\square$

Lema 3.2. *Neka je S potpuno 0-prosta polugrupa i neka L jeste proizvoljna $\mathcal{L}$-klasa od S. Tada L^0 jeste 0-minimalan levi ideal od S.*

Dokaz. Uzmimo da je $L = L_x$, $x \neq 0$. Prema Lemi 3.1. imamo da je $S = SeS = L_e^0 S$, pa je $x = ua$, za neke $u \in L_e^0$, $a \in S$.

Uzmimo proizvoljan $y \in L$. Tada je $y = sx$, za neki $s \in S^1$, odakle je $y = sua \in L_e^0 a$, jer je $su \in L_e^0$, jer prema Lemi 3.1. L_e^0 jeste levi ideal od S. Prema tome, $L^0 \subseteq L_e^0 a$. Obratno, uzmimo da je $y \in L_e^0 a$. Tada je $y = va$, za neki $v \in L_e^0$. Ako je $v = 0$, tada je $y = 0 \in L^0$. Ako je $v \neq 0$, tada je $v\,\mathcal{L}\,u$, odakle je $va\,\mathcal{L}\,ua$, jer $\mathcal{L}$ jeste desna kongruencija, tj. $y\,\mathcal{L}\,x$. Prema tome, $y \in L$, tj. $L_e^0 a \subseteq L^0$. Dakle, $L^0 = L_e^0 a \subseteq Sea$, zbog Leme 3.1, pa L^0 jeste levi ideal od S.

Uzmimo da je $A \subseteq L^0$, $A \neq 0$, levi ideal od S. Uzmimo $a \in A$, $a \neq 0$, i uzmimo $x \in L$. Tada je $x\,\mathcal{L}\,a$, pa je $x = ua \in A$, za neki $u \in S$, odakle je $A = L^0$. Prema tome, L^0 je 0-minimalan levi ideal od S. $\square$

Neposredno iz Leme 3.2, dobijamo sledeću

Posledica 3.1. *Neka je S potpuno 0-prosta polugrupa i neka je $a \in S$. Tada je $L_a^0 = Sa$.* $\square$

Lema 3.3. *Neka je S potpuno 0-prosta polugrupa. Tada za $a, b \in S$, iz $aSb \neq 0$ sledi da je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$.*

Dokaz. Neka je $aSb = 0$. Uzmimo da je $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Prema Posledici 1.6, $SaS = SbS = S$, pa je $S = S^2 = SaSSbS = SaSbS = 0$, što je nemoguće. Dakle, $a = 0$ ili $b = 0$. $\square$

Polugrupa S je *0-biprosta* ako S ima tačno jednu nenula $\mathcal{D}$-klasu.

Lema 3.4. *Svaka potpuno 0-prosta polugrupa je 0-biprosta.*

Dokaz. Uzmimo $a, b \in S^\bullet$. Prema Lemi 3.3. imamo da je $aSb \neq 0$. Neka je $x \in aSb$, $x \neq 0$. Prema Posledici 3.1. je $x \in aSb \subseteq Sb = L_b^0$, pa je $x\,\mathcal{L}\,b$. Slično dobijamo da je $x\,\mathcal{R}\,a$. Prema tome, $a\,\mathcal{D}\,b$, pa S jeste 0-biprosta.

Iz Leme 3.4. i Propozicije 1.6, neposredno dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 3.2. *Svaka potpuno 0-prosta polugrupa je regularna.* $\square$

Lema 3.5. *Neka H jeste $\mathcal{H}$-klasa potpuno 0-proste polugrupe S. Tada je $H^2 = 0$ ili H jeste grupa.*

Dokaz. Uzmimo da je $H \neq H_0 = 0$, i uzmimo $a \in H$. Razlikujemo dva slučaja:

(a) Neka je $a^2 = 0$. Uzmimo $x, y \in H$. Tada je $x \mathcal{L} a$ i $y \mathcal{R} a$, pa je $x = ua$, $y = av$, za neke $u, v \in S^1$, odakle je $xy = ua^2v = 0$. Dakle, $H^2 = 0$.

(b) Neka je $a^2 \neq 0$. Prema Lemi 3.2. imamo da L_a^0 jeste levi ideal od S, odakle je $a^2 \in L_a^0$, pa na osnovu pretpostavke dobijamo da je $a^2 \in L_a$. Prema tome, $a\mathcal{L}a^2$. Na isti način dokazujemo da je $a \mathcal{R} a^2$. Dakle, $a \mathcal{H} a^2$, pa prema Greenovoj teoremi dobijamo da $H = H_a$ jeste grupa. □

Polugrupa $S = S^0$ je *0-grupa* ako je $S^\bullet$ grupa.

Neka G jeste grupa, neka I, Λ jesu neprazni skupovi i neka $P = (p_{\lambda i})$ jeste $\Lambda \times I$ matrica nad 0-grupom G^0. Na $S = (G \times I \times \Lambda) \cup \{0\}$, definišimo množenje sa:

$$(a; i, \lambda)(b; j, \mu) = \begin{cases} (ap_{\lambda j}b; i, \mu) & \text{ako je } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0 & \text{ako je } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$
$$(a; i, \lambda)0 = 0(a; i, \lambda) = 00 = 0.$$

Proverava se da je S polugrupa, koju označavamo sa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ i nazivamo je *Reesova matrična polugrupa tipa* $\Lambda \times I$ *nad 0-grupom* G^0 *sa sendvič matricom* P.

Matrica P tipa $\Lambda \times I$ nad 0-grupom G^0 je *regularna* ako

$$(\forall i \in I)(\exists \lambda \in \Lambda)\ p_{\lambda i} \neq 0, \qquad (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists i \in I)\ p_{\lambda i} \neq 0,$$

tj. ako svaka vrsta i svaka kolona matrice P sadrži nenula element.

Lema 3.6. *Reesova matrična polugrupa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ je regularna ako i samo ako matrica P jeste regularna.*

Dokaz. Neka S jeste regularna polugrupa, neka je $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ i neka je $a \in G$. Neka $(b; j, \mu) \in S$ jeste inverz elementa $(a; i, \lambda)$. Tada dobijamo da je $p_{\lambda j} b p_{\mu i} = a^{-1}$, odakle je $p_{\lambda j} \neq 0$ i $p_{\mu i} \neq 0$. Prema tome, P je regularna matrica.

Obratno, neka P jeste regularna matrica. Uzmimo $(a; i, \lambda) \in S^\bullet$. Tada postoje $j \in I$, $\mu \in \Lambda$ tako da $p_{\lambda j}, p_{\mu i} \in G$, pa je $(p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} p_{\mu i}^{-1}; j, \mu)$ jeste inverz elementa $(a; i, \lambda)$, pa $(a; i, \lambda)$ jeste regularan. Jasno je da 0 jeste regularan element. Prema tome, S je regularna polugrupa. □

Lema 3.7. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ regularna Reesova matrična polugrupa i neka $(a; i, \lambda), (b; j, \mu) \in S$. Tada*

$$(a; i, \lambda)\ \mathcal{L}\ (b; j, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu,$$
$$(a; i, \lambda)\ \mathcal{R}\ (b; j, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad i = j.$$

Dokaz. Uzmimo da je $(a;i,\lambda)\mathcal{L}(b;j,\mu)$ Tada je $(a;i,\lambda)=(b;j,\mu)$ ili postoji $(x;k,\nu)\in S$ tako da je $(a;i,\lambda)=(x;k,\nu)(b;j,\mu)=((xp_{\nu j}b;j,\mu)$ $(p_{\nu j}\neq 0$ jer je $(a;i,\lambda)\neq 0)$. Prema tome, $\lambda=\mu$.

Obratno, neka je $\lambda=\mu$ i neka $\nu,\eta\in\Lambda$, jesu elementi za koje je $p_{\nu i}\neq 0$, $p_{\eta j}\neq 0$ (takvi postoje jer matrica P jeste regularna). Tada je

$$(ba^{-1}p_{\nu i}^{-1};j,\nu)(a;i,\lambda)=(b;j,\lambda),$$
$$(ab^{-1}p_{\eta j}^{-1};i,\eta)(b;j,\lambda)=(a;i,\lambda).$$

Prema tome, $(a;i,\lambda)\ \mathcal{L}\ (b;j,\lambda)$. Sličan dokaz imamo za relaciju $\mathcal{R}$. $\square$

Posledica 3.3. *Neka je $S=\mathcal{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ regularna Reesova matrična polugrupa. Tada $\{L_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ jeste skup nenula $\mathcal{L}$-klasa od S i $\{R_i\mid i\in I\}$ je skup nenula $\mathcal{R}$-klasa od S, gde je*

$$L_\lambda=\{(a;i,\lambda)\mid a\in G,\ i\in I\},\quad R_i=\{(a;i,\lambda)\mid a\in G,\ \lambda\in\Lambda\},$$

i $\{H_{i\lambda}\mid i\in I,\ \lambda\in\Lambda\}$ je skup nenula $\mathcal{H}$-klasa, gde je $H_{i\lambda}=R_i\cap L_\lambda=\{(a;i,\lambda)\mid a\in G\}$.

Teorema 3.2. *Reesova matrična polugrupa $S=\mathcal{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ je 0-prosta ako i samo ako S jeste regularna, i u tom slučaju S jeste potpuno 0-prosta.*

Dokaz. Neka S jeste 0-prosta polugrupa. Uzmimo da S nije regularna. Tada prema Lemi 3.6. dobijamo da postoji neka vrsta ili kolona matrice P čiji su svi elementi jednaki nuli. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da postoji $\lambda\in\Lambda$ tako da je $p_{\lambda j}=0$, za svaki $j\in I$. Neka je $A=\{(a;i,\lambda)\mid a\in G,\ i\in I\}\cup\{0\}$. Tada za $(a;i,\lambda)\in A$, $(b;j,\mu)\in S^\bullet$ imamo da je $(a;i,\lambda)(b;j,\mu)=0$, jer je $p_{\lambda j}=0$, i

$$(b;j,\mu)(a;i,\lambda)=\begin{cases}(bp_{\mu i}a;j,\lambda)\in A & \text{ako je } p_{\mu i}\neq 0,\\ 0\in A & \text{ako je } p_{\mu i}=0.\end{cases}$$

Prema tome, A je ideal od S i $A\neq\{0\}$, $A\neq S$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da S jeste 0-prosta polugrupa. Prema tome, S je regularna.

Obratno, neka je S regularna polugrupa. Uzmimo $(a;i,\lambda),(b;j,\mu)\in G\times I\times\Lambda$. Prema Lemi 3.6. imamo da postoje $k\in I$ i $\nu\in\Lambda$ tako da je $p_{\nu i}\neq 0$ i $p_{\lambda k}\neq 0$. Tada je

$$(b(p_{\nu i}ap_{\lambda k})^{-1};j,\nu)(a;i,\lambda)(e;k,\mu)=(b;j,\mu),$$

gde je e jedinica grupe G, pa prema Posledici 1.6. dobijamo da S jeste 0-prosta.

Kako je $E(S)=\{(p_{\lambda i}^{-1};i,\lambda)\mid i\in I,\ \lambda\in\Lambda\}\cup\{0\}$, to se lako proverava da svaki nenula idempotent polugrupe S jeste 0-primitivan. Dakle, ako S jeste 0-prosta, tada S jeste potpuno 0-prosta. $\square$

Osnovna strukturna karakterizacija za potpuno 0-proste polugrupe je data sledećom teoremom.

Teorema 3.3. (**Teorema Suškevič-Reesa**) *Polugrupa S je potpuno 0-prosta ako i samo ako S jeste izomorfna nekoj regularnoj Reesovoj matričnoj polugrupi nad 0-grupom.*

Dokaz. Neka je S potpuno 0-prosta polugrupa. Prema Lemi 3.4. dobijamo da S jeste 0-biprosta, tj. $D = S - 0$ jeste $\mathcal{D}$-klasa od S. Neka su $\{R_i \mid i \in I\}$ i $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, skupovi $\mathcal{R}$-klasa i $\mathcal{L}$-klasa, tim redom, polugrupe S sadržanih u D. Pri ovakvom označavanju, skup svih $\mathcal{H}$-klasa od S sadržanih u D je $\{H_{i\lambda} \mid i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}$, gde $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$.

Neka je e proizvoljni idempotent iz D. Prema Posledici 1.13. imamo da H_e jeste grupa. Označimo R_e sa R_1, L_e sa L_1 i H_e sa $R_1 \cap L_1$. Time smo uzeli da I i Λ imaju zajednički element 1, pri čemu nema opasnosti od zabune i od umanjenja opštosti dokaza.

Za svaki $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, izaberimo i fiksirajmo element $r_i \in H_{i1}$ i element $q_\lambda \in H_{1\lambda}$. Kako je $r_i \mathcal{L} e$, to prema Posledici 1.12. imamo da je $r_i e = r_i$, pa prema Greenovoj lemi dobijamo da preslikavanje $x \mapsto r_i x$ jeste bijekcija od H_{11} na H_{i1}. Slično dobijamo da je $eq_\lambda = q_\lambda$, pa prema Greenovoj lemi dobijamo da preslikavanje $y \mapsto yq_\lambda$ jeste bijekcija od H_{i1} na $H_{i\lambda}$. Prema tome, preslikavanje $a \mapsto r_i a q_\lambda$ jeste bijekcija od H_{11} na $H_{i\lambda}$, pa svaki element iz $H_{i\lambda}$ ima jedinstveno predstavljanje u obliku $r_i a q_\lambda$, pri čemu je $a \in H_{11}$. Kako je $D = \cup\{H_{i\lambda} \mid i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}$, i ta unija je disjunktna, to preslikavanje $\phi : (H_{11} \times I \times \Lambda) \cup 0 \to S$ definisano sa:

$$(a; i, \lambda)\phi = r_i a q_\lambda, \quad 0\phi = 0,$$

jeste bijekcija. Neka je $M = \mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$, gde je matrica P definisana sa:

$$p_{\lambda i} = q_\lambda r_i \qquad (i \in I,\ \lambda \in \Lambda).$$

Uzmimo $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$ i dokažimo da je $p_{\lambda i} \in H_{11}^0$. Prema Lemi 3.5, imamo da je $H_{i\lambda}^2 = 0$ ili $H_{i\lambda}$ jeste grupa. Uzmimo, najpre, da je $H_{i\lambda}^2 = 0$. Tada za $c \in H_{i\lambda}$ postoje $u, v \in S^1$ tako da je $q_\lambda = uc$ i $r_i = cv$, pa je $p_{\lambda i} = uc^2 v = 0 \in H_{11}^0$. Neka je $H_{i\lambda}$ grupa i neka f jeste njena jedinica. Tada prema Posledici 1.12. imamo da je $fr_i = r_i$, pa prema Greenovoj lemi sledi da preslikavanje $x \mapsto xr_i$ jeste bijekcija iz L_λ na L_1 koje očuvava $\mathcal{R}$-klase. Odavde je $p_{\lambda i} = q_\lambda r_i \in H_{11}$. Dakle, P je matrica nad H_{11}^0. Takodje, ovim smo dokazali i da je $p_{\lambda i} = 0$ ako i samo ako je $H_{i\lambda}^2 = 0$. Kako iz Propozicije 1.7. dobijamo da svaka $\mathcal{L}$-klasa L_λ i svaka $\mathcal{R}$-klasa R_i od S sadržana u D, ima idempotent, to za svaki $i \in I$ postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da $H_{i\lambda}$ jeste grupa, odnosno da $p_{\lambda i} \neq 0$. Slično dokazujemo i drugi uslov potreban za dokaz regularnosti matrice P.

Lako se dokazuje da ϕ jeste izomorfizam. Prema tome, polugrupa S je izomorfna Reesovoj matričnoj polugrupi M.

Obrat sledi prema Teoremi 3.2. $\square$

Kao što se vidi iz dokaza Teoreme 3.3, predtsvaljanje potpuno 0-proste polugrupe polugrupom $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ dobili smo proizvoljnim izborom podgrupe H_{11} i skupova $\{r_i \,|i \in I\}$ i $\{q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Prirodno se postavlja pitanje: Kako to da taj izbor ne utiče (do na izomorfizam) na strukturu polugrupe $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$? Odgovor na to pitanje daje nam sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 3.4. *Dve regularne Reesove matrične polugrupe* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *i* $T = \mathcal{M}^0(H; J, M; Q)$ *su izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam* $\theta : G \to H$, *bijekcije* $\varphi : I \to J$, $\psi : \Lambda \to M$ *i podskupovi* $\{u_i \mid i \in I\}, \{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq H$ *tako da je* $p_{\lambda i}\theta = v_\lambda q_{\lambda\psi, i\varphi} u_i$, *za sve* $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. $\square$

Neka je G grupa i I neprazan skup. Ako je P $I \times I$-matrica nad 0-grupom G^0, takva da je $p_{ii} = 1$, za svaki $i \in I$, gde je 1 jedinica grupe G, i $p_{ij} = 0$, za $i, j \in I$, $i \neq j$, tada kažemo da je P *jedinična* $I \times I$*-matrica*. Polugrupa S je *Brandtova polugrupa* ako je S izomorfna sa nekom polugrupom $\mathcal{M}^0(G; I, I, P)$, gde je P jedinična $I \times I$-matrica. Iz Teorema 3.3. i 3.4. dobijamo

Posledica 3.4. *Polugrupa* S *je Brandtova ako i samo ako* S *jeste potpuno 0-prosta i inverzna.*

Dokaz. Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, I, P)$ Brandtova polugrupa. Za proizvoljan $(a; i, j) \in S^\bullet$, iz $(b; k, l) \in V((a; i, j))$ sledi da je $k = j$, $l = i$ i $b = a^{-1}$, odakle sledi da je S inverzna. Prema Teoremi 3.3, S je potpuno 0-prosta.

Obratno, neka je S potpuno 0-prosta i inverzna. Prema Teoremi 3.3, $S \cong \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$, gde je P regularna matrica. Sada je $((p_{\lambda i}^{-1})^2; i, \lambda) \in V((1; i, \lambda))$. Ako je $\mu \in \Lambda$ tako da je $p_{\mu i} \neq 0$, tada je $(p_{\lambda i}^{-1} p_{\mu i}^{-1}; i, \mu) \in V((1; i, \lambda))$, što je u suprotnosti sa činjenicom da je S inverzna. Prema tome, za svaki $i \in I$ postoji tačno jedan $\lambda \in \Lambda$ tako da je $p_{\lambda i} \neq 0$. Slično dokazujemo da za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji tačno jedan $i \in I$ da je $p_{\lambda i} \neq 0$. Prema tome, preslikavanje $\psi : \Lambda \to I$ definisano sa: $\lambda\psi = i$ ako i samo ako je $p_{\lambda i} \neq 0$, je bijekcija. Ako sada uzmemo da je Q jedinična $I \times I$-matrica nad G^0, tada na osnovu Teoreme 3.4. dobijamo da je $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda P) \cong \mathcal{M}^0(G; I, I, Q)$ (pri čemu uzimamo na primer da je $v_\lambda = 1$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, $u_i = p_{i\psi^{-1}, i}$, za svaki $i \in I$, i da je θ identički automorfizam grupe G). $\square$

Neka je G grupa, neka su I, Λ neprazni skupovi i neka $P = (p_{\lambda i})$ jeste $\Lambda \times I$ matrica nad grupom G. Na $S = G \times I \times \Lambda$, definišimo množenje sa:

$$(a;i,\lambda)(b;j,\mu) = (ap_{\lambda j}b;i,\mu).$$

Tada S jeste polugrupa koju označavamo sa $S = \mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$ i nazivamo je *Reesova matrična polugrupa tipa* $\Lambda \times I$ *nad grupom* G *sa sendvič matricom* P.

Jasno je da se ovako konstruisana polugrupa može dobiti iz Reesove matrične polugrupe $M = \mathcal{M}^0(G;I,\Lambda;P)$. Naime, kako su svi elementi matrice P različiti od nule, to $M - 0$ jeste podpolugrupa od M izomorfna sa $\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$. Zbog toga dokaz naredne teoreme sledi direktno iz Teoreme 3.3.

Teorema 3.5. *Polugrupa S je potpuno prosta ako i samo ako S jeste izomorfna nekoj Reesovoj matričnoj polugrupi nad grupom.* $\square$

Polugrupu koja je izomorfna direktnom proizvodu pravougaone trake i grupe nazivamo *pravougaona grupa*. Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 3.8. *Neka je pravougaona grupa S direktan proizvod grupe G i pravougaone trake E. Tada $E(S)$ jeste pravougaona traka izomorfna sa E.* $\square$

Teorema 3.6. *Polugrupa S je pravougaona grupa ako i samo ako S jeste potpuno prosta polugrupa u kojoj idempotenti čine podpolugrupu.*

Dokaz. Neka je S potpuno prosta polugrupa u kojoj idempotenti čine podpolugrupu i označimo $E(S)$ sa E. Tada $S = \mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$. Kako je $E = \{(p_{\lambda i}^{-1};i,\lambda) \mid i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}$, to prema pretpostavci imamo da je

$$(p_{\lambda i}^{-1};i,\lambda)(p_{\mu j}^{-1};j,\mu) = (p_{\mu i}^{-1};i,\mu),$$

to je

$$p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} = p_{\mu i}^{-1}, \qquad \text{tj.} \qquad p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda j} = p_{\mu i}^{-1}p_{\mu j}.$$

Izaberimo i fiksirajmo proizvoljni element $1 \in I$. Tada imamo da je

$$p_{\lambda 1}^{-1}p_{\lambda i} = p_{\mu 1}^{-1}p_{\mu i},$$

za sve $i \in I,\ \lambda,\mu \in \Lambda$. Definišimo preslikavanje $\phi : S \to E \times G$ sa:

$$(a;i,\lambda)\phi = \left((p_{\lambda i}^{-1};i,\lambda), p_{\lambda 1}^{-1}p_{\lambda i}ap_{\lambda 1}\right).$$

Neposredno se proverava da ϕ jeste izomorfizam polugrupe S na pravougaonu grupu $E \times G$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Iz Teoreme 3.6. neposredno se dobija sledeća:

Posledica 3.5. *Traka S je potpuno prosta ako i samo ako S jeste pravougaona traka.* $\square$

Iz Teoreme 2.5. i Posledice 3.5. dobijamo:

Posledica 3.6. *Svaka traka je polumreža pravougaonih traka.* □

Posledica 3.7. *Neka je polugrupa S traka B polugrupa S_i, $i \in B$, i neka je B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$. Tada S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica B_α polugrupa S_i, $i \in B_\alpha$.* □

Polugrupa S je *levo* (*desno kancelativna* ako za $a, b, c \in S$, iz $ac = bc$ ($ca = cb$) sledi $a = b$. Polugrupa S je *kancelativna* ako je levo i desno kancelativna. Polugrupa S je *leva* (*desna*) *grupa* ako je S izomorfna direktnom proizvodu grupe i levo (desno) nulte trake.

Teorema 3.7. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(*i*) *S je leva grupa;*
(*ii*) *S je levo nulta traka grupa;*
(*iii*) *$(\forall a, x \in S)\ x \in xSa$;*
(*iv*) *S je regularna i $E(S)$ je levo nulta traka;*
(*v*) *S je levo prosta i desno kancelativna;*
(*vi*) *za sve $a, b \in S$ postoji tačno jedan $x \in S$ tako da je $xa = b$;*
(*vii*) *S je levo prosta i sadrži idempotent;*
(*viii*) *S ima desnu jedinicu e i $e \in Sa$, za svaki $a \in S$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ako je $S = G \times E$ direktan proizvod grupe G i trake E, tada S jeste levo nulta traka E grupa $G_e = G \times \{e\}$, $e \in E$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je S levo nulta traka E grupe G_e, $e \in E$. Uzmimo $x, a \in S$. Tada je $x \in G_e$, $a \in G_f$, za neke $e, f \in E$, odakle je $x, xa \in G_e$, pa kako G_e jeste grupa, to je $x \in xG_e xa \subseteq xSa$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Ako važi (iv), jasno je da S jeste regularna. Uzmimo $e, f \in E(S)$. Tada je $e \in Sf$, odakle je $ef = e$. Prema tome, $E(S)$ je levo nulta traka.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka je S regularna i neka je $E(S)$ levo nulta traka. Uzmimo $a, b \in S$. Tada za $x \in V(a)$, $y \in V(b)$, imamo da je $b = byb = bybxa \in Sa$. Dakle, prema Posledici 1.5, S je levo prosta.

Uzmimo $a, b, c \in S$ tako da je $ac = bc$. Tada za $x \in V(a)$, $y \in V(b)$, $z \in V(c)$, dobijamo da je

$$a = axa = axacz = acz = bcz = bybcz = byb = b.$$

Prema tome, S je desno kancelativna.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Sledi neposredno.

$(vi) \Rightarrow (vii)$. Neka važi (vi). Tada prema Posledici 1.5. dobijamo da S jeste levo prosta. Uzmimo proizvoljan $a \in S$. Prema (vi), postoji tačno jedan $x \in S$ tako da je $xa = a$. Odavde dobijamo da je $x^2 a = xa = a$, pa na osnovu jedinstvenosti elementa x, $x^2 = x$. Prema tome, S sadrži idempotent.

$(vii) \Rightarrow (viii)$. Neka je S levo prosta i neka sadrži idempotent. Uzmimo proizvoljan $e \in E(S)$. Tada prema Posledici 1.5, za proizvoljan $a \in S$ imamo da je $e \in Sa$ i $a \in Se$, i iz $a \in Se$ dobijamo da je $ae = a$, pa e jeste desna jedinica.

$(viii) \Rightarrow (vii)$. Neka važi $(viii)$. Tada za proizvoljne $a, b \in S$, $b = be \in bSa \subseteq Sa$, pa S jeste levo prosta. Kako je $e \in E(S)$, to važi (vii).

$(vii) \Rightarrow (i)$. Neka je S levo prosta i neka sadrži idempotent. Tada je jasno je da S jeste prosta. Osim toga, za proizvoljne $e, f \in E(S)$, iz $e \in Sf$ dobijamo da je $ef = e$, pa je $E(S)$ podpolugrupa od S, i pri tome $E(S)$ jeste levo nulta traka, odakle neposredno dobijamo da svaki idempotent iz S jeste primitivan. Dakle, S je potpuno prosta, pa prema Teoremi 3.6, S je pravougaona grupa, tj. S je direktan proizvod grupe G i pravougaone trake E. Kako $E(S)$ jeste levo nulta traka, to prema Lemi 3.8, E jeste levo nulta traka. Dakle, S je leva grupa. $\square$

Teorema 3.8. *Neka je* $S = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$. *Tada*

(i) S *jeste disjunktna unija minimalnih levih ideala*

$$L_\lambda = \{(a; i, \lambda) \mid a \in G,\ i \in I\}, \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

koji su leve grupe;

(ii) S *jeste disjunktna unija minimalnih desnih ideala*

$$R_i = \{(a; i, \lambda) \mid a \in G,\ \lambda \in \Lambda\}, \qquad (i \in I),$$

koji su desne grupe;

(iii) S *jeste disjunktna unija bi-ideala*

$$H_{i\lambda} = \{(a; i, \lambda) \mid a \in G\}, \qquad (i \in I,\ \lambda \in \Lambda),$$

koji su grupe sa jedinicama $(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$*; Šta više,* S *je matrica (pravougaona traka)* $I \times \Lambda$ *grupa* $H_{i\lambda}$. $\square$

Posledica 3.8. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) S *je potpuno prosta;*

(ii) S *je levo nulta traka desnih grupa;*

(iii) S *je desno nulta traka levih grupa;*

(iv) S *je matrica grupa.* $\square$

Zadaci.

1. Reesova matrična polugrupa nad grupom sa nulom i sa proizvoljnom sendvič matricom je E-inverzivna.

2. Polugrupa $S = S^0$ je 0-grupa ako i samo ako je levo 0-prosta i desno 0-prosta.

3. Baer-Levijeva polugrupa je desno prosta i desno kancelativna a nije levo prosta i levo kancelativna.

4. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(*i*) S je potpuno prosta;
(*ii*) a svaki $a \in S$, aS sadrži idempotent i za $a, x \in S$, iz $a = axa$ sledi $x = xax$;
(*iii*) S je desno regularna i za $a, x \in S$, iz $a = a^2x$ sledi $x = x^2a$;
(*iv*) $(\forall a, b \in S)\ a \in abSa$.

Literatura. Allen [1], Bogdanović and Stamenković [1], Clifford [1], Clifford and Preston [1], Čupona [2], Howie [1], Kapp and Schneider [1], Lallement [3], Lallement et Petrich [2], Mitsch [2], Munn [2], Schwarz [1], Steinfeld [1], [2], Сушкевич [1], [2], Venkatesan [2].

3.2. 0-Arhimedove polugrupe.

Neka je $S = S^0$ polugrupa. Ideal I polugrupe S je *nil-ideal* od S ako I jeste nil-polugrupa. Najveći nil-ideal polugrupe S, tj. uniju svih nil-ideala od S, u oznaci $\mathfrak{R}(S)$, nazivamo *Cliffordov radikal* polugrupe S. Neke osobine Cliffordovog radikala, dajemo narednim lemama.

Lema 3.9. *Za proizvoljnu polugrupu* $S = S^0$ *je* $\mathfrak{R}(S/\mathfrak{R}(S)) = 0$.

Dokaz. Neka je $S/\mathfrak{R}(S) = Q$, neka je $\varphi : S \to Q$ prirodni homomorfizam i neka je I nil-ideal od Q. Neka je $J = \{x \in S \mid \varphi(x) \in I\}$. Tada se lako proverava da J jeste nil-ideal od S, odakle je $J \subseteq \mathfrak{R}(S)$, pa I jeste nula ideal od Q. $\square$

Neka je S proizvoljna polugrupa. Za $a \in S$, za $\Sigma_1(a)$ označavamo skup $\Sigma_1(a) = \{x \in S \mid x \longrightarrow a\}$, i sa σ_1 označavamo relaciju definisanu sa $a\ \sigma_1\ b \Leftrightarrow \Sigma_1(a) = \Sigma_1(b)$, $(a, b \in S)$. O skupovima $\Sigma_n(a)$ i relacijama σ_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, biće reči u Glavi 5. Ovde dajemo vezu Cliffordovog radikala polugrupe sa nulom i relacije σ_1 na toj polugrupi:

Lema 3.10. *Cliffordov radikal* $\mathfrak{R}(S)$ *polugrupe* $S = S^0$ *jednak je* σ_1*-klasi koja sadrži* 0.

Dokaz. Neka C jeste σ_1-klasa od S koja sadrži 0, i neka je $a \in C$, $x \in S$. Tada je $\Sigma_1(a) = \Sigma_1(0) = Nil(S)$. Tada je

$$\Sigma_1(ax) \subseteq \Sigma_1(a) = Nil(S), \quad \Sigma_1(xa) \subseteq \Sigma_1(a) = Nil(S),$$

pa kako je $Nil(S) \subseteq \Sigma_1(u)$, za svaki $u \in S$, to je $\Sigma_1(ax) = \Sigma_1(xa) = Nil(S) = \Sigma_1(0)$, pa $ax, xa \in C$. Dakle, C je ideal od S. Jasno je da je $C \subseteq Nil(S)$, pa C jeste nil-ideal, odakle je $C \subseteq \mathfrak{R}(S)$.

Neka je $a \in \mathfrak{R}(S)$ i uzmimo $x \in \Sigma_1(a)$, tj. $x^n \in SaS$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Kako je $SaS \subseteq S\mathfrak{R}(S)S \subseteq \mathfrak{R}(S) \subseteq Nil(S)$, to je $x \in Nil(S) = \Sigma_1(0)$. Prema tome, $\Sigma_1(a) \subseteq \Sigma_1(0)$. Jasno da je $\Sigma_1(0) \subseteq \Sigma_1(a)$. Dakle, $a \in C$ pa je $\mathfrak{R}(S) = C$. $\square$

Podsetimo se (vidi Posledicu 1.6.) da polugrupa $S = S^0$ jeste 0-prosta ako i samo ako za sve $a, b \in S^\bullet$, $a \mid b$. Koristeći relaciju $\longrightarrow$, možemo uvesti jedno uopštenje 0-prostih polugrupa. Polugrupu $S = S^0$ u kojoj iz $a, b \in S^\bullet$ sledi da je $a \longrightarrow b$, nazivamo *0-Arhimedova polugrupa.* Polugrupa $S = S^0$ je *slabo 0-Arhimedova* ako iz $a, b \in S - \mathfrak{R}(S)$ sledi da je $a \longrightarrow b$.

Odnos 0-Arhimedovih i slabo 0-Arhimedovih polugrupa opisuje naredna teorema. Kako svaka nil-polugrupa jeste (slabo) 0-Arhimedova, to u ovoj teoremi ne razmatramo nil-polugrupe.

Teorema 3.9. *Sledeći uslovi za ne-nil polugrupu* $S = S^0$ *su ekvivalentni:*

(*i*) S *je slabo 0-Arhimedova;*

(*ii*) S *je idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću 0-Arhimedove polugrupe;*

(*iii*) S *ima tačno dve* σ_1*-klase.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S slabo 0-Arhimedova. Tada S jeste idealska ekstenzija nil-polugrupa $R = \mathfrak{R}(S)$ pomoću polugrupe Q. Kao i obično, poistovetićemo parcijalne polugrupe $S - R$ i $Q^\bullet$. Uzmimo $a, b \in Q^\bullet$. Tada $a, b \in S - R$, pa postoje $x, y \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $b^n = xay$, jer S jeste slabo 0-Arhimedova. Ako je $x \in R$ ili $y \in R$, tada je $b^n \in R$, odakle je $b^n = 0 \in QaQ$ u Q, pa je $a \longrightarrow b$ u Q. Uzmimo da $x, y \in S - R = Q^\bullet$. Tada je $b^n = xay \in QaQ$ u Q, pa je $a \longrightarrow b$ u Q. Dakle, Q je 0-Arhimedova.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je S idealska ekstenzija nil-polugrupe R pomoću 0-Arhimedove polugrupe Q. Poistovetimo parcijalne polugrupe $S - R$ i $Q^\bullet$, i uzmimo $a, b \in S - \mathfrak{R}(S)$. Kako je $R \subseteq \mathfrak{R}(S)$, to $a, b \in S - R = Q^\bullet$, pa postoje $x, y \in Q$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $b^n = xay$. Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, tada je $b^n = 0$ u Q, odakle $b^n \in R \subseteq Nil(S)$ u S, pa je $b^{nk} = (b^n)^k = 0 \in SaS$ u S, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, tj. $a \longrightarrow b$ u S. Uzmimo da je $x, y \neq 0$ u Q. Tada $x, y \in Q^\bullet = S - R$, pa je $b^n = xay \in SaS$ u S, odakle je $a \longrightarrow b$ u S. Dakle, S je slabo 0-Arhimedova.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je S slabo 0-Arhimedova. Prema Lemi 3.10, $\mathfrak{R}(S)$ je jednak σ_1-klasi koja sadrži 0. Kako S nije nil-polugrupa, to je $S - \mathfrak{R}(S) \neq \varnothing$. Uzmimo $a, b \in S - \mathfrak{R}(S)$. Dokazaćemo da je $a \,\sigma_1\, b$. Neka je $x \in \Sigma_1(a)$, tj. neka je $x^n = uav$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $u, v \in S$. Ako je $uav \in \mathfrak{R}(S)$, tada je $x \in Nil(S)$, pa je $b \longrightarrow x$, tj. $x \in \Sigma_1(b)$. Neka je $uav \in S - \mathfrak{R}(S)$. Tada je $(uav)^k \in SbS$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $x^{nk} \in SbS$, tj. $x \in \Sigma_1(b)$. Prema tome, $\Sigma_1(a) \subseteq \Sigma_1(b)$. Slično dokazujemo obratnu inkluziju. Dakle, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Lemi 3.10. $\square$

Lema 3.11. *Neka je $S = S^0$ nil-ekstenzija 0-proste polugrupe K. Tada je*

$$\mathfrak{R}(S) = \{x \in S \mid SxS \cap K = 0\}.$$

Dokaz. Neka je $A = \{x \in S \mid SxS \cap K = 0\}$. Uzmimo $a \in A$, $x \in S$. Tada je $SaS \cap K = 0$ pa je

$$SaxS \cap K \subseteq SaS \cap K = 0, \quad SxaS \cap K \subseteq SaS \cap K = 0,$$

odakle je $ax, xa \in A$. Prema tome, A je ideal od S. Jasno da je A nil-polugrupa. Uzmimo nil-ideal I od S. Tada $I \cap K$ jeste ideal od K, odakle je $I \cap K = 0$ ili je $I \cap K = K$. Kako po definiciji 0-proste polugrupe, K nije nil-polugrupa, to je $I \cap K = 0$, pa je $SaS \cap K \subseteq SIS \cap K \subseteq I \cap K = 0$, za svaki $a \in I$. Dakle, $I \subseteq A$, odakle je $\mathfrak{R}(S) = A$. $\square$

U sledećoj teoremi ćemo, kao i obično kod idealskih ekstenzija, poistovetiti parcijalne polugrupe $S - R$ i $Q^\bullet$:

Teorema 3.10. *Polugrupa $S = S^0$ je nil-ekstenzija 0-proste polugrupe ako i samo ako S jeste idealska ekstenzija nil-polugrupe R pomoću 0-Arhimedove polugrupe Q sa 0-prostim 0-jezgrom K i važe sledeći uslovi:*

(a) *za sve* $a \in K^\bullet$, $b \in S - R$

$$\begin{aligned} ab = 0 \ \ u \ \ Q \quad &\Rightarrow \quad ab = 0 \ \ u \ \ S; \\ ba = 0 \ \ u \ \ Q \quad &\Rightarrow \quad ba = 0 \ \ u \ \ S; \end{aligned}$$

(b) $ab = ba = 0$, *za sve* $a \in K^\bullet$, $b \in R$.

Proof. Neka je S nil-ekstenzija 0-proste polugrupe T i neka je $R = \mathfrak{R}(S)$. Tada R jeste nil-polugrupa i S je idealska ekstenzija od R pomoću polugrupe Q. Kako T jeste 0-prosta, to je $R \cap T = 0$.

Uzmimo $a \in T^\bullet$, $b \in S - R$. Tada je $ab \in T$, jer T jeste ideal od S. Ako je $ab = 0$ u Q, tada je $ab \in R$ u S, pa je $ab = 0$ u S, jer je $R \cap T = 0$. Dakle,

$$ab = 0 \in Q \ \Rightarrow \ ab = 0 \in S.$$

Slično dokazujemo da važi druga implikacija u (a).

Uzmimo $a \in T^\bullet$, $b \in R$. Tada je $ab = ba = 0$, jer $ab, ba \in R \cap T = 0$.

Neka je $K = T^\bullet \cup 0 \subseteq Q$. Tada K jeste podpolugrupa od Q izomorfna sa T, odakle K jeste 0-prosta. Dakle, na osnovu prethodno dokazanog dobijamo da važe uslovi (a) i (b).

Neka je I ideal od Q, $I \neq 0$. Lako se proverava da $I^\bullet \cup R$ jeste ideal od S i $I^\bullet \cup R \neq 0$, odakle je $T \subseteq I^\bullet \cup R$, pa je $K^\bullet = T^\bullet \subseteq I^\bullet$, tj. $K \subseteq I$. Dakle, K je 0-prosto 0-jezgro od Q.

Uzmimo $a, b \in S - R$. Prema Lemi 3.11. dobijamo da je $SaS \cap T \neq 0$, odakle je $T \subseteq SaS$. Prema tome, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $b^n \in T \subseteq SaS$, tj. $a \longrightarrow b$. Dakle, S je slabo 0-Arhimedova, pa prema dokazu Teoreme 3.9. dobijamo da Q jeste 0-Arhimedova.

Obratno, neka je S idealska ekstenzija nil-polugrupe R pomoću 0-Arhimedove polugrupe Q sa 0-prostim 0-jezgrom K i neka važe uslovi (a) i (b). Prema (a) sledi da $T = K^{\bullet} \cup 0 \subseteq S$ jeste podpolugrupa od S izomorfna sa K, pa T jeste 0-prosta. Prema (a) i (b) sledi da T jeste ideal od S. Prema Teoremi 3.9, S je slabo 0-Arhimedova. Uzmimo $x \in S$. Ako je $x \in \mathfrak{R}(S)$, tada je $x \in Nil(S)$, pa je $x^n = 0 \in T$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Neka je $x \in S - \mathfrak{R}(S)$, i uzmimo $a \in T - Nil(S)$. Tada je $a \longrightarrow x$, odakle $x^n \in SaS \subseteq T$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Dakle, S je nil-ekstenzija od T. $\square$

Kao što smo videli, 0-Arhimedova polugrupa je jedno uopštenje 0-proste polugrupe, a 0-prosta polugrupa sa primitivnim idempotentom je 0-potpuno prosta. Prirodna je, onda, sledeća definicija:

Polugrupa $S = S^0$ je *potpuno 0-Arhimedova* ako S jeste 0-Arhimedova polugrupa i sadrži 0-primitivan idempotent.

Lema 3.12. *Svaka potpuno 0-Arhimedova polugrupa ima potpuno 0-prosto 0-jezgro.*

Dokaz. Neka je S potpuno 0-Arhimedova polugrupa, i neka $e \in E(S)$ jeste 0-primitivan idempotent. Neka je K presek svih nenula ideala polugrupe S. Jasno je da je $0 \in K$, pa K jeste neprazan skup, i takodje je jasno da K jeste ideal od S. Uzmimo proizvoljan nenula ideal I od S, i uzmimo proizvoljan $a \in I^{\bullet}$. Kako S jeste 0-Arhimedova i $a, e \in S^{\bullet}$, to $a \longrightarrow e$, tj. $e \in SaS \subseteq I$. Prema tome, e je element svakog nenula ideala od S, pa je $e \in K$. Odavde dobijamo da K jeste 0-minimalan ideal od S i $K^2 \neq 0$, odakle prema Posledici 1.7. sledi da K jeste 0-prosta polugrupa. Kako e jeste 0-primitivan, to K jeste potpuno 0-prosta polugrupa, pa K jeste potpuno 0-prosto 0-jezgro od S. $\square$

Iz Teoreme 3.10. i Leme 3.12, sledi sledeća posledica:

Posledica 3.9. *Polugrupa $S = S^0$ je nil-ekstenzija potpuno 0-proste polugrupe ako i samo ako S jeste idealska ekstenzija nil-polugrupe R pomoću potpuno 0-Arhimedove polugrupe Q, i važe uslovi (a) i (b) Teoreme* 3.10*, pri čemu K jeste 0-jezgro od Q.* $\square$

Ponovo ćemo izostaviti razmatranje nil-polugrupa.

Teorema 3.11. *Sledeći uslovi za ne-nil polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je 0-Arhimedova polugrupa sa 0-prostim 0-jezgrom;*

(ii) *S je 0-Arhimedova polugrupa sa 0-minimalnim idealom;*

(*iii*) S *je slabo 0-Arhimedova polugrupa sa 0-prostim 0-jezgrom;*
(*iv*) S *je 0-Arhimedova intra-π-regularna polugrupa;*
(*v*) S *je nil-ekstenzija 0-proste polugrupe i* $\mathfrak{R}(S) = 0$*;*
(*vi*) S *je nil-ekstenzija 0-proste polugrupe i* 0 *je prim ideal od* S*.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je S 0-Arhimedova polugrupa sa 0-minimalnim idealom M. Prema pretpostavci teoreme, M nije nil-polugrupa, pa prema Posledici 1.7, M je 0-prosta polugrupa. Neka je I nenula ideal od S, neka je $x \in I^\bullet$ i neka je $a \in M - Nil(S)$. Tada je $x \longrightarrow a$, tj. $a^n \in SxS \subseteq I$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $a^n \in I \cap M$, $a^n \neq 0$. Prema tome, $I \cap M \neq 0$ je ideal od S sadržan u M, pa kako M jeste 0-minimalan, to je $I \cap M = M$, tj. $M \subseteq I$. Dakle, M je 0-prosto 0-jezgro od S.

$(i) \Rightarrow (v)$. Neka je S 0-Arhimedova polugrupa sa 0-prostim 0-jezgrom K. Tada K jeste 0-prosta polugrupa. Neka je $a \in K^\bullet$, i uzmimo $x \in S^\bullet$. Tada je $a \longrightarrow x$, tj. $x^n \in SaS \subseteq SKS \subseteq K$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Prema tome, S je nil-ekstenzija od K. Ako je $\mathfrak{R}(S) \neq 0$, tada je $K \subseteq \mathfrak{R}(S)$, što nije moguće, jer K nije nil-ideal. Dakle, $\mathfrak{R}(S) = 0$, pa važi (v).

$(v) \Rightarrow (iv)$. Neka je S nil-ekstenzija 0-proste polugrupe K i neka je $\mathfrak{R}(S) = 0$. Tada je jasno da S jeste intra-π-regularna polugrupa, dok prema dokazu Teoreme 3.10. dobijamo da S jeste 0-Arhimedova polugrupa.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka je S ne-nil 0-Arhimedova intra π-regularna polugrupa. Uzmimo $a \in S - Nil(S)$. Tada postoje $m \in \mathbf{Z}^+$ i $z, w \in S$ tako da je $a^m = za^{2m}w \in Sa^mS$. Neka je $K = Sa^mS$ i neka $c, d \in K^\bullet$. Tada je $c = xa^my$, za neki $x, y \in S$. Sa druge strane, iz $a^m = za^{2m}w = za^m(a^mw)$ sledi da je

$$a^m = z^na^m(a^mw)^n \ , \tag{1}$$

za sve $n \in \mathbf{Z}^+$. Kako $d, a^mw \in S^\bullet$ i S je 0-Arhimedova, to postoje $k \in \mathbf{Z}^+$ i $u, v \in S$ tako da je $(a^mw)^k = udv$. Sada prema (1) dobijamo da je

$$\begin{aligned} c = xa^my &= (xz^{k+1}a^m)(a^mw)^k(a^mwy) = (xz^{k+1}a^m)udv(a^mwy) \\ &= (xz^{k+1}a^mu)d(va^mwy) \in KdK. \end{aligned}$$

Dakle, prema Posledici 1.6, K je 0-prosta polugrupa.

Neka je $I \neq 0$ ideal od S. Neka je $I \subseteq Nil(S)$. Uzmimo $x \in I^\bullet$. Tada je $x \longrightarrow a$, tj. $a^n \in SxS \subseteq I$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa iz $I \subseteq Nil(S)$, sledi da je $a \in Nil(S)$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, postoji $b \in I - Nil(S) \subseteq S^\bullet$, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $b^n \in Sa^mS = K$, odakle je $b^n \in I \cap K$, $b^n \neq 0$, pa $I \cap K \neq 0$. Sada, kako K jeste 0-prosta polugrupa, dobijamo da je $I \cap K = K$, pa je $K \subseteq I$. Dakle, K je 0-prosto 0-jezgro od S.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka je S slabo 0-Arhimedova polugrupa sa 0-prostim

0-jezgrom K. Kako je K 0-prosta polugrupa, to $K \nsubseteq Nil(S)$, pa $K \nsubseteq \mathfrak{R}(S)$, odakle je $\mathfrak{R}(S) = 0$, pa prema dokazu Teoreme 3.9. dobijamo da S jeste 0-Arhimedova.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Neka je S nil-ekstenzija 0-proste polugrupe K i neka je $\mathfrak{R}(S) = 0$. Neka su A i B nenula ideali od S i neka je $a \in A^\bullet$, $b \in B^\bullet$. Prema Lemi 3.12, $K \subseteq SaS \subseteq A$ i $K \subseteq SbS \subseteq B$, odakle je $K = K^2 \subseteq AB$. Prema tome, $AB \neq 0$. Dakle, 0 je prim ideal od S.

$(vi) \Rightarrow (v)$. Neka je S nil-ekstenzija 0-proste polugrupe K i neka je 0 prim ideal od S. Neka je $R = \mathfrak{R}(S)$. Prema dokazu Teoreme 3.10, $RK = 0$, odakle je $R = 0$ ili $K = 0$. Kako je K 0-prosta, to je $R = 0$, pa važi (v). $\square$

Napred smo rekli da su potpuno 0-Arhimedove polugrupe uopštenja potpuno 0-prostih polugrupa. To će se jasnije videti iz sledeće teoreme.

Teorema 3.12. *Sledeći uslovi za ne-nil polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno 0-Arhimedova polugrupa;*

(ii) *S je 0-Arhimedova i potpuno π-regularna;*

(iii) *S je nil-ekstenzija potpuno 0-proste polugrupe i $\mathfrak{R}(S) = 0$;*

(iv) *S je nil-ekstenzija potpuno 0-proste polugrupe i 0 je prim ideal od S.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je S potpuno 0-Arhimedova polugrupa. Prema Lemi 3.12, S ima potpuno 0-prosto 0-jezgro K, i jasno da je S nil-ekstenzija od K. Prema Teoremi 3.11, $\mathfrak{R}(S) = 0$. Dakle, važi (iii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 3.11. i Munnovoj teoremi.

$(iii) \Rightarrow (i)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$ i $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.. Sledi prema Teoremi 3.11. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $S = S^0$ 0-Arhimedova polugrupa. Tada S nema delitelja nule ako i samo ako S nema nenula nilpotenata.

2. Polugrupa $S = S^0$ je slabo 0-Arhimedova i ima 0-primitivan idempotent ako i samo ako S jeste idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću potpuno 0-Arhimedove polugrupe.

3. Svaka periodična (konačna) 0-Arhimedova polugrupa je potpuno 0-Arhimedova.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [15], [17], Clifford [3], Luh [1].

3.3. Arhimedove polugrupe.

Polugrupa S je *Arhimedova* ako je $a \longrightarrow b$, za sve $a, b \in S$. Jasno je da polugrupa S jeste Arhimedova ako i samo ako S^0 jeste 0-Arhimedova polugrupa. Arhimedove polugrupe sa jezgrom opisuje sledeća teorema:

Teorema 3.13. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(*i*) *S je nil-ekstenzija proste polugrupe;*
(*ii*) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n \in Sb^{2n}S$;
(*iii*) *S je Arhimedova intra π-regularna polugrupa.*

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Neka je S nil-ekstenzija proste polugrupe K. Uzmimo $a, b \in S$. Tada postoji $n \in Z$ tako da $a^n, b^{2n} \in K$, pa kako K jeste prosta polugrupa, to je $a^n \in Kb^{2n}K \subseteq Sa^{2n}S$. Dakle, važi (*ii*).

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Sledi neposredno.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Ovu implikaciju dokazujemo primenom Teoreme 3.11. na polugrupu S^0. $\square$

Lema 3.13. *Neka S jeste π-regularna polugrupa u kojoj su svi idempotenti primitivni. Tada S jeste potpuno π-regularna i maksimalne podgrupe od S su oblika:*

$$G_e = eSe \qquad (\, e \in E(S)\,).$$

Dokaz. Za $a \in S$ postoje $x \in S$ i $m \in \mathbf{Z}^+$ da je $a^m = a^m x a^m$. Za a^k, gde je $k > m$, postoje $y \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ da je $a^{kn} = a^{kn} y a^{kn}$. Uzmimo da je $e = xa^m$ i $f = xa^m y a^{kn}$. Tada je $e^2 = e$,

$$\begin{aligned} f^2 &= xa^m ya^{kn} xa^m ya^{kn} = xa^m ya^{kn-m}(a^m xa^m) ya^{kn} = xa^m ya^{kn-m} a^m ya^{kn} \\ &= xa^m ya^{kn} ya^{kn} = xa^m ya^{kn} = f, \end{aligned}$$

$$fe = xa^m ya^{kn} xa^m = xa^m ya^{kn-m} a^m xa^m = xa^m ya^{kn-m} a^m = f = fe.$$

Dakle, $ef = fe = f$, pa zbog primitivnosti idempotenata iz S dobijamo da je $e = f$. Odavde je

$$a^m = a^m xa^m = a^m e = a^m f = a^m xa^m ya^{kn} \in a^m S a^{m+1},$$

pa na osnovu Teoreme 2.2, S je potpuno π-regularna polugrupa.

Neka je $e \in E(S)$ i $u \in G_e$. Tada je $u = eue \in eSe$, pa je $G_e \subseteq eSe$. Obratno, neka je $u \in eSe$, tj. neka je $u = ebe$, za neki $b \in S$. Kako S jeste potpuno π-regularna, to je $u^p \in G_f$, za neke $p \in \mathbf{Z}^+$, $f \in E(S)$. Sada je

$$ef = eu^p(u^p)^{-1} = e(ebe)^p(u^p)^{-1} = (ebe)^p(u^p)^{-1} = f,$$

gde $(u^p)^{-1}$ jeste grupni inverz od u^p u G_f, i dualno dobijamo da je $fe = f$, pa iz primitivnosti idempotenata iz S dobijamo da je $e = f$. Prema tome, $u^p \in G_e$, pa na osnovu Munnove leme, $u = ebe = e(ebe) = eu \in G_e$. Dakle $eSe \subseteq G_e$. $\square$

Kao što potpuno 0-Arhimedove polugrupe jesu jedno uopštenje potpuno 0-prostih polugrupa, to na sličan način možemo uvesti jedno uopštenje potpuno prostih polugrupa:

Polugrupa S je *potpuno Arhimedova* ako S jeste Arhimedova i ima primitivan idempotent.

Teorema 3.14. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) S *je potpuno Arhimedova;*

(ii) S *je nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe;*

(iii) S *je Arhimedova i potpuno* π*-regularna;*

(iv) S *je* π*-regularna i svi idempotenti iz* S *su primitivni;*

(v) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n \in a^n Sba^n$*;*

(v') $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n \in a^n bSa^n$*.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. Ove implikacije dokazujemo dodavanjem nule polugrupi S, korišćenjem Teoreme 3.12.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Na osnovu Leme 3.13, imamo da S jeste potpuno π-regularna i da su maksimalne podgrupe od S oblika $G_e = eSe$, $e \in E(S)$. Na osnovu Leme 1.10, podgrupa G_e, $(\, e \in E(S)\,)$, je minimalan bi-ideal od S. Sada na osnovu Teoreme 1.6, unija K svih minimalnih bi-ideala od S, tj. $K = \cup_{e \in E(S)} G_e$, je jezgro od S. Prema Posledici 1.9, K je prosta polugrupa, pa kako K jeste unija grupa, to prema Posledici 2.4, K jeste potpuno prosta. Na kraju, kako je S potpuno π-regularna, to S jeste nil-ekstenzija od K.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Neka S jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K. Uzmimo proizvoljne $a, b \in S$. Tada postoji $n \in Z$ tako da je $a^n \in K$, pa kako prema Posledici 3.4, K jeste matrica grupa, to postoji $e \in E(S)$ tako da je $a^n, a^n ba^n \in G_e$. Prema tome, $xa^n ba^n = e$, za neki $x \in G_e$, odakle je

$$a^n = a^n e = a^n x a^n b a^n \in a^n Sba^n.$$

$(v) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (v). Tada je jasno da S jeste π-regularna polugrupa. Uzmimo $e, f \in E(S)$ tako da je $ef = fe = f$. Tada prema (v) dobijamo da je $e \in efSe = fSe$, odakle je $e = fe = f$. Prema tome, svi idempotenti iz S su primitivni. $\square$

Posledica 3.10. *Polugrupa S je nil-ekstenzija pravougaone grupe ako i samo ako S jeste* π*-regularna i* $E(S)$ *je pravougaona traka.*

Dokaz. Neka je S nil-ekstenzija pravougaone grupe K. Tada je $E(S) = E(K)$, pa prema Lemi 3.8, $E(S)$ je pravougaona traka.

Obratno, neka S jeste π-regularna i neka je $E(S)$ pravougaona traka. Tada su svi idempotenti iz S primitivni, pa prema Teoremi 3.14, S je nil-ekstenzije potpuno proste polugrupe K. Kako je $E(K) = E(S)$, to prema Teoremi 3.6, K je pravougaona grupa. $\square$

Polugrupa S je *levo* (*desno*) *Arhimedova* ako je $a \xrightarrow{l} b$ ($a \xrightarrow{r} b$), za sve $a, b \in S$. Levo (desno) Arhimedove polugrupe su uopštenja levo (desno) prostih polugrupa. Sledećom teoremom, opisuju se levo Arhimedove polugrupe koje imaju idempotent.

Teorema 3.15. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je levo Arhimedova i ima idempotent;*

(ii) *S je π-regularna i $E(S)$ je levo nulta traka;*

(iii) *S je nil-ekstenzija leve grupe;*

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ a^m \in a^m S a^m b$;

(iv') $(\forall a, b \in S)(\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ a^m \in b a^m S a^m$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S levo Arhimedova i neka je $e \in E(S)$. Uzmimo $a \in S$. Tada iz $a \xrightarrow{l} e$ i $e \xrightarrow{l} a$ dobijamo da je $e \in Sa$ i $a^n \in Se$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle dobijamo da je $a^n = a^n e \in a^n S a^n$. Prema tome, S je π-regularna. Uzmimo $f, g \in E(S)$. Tada iz $g \xrightarrow{l} f$ dobijamo da je $f \in Sg$, odakle je $fg = f$. Dakle, $E(S)$ je levo nulta traka.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka S jeste π-regularna i neka $E(S)$ jeste levo nulta traka. Tada su idempotenti iz S primitivni, pa prema Teoremi 3.14. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K. Jasno je da je $E(S) = E(K)$, tj. $E(K)$ je levo nulta traka, pa kako K jeste regularna polugrupa, to prema Teoremi 3.8, K jeste leva grupa.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Neka je S nil-ekstenzija leve grupe K. Uzmimo $a, b \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in K$, odakle je $a^n b \in K$, pa prema teoremi 3.8. dobijamo da je $a^m \in a^n K a^n b \subseteq a^n S a^n b$. Dakle, važi ($iv$).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ako važi (iv), tada je jasno da S jeste levo Arhimedova polugrupa. Kako prema (iv) neposredno sledi da S jeste π-regularna, to S sadrži idempotent. $\square$

Polugrupa S je *dvostrano Arhimedova*, kraće *t-Arhimedova*, ako S jeste levo i desno Arhimedova. Polugrupa S je *π-grupa* ako S jeste π-regularna i ima tačno jedan idempotent.

Teorema 3.16. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je t-Arhimedova i ima idempotent;*

(ii) *S je π-grupa;*

(iii) *S je nil-ekstenzija grupe;*

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists m \in \mathbf{Z}^+)\ a^m \in b a^m S a^m b$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste t-Arhimedova i ima idempotent. Tada prema Teoremi 3.15. i njenom dualu dobijamo da S jeste π-regularna polugrupa, da $E(S)$ jeste levo nulta traka i da $E(S)$ jeste desno nulta traka. Prema tome, $E(S)$ sadrži tačno jedan element, pa S jeste π-grupa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Ako S jeste π-grupa, tada prema Teoremi 3.15, S jeste nil-ekstenzija leve grupe K. Kako K ima tačno jedan idempotent, to K jeste grupa.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je S nil-ekstenzija grupe G. Uzmimo $a, b \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in G$, odakle je $ba^n, a^n b \in G$, pa kako G jeste grupa, to je $a^n \in ba^n G a^n b \in ba^n S a^n b$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Ako važi (iv), tada je jasno da S jeste t-Arhimedova polugrupa. Takodje, jasno je da S jeste π-regularna, pa S ima idempotent. $\square$

Polugrupa S je *stepeno vezana* ako za sve $a, b \in S$ postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^m = b^n$. Jasno je da svaka stepeno vezana polugrupa jeste t-Arhimedova.

Posledica 3.11. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je stepeno vezana i ima idempotent;*

(ii) *S je t-Arhimedova i periodična;*

(iii) *S je periodična i ima tačno jedan idempotent;*

(iv) *S je nil-ekstenzija periodične grupe.* $\square$

Zadaci.

1. Polugrupa S je potpuno Arhimedova ako i samo ako je Arhimedova i sadrži bar jedan minimalan levi ideal i bar jedan minimalan desni ideal.

2. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je periodična i Arhimedova;

(ii) S je π-regularna i za sve $a, b \in S$, iz $ab = ba$ sledi da je $a^n = y^n$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$;

(iii) S je nil-ekstenzija periodične potpuno proste polugrupe.

3. Polugrupa S je nil-ekstenzija levo proste polugrupe ako i samo ako S jeste levo Arhimedova i levo π-regularna.

4. Polugrupa S je nil-ekstenzija pravougaone trake ako i samo ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = a^n x a^n$.

5. Polugrupa S je nil-ekstenzija periodične leve grupe ako i samo ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = a^n b^n$.

6. Ako za svaki element a polugrupe S postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ i postoji tačno jedan $x \in S$ da je $a^n = x a^{n+1}$, tada S jeste nil-ekstenzija leve grupe. Da li važi obrat?

7. Polugrupa S je π-grupa ako i samo ako S jeste Arhimedova polugrupa sa tačno jednim idempotentom.
8. Neka je ξ kongruencija π-regularne polugrupe S. Tada je $e\,\xi\,f$, za sve $e,f\in E(S)$ ako i samo ako S/ξ jeste π-grupa.
9. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(i) S je grupa;
(ii) S je regularna i ima tačno jedan idempotent;
(iii) za svaki $a\in S$ postoji tačno jedan $x\in S$ tako da je $a=axa$;
(iv) $(\forall a,b\in S)\ a\in bSb$.
10. Polugrupa S je poddirektan proizvod nilpotentnih polugrupa ako i samo ako je $|\bigcap_{n\in\mathbf{Z}^+} S^n|\leq 1$.
11. Polugrupa S je poddirektan proizvod nil-polugrupa ako i samo ako je $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}^+} J(a^n)=\emptyset$, za svaki $a\in S$.
12. Neka je π kvazi-uredjenje polugrupe S. Element $a\in S$ je π-*idempotent* ako je $a^n\,\pi\,a\,\pi\,a^n$, za svaki $n\in\mathbf{Z}^+$. Polugrupa S je π-*Arhimedova* ako za sve $a,b\in S$ postoji $n\in\mathbf{Z}^+$ tako da je $a\,\pi\,b^n$. Kvaziuredjenje π polugrupe S je *pozitivno* ako je $a\,\pi\,ab$ i $a\,\pi\,ba$, za sve $a,b\in S$.

Dokazati da polugrupa S bez nule jeste poddirektan proizvod prebrojivo mnogo nil-polugrupa ako i samo ako postoji pozitivno kvazi-uredjenje π na S tako da je S π-Arhimedova i nema π-idempotenata.
13. Neka je S podpolugrupa Arhimedove polugrupe bez intra-regularnih elemenata. Tada S jeste poddirektan proizvod prebrojivo mnogo nil-polugrupa.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [8], [9], Bogdanović and Milić [2], Chrislock [1], [3], Edwards [1], Galbiati e Veronesi [1], Levin [1], Levin and Tamura [1], McAlister and O'Carroll [1], Nagy [3], [4], [5], Nordahl [1], [2], [3], Petrich [2], Putcha [1], [3], Schein [4], Strecker [1], Tamura [2], [4], [7], [9], [17], [21], Tamura and Nordahl [1], Tamura and Shafer [1], Thierrin and Thomas [1], Trpenovski and Celakoski [1].

3.4. Polugrupe u kojima su pravi ideali Arhimedovi.

Označimo sa $\mathcal{A}$ ($\mathcal{LA}$, $\mathcal{RA}$, $\mathcal{TA}$, $\mathcal{PJ}$) klasu Arhimedovih (levo Arhimedovih, desno Arhimedovih, t-Arhimedovih, stepeno vezanih) polugrupa. Kao što je već napred primećeno, medju ovim klasama važe sledeće relacije:

$$\mathcal{PJ}\subset\mathcal{TA}=\mathcal{LA}\cap\mathcal{RA}\subset\mathcal{LA}\cup\mathcal{RA}\subset\mathcal{A}.$$

Neka $I(S)$ ($L(S)$) označava *uniju svih pravih dvostranih* (*levih*) *ideala polugrupe* S.

Teorema 3.17. *Svaki pravi ideal polugrupe S je Arhimedova podpolugrupa od S ako i samo ako $I(S)$ jeste Arhimedova podpolugrupa od S.*

Dokaz. Neka su svi pravi ideali od S Arhimedove polugrupe, i neka su $a, b \in I(S)$. Tada postoji pravi ideal A od S tako da je $a, aba \in A$, i postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$a^n \in AabaA \subseteq I(S)bI(S).$$

Prema tome, $I(S)$ je Arhimedova polugrupa.

Obratno, neka $I(S)$ jeste Arhimedova polugrupa i neka je A pravi ideal od S. Tada za $a, b \in A$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = xby$, za neke $x, y \in I(S)$. Dakle, $a^{n+2} = axbya$, pri čemu $ax, ya \in A$, pa A jeste Arhimedova polugrupa. $\square$

Lema 3.14. *Svaki levi ideal Arhimedove (levo Arhimedove, t-Arhimedove, stepeno vezane) polugrupe S je Arhimedova (levo Arhimedova, t-Arhimedova, stepeno vezana) podpolugrupa od S.*

Dokaz. Dokazaćemo samo slučaj kada S jeste Arhimedova polugrupa (dokazi ostalih slučajeva su slični). Neka L jeste proizvoljan levi ideal od S i $a, b \in L$. Tada postoje $x, y \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n = xb^2y$. Odavde sledi da je $a^{n+1} = xbbya$ i $xb, ya \in L$. $\square$

Sledećom teoremom karakterišu se polugrupe u kojima svaki pravi levi ideal jeste Arhimedova polugrupa.

Teorema 3.18. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *svaki pravi levi ideal od S je Arhimedova podpolugrupa od S;*

(ii) *$L(S)$ je Arhimedova podpolugrupa od S;*

(iii) *S zadovoljava jedan od sledećih uslova:*

- (a) *S je Arhimedova polugrupa;*
- (b) *S ima maksimalan levi ideal M koji je Arhimedova polugrupa i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S - M$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ako je S levo prosta, tada S jeste Arhimedova. Uzmimo da S nije levo prosta. Za proizvoljne $a, b \in L(S)$ postoji pravi levi ideal L od S tako da $a, ba \in L$, odakle je

$$a^n \in LbaL \subseteq L(S)bL(S),$$

za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa prema tome, $L(S)$ jeste Arhimedova podpolugrupa od S.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Ako je $L(S) \neq S$, tada $M = L(S)$ jeste maksimalan levi ideal od S, pa na osnovu Teoreme 1.14, $S - M = \{a\}$, $a^2 \in M$, ili je $S - M \subseteq Sa$, za svaki $a \in S - M$. Ako je $S - M = \{a\}$, $a^2 \in M$, tada S jeste Arhimedova. Ako je $S - M \subseteq Sa$, za svaki $a \in S - M$, tada prema

Teoremi 1.15, $T = S - M$ je podpolugrupa od S. Iz $Sa = S$ $(a \in T)$, sledi da je $S = Ma \cup Ta \subseteq Ma \cup T \subseteq S$, tj. $S = Ma \cup T$. Dakle, $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S - M$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Ako važi (a), tada prema Lemi 3.14, svaki levi ideal od S jeste Arhimedova podpolugrupa od S. Neka važi (ii) i neka L jeste pravi levi ideal od S. Ako je $L \subseteq M$, tada na osnovu Leme 3.4, L je Arhimedova podpolugrupa od S. Ako je $L \nsubseteq M$, tada je $L \cap (S - M) \neq \varnothing$. za $a \in L \cap (S - M)$ je $M \subseteq Ma \subseteq L$, što je nemoguće. $\square$

Teorema 3.19. *Svaki pravi levi ideal polugrupe S je levo Arhimedova podpolugrupa od S ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

(a) *S je levo Arhimedova;*

(b) *S sadrži tačno dva leva ideala L_1 i L_2 koji su levo proste polugrupe i $S = L_1 \cup L_2$;*

(c) *S ima maksimalan levi ideal M koji je levo Arhimedova polugrupa i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S - M$.*

Dokaz. Neka su svi pravi levi ideali iz S levo Arhimedovi. Ako je $L(S) \neq S$, tada $M = L(S)$ jeste maksimalan levi ideal od S koji je levo Arhimedova polugrupa. Na osnovu Teoreme 1.14. imamo da je $S - M = \{a\}$, $a^2 \in M$, ili $S - M \subseteq Sa$, za svaki $a \in S - M$. Ako je $S - M = \{a\}$, $a^2 \in M$, tada S jeste levo Arhimedova polugrupa. Ako je $S - M \subseteq Sa$, za svaki $a \in S$, tada kao u dokazu Teoreme 3.18. dobijamo da je S tipa (c).

Ako je $L(S) = S$, i za svaka dva prava leva ideala L_1 i L_2 od S je $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, tada S jeste levo Arhimedova. U suprotnom, postoje levi ideali L_1 i L_2 od S da je $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. U tom slučaju je $L_1 \cup L_2 = S$, jer $L_1 \cup L_2$ nije levo Arhimedova polugrupa (zbog $L_1 \cap L_2 = \varnothing$). Šta više, L_1 i L_2 su levo proste polugrupe i osim L_1 i L_2 nema drugih pravih levih ideala od S. Prema tome, ako svaki pravi levi ideal od S jeste levo Arhimedova polugrupa, tada važi jedan od uslova (a), (b) i (c).

Obrat sledi neposredno. $\square$

Polugrupa S je *A-polugrupa* ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in \langle a, b \rangle \, b \, \langle a, b \rangle$. Polugrupa S je *L-polugrupa* ako za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in \langle a, b \rangle \, b$. Dualno se definiše *R-polugrupa*. Polugrupa S je *T-polugrupa* ako S jeste L-polugrupa i R-polugrupa.

Neposredno se dokazuje sledeća:

Lema 3.15. *Polugrupa S je L-polugrupa (A-polugrupa, R-polugrupa, T-polugrupa) ako i samo ako svaka podpolugrupa od S jeste levo Arhimedova (Arhimedova, desno Arhimedova, t-Arhimedova).* $\square$

Lema 3.16. *Polugrupa S je levo prosta L-polugrupa ako i samo ako S jeste periodična leva grupa.*

Dokaz. Neka S jeste levo prosta polugrupa. Tada prema Posledici 1.5, za $a \in S$ postoji $x \in S$ da je $a = xa$. Kako S jeste L-polugrupa, to postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $u \in \langle a, x \rangle$ da je $x^n = ua$, pa je

$$a = x^n a = uaa = a^{i+1},$$

za neki $i \in \mathbf{Z}^+$, jer je $u \in \langle a, x \rangle$. Dakle, S je periodična polugrupa, pa je $E(S) \neq \varnothing$. Sada na osnovu Teoreme 3.7. dobijamo da S jeste periodična leva grupa.

Obrat sledi na osnovu Leme 3.15. i Teoreme 3.7. $\square$

Teorema 3.20. *Svaka prava podpolugrupa polugrupe S je levo Arhimedova ako i samo ako S jeste L-polugrupa ili je $|S| = 2$.*

Dokaz. Neka svaka prava podpolugrupa polugrupe S jeste levo Arhimedova. Tada na osnovu Teoreme 3.19. razlikujemo tri slučaja:

(a). S je levo Arhimedova. U tom slučaju, prema Lemi 3.15, S je L-polugrupa.

(b). S ima tačno dva leva ideala L_1 i L_2 koji su levo proste polugrupe i $S = L_1 \cup L_2$. U tom slučaju, kako su $L_1, L_2 \neq S$, prema pretpostavci i Lemi 3.15, L_1 i L_2 su L-polugrupe, pa prema Lemi 3.16, L_1 i L_2 su leve grupe. Sada na osnovu Teoreme 3.8, S je unija grupa, tj. S je potpuno regularna, pa kako je jasno da S jeste prosta, to prema Posledici 2.4, S je potpuno prosta. U oznakama iz Teoreme 3.6, S je levo nulta traka I desnih grupa R_i, $i \in I$. Ako je $|I| \geq 2$, tada za $i \in I$, R_i je L-polugrupa, pa prema dualu Teoreme 3.8. i prema Teoremi 3. 15. dobijamo da $E(R_i)$ jeste desno i levo nulta traka, odakle je $|E(R_i)| = 1$, tj. R_i je grupa. Medjutim, u tom slučaju prema Teoremi 3.8, S je leva grupa, tj. $E(S)$ je levo nulta traka, što je nemoguće jer za $e \in E(L_1)$, $f \in E(L_2)$ je $ef \in L_2$, jer L_2 jeste levi ideal od S, i $e \notin L_2$. Prema tonme, $|I| = 1$, pa S jeste desna grupa i $E(S)$ je desno nulta traka. Tada $\langle e, f \rangle = \{e, f\}$ ne može biti levo Arhimedova polugrupa, pa je $S = \{e, f\}$, tj. $|S| = 2$.

(c) S ima maksimalan levi ideal $M = L(S)$ koji je L-polugrupa i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in T = S - M$. Na osnovu Teoreme 1.15, T je podpolugrupa od S. Uzmimo da T nije levo prosta polugrupa. Tada postoji $a \in T$ da je $Ta \neq T$. Medjutim, u tom slučaju je $M \neq Ma$, pa je $Ma = S$. Neka je $a = xa$, za neki $x \in M$. Tada je $(ax)^n = a^n x \in M$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$, pa je $\langle ax \rangle \cup \langle a \rangle$ podpolugrupa od S. Jasno je da je $S = \langle ax \rangle \cup \langle a \rangle$, jer $\langle ax \rangle \cup \langle a \rangle$ nije L-polugrupa (ako bi to bila, onda bi bilo $a^k \in \langle a, ax \rangle\, ax \in M$, što je nemoguće). Sada je $x \in \langle ax \rangle$, tj. $x = a^k x$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, pa je $a = xa = a^k xa = a^{k+1}$, odakle $T = \langle a \rangle$ jeste grupa, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da T nije levo prosta. Prema tome, T je levo prosta polugrupa, pa na osnovu Leme 3.16, T je leva grupa. Za $e \in E(T)$ je $M \subseteq Me$, pa za proizvoljan $x \in M$ je $x = ye$, za neki $y \in M$. Odavde je $x = ye = yee = xe$, pa je $(ex)^n = ex^n \in M$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$. Sada, ako je $A = \{(ex)^2, (ex)^3, \dots\} \cup \{e\}$ prava podpolugrupa od S, onda A jeste L-polugrupa, pa je $e \in \left\langle e, ex^2 \right\rangle ex^2 \subseteq M$, što je nemoguće. dakle, $S = A$, odakle je $ex = (ex)^k$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq 2$, tj $\{(ex)^2, (ex)^3, \dots\}$ je grupa. Za jedinicu $(ex)^{k-1} = ex^{k-1}$ te grupe imamo da $\{ex^{k-1}, e\}$ nije L-polugrupa. Dakle, $S = \{ex^{k-1}, e\}$, tj. $|S| = 2$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Lema 3.17. *Svaka t-Arhimedova polugrupa sadrži najviše jedan idempotent.*

Dokaz. Neka su e, f idempotenti t-Arhimedove polugrupe S. Tada je $e = xf$, $f = ey$, za neke $x, y \in S$, odakle je $e = xf = xf^2 = ef = e^2y = ey = f$. $\square$

Lema 3.18. *Polugrupa S je levo prosta (desno prosta, prosta) t-Arhimedova polugrupa ako i samo ako S jeste grupa.*

Dokaz. Daćemo samo dokaz za slučaj kada S jeste levo prosta t-Arhimedova polugrupa. Za $a \in S$ postoji $x \in S$ da je $a = xa^2$. Kako S jeste t-Arhimedova, to za a i x postoje $y \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$ da je $x^n = ay$. Sada imamo da je

$$a = xa^2 = x^2a^3 = \cdots = x^n a^{n+1} = aya^{n+1}.$$

Prema tome, S je regularna polugrupa i prema Lemi 3.17, S ima tačno jedan idempotent, pa iz Teoreme 3.16. dobijamo da S jeste grupa.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Teorema 3.21. *Neka polugrupa S nije levo prosta. Tada svaki pravi levi ideal od S jeste t-Arhimedova polugrupa ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

(*a*) *S je t-Arhimedova;*

(*b*) *S sadrži tačno dva leva ideala G_1 i G_2 koji su grupe i $S = G_1 \cup G_2$;*

(*c*) *S ima maksimalan levi ideal M koji je t-Arhimedova polugrupa i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S - M$.*

Dokaz. Neka svaki pravi levi ideal od S jeste t-Arhimedova polugrupa. Tada na osnovu Teoreme 3.19. i Leme 3.18, imamo da važi jedan od uslova (*b*) ili (*c*), ili S jeste levo Arhimedova polugrupa. Ako S jeste levo Arhimedova i $L(S) \neq S$, tada $L(S)$ jeste maksimalan levi ideal od S i on je t-Arhimedova polugrupa. Na osnovu Teorema 1.14. i 1.15, imamo dva slučaja: $S - L(S)$ je podpolugrupa od S, i tada imamo kontradikciju, ili je $S - L(S) = \{a\}$, $a^2 \in L(S)$, tada S jeste t-Arhimedova. Ako je $L(S) = S$, tada se lako dokazuje da je S tipa (a).

Obrat sledi neposredno. □

Teorema 3.22. *Svaka prava podpolugrupa iz S je t-Arhimedova ako i samo ako S jeste T-polugrupa ili S jeste dvoelementna traka.*

Dokaz. Neka svaka prava podpolugrupa od S jeste t-Arhimedova. Ako S jeste levo prosta, onda na osnovu Leme 3.18, S je grupa. Uzmimo da S nije levo prosta. Tada imamo jedan od slučajeva (a), (b) i (c) Teoreme 3.21.

Ako važi (a), tada S jeste T-polugrupa.

Neka važi (b) i neka e i f jesu redom jedinice grupa G_1 i G_2. Tada prema dokazu Teoreme 3.20. imamo da je $S = \{e, f\}$.

Neka važi (c). Tada M jeste ideal od S i $S - M$ je levo prosta polugrupa (Teorema 3.20.), pa na osnovu Leme 3.18, $S - M$ je grupa. Neka je $x \in M$ proizvoljan element i neka je e jedinica grupe $S - M$. Tada je $ex, x^k e \in M$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$, pa je $S = \langle e, ex\rangle = \langle x, xe\rangle$. Odavde imamo da je $x = ey$, za neki $y \in S$, pa je $ex = e(ey)ey = x$. Prema tome, $(xe)^k = x(ex)^{k-1}e = x^k e$, pa je $S = \{e, xe, x^2e, \dots\}$ i $A = \{e, x^2e, x^3e, \dots\}$ je podpolugrupa od S. Ako A jeste t-Arhimedova, tada je $e \in x^k eA \subseteq M$, što je nemoguće. Dakle, $S = A$, pa je $M = \{x^2e, x^3e, \dots\}$, odakle imamo da je $xe = x^k e = (xe)^k$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq 2$, pa M jeste grupa sa jedinicom $(xe)^{k-1} = x^{k-1}e$. Prema tome, $S = \{(xe)^{k-1}, e\} = \{x^{k-1}, e\}$ je traka i $|S| = 2$.

Obrat sledi neposredno. □

Zadaci.

1. Neka polugrupa S nije levo prosta. Tada svaki pravi levi ideal od S jeste stepeno vezana podpolugrupa od S ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(a) S je stepeno vezana;

(b) S sadrži tačno dva leva ideala G_1 i G_2 koji su periodične grupe i $S = G_1 \cup G_2$;

(c) S ima maksimalan levi ideal M koji je stepeno vezana podpolugrupa od S i $M \subseteq Ma$, za svaki $a \in S - M$.

2. Svaka prava podpolugrupa polugrupe S je stepeno vezana ako i samo ako je $|S| = 2$ ili je S stepeno vezana.

Literatura. Bogdanović [3], [7], [9], [12], Bogdanović and Malinović [1], [2], Chacron and Thierrin [1], Levin [1], Levin and Tamura [1], Nagore [1], Nagy [2], Nordahl [1], Pondeliček [3], Spoletini Cherubini and Varisco [2], [3], [5], [10], [12].

GLAVA 4

Polugrupe sa potpuno prostim jezgrom

A.H.Clifford je 1950. godine dao jednu konstrukciju za polugrupe sa potpuno prostim jezgrom, tj. za polugrupe sa potpuno prostim idealom. Ova konstrukcija je mnogim matematičarima bila inspiracija za različita uopštavanja, i razne slične konstrukcije, pri razmatranju nekih posebnih klasa polugrupa. Ako se bolje osmotri, onda se lako može zaključiti da je reč o jednom uopštenju Teoreme Suškevič-Reesa. Predmet razmatranja ove glave jeste Cliffordova konstrukcija i neke karakterizacije polugrupe sa potpuno prostim jezgrom. Data je i Teorema o izomorfizmu ovih polugrupa. U daljem tekstu ove glave izlažu se rezultati strukturnog i konstruktivnog karaktera za polugrupe sa potpuno prostim pravim levim idealima, i za polugrupe u kojima su sve monogene podpolugrupe (m,n)-ideali.

4.1. Strukturna teorema.

U ovom odeljku razmatramo polugrupe sa potpuno prostim jezgrom i dajemo njihov strukturni opis.

Konstrukcija. *Neka je* $\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$ *Reesova matrična polugrupa nad grupom* G *i neka je* Q *parcijalna polugrupa takva da je* $(G\times I\times\Lambda)\cap Q=\varnothing$.

Neka je $\xi : p\mapsto \xi_p$ *preslikavanje od* Q *u polugrupu* $\mathcal{T}_l(I)$ *i neka je* $\eta : p\mapsto\eta_p$ *preslikavanje od* Q *u polugrupu* $\mathcal{T}_r(\Lambda)$. *Za* $p,q\in Q$ *neka:*

(*i*) $pq\in Q \quad\Rightarrow\quad \xi_{pq}=\xi_p\xi_q,\ \eta_{pq}=\eta_p\eta_q$;

(*ii*) $pq\notin Q \quad\Rightarrow\quad \xi_p\xi_q=\text{const.},\quad \eta_p\eta_q=\text{const.}$;

Neka $\varphi : Q\times I\to G$ *jeste preslikavanje za koje:*

(*iii*) $pq\in Q \quad\Rightarrow\quad (pq,i)\varphi=(p,\xi_p i)\varphi(q,i)\varphi$;

(*iv*) $p_{\lambda,\xi_p i}(p,i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p,i}$ *ne zavisi od* $i\in I$.

Izraz iz (*iv*) *označavaćemo sa* $(p,\lambda)\psi$.

Definišimo množenje na $S=(G\times I\times\Lambda)\cup Q$ *sa:*

(1) $(a;i,\lambda)(b;j,\mu)=(ap_{\lambda j}b;i,\mu)$;

(2) $p(a:i,\lambda)=((p,i)\varphi a,\xi_p i,\lambda)$;

(3) $(a;i,\lambda)p=(a(p,\lambda)\psi;i,\lambda\eta_p)$;

(4) $pq = r \in Q \quad \Rightarrow \quad pq = r \in S;$
(5) $pq \notin Q \quad \Rightarrow \quad pq = \Big((p, \xi_p i)\varphi(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i}; \xi_p\xi_q i, \lambda\eta_p\eta_q\Big);$
za $p, q \in Q,\ a, b \in G,\ i, j \in I,\ \lambda, \mu \in \Lambda$. *Tada* S *sa ovako definisanom operacijom označavamo sa* $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P; Q, \varphi, \psi, \xi, \eta)$.

Lema 4.1. $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P; Q, \varphi, \psi, \xi, \eta)$ *je polugrupa.*

Dokaz. Množenje je dobro definisano. U slučajevima (i), (ii), (iii) i (iv) to sledi neposredno.

Neka su $p, q \in Q$, $pq \notin Q$. U tom slučaju je $\xi_p\xi_q = \text{const.}$ i $\eta_p\eta_q = \text{const.}$. Ostaje da dokažemo da izraz $(p, \xi_q i)\varphi(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i}$ ne zavisi od $i \in I$. Zaista,

$$\begin{aligned}(p, \xi_q i)\varphi(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i} &= p^{-1}_{\lambda, \xi_p\xi_q i} p_{\lambda, \xi_p\xi_q i}(p, \xi_q i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p, \xi_q i} p_{\lambda\eta_p, \xi_q i}(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i}\\ &= p^{-1}_{\lambda, \xi_p\xi_q i}(p, \lambda)\varphi(q, \lambda\eta_p)\psi,\end{aligned}$$

pa kako desna strana ove jednakosti ne zavisi od $i \in I$, to znači da i leva strana ne zavisi od $i \in I$, takodje.

Neka su $p, q \in Q$, $pq \notin Q$, i neka je $X = (a; k, \nu)$, $a \in G$, $k \in I$, $\nu \in \Lambda$. Tada

$$\begin{aligned}pq \cdot X &= ((p, \xi_q i)\varphi(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i}; \xi_p\xi_q i, \lambda\eta_p\eta_q) \cdot (a; k, \nu)\\ &= ((p, \xi_q i)\varphi(q, i)\varphi p^{-1}_{\lambda\eta_p\eta_q, i} p_{\lambda\eta_p\eta_q, k} a; \xi_p\xi_q i, \nu),\end{aligned}$$

pa za $i = k$ dobijamo da je

$$pq \cdot X = ((p, \xi_q k)\varphi(q, k)\varphi a; \xi_p\xi_q i, \nu).$$

Sa druge strane

$$\begin{aligned}p \cdot qX &= p \cdot q(a; k, \nu) = p((q, k)\varphi a; \xi_q k, \nu)\\ &= ((p, \xi_q k)\varphi(q, k)\varphi a; \xi_p\xi_q k, \nu).\end{aligned}$$

Dakle, $pq \cdot X = p \cdot qX$. I u ostalim slučajevima se na sličan način dokazuje da važi asocijativni zakon. $\square$

Lema 4.2. *Polugrupa* S *ima ideal koji je potpuno prosta podpolugrupa od* S *ako i samo ako* S *jeste izomorfna nekoj polugrupi* $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P; Q, \varphi, \psi, \xi, \eta)$.

Dokaz. Neka polugrupa S ima ideal K koji je Reesova matrična polugrupa nad grupom (potpuno prosta polugrupa, Teorema 3.5.), tj. neka je $K = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$. Tada $Q = S - K$ jeste parcijalna polugrupa i $S = K \cup Q = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P) \cup Q$.

Za $p \in Q$ i $(1; i, \lambda) \in K$, gde je 1 jedinica grupe G, imamo da je $p(1; i, \lambda) = (g; k, \nu) \in K$. Uvedimo oznake: $g = (p; i, \lambda)\varphi$, $k = \xi_{p,\lambda} i$, $\nu = \lambda\eta_{p,i}$. Sada je

$$\begin{aligned}((p; i, \lambda)\varphi; \xi_{p,\lambda} i, \lambda\eta_{p,i}) &= p(1; i, \lambda)(p^{-1}_{\lambda k}; k, \lambda)\\ &= ((p, i, \lambda)\varphi; \xi_{p,\lambda} i, \lambda\eta_{p,i})(p^{-1}_{\lambda k}; k, \lambda) = ((p; i, \lambda)\varphi p_{\lambda\eta_{p,i}, k} p^{-1}_{\lambda k}; \xi_{p,\lambda} i, \lambda).\end{aligned}$$

Odavde sledi da je $\lambda\eta_{p,i} = \lambda$, pa je

$$p(1;i,\lambda) = ((p;i,\lambda)\varphi;\xi_{p,\lambda}i,\lambda).$$

Dalje, za proizvoljne $\mu \in \Lambda$, $j \in I$, je

$$\begin{aligned}((p;i,\mu)\varphi;\xi_{p,\mu}i,\mu) &= p(1;i,\lambda)(p_{\lambda j}^{-1},j,\mu)\\ &= ((p;i,\lambda)\varphi;\xi_{p,\lambda}i,\lambda)(p_{\lambda j}^{-1};j,\mu)\\ &= ((p;i,\lambda)\varphi;\xi_{p,\lambda}i,\mu).\end{aligned}$$

Dakle, $(p;i,\mu)\varphi = (p;i,\lambda)\varphi$, pa φ ne zavisi od $\lambda \in \Lambda$. Takodje je $\xi_{p,\mu}i = \xi_{p,\lambda}i$, pa ξ ne zavisi od $\lambda \in \Lambda$. Prema tome,

$$p(1;i,\lambda) = ((p,i)\varphi;\xi_p i,\lambda),$$

gde $\varphi : Q \times I \to G$, $\xi_p : I \to I$. Slično dobijamo da je

$$(1;i,\lambda)p = ((p,\lambda)\psi;i,\lambda\eta_p),$$

gde $\psi : Q \times \Lambda \to G$, $\eta_p : \Lambda \to \Lambda$.

Kako je

$$\begin{aligned}(p_{\lambda,\xi_p i}(p,i)\varphi;i,\lambda) &= (1;i,\lambda)\cdot((p,i)\varphi;\xi_p i,\lambda) = (1;i,\lambda)\cdot p\cdot(1;i,\lambda)\\ &= ((p,\lambda)\psi;i,\lambda\eta_p)\cdot(1;i,\lambda) = ((p,\lambda)\psi p_{\lambda\eta_p,i};i,\lambda),\end{aligned}$$

to je

$$p_{\lambda,\xi_p i}(p,i)\varphi = (p,\lambda)\psi p_{\lambda\eta_p,i},$$

tj.

$$(p,\lambda)\psi = p_{\lambda,\xi_p i}(p,i)\varphi p_{\lambda\eta_p,i}^{-1}.$$

Sada se vidi da izraz $p_{\lambda,\xi_p i}(p,i)\varphi p_{\lambda\eta_p,i}^{-1}$ ne zavisi od $i \in I$.

Za $p \in Q$, $(g;i,\lambda) \in K$, imamo da je

$$\begin{aligned}p(g;i,\lambda) &= p(1;i,\mu)\cdot(p_{\mu i}^{-1}g;i,\lambda) = ((p,i)\varphi;\xi_p i,\mu)\cdot(p_{\mu i}^{-1}g;i,\lambda)\\ &= ((p,i)\varphi p_{\mu i}p_{\mu i}^{-1}g;\xi_p i,\lambda) = ((p,i)\varphi g;\xi_p i,\lambda),\end{aligned}$$

i slično, $(g;i,\lambda)p = (g(p,\lambda)\psi;i,\lambda\eta_p)$.

Za $p,q \in Q$, $pq \in Q$, je

$$\begin{aligned}((pq,i)\varphi;\xi_{pq}i,\lambda) &= pq\cdot(1;i,\lambda) = p\cdot q(1;i,\lambda)\\ &= p((q,i)\varphi;\xi_q i,\lambda) = ((p,\xi_q i)\varphi(q,i)\varphi;\xi_p\xi_q i,\lambda.\end{aligned}$$

Dakle, $(pq,i)\varphi = (p,\xi_q i)\varphi(q,i)\varphi$ i $\xi_{pq}i = \xi_p\xi_q i$.

Za $p,q \in Q$, $pq \notin Q$, i za proizvoljan $k \in I$, je

$$\begin{aligned}pq &= (g;i,\lambda) = (g;i,\lambda)\cdot(p_{\lambda k}^{-1};k,\lambda) = p\cdot q(p_{\lambda k}^{-1};k,\lambda)\\ &= p((q,k)\varphi p_{\lambda k}^{-1};\xi_q k,\lambda) = ((p,\xi_q k)\varphi(q,k)\varphi p_{\lambda k}^{-1};\xi_p\xi_q k,\lambda).\end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je

$$g = (p,\xi_q k)\varphi(q,k)\varphi p_{\lambda k}^{-1}, \qquad i = \xi_p\xi_q k\ .$$

Dakle, $\xi_p\xi_q = \text{const.}$. Slično, za proizvoljan $\nu \in I$ je

$$\begin{aligned}pq &= (g;i,\lambda) = (p_{\nu i}^{-1};i,\nu)\cdot(g;i,\lambda) = (p_{\nu i}^{-1};i,\nu)p\cdot q\\ &= (p_{\nu i}^{-1}(p,\nu)\psi;i,\nu\eta_p)q = (p_{\nu i}^{-1}(p,\nu)\psi(q,\nu\eta_p)\psi;i,\nu\eta_p\eta_q),\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

$$g = p_{\nu i}^{-1}(p,\nu)\psi(q,\nu\eta_p)\psi, \qquad \lambda = \nu\eta_p\eta_q \ .$$

Dakle, $\eta_p\eta_q = \text{const}$. Kako je

$$g = p_{\nu i}^{-1}(p,l)\psi(q,\nu\eta_p)\psi = p_{\nu i}^{-1}(pq,\lambda)\psi = (p,\xi_q k)\varphi(q,k)\varphi p_{\nu\eta_p\eta_q,k}^{-1},$$

to imamo da g ne zavisi od k niti od ν. Prema tome, pq je dato sa (5).

Ovim je dokazano da je S izomorfna sa $\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P;Q,\varphi,\psi,\xi,\eta)$.

Obrat sledi na osnovu Leme 4.1. $\square$

Lemom 4.2. dat je strukturni opis polugrupe koja ima potpuno prosto jezgro. Sledećom teoremom biće date još neke karakterizacije za ovakve polugrupe.

Teorema 4.1. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *neki kvazi-ideal od S je grupa;*
(ii) *neki bi-ideal od S je grupa;*
(iii) *neki levi ideal od S je potpuno prosta polugrupa;*
(iv) *neki levi ideal od S je leva grupa;*
(v) *S ima potpuno prosto jezgro;*
(vi) *S je izomorfna sa nekom polugrupom $\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P;Q,\varphi,\psi,\xi,\eta)$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ova implikacija sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Ova implikacija sledi na osnovu Teoreme 1.16. i Munnove teoreme.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka levi ideal L od S jeste potpuno prosta podpolugrupa od S. Tada možemo uzeti da je $L = \mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$, pa je $L_\lambda = \{(g;i,\lambda) \mid i \in I,\ g \in G\}$, $\lambda \in \Lambda$, levi ideal od L. Kako prema Teoremi 3.8, L_λ jeste leva grupa, i $SL_\lambda = SL_\lambda^2 \subseteq SLL_\lambda \subseteq LL_\lambda \subseteq L_\lambda$, to zaključujemo da S ima levi ideal koji je leva grupa.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Ako levi ideal L od S jeste leva grupa, tada L sadrži desni ideal G koji je grupa. U tom slučaju, G je bi-ideal od S, pa na osnovu Teoreme 1.16. i Munnove teoreme, S sadrži potpuno prosto jezgro.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Sledi prema Lemi 4.2.

$(vi) \Rightarrow (i)$. Uzmimo da je $K = \mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$ jezgro od S. Tada grupa $Q_{i\lambda} = \{(g;i,\lambda) \mid g \in G\} = R_i \cap L_\lambda$ jeste kvazi-ideal od S. Zaista, najpre je

$$(R_i \cap L_\lambda)K \cap K(R_i \cap L_\lambda) \subseteq R_iK \cap KL_\lambda \subseteq R_i \cap L_\lambda.$$

Sa druge strane je

$$Q_{i\lambda}S \cap SQ_{i\lambda} \subseteq Q_{i\lambda}^2 S \cap SQ_{i\lambda}^2 \subseteq Q_{i\lambda}KS \cap SKQ_{i\lambda} \subseteq Q_{i\lambda}K \cap KQ_{i\lambda} \subseteq Q_{i\lambda}.$$

Dakle, $Q_{i\lambda}$ je kvazi-ideal od S. $\square$

Zadaci.

1. Svaka konačna polugrupa ima potpuno prosto jezgro.

2. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(i) neki levi ideal od S je grupa;
(ii) neki levi ideal od S je desna grupa;
(iii) S ima jezgro koje je desna grupa.

Literatura. Bogdanović [7], Clifford [2], [4], Guo, Ren and Shum [1], [2], [3], Lallement [3], Milić and Pavlović [1], Protić and Bogdanović [1], Сушкевич [1], [2].

4.2. Teorema o izomorfizmu.

Sada ćemo odrediti uslove pod kojima su izomorfne polugrupe koje su konstruisane u prethodnoj tački.

Teorema 4.2. *Dve polugrupe* $S = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P; Q, \varphi, \psi, \xi, \eta)$ *i* $S^\star = \mathcal{M}(G^\star; I^\star, \Lambda^\star; P^\star; Q^\star, \varphi^\star, \psi^\star, \xi^\star, \eta^\star)$ *su izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam* $\omega : G \to G^\star$, *preslikavanja* $i \mapsto u_i$ *iz* I *u* $G^\star$ *i* $\lambda \mapsto v_\lambda$ *iz* Λ *u* $G^\star$, *bijekcije* $\alpha : I \to I^\star$, *pisana sleva, i* $\beta : \Lambda \to \Lambda^\star$ *i (parcijalni) izomorfizam* $\Omega : Q \to Q^\star$ *tako da je*
(i) $p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^\star_{\lambda\beta,\alpha i}u_i$;
(ii) $\alpha\xi_p = \xi^\star_{p\Omega}\alpha$;
(iii) $\eta_p\beta = \beta\eta^\star_{p\Omega}$;
(iv) $((p,i)\varphi)\,\omega = u^{-1}_{\xi_p i}(p\Omega, \alpha i)\varphi^\star u_i$;
(v) $((p,\lambda)\psi)\,\omega = v_\lambda(p\Omega, \lambda\beta)\psi^\star v^{-1}_{\lambda\eta_p}$.

Dokaz. Neka je $f : S \to S^\star$ izomorfizam. Uzmimo da je Ω restrikcija od f na Q. Kako izomorfna slika jezgra polugrupe S jeste jezgro polugrupe $S^\star$, i kako je jezgro polugrupe jedinstveno, to f slika Q na $Q^\star$. Neka je Ω restrikcija od f na Q. Tada $\Omega : Q \to Q^\star$ jeste (parcijalni) izomorfizam.

Ako je $(a; i, \lambda)\ \mathcal{L}\ (b; j, \mu)$, tada je $\lambda = \mu$. Obratno, iz

$$(a; i, \lambda) = (ab^{-1}p^{-1}_{\nu j}; i, \nu)(b; j, \lambda), \quad (b; j, \lambda) = (ba^{-1}p^{-1}_{\nu i}; j, \nu)(a : i, \lambda),$$

dobijamo da je $(a; i, \lambda)\ \mathcal{L}\ (b; j, \lambda)$, tj.

$$(a; i, \lambda)\ \mathcal{L}\ (b; j, \mu) \ \Leftrightarrow\ \lambda = \mu.$$

Slično,

$$(a; i, \lambda)\ \mathcal{R}\ (b; j, \mu) \ \Leftrightarrow\ i = j.$$

Sada, kako je f izomorfizam od $K = G \times I \times \Lambda$ na $K^\star = G^\star \times I^\star \times \Lambda^\star$, imamo da f preslikava $\mathcal{L}$ klasu L_λ od K na $\mathcal{L}$ klasu od K, pa postoji bijekcija $\beta : \Lambda \to \Lambda^\star$ takva da je $(a; i, \lambda) \in L_{\lambda\beta}$. Slično, postoji bijekcija $\alpha : I \to I^\star$ takva da je $(a; i, \lambda) \in R_{\alpha i}$. Štaviše, f preslikava $\mathcal{H}$-klase, koje su grupe, na odgovarajuće $\mathcal{H}$-klase.

Uzmimo sada da skupovi I i Λ imaju zajednički element 1. Jasno je da ova pretpostavka ne utiče na opštost dokaza. Definišimo preslikavanje $\omega : G \to G^\star$ tako da je

$$(p_{11}^{-1}x; 1, 1)f = (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega); \alpha 1, 1\beta) \tag{6}$$

(na desnoj strani ove jednakosti je element iz $K^\star$). Jasno je da je na ovaj način preslikavanje ω dobro definisano. Neka su $x, y \in G$ i $x\omega = y\omega$. Tada je $(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega); \alpha 1, 1\beta) = (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(y\omega); \alpha 1, 1\beta)$, odakle je $(p_{11}^{-1}x; 1, 1)f = (p_{11}^{-1}y; 1, 1)f$, pa kako f jeste izomorfizam, to je $(p_{11}^{-1}x; 1, 1) = (p_{11}^{-1}y; 1, 1)$, odnosno $p_{11}^{-1}x = p_{11}^{-1}y$, pa je $x = y$. Prema tome, ω je injekcija.

Uzmimo $x^\star \in G^\star$. Tada je $(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}x^\star; \alpha 1, 1\beta) \in K^\star$, pa kako restrikcija preslikavanja f na K jeste izomorfizam od K na $K^\star$, to postoji $(a; 1, 1) \in K$ tako da je $(a; 1, 1)f = (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}x^\star; \alpha 1, 1\beta)$. Kako je $(a; 1, 1) = (p_{11}^{-1}p_{11}a; 1, 1)$, to za $x = p_{11}a$ imamo da je $x\omega = x^\star$. Prema tome, ω je sirjekcija.

Za $x, y \in G$, koristeći (6), imamo da važi:

$$\begin{aligned}
(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(xy)\omega; \alpha 1, 1\beta) &= (p_{11}^{-1}xy; 1, 1)f = \big[(p_{11}^{-1}x; 1, 1)(p_{11}^{-1}y; 1, 1)\big]\, f \\
&= (p_{11}^{-1}x; 1, 1)f \cdot (p_{11}^{-1}y; 1, 1)f \\
&= (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega); \alpha 1, 1\beta)(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(y\omega); \alpha 1, 1\beta) \\
&= (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega)p^\star_{1\beta,\alpha 1}p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(y\omega); \alpha 1, 1\beta) \\
&= (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega)(y\omega); \alpha 1, 1\beta).
\end{aligned}$$

Dakle, $p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(xy\omega) = p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(x\omega)(y\omega)$, odakle je $(xy)\omega = (x\omega)(y\omega)$, pa ω jeste homomorfizam, i prema tome izomorfizam.

Za proizvoljne elemente $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, elementi u_i, $v_\lambda \in G^\star$ su odredjeni relacijama:

$$\begin{cases} (1; i, \lambda)f = (u_i; \alpha i, 1\beta) \\ (p_{11}^{-1}; 1, \lambda)f = (p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}v_\lambda; \alpha 1, \lambda\beta) \end{cases}. \tag{7}$$

Neka je $(a; i, \lambda) \in K$ proizvoljan element. Tada je

$$(a; i, \lambda) = (1; i, 1)(p_{11}^{-1}a; 1, 1)(p_{11}^{-1}; 1, \lambda),$$

odakle je

$$(a; i, \lambda) = (1; i, 1)f(p_{11}^{-1}a; 1, 1)f(p_{11}^{-1}; 1, \lambda)f,$$

pa na osnovu (7) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
(a; i, \lambda)f &= (u_i; \alpha i, 1\beta)(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(a\omega); \alpha 1, 1\beta)(p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}v_\lambda; \alpha 1, \lambda\beta) \\
&= (u_i p^\star_{1\beta,\alpha 1}p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}(a\omega)p^\star_{1\beta,\alpha 1}p^{\star\,-1}_{1\beta,\alpha 1}v_\lambda; \alpha i, \lambda\beta).
\end{aligned}$$

Dakle

$$(a; i, \lambda)f = (u_i(a\omega)v_\lambda; \alpha i, \lambda\beta). \tag{8}$$

Na taj način opisan je svaki izomorfizam od K na $K^\star$. Sada, koristeći (8), imamo

$$
\begin{aligned}
[(1;i,\lambda)(1;i,\lambda)]\,f &= (p_{\lambda i};i,\lambda)f = (u_i(p_{\lambda i})\omega v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta),\\
(1;i,\lambda)f(1;i,\lambda)f &= (u_i(1\omega)v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta)(u_i(1\omega)v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta)\\
&= (u_iv_\lambda;\alpha i,\lambda\beta)(u_iv_\lambda;\alpha i,\lambda\beta)\\
&= (u_iv_\lambda p^\star_{\lambda\beta,\alpha i}u_iv_\lambda;\alpha i,\lambda\beta),
\end{aligned}
$$

pa je

$$u_i(p_{\lambda i}\omega)v_\lambda = u_iv_\lambda p^\star_{\lambda\beta,\alpha i}u_iv_\lambda,$$

odakle je

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^\star_{\lambda\beta,\alpha i}u_i.$$

Prema tome, uslov (i) važi.

Uzmimo $p\in Q$, $(a;i,\lambda)\in K$. Tada je

$$
\tag{9}
\left\{
\begin{aligned}
[p(a;i,\lambda)]\,f &= ((p,i)\varphi a;\xi_p i,\lambda)f\\
&= (u_{\xi_p i}((p,i)\varphi a)\omega v_\lambda;\alpha\xi_p i,\lambda\beta)\\
[pf]\,[(a;i,\lambda)f] &= (p\Omega)(u_i(a\omega)v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta)\\
&= ((p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i(a\omega)v_\lambda;\xi^\star_{p\Omega}\alpha i,\lambda\beta)
\end{aligned}
\right.
$$

odakle dobijamo da je $\alpha\xi_p i = \xi^\star_{p\Omega}\alpha i$, pa važi uslov (ii). Slično dokazijemo da važi uslov (iii).

Iz (9) sledi da je

$$u_{\xi_p i}((p,i)\varphi a)\omega v_\lambda = (p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i(a\omega)v_\lambda.$$

Množeći ovu jednakost sa $u^{-1}_{\xi_p i}$ sa leve, i sa v^{-1}_λ sa desne strane, dobijamo da je

$$\tag{10} ((p,i)\varphi\omega)(a\omega) = u^{-1}_{\xi_p i}(p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i(a\omega),$$

(jer je $u^{-1}_{\xi_p i}u_{\xi_p i} = 1^\star$ i ω je homomorfizam. Za $a=1$ u (10) dobija se

$$(p,i)\varphi\omega = u^{-1}_{\xi_p i}(p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i,$$

tj. uslov (iv) važi. Na sličan način se dokazuje da važi uslov (v).

Time je dokazan direktan deo teoreme.

Obratno, neka su ispunjeni uslovi teoreme. Dokazaćemo da preslikavanje $f:S\to S^\star$ koje je dato sa

$$(a;i,\lambda)f = (u_i(a\omega)v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta),\quad pf = p\Omega,$$

$(a;i,\lambda)\in G\times I\times\Lambda$, $p\in Q$, jeste izomorfizam. Kako su $\Omega:Q\to Q^\star$ i $\omega:G\to G^\star$ izomorfizmi, i $\alpha:I\to I^\star$ i $\beta:\Lambda\to\Lambda^\star$ su bijekcije, dovoljno je dokazati da je f homomorfizam samo za proizvod jednog elementa iz $G\times I\times\Lambda$ i jednog elementa iz Q.

Za $p\in Q$, $(a;i,\lambda)\in G\times I\times\Lambda$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
[p(a;i,\lambda)]\,f &= ((p,i)\varphi a;\xi_p i,\lambda)f \\
&= (u_{\xi_p i}((p,i)\varphi a)\omega v_\lambda;\alpha\xi_p i,\lambda\beta) \\
&= (u_{\xi_p i}((p,i)\varphi\omega)(a\omega)v_\lambda;\xi^\star_{p\Omega}\alpha i,\lambda\beta) \\
&= (u_{\xi_p i}u^{-1}_{\xi_p i}(p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i(a\omega)v_\lambda;\xi^\star_{p\Omega}\alpha i,\lambda\beta) \\
&= ((p\Omega,\alpha i)\varphi^\star u_i(a\omega)v_\lambda;\xi^\star_{p\Omega}\alpha i,\lambda\beta) \\
&= (p\Omega)(u_i(a\omega)v_\lambda;\alpha i,\lambda\beta) \\
&= [pf]\,[(a;i,\lambda)f]\,.
\end{aligned}
$$

Prema tome, $[p(a;i,\lambda)]\,f = [pf]\,[(a;i,\lambda)f]$. Slično se dokazuje da je $[(a;i,\lambda)p]\,f = [(a;i,\lambda)f]\,[pf]$. $\square$

Posledica 4.1. *Dve Reesove matrične polugrupe $S=\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$ i $S^\star=\mathcal{M}(G^\star;I^\star,\Lambda^\star;P^\star)$ su izomorfne ako i samo ako postoje izomorfizam $\omega: G\to G^\star$, bijekcije $\alpha: I\to I^\star$ i $\beta:\Lambda\to\Lambda^\star$, i elementi u_i $(i\in I)$ i v_λ $(\lambda\in\Lambda)$ iz $G^\star$ tako da je $p_{\lambda i}=v_\lambda p^\star_{\lambda\beta,\alpha i}u_i$, za sve $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$.* $\square$

Zadaci.

1. Neka su $S=\mathcal{M}(G;I,\Lambda;P)$ i $S^\star=\mathcal{M}(G^\star;I^\star,\Lambda^\star;P^\star)$ dve Reesove matrične polugrupe sa sendvič matricama $P=(p_{\lambda i})$ i $P^\star=(p^\star_{\lambda^\star i^\star})$, tim redom. Neka su $i\mapsto u_i$ i $\lambda\mapsto v_\lambda$, redom preslikavanja skupova I i Λ u $G^\star$, neka $\varphi: I\to I^\star$, $\psi:\Lambda\to\Lambda^\star$, i neka je $\omega: G\to G^\star$ netrivijalni homomorfizam tako da je:

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^\star_{\lambda\psi,i\varphi}u_i\ ,$$

za svaki $\lambda\in\Lambda$, $i\in I$. Definišimo preslikavanje $\theta: S\to S^\star$ sa:

$$(a;i,\lambda)\theta=(u_i(a\omega)v_\lambda;i\varphi,\lambda\psi).$$

Tada θ jeste netrivijalni homomorfizam od S u $S^\star$.

Obratno, svaki netrivijalni homomorfizam od S u $S^\star$ se može dobiti na opisani način.

Literatura. Bogdanović and Gilezan [1], Munn [1], Rees [1].

4.3. Polugrupe sa potpuno prostim pravim levim idealima.

U Glavi 3. su razmatrane polugrupe u kojima su svi pravi (levi) ideali Arhimedove polugrupe. Koristeći sličnu metodologiju, ovde ćemo opisati polugrupe u kojima su svi pravi levi ideali potpuno proste polugrupe. Dalje, koristeći rezultate iz prethodnog poglavlja ove glave, biće dat i strukturni opis za pomenute polugrupe.

Lema 4.3. *Neka polugrupa S nije levo prosta. Tada svaki pravi levi ideal od S jeste potpuno prosta podpolugrupa od S ako i samo ako S ima jezgro K i važi jedan od sledećih uslova:*

(a) *$S = K \cong \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$;*
(b) *$K \cong \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$, $S - K$ je levo prosta podpolugrupa od S i za svaki $a \in S - K$ je $K = Ka$;*
(c) *K je leva grupa, $S - K = \{a\}$ i $a^2 \in K$.*

Dokaz. Neka svaki pravi levi ideal od S jeste potpuno prosta polugrupa. Tada na osnovu Teoreme 4.1, S ima jezgro K koje je potpuno prosta podpolugrupa od S.

Ako je $K = S$, tada dobijamo da važi (a). Uzmimo da je $K \neq S$. Ako je L pravi levi ideal od S, tada na osnovu pretpostavke, on je potpuno prosta podpolugrupa od S. Jasno je da je $K \cap L \neq \varnothing$, pa je $L \subseteq K$, jer je L prosta polugrupa. Dakle, K je jedinstven maksimalan levi ideal od S. Sada na osnovu Teorema 1.14. i 1.15, $S - K$ jeste levo prosta podpolugrupa od S ili je $S - K = \{a\}$ i $a^2 \in K$.

Slučaj: $S - K = T$ je levo prosta podpolugrupa od S. Uzmimo $a \in T$. Tada za levi ideal $L(a)$ važi:

$$L(a) = a \cup Sa = a \cup (K \cup T)a = a \cup Ka \cup Ta = T \cup Ka,$$

jer je T levo prosta podpolugrupa od S. Sa druge strane, kako K jeste maksimalan levi ideal od S, to je $L(a) = S$, tj. $T \cup Ka = T \cup K$. Prema tome, $K \subseteq Ka \subseteq K$, za svaki $a \in T$, tj. $K = Ka$, za svaki $a \in T$, pa važi (b).

Slučaj: $S - K = \{a\}$, $a^2 \in K$. Uzmimo da K nije leva grupa. Tada postoji pravi levi ideal L od K koji je leva grupa i $a^2 \in L$. Takodje, imamo da je

$$L(a) = a \cup Sa = a \cup (K \cup \{a\})a = a \cup a^2 \cup Ka, \; L^2(a) = a^2 \cup a^3 \cup a^4 \cup Ka.$$

Ako je $L(a) \neq S$, tada je $L(a) \subseteq K$, jer je K maksimalan levi ideal od S, odakle dobijamo da je $a \in K$, što je nemoguće. Prema tome, $L(a) = S$, pa je $a \cup a^2 \cup Ka = a \cup Ka$, odakle je $K \subseteq a^2 \cup Ka$, pa je $Ka \subseteq a^3 \cup Ka^2$. Dakle,

$$K \subseteq a^2 \cup Ka \subseteq a^2 \cup a^3 \cup Ka^2 \subseteq a^2 \cup a^3 \cup Ka^3 \subseteq L,$$

odakle je $K = L$, pa K jeste leva grupa, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, važi (c).

Obratno, ako važi (a), tada tvrdjenje leme sledi iz Teoreme 3.14. Neka važi (c). Uzmimo pravi levi ideal L od S. Tada je $K \cap L \neq \varnothing$, pa je $K \subseteq L$. Ako je $K \neq L$, tada je $a \in L$, pa je $L = S$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Dakle, $K = L$, pa L jeste potpuno prosta podpolugrupa od S. Neka sada važi (b) i neka L jeste pravi levi ideal od S. Ako je $L \nsubseteq K$, tada je $L \cap T \neq \varnothing$, gde je $T = S - K$, pa kako T jeste levo prosta polugrupa, to je $T \subseteq L$. Za $a \in T$ je $K = Ka \subseteq KL \subseteq L$, pa je $S = K \cup T \subseteq L$, tj. $S = L$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, $L \subseteq K$, pa prema Teoremi 3.14. dobijamo da L jeste potpuno prosta podpolugrupa od S. $\square$

Konstrukcija. *Neka je* $K = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ *Reesova matrična polugrupa i neka je* T *levo prosta polugrupa takva da je* $K \cap T = \varnothing$.

Neka I *i* Λ *jesu neprazni skupovi, neka je* $\xi : p \mapsto \xi_p$ *preslikavanje iz* T *u polugrupu* $\mathcal{T}_l(I)$ *i neka je* $\eta : p \mapsto \eta_p$ *preslikavanje iz* T *u polugrupu svih sirjekcija iz* Λ *na* Λ, *pisanih zdesna, tako da važi:*

(i) $\xi_{pq} = \xi_p \xi_q$, $\eta_{pq} = \eta_p \eta_q$.

Neka su $\varphi : T \times I \to G$ *i* $\psi : T \times \Lambda \to G$ *preslikavanja za koja važe sledeći uslovi:*

(ii) $(pq, i)\varphi = (p, \xi_q i)\varphi(q, i)\varphi$;

(iii) $(pq, \lambda)\psi = (p, \lambda)\psi(q, \lambda\eta_p)\psi$;

(iv) $p_{\lambda, \xi_p i}(p, i)\varphi = (p, \lambda)\psi p_{\lambda\eta_p, i}$.

Na $S = K \cup T$ *definišimo množenje sa:*

(11) $(a; i, \lambda)(b; j, \mu) = (ap_{\lambda j} b; i, \mu)$;

(12) $p(a; i, \lambda) = ((p, i)\varphi a; \xi_p i, \lambda)$;

(13) $(a; i, \lambda)p = (a(p, \lambda)\psi; i, \lambda\eta_p)$;

(14) $pq = r \in T \ \Rightarrow\ pq = r \in S$;

za $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $p, q \in T$, $a, b \in G$. *Tada* S *sa ovako definisanim množenjem jeste polugrupa (Lema 4.1.). Ovu polugrupu ćemo označavati sa* $\mathcal{M}_1(G; I, \Lambda; P; T; \varphi, \psi; \xi, \eta)$.

Lema 4.4. *Polugrupa* S *ima jezgro* K *koje je potpuno prosta polugrupa,* $S - K$ *je levo prosta polugrupa i za svaki* $p \in S - K$ *je* $K = Kp$, *ako i samo ako* S *jeste izomorfna nekoj polugrupi* $\mathcal{M}_1(G; I, \Lambda; P; T; \varphi, \psi; \xi, \eta)$.

Dokaz. Neka je K potpuno prosto jezgro od S, $K = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$, neka je $T = S - K$ levo prosta polugrupa i neka je $K = Kp$, za svaki $p \in T$. tada na osnovu Leme 4.2, postoje preslikavanja ξ, η, φ i ψ sa svojstvima $(i) - (iii)$, i množenje na S se može definisati sa $(11) - (14)$. Ostaje da dokažemo da za svaki $p \in T$, preslikavanje η_p jeste sirjekcija. Neka je $p \in T$ i neka je $\lambda \in \Lambda$ proizvoljan element. Za proizvoljne $a \in G$, $i \in I$, iz $K = Kp$, dobijamo da postoji $(b; j, \mu) \in K$ tako da je:

$$(a; i, \lambda) = (b; j, \mu)p = (b(p, \mu)\psi; j, \mu\eta_p),$$

odakle je $\mu\eta_p = \lambda$. Prema tome, η_p je sirjekcija od λ na Λ.

Obratno, neka je η_p, $p \in T$, sirjekcija od Λ na Λ. Tada za svaki $(a; i, \lambda) \in K$ postoji $\mu \in \Lambda$ tako da je $\lambda = \mu\eta_p$, pa je:

$$(a; i, \lambda) = (a[(p, \mu)\psi]^{-1}; i, \mu)p \in Kp.$$

Prema tome, $K \subseteq Kp$. Ostali uslovi slede na osnovu konstrukcije. $\square$

Konstrukcija. *Neka je* $K = G \times I$ *leva grupa, neka je* b *fiksan element iz* G*, neka je* a *element takav da* $a \notin K$ *i neka je* ξ_a *preslikavanje skupa* I*, pisano sleva, takvo da je* $\xi_a \xi_a = \text{const}$*. Na* $S = K \cup \{a\}$ *definišimo množenje sa:*
(15) $(x, i)(y, j) = (xy, i)$;
(16) $(x, i)a = (xb, i)$;
(17) $a(x, i) = (bx, \xi_a i)$;
(18) $aa = (b^2, \xi_a \xi_a i)$;
za $i, j \in I$, $x, y \in G$. *Tada* S *sa ovako definisanim operacijama jeste polugrupa koju ćemo označavati sa* $\mathcal{M}_2(G; I; a, b, \xi_a)$.

Lako se dokazuje sledeća lema:

Lema 4.5. *Polugrupa* S *ima jezgro* K *koje je leva grupa i* $S - K = \{a\}$, $a^2 \in K$, *ako i samo ako je* S *izomorfna nekoj polugrupi* $\mathcal{M}_2(G; I; a, b, \xi_a)$. $\square$

Iz Lema 4.3, 4.4, i 4.5, neposredno dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 4.3. *Neka* S *nije levo prosta polugrupa. Tada svaki pravi levi ideal od* S *jeste potpuno prosta podpolugrupa od* S *ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*
(a) S *je izomorfna sa nekom polugrupom* $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$;
(b) S *je izomorfna sa nekom polugrupom* $\mathcal{M}_1(G; I, \Lambda; P; T, \varphi, \psi, \xi, \eta)$;
(c) S *je izomorfna sa nekom polugrupom* $\mathcal{M}_2(G; I; a, b, \xi_a)$. $\square$

Teorema 4.4. *Svaka prava podpolugrupa polugrupe* S *je prosta ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*
(a) S *je* $M(2, r)$;
(b) $|S| = 2$;
(c) S *je potpuno prosta periodična polugrupa.*

Dokaz. Neka svaka prava podpolugrupa od S jeste prosta. Kako je $S = \cup_{a \in S} \langle a \rangle$, to $\langle a \rangle$, $a \in S$, nije beskonačna polugrupa. zaista, ako je $\langle a \rangle$, $a \in S$, beskonačna polugrupa, onda je ona izomorfna aditivnoj polugrupi prirodnih brojeva, pa u tom slučaju u $\langle a \rangle$ postoji pravi ideal, odakle $\langle a \rangle$ nije prosta polugrupa, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, S je periodična polugrupa.

Uzmimo da je S monogena polugrupa. Tada je $a^m = a^{m+r}$, za neke $m, r \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo da je $m \geq 3$. Tada S ima pravu podpolugrupu $K'_a = K_a \cup \{a^{m-1}\}$. Kako je K_a ideal od S, to je K_a ideal od K'_a, pa K'_a nije prosta polugrupa, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, $m \leq 2$. Ako je $m = 2$, onda važi (a). Ako je $m = 1$, onda je S konačna ciklična grupa, pa važi (c).

Uzmimo sada da S nije monogena polugrupa. Na osnovu dokazanog za monogenu polugrupu imamo da S jeste periodična polugrupa. Ako S jeste prosta, tada prema Teoremi 2.3. imamo da važi (c). Neka S nije prosta polugrupa. Tada prema Lemi 4.3, S ima potpuno prosto jezgro K i $S - K = P$ je levo prosta podpolugrupa od S. Uzmimo idempotente $e \in K$, $f \in P$. Podpolugrupa $T = \{f\} \cup \langle ef \rangle \cup \langle fef \rangle$ nije prosta, jer $\langle ef \rangle \cup \langle fef \rangle = T \cap K$ jeste pravi ideal od T, pa prema pretpostavci dobijamo da je $S = T = \{f\} \cup \langle ef \rangle \cup \langle fef \rangle$, odakle je $e \in T \subseteq Sf$, pa je $ef = e$. Slično, razmatrajući podpolugrupu $\{f\} \cup \langle fe \rangle \cup \langle fef \rangle$, dobijamo da je $fe = e$. Dakle, $S = \{f\} \cup \langle ef \rangle \cup \langle fef \rangle = \{f, e\}$, pa važi (b).

Obratno, razmotrimo slučaj (c), tj. neka S jeste potpuno prosta periodična polugrupa i neka S' jeste podpolugrupa od S. Tada je $S = \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ i G je periodična grupa. Za $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, neka je $H_{i\lambda} = \{(g; i, \lambda) \mid g \in G\}$. Neka je $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, par elemenata takav da je $S' \cap H_{i\lambda} \neq \varnothing$. Jasno je da takvi par elemenata postoji. Neka je $G' = \{g \in G \mid (g; i, \lambda) \in S'\}$. Tada G' jeste podpolugrupa od G, pa kako G jeste periodična grupa, to G' jeste podgrupa od G. Neposredno se dokazuje da $S' \cap H_{j\mu} \neq \varnothing$ povlači da je $S' \cap H_{j\lambda} \neq \varnothing$, i u tom slučaju se dokazuje da je $S' \cap H_{j\lambda} = \{(g; j, \lambda) \mid g \in G'\}$ i $S' \cap H_{j\mu} = \{(g; j, \mu) \mid g \in G'\}$. Takodje, ako je $S' \cap H_{j\mu} \neq \varnothing$, tada je idempotent $(p_{\mu j}^{-1}; j, \mu)$ u S, pa je $p_{\mu j} \in G'$. Sada, za $I' = \{j \in I \mid S' \cap H_{j\lambda} \neq \varnothing\}$ i $\Lambda' = \{\mu \in \Lambda \mid S' \cap H_{j\mu} \neq \varnothing$, za neki $j \in I'\}$, imamo da je $S' = \mathcal{M}(G'; I;, \Lambda'; P')$, gde P' jeste $\Lambda' \times I'$ podmatrica od P.

Slučajevi (a) i (b) se dokazuju neposredno. $\square$

Zadaci.

1. Levi ideal potpuno proste polugrupe je potpuno prosta polugrupa.

2. Neka polugrupa S nije levo prosta. Tada svaki pravi levi ideal od S jeste desna grupa ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(a) S ima jezgro K koje je desna grupa, i $S - K = \varnothing$ ili je $S - K = T$ levo prosta polugrupa i $K \subseteq Ka$, za svaki $a \in T$;

(b) S ima jezgro K koje je grupa i $S - K = \{a\}$, $a^2 \in K$.

3. Svaki pravi bi-ideal polugrupe S je potpuno prosta polugrupa ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(a) S je potpuno prosta polugrupa;

(b) S ima potpuno prosto jezgro K, $S - K$ je grupa i $K = Ka \cup aK$, za svaki $a \in S - K$;

(c) S ima jezgro K koje je grupa, $S - K = \{a\}$, $a^2 \in K$.

4. Svaki pravi bi-ideal polugrupe S je podgrupa od S ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(a) $S \cong \mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$, i $|I| = 2$, $|\Lambda| = 1$, ili $|I| = 1$, $|\Lambda| = 2$;

(b) $S = G \cup T$, $G \cap T = \varnothing$, G i T su grupe i množenje na S je definisano pomoću homomorfizma $\varphi : T \to G$ sa:

$$a \star b = \begin{cases} a(b\varphi) & \text{ako je } a \in G,\ b \in T, \\ (a\varphi)b & \text{ako je } a \in T,\ b \in G, \\ ab & \text{inače.} \end{cases}$$

(c) S ima jezgro K koje je grupa i $S - K = \{a\}$, $a^2 \in K$.

5. Svaka prava podpolugrupa polugrupe S je grupa ako i samo ako S jeste $M(2,r)$ ili je $|S| = 2$ ili S jeste periodična grupa.

6. Dve polugrupe $\mathcal{M}_2(G; I; a, b, \xi_a)$ i $\mathcal{M}_2(G^\star; I^\star; a^\star, b^\star, \xi_{a^\star})$ su izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam $\omega : G \to G^\star$ i bijekcija $h : I \to I^\star$ tako da je $b\omega = b$ i $\xi_a h = h\xi_{a^\star}$.

Literatura. Bogdanović [7], [9], Bogdanović and Gilezan [1], Clifford [2], [3], Čupona [4], [5], Hrmova [1], Lallement [3], Lallement and Petrich [4], Malinović [1], [2], Pollák und Rédei [1], Protić and Bogdanović [1], Schwarz [6], Warne [1], [2], [3], [6].

4.4. c-(m,n)-idealske polugrupe.

Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 1$. Podpolugrupa A polugrupe S je (m,n)-*ideal* od S ako je $A^mSA^n \subseteq A$, $(A^0S = SA^0 = S)$. Polugrupa S je (m,n)-*idealska polugrupa* ako svaka podpolugrupa od S jeste (m,n)-ideal od S. Polugrupa S je c-(m,n)-*idealska polugrupa* ako svaka monogena podpolugrupa od S jeste (m,n)-ideal od S. Specijalno, c-$(1,1)$-idealsku ($(1,1)$-idealsku) polugrupu nazivamo *c-bi-idealska* (*bi-idealska*) *polugrupa*.

Podskup R parcijalne polugrupe Q je *parcijalna podpolugrupa* od Q ako za $x, y \in R$, $xy \in Q$ povlači da je $xy \in R$, tj. ako je R^0 podpolugrupa od Q^0. Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 1$. Parcijalna polugrupa Q je c-(m,n)-*idealska* ((m,n)-*idealska*) *parcijalna polugrupa* ako Q^0 jeste c-(m,n)-idealska ((m,n)-idealska) polugrupa. Parcijalna polugrupa Q je *parcijalna nil-polugrupa* ako Q^0 jeste nil-polugrupa.

Lema 4.6. *Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 1$. Polugrupa S je c-(m,n)-idealska polugrupa ako i samo ako je $a^mSa^n \subseteq \langle a\rangle$, za svaki $a \in S$.*

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $m, n \geq 1$. Ostali slučajevi se dokazuju slično.

Neka S jeste c-(m,n)-idealska polugrupa i neka je $a \in S$. Tada $a^mSa^n \in \langle a\rangle^m S \langle a\rangle^n \subseteq \langle a\rangle$. Obratno, neka je $a^mSa^n \subseteq \langle a\rangle$, za svaki $a \in S$. Uzmimo proizvoljnu monogenu podpolugrupu $\langle a\rangle$ od S. Kako je $\langle a\rangle^k = \{a^p \mid p \in \mathbf{Z}^+,\ p \geq k\}$, $k \in \mathbf{Z}^+$, to je proizvoljni element iz $\langle a\rangle^m S \langle a\rangle^n$ oblika $a^p x a^q$, gde je $x \in S$ i $p, q \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq m$, $q \geq n$. Sada imamo da je $a^p x a^q = a^{p-m} a^m x a^n a^{q-n} \in \langle a\rangle \langle a\rangle \langle a\rangle \subseteq \langle a\rangle$. Prema tome, $\langle a\rangle$ je (m,n)-ideal od S. $\square$

Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 4.7. *Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 1$, i neka S jeste c-(m,n)-idealska ((m,n)-idealska) polugrupa. Tada svaka podpolugrupa i svaka homomorfna slika od S jeste takodje c-(m,n)-idealska ((m,n)-idealska) polugrupa.* $\square$

Lema 4.8. *Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $m+n \geq 1$, i neka S jeste c-(m,n)-idealska polugrupa. Tada:*

(a) *S je periodična;*

(b) *$E(S)$ je pravougaona traka i ideal od S;*

(c) *$(\forall a, b \in S)\ e_a e_b \in \langle a^m b^n\rangle$, gde su e_a i e_b redom idempotenti iz $\langle a\rangle$ i $\langle b\rangle$.*

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $m, n \geq 1$. Ostali slučajevi se dokazuju slično.

(a) Uzmimo $a \in S$. Za $B = \langle a^2\rangle$ imamo da je $a^{2m} a a^{2n} \in B^m S B^n \subseteq B$, tj. $a^{2m+2n+1} = a^{2k}$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, pri čemu je $2m+2n+1 \neq 2k$. Dakle, S je periodična.

(b) Za $e \in S$ imamo da je $eSe \subseteq \langle e\rangle = \{e\}$, odakle je $eae = e$, za svaki $a \in S$. Odavde i iz Teoreme 1.24. dobijamo da $E(S)$ jeste pravougaona traka, dok za proizvoljan $a \in S$, iz $eae = e$ dobijamo da je $(ea)^2 = ea$, $(ae)^2 = ae$, tj. $ea, ae \in E(S)$, pa $E(S)$ jeste ideal od S.

(c) Neka je e idempotent iz $\langle a^m b^n\rangle$, tj. $(a^m b^n)^k = e$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $k \geq 2$. Tada je $ee_a = a^m b^n (a^m b^n)^{k-1} e_a \in a^m S e_a \subseteq \langle a\rangle$, pa kako je $ee_a \in E(S)$, to je $ee_a = e_a$. Na isti način dokazujemo da je $e_b e = e_b$. Sada prema (b) i prema Teoremi 1.24. dobijamo da je $e_a e_b = ee_a e_b e = e \in \langle a^m b^n\rangle$. $\square$

Teorema 4.5. *Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+$. Polugrupa S je c-(m,n)-idealska polugrupa ako i samo ako S jeste idealska ekstenzija pravougaone trake pomoću c-(m,n)-idealske nil-polugrupe.*

Dokaz. Neka S jeste c-(m,n)-idelaska polugrupa. Prema Lemi 4.8, S je idealska ekstenzija pravougaone trake $E = E(S)$ pomoću nil-polugrupe $Q = S/E$, dok prema Lemi 4.7, Q je c-(m,n)-idealska polugrupa.

Obratno, neka je S idealska ekstenzija pravougaone trake E pomoću c-(m,n)-idealske nil-polugrupe Q. Uzmimo $a \in S$. Ako je $a \in S - E$, tada je $(a\xi)^m Q (a\xi)^n \subseteq \langle (a\xi)\rangle = \langle \{a\}\rangle$ u $Q = S/E$, gde je ξ Reesova kongruencija na S odredjena idealom E i $a\xi$ je ξ-klasa elementa a.

Prema tome, za proizvoljan $b \in S$ imamo da je $(a\xi)^m(b\xi)(a\xi)^n \subseteq \langle\{a\}\rangle$ u Q, odakle je $a^m ba^n \in \langle a\rangle$ u S. Sa druge strane, ako je $a \in E$, tada je $a^m Sa^n = aSa = a(aSa)a = aEa = \{a\}$. Dakle, prema Lemi 4.6, S je c-(m,n)-idealska polugrupa. □

Posledica 4.2. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je c-bi-idealska polugrupa;*

(ii) *S je idealska ekstenzija pravougaone trake pomoću c-bi-idealske nil-polugrupe;*

(iii) *S je retraktivna ekstenzija pravougaone trake pomoću c-bi-idealske nil-polugrupe.*

Dokaz. Ekvivalentnost uslova (i) i (ii) sledi direktno iz Teoreme 4.5, dok $(iii) \Rightarrow (ii)$ sledi neposredno. Ostaje da se dokaže da $(i) \Rightarrow (iii)$.

Uzmimo da važi (i). Tada imamo da S jeste idealska ekstenzija pravougaone trake $E = E(S)$ pomoću c-bi-idealske nil-polugrupe. Prema Lemi 4.8.(c) imamo da preslikavanje $\varphi : S \to E$ definisano sa $a\varphi = e_a$, gde je e_a idempotent iz $\langle a\rangle$, jeste retrakcija od S na E. Prema tome, važi (iii). □

Konstrukcija. *Neka je $E = I \times \Lambda$ pravougaona traka i neka Q jeste parcijalna polugrupa takva da je $E \cap Q = \varnothing$.*

Neka je $\xi : p \mapsto \xi_p$ preslikavanje iz Q u polugrupu $\mathcal{T}_l(I)$ i neka je $\eta : p \mapsto \eta_p$ preslikavanje iz Q u polugrupu $\mathcal{T}_r(\Lambda)$. Za $p, q \in Q$ neka važi:

(i) $pq \in Q \quad \Rightarrow \quad \xi_{pq} = \xi_p\xi_q,\ \eta_{pq} = \eta_p\eta_q$;

(ii) $pq \notin Q \quad \Rightarrow \quad \xi_p\xi_q = \text{const.}, \quad \eta_p\eta_q = \text{const.}$;

Definišimo množenje na $S = E \cup Q$ sa:

(19) $(i,\lambda)(j,\mu) = (i,\mu)$;

(20) $p(i,\lambda) = (\xi_p i,\lambda)$;

(21) $(i,\lambda)p = (i,\lambda\eta_p)$;

(22) $pq = r \in Q \quad \Rightarrow \quad pq = r \in S$;

(23) $pq \notin Q \quad \Rightarrow \quad pq = (\xi_p\xi_q i, \lambda\eta_p\eta_q)$;

za $p, q \in Q$, $a, b \in G$, $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Prema Lemi 4.1, S sa ovako definisanom operacijom jeste polugrupa, i označavaćemo je sa $\mathcal{M}(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$.

Sledeća teorema daje strukturni opis c-(m,n)-idealskih polugrupa.

Teorema 4.6. *Neka su $m, n \in \mathbf{Z}^+$. Polugrupa S je c-(m,n)-idealska polugrupa ako i samo ako S jeste izomorfna nekoj polugrupi $\mathcal{M}(I,\Lambda; Q,\xi,\eta)$, pri čemu je Q c-(m,n)-idealska parcijalna nil-polugrupa.*

Dokaz. Neka S jeste c-(m,n)-idealska polugrupa. Prema Teoremi 4.5, S je idealska ekstenzija pravougaone trake $E = I \times \Lambda$ pomoću c-(m,n)-idealske nil-polugrupe T. Tada $Q = T^{\bullet}$ jeste c-(m,n)-idealska parcijalna nil-polugrupa, i prema Lemi 4.2. imamo da je S izomorfna nekoj polugrupi $\mathcal{M}(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$.

Obrat sledi prema Teoremi 4.5. $\square$

Teorema 4.7. *Neka je* $m \in Z$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$. *Polugrupa* S *je* c-$(m,0)$*-idealska* $(c$-$(0,n)$*-idealska) polugrupa ako i samo ako* S *jeste idealska ekstenzija levo nulte (desno nulte) trake pomoću* c-$(m,0)$*-idealske* $(c$-$(0,n)$*-idealske) nil-polugrupe.*

Dokaz. Neka S jeste c-$(m,0)$-idelaska polugrupa. Prema Lemi 4.8, S je idealska ekstenzija pravougaone trake $E=E(S)$ pomoću nil-polugrupe $Q=S/E$, dok prema Lemi 4.7, Q je c-$(m,0)$-idealska polugrupa. Lako se dokazije da E jeste levo nulta traka.

Obrat se dokazuje slično kao odgovarajući deo Teoreme 4.5. $\square$

Neposredno se dokazuje sledeća strukturna teorema za c-$(m,0)$-idealske $(c$-$(0,n)$-idealske) polugrupe:

Teorema 4.8. *Neka je* $m \in \mathbf{Z}^+$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$. *Polugrupa* S *je* c-$(m,0)$*-idealska* $(c$-$(0,n)$*-idealska) polugrupa ako i samo ako* S *jeste izomorfna nekoj polugrupi* $\mathcal{M}(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, *pri čemu je* Q c-(m,n)*-idealska* $(c$-$(0,n)$*-idealska) parcijalna nil-polugrupa i* $|\Lambda|=1$ $(|I|=1)$. $\square$

Neposredno iz Teoreme 4.5. i Leme 4.7, dobijamo sledeću lemu:

Lema 4.9. *Neka su* $m,n \in \mathbf{Z}^+$, $m+n \geq 2$. *Ako* S *jeste* (m,n)*-idealska polugrupa, onda* S *jeste idealska ekstenzija pravougaone trake pomoću* (m,n)*-idealske nil-polugrupe.* $\square$

Neka je $S=\mathcal{M}(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, pri čemu Q jeste parcijalna nil-polugrupa. Tada proizvoljna podpolugrupa T od S je oblika $T=E_T \cup Q_T$, gde $E_T = I_T \times \Lambda_T$, $I_T \subseteq I$, $\Lambda_T \subseteq \Lambda$, jeste pravougaona traka i Q_T je parcijalna podpolugrupa od Q. Ako, osim toga, za $p,q \in Q_T$, $p \in Q_T^m$, $q \in Q_T^n$, važi sledeći uslov:

(iii) $$\xi_p : I \to I_T, \qquad \eta_q : \Lambda \to \Lambda_T,$$

tada ćemo polugrupu sa takvim osobinama označavati sa $\mathcal{M}_1(I,\Lambda,Q,\xi,\eta)$.

Sledećom teoremom dajemo strukturni opis (m,n)-idealskih polugrupa.

Teorema 4.9. *Neka su* $m,n \in \mathbf{Z}^+$. *Polugrupa* S *je* (m,n)*-idealska polugrupa ako i samo ako* S *jeste izomorfna nekoj polugrupi* $\mathcal{M}_1(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, *pri čemu je* Q (m,n)*-idealska parcijalna nil-polugrupa.*

Dokaz. Neka S jeste (m,n)-idealska polugrupa. Prema Teoremi 4.6, S je izomorfna nekoj polugrupi $\mathcal{M}(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, pri čemu Q jeste parcijalna nil-polugrupa. Kako je polugrupa Q^0 izomorfna faktoru polugrupe S, to prema Lemi 4.7, Q^0 je (m,n)-idealska polugrupa, pa Q jeste (m,n)-idealska parcijalna polugrupa.

Uzmimo proizvoljnu podpolugrupu T od S, $T = E_T \cup Q_T$, gde je Q_T parcijalna podpolugrupa od T i $E_T = I_T \times \Lambda_T$, $I_T \subseteq I$, $\Lambda_T \subseteq \Lambda$, i uzmimo $p \in Q_T^m$, $q \in Q_T^n$. Za proizvoljne $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ imamo da je

$$p(i,\lambda)q \in T^m S T^n \subseteq T \quad \text{i} \quad p(i,\lambda)q \in E\ ,$$

jer S jeste (m,n)-idealska polugrupa i E je ideal od S, odakle je

$$(\xi_p i, \lambda\eta_q) = p(i,\lambda)q \in T \cap E = E_T = I_T \times \Lambda_T.$$

Prema tome, $\xi_p : I \to I_T$ i $\eta_q : \Lambda \to \Lambda_T$, što znači da je S izomorfna nekoj polugrupi $\mathcal{M}_1(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$.

Obratno, neka je $S = \mathcal{M}_1(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, pri čemu Q jeste (m,n)-idealska parcijalna nil-polugrupa. Uzmimo proizvoljnu podpolugrupu T od S, $T = E_T \cup Q_T$, gde je Q_T parcijalna podpolugrupa od T i $E_T = I_T \times \Lambda_T$, $I_T \subseteq I$, $\Lambda_T \subseteq \Lambda$. Jasno je da je

$$T^m S T^n = E_T S E_T \cup Q_T^m S E_T \cup E_T S Q_T^n \cup Q_T^m S Q_T^n. \tag{24}$$

Kako je E_T bi-ideal od E, to je

$$E_T S E_T = E_T^2 S E_T^2 \subseteq E_T E S E E_T \subseteq E_T E E_T \subseteq E_T \subseteq T. \tag{25}$$

Razmotrimo skup $Q_T^m S E_T$. Uzmimo $p \in Q_T^m$, $a \in S$, $e \in E_T$. Tada je $pae \in E$. Neka je $e = (i,\lambda)$, $i \in I_T$, $\lambda \in \Lambda_T$. Imamo sledeće slučajeve:

(26.1) Ako je $p \in Q_T$, $pa \notin E$, $a \notin E$, tada je $ae = (i',\lambda)$, $i' \in E$, pa na osnovu (iii) dobijamo da je $pae = p(i',\lambda) = (\xi_p i',\lambda) \in E_T$.

(26.2) Ako je $pa \in E$, $p \notin E$, $a \in E$, tada je $a = (j,\mu)$, $j \in I$, $\mu \in \Lambda$, odakle prema (iii) dobijamo da je

$$pae = (\xi_p j, \mu)(i,\lambda) = (\xi_p j, \lambda) \in E_T.$$

(26.3) Ako je $pa \in E$, $p \notin E$, $a \notin E$, tada je $ae = (\xi_a i, \lambda)$, pa prema (iii) imamo da je

$$pae = p(\xi_a i, \lambda) = (\xi_p \xi_a i, \lambda) \in E_T.$$

(26.4) Ako je $pa \in E$, $p \in E$, tada slično kao u (7) dobijamo da je $pae \in E_T$.

Kako drugih mogućnosti nema, zaključujemo da je

$$Q_T^m S E_T \subseteq E_T \subseteq T. \tag{26}$$

Na isti način dobijamo da je

$$E_T S Q_T^m \subseteq E_T \subseteq T. \tag{27}$$

Razmotrimo skup $Q_T^m S Q_T^n$. Uzmimo $p \in Q_T^m$, $a \in S$, $q \in Q_T^n$. Ako je $paq \in Q$, tada je $paq \in Q_T^m S Q_T^n \subseteq Q_T \subseteq T$, jer je Q (m,n)-idealska parcijalna polugrupa. Ako $paq \notin Q$, tada razlikujemo sledeće slučajeve:

(28.1) Ako je $p \in E_T$, tada se ovaj slučaj svodi na (27).

(28.2) Ako je $q \in E_T$, tada se ovaj slučaj svodi na (26).

(28.3) Ako $p \notin E_T$, $q \notin E_T$, $a \in E$, tada je $a = (j,\mu)$, $j \in I$, $\mu \in \Lambda$, pa prema (iii) sledi:

$$paq = p(j,\mu)q = (\xi_p j,\mu)q = (\xi_p j, \lambda\eta_q) \in E_T \subseteq T.$$

(28.4) Ako $p \notin E_T$, $q \notin E_T$, $a \notin E$, $pa \in E$, tada je $pa = (\xi_p\xi_a i, \lambda\eta_p\eta_a)$, za proizvoljne $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, pa prema (iii) je

$$paq = (\xi_p\xi_a i, \lambda\eta_p\eta_a)q = (\xi_p\xi_a i, \lambda\eta_p\eta_a\eta_q) \in E_T \subseteq T.$$

(28.5) Ako $p \notin E_T$, $q \notin E_T$, $a \notin E$, $pa \notin E$, tada je:

$$paq = (\xi_{pa}\xi_q i, \lambda\eta_{pa}\eta_q) = (\xi_p\xi_a\xi_q i, \lambda\eta_{pa}\eta_q) \in E_T,$$

za proizvoljne $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, prema (iii).

Kako nema drugih mogućnosti, zaključujemo da je važi:

$$Q_T^m S Q_T^n \subseteq T. \tag{28}$$

Dakle, na osnovu (24)–(28) dobijamo da je $T^m S T^n \subseteq T$, pa S jeste (m,n)-idealska polugrupa. $\square$

Slično se dokazuje sledeća teorema:

Teorema 4.10. *Neka je $m \in \mathbf{Z}^+$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$. Polugrupa S je $(m,0)$-idealska ($(0,n)$-idealska) polugrupa ako i samo ako S jeste izomorfna nekoj polugrupi $\mathcal{M}_1(I,\Lambda;Q,\xi,\eta)$, pri čemu je Q $(m,0)$-idealska ($(0,n)$-idealska) parcijalna nil-polugrupa i $|\Lambda| = 1$, $(|I| = 1)$.* $\square$

Teorema 4.11. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je bi-idealska polugrupa;*

(ii) $(\forall a,b \in S)\ aSb \subseteq \langle a,b\rangle$;

(iii) *S je idealska ekstenzija pravougaone trake pomoću bi-idealske nil-polugrupe;*

(iv) *S je retraktivna ekstenzija pravougaone trake pomoću bi-idealske nil-polugrupe.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Lemi 4.9.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi prema Posledici 4.2.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Neka je S retraktivna ekstenzija pravougaone trake E pomoću bi-idelaske nil-polugrupe Q. Neka φ jeste retrakcija iz S na E. Za proizvoljan $u \in S$ imamo da je $u^k \in E$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $u^k = (u^k)\varphi = (u\varphi)^k = u\varphi$, tj. $u\varphi \in \langle u\rangle$. Uzmimo sada $a,b \in T$, $x \in S$. Ako je $axb \in S - E$, tada, u uobičajenoj identifikaciji parcijalnih polugrupa $S - E$ i $Q^\bullet$, imamo da su $a,x,b,axb \in Q^\bullet$, pa kako Q jeste bi-idealska nil-polugrupa, to na osnovu $(i) \Leftrightarrow (ii)$ imamo da je $axb \in \langle a,b\rangle$, $axb \neq 0$ u Q, pa je $axb \in \langle a,b\rangle$, $axb \notin E$, u S. Sa druge strane, ako je $axb \in E$, tada je

$$axb = (a\varphi)(x\varphi)(b\varphi) = (a\varphi)(b\varphi) = (ab)\varphi \in \langle ab\rangle \subseteq \langle a,b\rangle,$$

jer E jeste pravougaona traka. Dakle, važi (ii). $\square$

Zadaci.

1. Polugrupa S je periodična i preslikavanje $\varphi : S \to E(S)$ definisano sa $x\varphi = e_x$, gde je e_x idempotent iz $\langle x \rangle$, je homomorfizam ako i samo ako je $E^2(S) = E(S)$ i za sve $a, b \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$ postoji $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^k = (a^n b^n)^k$.

2. Polugrupa S je periodična , $E(S)$ je pravougaona traka i preslikavanje $\varphi : S \to E(S)$ definisano kao u Zadatku 1. je homomorfizam ako i samo ako je $E^2(S) = E(S)$ i za sve $a, b, c \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$, postoji $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(abc)^k = (ac)^{nk}$.

3. Neka je E traka, P je parcijalna polugrupa, $E \cap P = \varnothing$, i $\varphi : P \to E$ je parcijalni homomorfizam. Produžimo preslikavanje φ do preslikavanja $\psi : S = E \cup P \to E$ na sledeći način: $x\psi = x\varphi$, za $x \in P$, $e\psi = e$, za $e \in E$. Definišimo operaciju na S sa:

$$xy = \begin{cases} xy & \text{ako su } x, y, xy \in P \\ (x\psi)(y\psi) & \text{inače} \end{cases},$$

gde je xy proizvod u P. Tada S jeste polugrupa sa idealom E i ψ je retrakcija iz S na E.

Označićemo ovu polugrupu sa $S = (E, P, \varphi)$.

4. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je periodična, $\varphi : S \to E(S)$ $(x\varphi = e_x)$ je homomorfizam i $E(S)$ je ideal od S;

(ii) $E(S)$ je ideal od S i za sve $a, b \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$, postoji $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^k = (a^n b^n)^k$;

(iii) $S \cong (E, P, \varphi)$, gde je P parcijalna nil-polugrupa.

5. Polugrupa S je β_0^n-*polugrupa* ako za svaki $Q \subseteq S$, $Q^{n+1} \subseteq Q$ povlači $QSQ \subseteq Q$. Ako je P parcijalna polugrupa, tada P jeste β_0^n-polugrupa ako za svaki $Q \subseteq P$, sa svojstvom $q_0 q_1 \cdots q_n q \in Q$, $q_i \in q$, kad god je $q_0 q_1 \cdots q_n$ definisano u P, imamo da ako je $q_1^\star p q_2^\star$ definisano u P, tada $q_1^\star p q_2^\star \in Q$, $q_1^\star, q_2^\star \in Q$, $p \in P$. Dokazati da je S β_0^n-polugrupa ako i samo ako je $S \cong (E, P, \varphi)$, gde je E pravougaona traka i P je parcijalna β_0^n-nil-polugrupa.

Literatura. Bogdanović, Kržovski, Protić and Trpenovski [1], Bogdanović and Milić [1], Ćirić [1], Kimura, Tamura and Merkel [1], Lajos [1], Ляпин [5], Mel'nichuk [1], Protić and Bogdanović [2], Stamenković [1], [2], Trpenovski [1], [2], Шеврин [3], Шутов [1].

GLAVA 5

Teorija polumrežnih razlaganja

Prve rezultate o polumrežnim razlaganjima polugrupa srećemo u radu A.H.Clifforda iz 1941. godine. Poseban doprinos Teoriji polumrežnih razlaganja dao je T.Tamura. On je 1956. godine dokazao fundamentalan rezultat o razlaganju proizvoljne polugrupe u polumrežu polumrežno nerazloživih polugrupa. Postojanje odgovarajuće najmanje polumrežne kongruencije ustanovili su T.Tamura i N.Kimura 1955. godine. Iste godine ovaj rezultat je potvrdio M.Yamada. Razne druge dokaze Tamurinog rezultata iz 1956. godine dao je, kasnije, on sam. Drugačije dokaze srećemo i kod M.Petricha, M.S.Putchae i R.Šulkae. Za grupoide je sličan rezultat Tamurinom dao G.Thierrin 1956. godine. Posebno, veći broj naučnika su izučavali polumreže Arhimedovih polugrupa. Prvi potpun opis ovih polugrupa dao je M.S.Putcha 1973. godine. Zatim slede karakterizacije T.Tamure i M.Ćirića i S.Bogdanovića. Koristeći potpuno poluprim podskupove i ideale M.Ćirić i S.Bogdanović 1992. godine definišu ekvivalencije koje predstavljaju uopštenja Greenovih ekvivalencija i dalje razvijaju Teoriju polumrežnih razlaganja na jedan nov način. Pomenutim ekvivalencijama uvodi se čitava lepeza novih tipova polumrežnih razlaganja što će znatno pomeriti težište istraživačkog rada u ovoj oblasti. Ovi rezultati odredjuju sadržaj ove glave.

5.1. Najveće polumrežno razlaganje.

O polumrežama polugrupa je već bilo reči u Tački 1.3. Ovde ćemo potpunije izložiti Teoriju polumrežnih razlaganja polugrupa.

Kongruencija ξ polugrupe S je *polumrežna kongruencija* ako S/ξ jeste polumreža. Nije teško proveriti da kongruencija ξ na polugrupi S jeste polumrežna kongruencija ako i samo ako je $a\,\xi\,a^2$ i $ab\,\xi\,ba$ za sve $a,b\in S$. Presek svih polumrežnih kongruencija polugrupe S je neprazan i da taj presek jeste polumrežna kongruencija. Ta kongruencija, u uredjenom skupu, u odnosu na inkluziju, svih polumrežnih kongruencija polugrupe S, jeste najmanji element i nazivamo je *najmanja polumrežna kongruencija* na S. Odgovarajuća faktor polugrupa je *najveća polumrežna homomorfna slika* od S a odgovarajuće razlaganje je *najveće polumrežno razlaganje* polugrupe S. Polugrupa S je *polumrežno nerazloživa* ako univerzalna relacija ω_S jeste jedina polumrežna kongruencija na S.

Tema naših daljih proučavanja biće najmanja polumrežna kongruencija polugrupe. Najpre ćemo na polugrupi S definisati sledeće skupove:

$$\Sigma(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow^{\infty} x\}, \quad \Sigma_n(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow^{n} x\},$$

za $a \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$. Razmotrimo najpre njihove osnovne osobine.

Lema 5.1. *Neka je* a *element polugrupe* S. *Tada za* $n \in \mathbf{Z}^+$,

$$\Sigma_1(a) = \sqrt{SaS},\ \Sigma_n(a) \subseteq \Sigma_{n+1}(a) = \sqrt{S\Sigma_n(a)S},\ \Sigma(a) = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} \Sigma_n(a). \quad \square$$

Lema 5.2. *Neka je* a *element polugrupe* S. *Tada* $\Sigma(a)$ *jeste najmanji potpuno poluprim ideal od* S *koji sadrži* a.

Dokaz. Uzmimo $x \in \Sigma(a)$, $b \in S$. Tada je $a \longrightarrow^{\infty} x$, pa iz $x \longrightarrow bx$ i $x \longrightarrow xb$ dobijamo da je $a \longrightarrow^{\infty} xb$ i $a \longrightarrow^{\infty} bx$, tj. $xb, bx \in \Sigma(a)$. Dakle, $\Sigma(a)$ je ideal od S.

Uzmimo $x \in S$ takav da je $x^2 \in \Sigma(a)$, tj. $a \longrightarrow^{\infty} x^2$. Kako $x^2 \longrightarrow x$, to je $a \longrightarrow x$, tj. $x \in \Sigma(a)$. Prema tome, $\Sigma(a)$ je potpuno poluprim ideal od S koji sadrži a.

Neka I jeste potpuno poluprim ideal od S koji sadrži a. Tada je $SaS \subseteq SIS \subseteq I$, pa je $\Sigma_1(a) = \sqrt{SaS} \subseteq \sqrt{I} \subseteq I$. Uzmimo da je $\Sigma_n(a) \subseteq I$. Tada je $S\Sigma_n(a)S \subseteq SIS \subseteq I$ pa je $\Sigma_{n+1}(a) = \sqrt{S\Sigma_n(a)S} \subseteq \sqrt{I} \subseteq I$. Dakle, indukcijom dobijamo da je $\Sigma_n(a) \subseteq I$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa prema Lemi 5.1. dobijamo da je $\Sigma(a) \subseteq I$. Dakle, $\Sigma(a)$ je najmanji potpuno poluprim ideal od S koji sadrži a. $\square$

Ideal $\Sigma(a)$, $a \in S$, nazivamo *glavni radikal* polugrupe S generisan sa a. *Skup svih glavnih radikala* polugrupe S označavamo sa Σ_S.

Lema 5.3. *Na polugrupi* S *važi:*

(*i*) $(\forall a \in S)\ \Sigma(a) = \Sigma(a^2)$;

(*ii*) $(\forall a, b \in S)\ \Sigma(ab) \subseteq \Sigma(a) \cap \Sigma(b)$;

(*iii*) $(\forall a, b, c \in S)\ \Sigma(abc) = \Sigma(acb)$;

(*iv*) $(\forall a, b \in S)(\forall n \in \mathbf{Z}^+)\ \Sigma(ba) = \Sigma(a^n b^n)$.

Dokaz. (*i*) Prema Lemi 5.2. dobijamo da je $a^2 \in \Sigma(a)$ i $\Sigma(a^2) \subseteq \Sigma(a)$. Kako $\Sigma(a^2)$ jeste potpuno poluprim ideal i $a^2 \in \Sigma(a^2)$, to je $a \in \Sigma(a^2)$, pa prema Lemi 5.2. dobijamo da je $\Sigma(a) \subseteq \Sigma(a^2)$. Prema tome, važi (*i*).

(*ii*) Kako su $\Sigma(a)$ i $\Sigma(b)$ ideali, to $ab \in \Sigma(a)$ i $ab \in \Sigma(b)$, pa prema Lemi 5.2. sledi (*ii*).

(*iii*) Prema (*i*) i (*ii*) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\Sigma(abc) &= \Sigma(abcabc) \subseteq \Sigma(bcabc) = \Sigma(bcabcbcabc)\\ &\subseteq \Sigma(cbca) = \Sigma(cbcacbca) \subseteq \Sigma(acb).\end{aligned}$$

Dakle, $\Sigma(abc) \subseteq \Sigma(acb)$. Na isti način dobijamo obratnu inkluziju. Prema tome, važi (*iii*).

(iv) Prema (i) i (ii) dobijamo da je

$$\Sigma(ab) = \Sigma(abab) \subseteq \Sigma(ba) = \Sigma(baba) \subseteq \Sigma(ab),$$

tj. $\Sigma(ab) = \Sigma(ba)$.

Uzmimo da je $\Sigma(ba) = \Sigma(a^k b^k)$, $k \in \mathbf{Z}^+$. Tada prema $(i), (ii)$ i (iii) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\Sigma(ba) &= \Sigma(a^k b^k) = \Sigma(a^k b^k a^k b^k) = \Sigma(a^{2k} b^{2k})\\ &\subseteq \Sigma(a^{k+1} b^{k+1}) \subseteq \Sigma(ab) = \Sigma(ba).\end{aligned}$$

Dakle, $\Sigma(ba) = \Sigma(a^{k+1} b^{k+1})$, pa indukcijom dobijamo da važi (iv). $\square$

Lema 5.4. *Neka su a, b, c elementi polugrupe S i $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada*

$$a \longrightarrow^n b \;\Rightarrow\; \Sigma(ac) \supseteq \Sigma(bc). \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $n = 1$, tj. $b^m = xay$ za neke $x, y \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada prema Lemi 5.3. dobijamo da je

$$\Sigma(bc) = \Sigma(c^m b^m) = \Sigma(c^m xay) = \Sigma(xc^m ay) \subseteq \Sigma(ca) = \Sigma(ac).$$

Dakle, (1) važi za $n = 1$.

Uzmimo da (1) važi za $n \in \mathbf{Z}^+$ i uzmimo da je $a \longrightarrow^{n+1} b$, tj. $a \longrightarrow^n x \longrightarrow b$ za neki $x \in S$. Tada dobijamo da je $\Sigma(bc) \subseteq \Sigma(xc) \subseteq \Sigma(ac)$.

Dakle, indukcijom dobijamo da važi (1). $\square$

Lema 5.5. *Neka je ξ polumrežna kongruencija polugrupe S i neka je $n \in \mathbf{Z}^+$.*

(i) *Neka $a, b \in S$ i $a \longrightarrow^n b$. Tada je $b\xi \leq a\xi$ u polumreži S/ξ.*

(ii) *Neka A jeste ξ-klasa od S i $a, b \in A$. Tada $a \longrightarrow^n b$ u S ako i samo ako $a \longrightarrow^n b$ u A.*

Dokaz. (i) Neka je $n = 1$. Tada je $b^m = xay$ za neke $x, y \in S$, $m \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $b\xi = (b^m)\xi = (xay)\xi = (xy)\xi a\xi \leq a\xi$.

Uzmimo da (i) važi za $n \in \mathbf{Z}^+$ i uzmimo da $a \longrightarrow^{n+1} b$. Tada je $a \longrightarrow^n x \longrightarrow b$ za neki $x \in S$, pa je $b\xi \leq x\xi \leq a\xi$.

Dakle, indukcijom dobijamo da važi (i).

(ii) Neka je $n = 1$. Tada je $b^m = xay$ za neke $x, y \in S$, $m \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $b\xi = (b^m)\xi = (xay)\xi = (x\xi)(a\xi)(y\xi)$. Odavde lako dobijamo da je $(b\xi)(x\xi) = (y\xi)(b\xi) = b\xi$, pa $bx, yb \in A$. Prema tome, $b^{m+2} = (bx)a(yb) \in AaA$, tj. $a \longrightarrow b$ u A. Dakle, (ii) važi za $n = 1$.

Uzmimo da (ii) važi za $n \in \mathbf{Z}^+$ i uzmimo da $a \longrightarrow^{n+1} b$ u S. Tada je $a \longrightarrow^n x \longrightarrow b$ za neki $x \in S$, pa prema (i) dobijamo da je $a\xi \leq x\xi \leq a\xi = b\xi$, tj. $x\xi = b\xi$, odnosno $x \in A$. Prema (ii) za $n = 1$ i prema pretpostavci, dobijamo da $a \longrightarrow^n x$ u A i $x \longrightarrow b$ u A, pa $a \longrightarrow^{n+1} b$ u A.

Dakle, indukcijom dobijamo da važi (ii). $\square$

Na polugrupi S uvodimo *relaciju tipa* σ sa:

$$a\ \sigma\ b\ \Leftrightarrow\ \Sigma(a)=\Sigma(b), \qquad (a,b\in S).$$

Jasno da σ jeste relacija ekvivalencije. Koristeći Lemu 5.2, lako se proverava da je $\sigma = \longrightarrow^\infty \cap(\longrightarrow^\infty)^{-1}$.

Sada ćemo dokazati teoremu koja opisuje najmanju polumrežnu kongruenciju polugrupe.

Teorema 5.1. *Relacija* σ *na polugrupi* S *je najmanja polumrežna kongruencija na* S *i svaka* σ*-klasa je polumrežno nerazloživa polugrupa.*

Dokaz. Prema Lemama 5.4. i 5.3. dobijamo da σ jeste polumrežna kongruencija na S.

Neka je ξ polumrežna kongruencija na S is neka je $a\ \sigma\ b$. Tada je $a \longrightarrow^\infty b$ i $b \longrightarrow^\infty a$, pa prema Lemi 5.5.$(i)$ dobijamo da je $a\xi \le b\xi$ i $b\xi \le a\xi$ u S/ξ, tj. $a\xi = b\xi$. Dakle, $a\xi b$, pa je $\sigma\subseteq\xi$. Dakle, σ je najmanja polumrežna kongruencija na S.

Neka je A proizvoljna σ-klasa od S, neka je σ^* relacija tipa σ na A i neka $a,b\in A$. Tada $a\ \sigma\ b$ u S, tj. $a \longrightarrow^\infty b$ i $b \longrightarrow^\infty a$ u S, pa prema Lemi 5.5.(ii) dobijamo da $a \longrightarrow^\infty b$ i $b \longrightarrow^\infty a$ u A, odakle $a\ \sigma^*\ b$. Prema tome, σ^* je univerzalna relacija na A, pa kako σ^* jeste najmanja polumrežna kongruencija na A, to A jeste polumrežno nerazloživa polugrupa. □

Opisaćemo sada i najveću polumrežnu homomorfnu sliku polugrupe.

Teorema 5.2. *Za elemente* a,b *polugrupe* S *je*

$$\Sigma(ab)=\Sigma(a)\cap\Sigma(b),$$

tj. uredjen skup Σ_S*, u odnosu na inkluziju, svih glavnih radikala polugrupe* S *je polumreža i* Σ_S *je najveća polumrežna homomorfna slika od* S.

Dokaz. Uzmimo $x\in\Sigma(a)\cap\Sigma(b)$. Tada $a \longrightarrow^\infty x$ i $b \longrightarrow^\infty x$, pa prema Lemi 5.4. dobijamo da je

$$\Sigma(ab)\supseteq\Sigma(xb)\supseteq\Sigma(x^2)=\Sigma(x).$$

Dakle, $x\in\Sigma(ab)$, pa je $\Sigma(a)\cap\Sigma(b)\subseteq\Sigma(ab)$. Obratna inkluzija je dokazana u Lemi 5.3.

Prema Teoremi 5.1. imamo da Σ_S jeste najveća polumrežna homomorfna slika od S. □

Iz Teoreme 5.2. dobijamo niz značajnih posledica. Sledećom posledicom se opisuju glavni filtri polugrupe.

Posledica 5.1. *Neka je* a *element polugrupe* S. *Tada je*

$$N(a)=\{x\in S\mid x \longrightarrow^\infty a\}.$$

Dokaz. Neka je $A = \{x \in S \mid x \longrightarrow^{\infty} a\}$. Uzmimo $x, y \in A$. Tada $a \in \Sigma(x) \cap \Sigma(y) = \Sigma(xy)$, pa $xy \in A$. Dakle, A je podpolugrupa od S.

Uzmimo $x, y \in S$ tako da $xy \in A$. Tada $a \in \Sigma(xy) = \Sigma(x) \cap \Sigma(y)$, pa $x, y \in A$. Prema tome, A je filter koji sadrži a, pa je $N(a) \subseteq A$.

Neka $y \longrightarrow a$, tj. neka $a^m = uyv$, za neke $u, v \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$. tada iz $a \in N(a)$ dobijamo da $uyv \in N(a)$, pa $y \in N(a)$. Indukcijom dobijamo da iz $x \longrightarrow^{\infty} a$ sledi da $x \in N(a)$, tj. da je $A \subseteq N(a)$. Prema tome, $A = N(a)$. $\square$

Iz Posledice 5.1. neposredno dobijamo još jednu karakterizaciju najmanje polumrežne kongruencije:

Posledica 5.2. *Za svaku polugrupu S važi:*

$$a \,\sigma\, b \;\Leftrightarrow\; N(a) = N(b), \quad (a, b \in S). \quad \square$$

Takodje, značajna je i sledeća posledica:

Posledica 5.3. *Neka je I potpuno poluprim ideal polugrupe S i neka $a \in S$ tako da $a \notin I$. Tada postoji potpuno prim ideal P od S tako da $I \subseteq P$ i $a \notin P$.*

Dokaz. Neka je $P = S - N(a)$. Prema Posledici .11. imamo da P jeste potpuno prim ideal od S i jasno je da $a \notin P$. Neka $x \in N(a) \cap I$. Tada prema Posledici 5.1. i Lemi 5.2. imamo da $a \in \Sigma(x) \subseteq I$. Dakle, $a \in I$, čime smo dobili kontradikciju. Prema tome, $N(a) \cap I = \varnothing$, tj. $I \subseteq P$. $\square$

Lako se proverava sledeća

Posledica 5.4. *Svaki potpuno poluprim ideal polugrupe S je presek potpuno prim ideala od S.*

Dokaz. Sledi neposredno iz Posledice 5.3. $\square$

Posledica 5.5. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je polumrežno nerazloživa;*
(*ii*) *S je σ-prosta;*
(*iii*) $(\forall a, b \in S)\ a \longrightarrow^{\infty} b$;
(*iv*) *S nema pravih potpuno poluprim ideala;*
(*v*) *S nema pravih potpuno prim ideala.*

Dokaz. Sledi prema Teoremi 5.1. i Posledici 5.4. $\square$

Sada ćemo dati još jednu karakterizaciju najmanje polumrežne kongruencija na polugrupi. Prethodno, dokazaćemo sledeću lemu:

Lema 5.6. *Neka je* ξ *relacija ekvivalencije polugrupe* S *takva da važi:* $xy\,\xi\,xyx\,\xi\,yx$, *za sve* $x,y\in S^1$ (*sa dogovorom*: $1\,\xi\,1$). *Tada važi:*
(a) $xay\,\xi\,xa^ky$, *za sve* $x,a,y\in S^1$ *i svaki* $k\in\mathbf{Z}^+$;
(b) $xyz\,\xi\,xzy$, *za sve* $x,y,z\in S$.

Dokaz. Uzmimo $x,a,y\in S^1$. Tada je $xay\,\xi\,yxa\,\xi\,ayxa\,\xi\,xa^2y$. Prema tome, ($a$) važi za $k=2$. Uzmimo da je $xay\,\xi\,xa^ky$, za neki $k\in\mathbf{Z}^+$, $k\geq 2$. Tada prema toj pretpostavci i prema dokazanom za $k=2$ imamo da je:

$$xay\,\xi\,xa^ky=(xa^{k-1})ay\,\xi\,(xa^{k-1})a^2y=xa^{k+1}y.$$

Dakle, indukcijom dobijamo da važi (a).

Uzmimo $x,y,z\in S$. Prema pretpostavci teoreme i prema (a) dobijamo

$$\begin{aligned} xyz\ &\xi\,x(yz)^2\,\xi\,(xyzyz)^2=(xyzyzx)(yz)^2\,\xi\,(xyzyzx)(yz)\\ &=(xy)(zyzx)(yz)\,\xi\,(xy)(zyzx)^2(yz)=x(yz)^2(xzyzxyz)\\ &\xi\,x(yz)(xzyzxyz)=(xyzxzy)(zxyz)\,\xi\,(xyzxzy)^2(zxyz)\\ &=(xyzxzyx)(yz)(xzyzxyz)\,\xi\,(xyzxzyx)(yz)^2(xzyzxyz)\\ &\xi\,(xyzxzyxy)(zyzx)^2(yz)\,\xi\,(xyzxzyxy)(zyzx)(yz)\\ &=(xyzxzyx)(yz)^2(xyz)\,\xi\,(xyzxzyx)(yz)(xyz)=(xyzxzy)(xyz)^2\\ &\xi\,(xyzxzy)(xyz)=(xyz)(xzy)(xyz)\,\xi\,(xyz)(xzy)\end{aligned}$$

Dakle, $xyz\,\xi\,(xyz)(xzy)$. Slično dokazujemo da je $xzy\,\xi\,(xzy)(xyz)$, odakle je $xyz\,\xi\,xzy$. $\square$

Koristeći Lemu 5.6, dokazujemo sledeću teoremu:

Teorema 5.3. *Za svaku polugrupu* S *važi:* $\sigma=\,\frac{\ \ }{}^{\infty}$.

Dokaz. Primetimo najpre da je $xy \,—\, xyx \,—\, zx$, za sve $x,y\in S^1$, odakle dobijamo da $—^{\infty}$ jeste relacija ekvivalencije koja zadovoljava uslove Leme 5.6.

Uzmimo $a,b\in S$ takve da je $a\longrightarrow b$, tj. $b^m=uav$, za neke $u,v\in S^1$, $m\in\mathbf{Z}^+$, i uzmimo $x,y\in S^1$. Prema Lemi 5.6. dobijamo da je

$$\begin{aligned} xaby\ &—^{\infty}\,xab^my=xauavy=(xa)u(avy)\,—^{\infty}\,(xa)(avy)u=xa^2(vyu)\\ &—^{\infty}\,xa(vyu)=x(avy)u\,—^{\infty}\,xu(avy)=x(uav)y=xb^my\,—^{\infty}\,xby.\end{aligned}$$

Dakle, iz $a\longrightarrow b$ sledi da je $xaby\,—^{\infty}\,xby$, za sve $x,y\in S^1$. Slično dokazujemo da iz $b\longrightarrow a$ sledi da je $xaby\,—^{\infty}\,xay$, za sve $x,y\in S^1$. Prema tome, iz $a\,—\,b$ sledi da je $xay\,—^{\infty}\,xby$, za sve $x,y\in S^1$. Indukcijom dobijamo da za svaki $n\in\mathbf{Z}^+$, iz $a\,—^{n}\,b$ sledi da je $xay\,—^{\infty}\,xby$, za sve $x,y\in S^1$, pa $—^{\infty}$ jeste kongruencija na S. Jasno je da $—^{\infty}$ jeste polumrežna kongruencija, pa prema Teoremi 5.1, $\sigma\subseteq\,—^{\infty}$. Sa druge strane, jasno je da je $—^{\infty}\subseteq\,\longrightarrow^{\infty}\cap(\longrightarrow^{\infty})^{-1}=\sigma$. Dakle, $—^{\infty}=\sigma$. $\square$

Kao što smo videli u Teoremi 5.2, Σ_S je polumreža. Na kraju ovog poglavlja, daćemo razne karakterizacije polugrupa u kojima Σ_S jeste lanac. Prethodno, dokazaćemo neke pomoćne rezultate.

Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 5.7. *Ako su a i b elementi polugrupe S, tada je*
$$N(a) \cup N(b) \subseteq N(ab). \quad \square$$

Lema 5.8. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(*i*) $N(ab) = N(a) \cup N(b)$;
(*ii*) $N(a) \subseteq N(b)$ *ili* $N(b) \subseteq N(a)$;
(*iii*) $N(ab) = N(a)$ *ili* $N(ab) = N(b)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Iz $N(ab) = N(a) \cup N(b)$ sledi da je $ab \in N(a) \cup N(b)$. Ako je $ab \in N(a)$, tada $a, b \in N(a)$, jer $N(a)$ jeste filter, pa je $b \in N(a)$, odakle je $N(b) \subseteq N(a)$. Slično dokazujemo da iz $ab \in N(b)$ sledi da je $N(a) \subseteq N(b)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Uzmimo da je $N(a) \subseteq N(b)$. Tada $a, b \in N(b)$, odakle je $ab \in N(b)$, jer je $N(b)$ podpolugrupa od S, pa je $N(ab) \subseteq N(b)$. Kako prema Lemi 5.7. imamo da važi i obratna inkluzija, to je $N(ab) = N(b)$. Slično dokazijemo da iz $N(b) \subseteq N(a)$ sledi da je $N(ab) = N(a)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Iz (iii) sledi da je $N(ab) \subseteq N(a) \cup N(b)$, pa prema Lemi 5.7. dobijamo (i). $\square$

Sledećom teoremom opisujemo polugrupe u kojima glavni radikali čine lanac, tj. lance σ-prostih polugrupa:

Teorema 5.4. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(*i*) S *je lanac* σ*-prostih polugrupa;*
(*ii*) Σ_S *je lanac;*
(*iii*) *parcijalno uredjen skup svih potpuno prim ideala od* S *je lanac;*
(*iv*) $\longrightarrow^{\infty} \cup (\longrightarrow^{\infty})^{-1}$ *je univerzalna relacija na* S*;*
(*v*) *unija svake naprazne familije filtera od* S *je filter od* S*;*
(*vi*) $(\forall a, b \in S)\ ab \longrightarrow^{\infty} a \ \vee\ ab \longrightarrow^{\infty} b$*;*
(*vii*) *svaki potpuno poluprim ideal od* S *je potpuno prim;*
(*viii*) *glavni radikali od* S *su potpuno prim ideali.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi neposredno iz Teorema 5.1. i 5.2. i Posledice 5.5.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka su A i B potpuno poluprim ideali od S. Uzmimo da je $A - B \neq \varnothing$ i $B - A \neq \varnothing$, i uzmimo $a \in A - B$, $b \in B - A$. Tada je $\Sigma(a) \subseteq A$, $\Sigma(b) \subseteq B$, pa prema (ii) dobijamo da je $\Sigma(a) \subseteq \Sigma(b) \subseteq B$ ili $\Sigma(b) \subseteq \Sigma(a) \subseteq A$, odakle je $a \in B$ ili $b \in A$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, $A - B = \varnothing$ ili $B - A = \varnothing$, tj. $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$. Dakle, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Uzmimo $a, b \in S$. Neka je $A = S - N(a)$, $B = S - N(b)$. Prema Lemi .14, A i B su potpuno prim ideali od S, pa prema (iii), $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$, odakle je $N(b) \subseteq N(a)$ ili $N(a) \subseteq N(b)$, pa prema Posledici 5.1, $b \longrightarrow^{\infty} a$ ili $a \longrightarrow^{\infty} b$. Prema tome, važi (iv).

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka F_i, $i \in I$, jeste neprazna familija filtera od S i neka F jeste unija te familije. Tada je F dosledan, pa je dovoljno dokazati da F jeste podpolugrupa od S. Uzmimo $a, b \in F$, tj. $a \in F_i$, $b \in F_j$, $i, j \in I$. Prema (iv), važi uslov (ii) Leme 5.8, pa prema toj lemi dobijamo da je $N(ab) = N(a) \cup N(b)$. Dakle:

$$ab \in N(ab) = N(a) \cup N(b) \subseteq F_i \cup F_j \subseteq F.$$

Prema tome, F je podpolugrupa od S.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Uzmimo $a, b \in S$. Prema (v), $N(a) \cup N(b)$ je filter od S, tj. podpolugrupa od S, odakle je $ab \in N(a) \cup N(b)$, tj. $ab \in N(a)$ ili $ab \in N(b)$, pa prema Posledici 5.1. dobijamo (vi).

$(vi) \Rightarrow (vii)$. Neka A jeste potpuno poluprim ideal od S. Uzmimo $a, b \in S$ tako da je $ab \in A$. Tada je $\Sigma(ab) \subseteq A$, pa prema (vi) dobijamo da je $a \in \Sigma(ab) \subseteq A$ ili $b \in \Sigma(ab) \subseteq A$. Dakle, A je potpuno prim.

$(vii) \Rightarrow (viii)$. Sledi neposredno.

$(viii) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, b \in S$. Kako $\Sigma(ab)$ jeste potpuno prim, to je $a \in \Sigma(ab)$ ili $b \in \Sigma(ab)$, odakle je $\Sigma(a) \subseteq \Sigma(ab)$ ili $\Sigma(b) \subseteq \Sigma(ab)$, pa prema Teoremi 5.2. dobijamo da je

$$\Sigma(a) = \Sigma(ab) = \Sigma(a) \cap \Sigma(b) \quad \text{ili} \quad \Sigma(b) = \Sigma(ab) = \Sigma(a) \cap \Sigma(b).$$

Prema tome, Σ_S je lanac. $\square$

Zadaci.

1. Ako je $\mathfrak{C}$ klasa polugrupa, kongruencija ξ polugrupe S je *najmanja* $\mathfrak{C}$-*kongruencija* na S ako je ξ najmanji element skupa svih $\mathfrak{C}$-kongruencija na S. Razlaganje i faktor koji odgovaraju najmanjoj $\mathfrak{C}$-kongruenciji polugrupe S nazivamo *najveće* $\mathfrak{C}$-*razlaganje* i *najveća* $\mathfrak{C}$-*homomorfna slika* od S, tim redom.

Neka je $\mathcal{V}$ neki varijetet polugrupa. Dokazati da svaka polugrupa ima najmanju $\mathcal{V}$-kongruenciju, tj. najveće $\mathcal{V}$-razlaganje.

2. Neka A jeste neprazan podskup polugrupe S. Tada $\Sigma(A) = \cup_{a \in A} \Sigma(a)$ jeste najmanji potpuno poluprim ideal od S koji sadrži A.

3. Ako je a element polugrupe S, tada je $\Sigma(a) = \Sigma(J(a))$ i $\Sigma_n(a) = \Sigma_n(J(a))$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$.

4. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementi polugrupe S, $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada je $\Sigma(a_1 a_2 \cdots a_n) = \Sigma(a_{1\pi} a_{2\pi} \cdots a_{n\pi})$, za svaku permutaciju π skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

5. Neka C jeste σ-klasa elementa a polugrupe S. Tada je $C = \Sigma(a) \cap N(a)$.

6. Ako je A^+ slobodna polugrupa nad alfabetom A, onda je:

(i) $\Sigma(u) = \{w \in A^+ \mid c(u) \subseteq c(w)\},\ u \in A^+$;

(ii) $N(u) = \{w \in A^+ \mid c(u) \supseteq c(w)\},\ u \in A^+$;

(iii) $a\,\sigma\,v \ \Leftrightarrow\ c(u) = c(v), \quad u, v \in A^+$.

7. Pravougaona traka polumrežno nerazloživih polugrupa je polumrežno nerazloživa polugrupa.

8. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in S^1$, gde je S polugrupa. Sa $\mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ označimo podpolugrupu od S^1 koja se sastoji od proizvoda elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$ u kojima se se svaki od elemenata a_i javlja najmanje jedanput. Dokazati da je $\mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ polumrežno nerazloživa podpolugrupa od S^1.

9. Neka su a i b elementi polugrupe S. Tada je $a\,\sigma\,b$ ako i samo ako za sve $x, y \in S^1$ postoji polumrežno nerazloživa podpolugrupa T od S tako da $xay, xby \in T$.

10. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) za sve $a, b \in S$, iz $ab, ba \in E(S)$ sledi $ab = ba$;

(ii) svaka $\mathcal{J}$-klasa od S sadrži najviše jedan idempotent;

(iii) S je polumreža polumrežno nerazloživih polugrupa od kojih svaka ima najviše jedan idempotent i grupni ideal kad god sadrži idempotent;

(iv) S je polumreža polugrupa od kojih svaka sadrži najviše jedan idempotent.

11. Polugrupa S je *separativna* ako za sve $a, b \in S$, $a^2 = ab$ i $b^2 = ba$ povlači $a = b$, i $a^2 = ba$ i $b^2 = ab$ povlači $a = b$. Dokazati da je polugrupa S separativna ako i samo ako S jeste polumreža kancelativnih polugrupa.

12. Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:

(i) $\Sigma(0) = 0$;

(ii) S je bez nenula nilpotenata;

(iii) S jeste poddirektan proizvod polugrupa bez delitelja nule.

13. Neka je S regularna polugrupa. Tada je $\sigma = \mathcal{D}^{\#} = \mathcal{J}^{\#}$, i ako je β najmanja tračna kongruencija na S, tada je $\mathcal{H}^{\#} \subseteq \beta \subseteq \mathcal{L}^{\#} \cap \mathcal{R}^{\#}$. Ako je S inverzna polugrupa, tada je $\mathcal{H}^{\#} \subseteq \sigma = \mathcal{R}^{\#} = \mathcal{L}^{\#} = \mathcal{D}^{\#} = \mathcal{J}^{\#}$.

Literatura. Burmistrovič [1], Ćirić and Bogdanović [11], Iséki [2], Krull [1], Petrich [1], [16], [19], Putcha [1], [5], [6], Putcha and Weissglass [1], Schwarz [5], Šulka [1], Tamura [2], [3], [6], [10], [12], [16], [18], [19], [20], [21], Tamura and Kimura [1], [2], Thierrin [4], [5], [9], Yamada [1].

5.2. Polumreže σ_n-prostih polugrupa.

Za $n \in \mathbf{Z}^+$, na polugrupi S uvodimo *relaciju tipa* σ_n sa:

$$a\,\sigma_n\,b \;\Leftrightarrow\; \Sigma_n(a) = \Sigma_n(b), \qquad (a, b \in S).$$

Jasno da je σ_n relacija ekvivalencije na S i da je

$$\mathcal{J} \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \sigma_n \subseteq \cdots \subseteq \sigma.$$

Podsetimo se (vidi Tačku 1.2.) da polugrupa S jeste *σ_n-prosta* $(n \in \mathbf{Z}^+)$ ako σ_n jeste univerzalna relacija na S, tj. ako $a \longrightarrow^n b$ za sve $a, b \in S$. Sledećom teoremom opisujemo polumreže σ_n-prostih polugrupa.

Teorema 5.5. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada su za polugrupu S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *S je traka σ_n-prostih polugrupa;*
(ii) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa;*
(iii) *svaka σ_n-klasa od S je podpolugrupa;*
(iv) $(\forall a \in S)\ a\,\sigma_n\,a^2$;
(v) $(\forall a, b \in S)\ a \longrightarrow^n b \;\Rightarrow\; a^2 \longrightarrow^n b$;
(vi) $(\forall a, b, c \in S)\ a \longrightarrow^n c \wedge b \longrightarrow^n c \;\Rightarrow\; ab \longrightarrow^n c$;
(vii) *za svaki $a \in S$, $\Sigma_n(a)$ je ideal od S;*
(viii) $(\forall a, b \in S)\ \Sigma_n(ab) = \Sigma_n(a) \cap \Sigma_n(b)$;
(ix) *za svaki $a \in S$, $N(a) = \{x \in S \mid x \longrightarrow^n a\}$;*
(x) *$\longrightarrow^n$ je kvazi-uredjenje na S;*
(xi) $\sigma_n = \longrightarrow^n \cap (\longrightarrow^n)^{-1}$ *na S.*

Dokaz. $(iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Sledi na osnovu definicije relacije σ_n.

$(v) \Rightarrow (x)$. Neka $a, b \in S$ i $a \longrightarrow^{n+1} b$. Tada $a \longrightarrow x \longrightarrow^n b$ za neki $x \in S$. Prema (v) dobijamo da $x^k \longrightarrow^n b$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Sa druge strane, postoji $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da $x^k \in SaS$. Uzmimo $y \in S$ tako da $x^k \longrightarrow y \longrightarrow^{n-1} b$, za $n \geq 2$, odnosno $y = b$, za $n = 1$. Tada postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da $y^m \in Sx^kS \subseteq SaS$. Prema tome, $a \longrightarrow y$, odakle $a \longrightarrow^n b$. Dakle, $\longrightarrow^n = \longrightarrow^{n+1}$, pa $\longrightarrow^n$ jeste tranzitivna relacija.

$(x) \Rightarrow (vii)$. Ako je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija, tada je $\longrightarrow^n = \longrightarrow^\infty$, tj. $\Sigma_n(a) = \Sigma(a)$, za svaki $a \in S$, pa važi (vii).

$(vii) \Rightarrow (viii)$. Ako važi (vi), tada je $\Sigma_n(a) = \Sigma(a)$, za svaki $a \in S$, pa prema Teoremi 5.2. dobijamo $(viii)$.

$(viii) \Rightarrow (ii)$. Prema $(viii)$ dobijamo da σ_n jeste polumrežna kongruencija na S. Neka A jeste σ_n-klasa od S i neka $a, b \in S$. Tada iz $a\,\sigma_n\,b$ dobijamo da $a \longrightarrow^n b$ u S, pa prema Lemi 5.5. sledi da $a \longrightarrow^n b$ u A. Prema tome, A je σ_n-prosta polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Neka je S polumreža σ_n-prostih polugrupa i neka je ξ odgovarajuća polumrežna kongruencija na S. Uzmimo $a, b \in S$ tako da

$a \longrightarrow^n b$. Prema Lemi 5.5. dobijamo da $b\xi \leq a\xi$ u S/ξ, tj. $ab\,\xi\, b$, odakle imamo da $a^2b\,\xi\, b$. Ako sa A označimo ξ-klasu elementa b, tada A jeste σ_n-prosta polugrupa i $a^2b, b \in A$, pa $a^2b \longrightarrow^n b$ u A, odakle $a^2 \longrightarrow^n b$ u S.

$(viii) \Rightarrow (vi)$. Sledi neposredno.

$(vi) \Rightarrow (viii)$. Prema (v) sledi da $\Sigma_n(a) \cap \Sigma_n(b) \subseteq \Sigma_n(ab)$, za sve $a, b \in S$. Kako obrnuta inkluzija važi na svakoj polugrupi, to dobijamo $(viii)$.

$(x) \Rightarrow (ix)$. Ako $\longrightarrow^n$ jeste tranzitivna relacija, tada $\longrightarrow^n = \longrightarrow^\infty$, pa prema Posledici 5.1. dobijamo (ix).

$(ix) \Rightarrow (vi)$. Neka $a, b, c \in S$ tako da $a \longrightarrow^n c$ i $b \longrightarrow^n c$. Tada $a, b \in N(c)$, pa $ab \in N(c)$, jer $N(c)$ jeste podpolugrupa od S. Dakle, važi (vi).

$(viii) \Rightarrow (iii)$. Neka A jeste σ_n-klasa od S i neka $a, b \in A$. Tada $a\,\sigma_n\, b$, tj. $\Sigma_n(a) = \Sigma_n(b)$, pa prema (vii) dobijamo da je $\Sigma_n(ab) = \Sigma_n(a)\big(= \Sigma_n(b)\big)$. Prema tome, $ab\,\sigma_n\, a$, tj. $ab \in A$, pa A jeste podpolugrupa od S.

$(x) \Rightarrow (xi)$. Kako je $(x) \Leftrightarrow (v)$, to $\sigma_n = \sigma$ i $\longrightarrow^n = \longrightarrow^\infty$, odakle sledi (xi).

$(xi) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Lako se proverava da pravougaona traka σ_n-prostih polugrupa jeste σ_n-prosta polugrupa, pa tvrdjenje sledi prema Posledici 3.7.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Na osnovu Teoreme 5.5, za proizvoljnu konačnu polugrupu važi sledeća:

Posledica 5.6. *Neka je S konačna polugrupa. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \leq |S|$, tako da S jeste polumreža σ_n-prostih polugrupa.* $\square$

Razne karakterizacije lanaca σ_n-prostih polugrupa daje nam sledeća

Teorema 5.6. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada su za polugrupu S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *S je lanac σ_n-prostih polugrupa;*

(ii) *za svaki $a \in S$, $\Sigma_n(a)$ je potpuno poluprim ideal od S;*

(iii) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa i za svaki $a \in S$, $\Sigma_n(a)$ je potpuno prim podskup od S;*

(iv) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $ab \longrightarrow^n a$ ili $ab \longrightarrow^n b$;*

(v) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $a \longrightarrow^n b$ ili $b \longrightarrow^n a$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Iz (i), prema Teoremi 5.5, dobijamo da za $a \in S$, $\Sigma_n(a)$ je ideal od S, tj. $\Sigma_n(a) = \Sigma(a)$, pa prema Teoremi 5.4, $\Sigma_n(a)$ je potpuno prim ideal od S.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 5.5.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Uzmimo $a, b \in S$. Kako je $ab \in \Sigma_n(ab)$, to prema (iii) dobijamo da je $a \in \Sigma_n(ab)$ ili $b \in \Sigma_n(ab)$, odakle sledi (iv).

$(iv) \Rightarrow (v)$. Iz (iv), prema teoremi 5.5, dobijamo da je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija, pa iz činjenice da je $a \longrightarrow ab$ i $b \longrightarrow ab$ i iz (iv) dobijamo (v).

$(v) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Teoremama 5.5. i 5.4. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $\mathcal{T}_r(X)$ puna polugrupa transformacija nad konačnim skupom X.

(a) Ako je $|X| = 2$, tada $\mathcal{T}_r(X)$ jeste unija grupa, tj. polumreža potpuno prostih polugrupa;

(b) Ako je $|X| \geq 3$, tada $\mathcal{T}_r(X)$ jeste lanac σ_2-proste polugrupe i grupe.

2. Neka je $\mathcal{T}_r(X)$ puna polugrupa transformacija nad beskonačnim skupom X. Tada $\mathcal{T}_r(X)$ jeste σ_2-prosta polugrupa.

3. Dokazati da su sledeći uslovi za potpuno π-regularnu polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je σ-prosta;

(ii) $(\forall e, f \in E(S))\ e\,\sigma\,f$;

(iii) $(\forall e \in E(S))\ \Sigma(e) = S$.

Ako je $S = S^0$, tada su prethodni uslovi ekvivalentni sa

(iv) $\Sigma(0) = S$.

Dokazati da prethodno tvrdjenje važi i ako σ i Σ zamenimo sa σ_n i Σ_n, tim redom.

4. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža prostih polugrupa;

(ii) S je intra-regularna;

(iii) svaki ideal od S je potpuno poluprim;

(iv) svaki glavni ideal od S je potpuno poluprim;

(v) $J(a) \cap J(b) = J(ab)$, za sve $a, b \in S$.

Literatura. Anderson [1], Ćirić and Bogdanović [11], Clifford and Preston [1], Croisot [1], Putcha [5], Tamura [20].

5.3. Polumreže λ-prostih polugrupa.

Na polugrupi S uvodimo sledeće skupove:

$$\Lambda(a) = \{x \in S \mid a \xrightarrow{l}{}^{\infty} x\},\ \Lambda_n(a) = \{x \in S \mid a \xrightarrow{l}{}^{n} x\},\ (a \in S,\ n \in \mathbf{Z}^+).$$

Osnovne osobine ovih skupova su sledeće:

Lema 5.9. *Neka je* a *element polugrupe* S. *Tada za* $n \in \mathbf{Z}^+$,

$$\Lambda_1(a) = \sqrt{Sa},\ \Lambda_n(a) \subseteq \Lambda_{n+1}(a) = \sqrt{S\Lambda_n(a)},\ \Lambda(a) = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} \Lambda_n(a). \quad \square$$

Lema 5.10. *Neka je* a *element polugrupe* S. *Tada* $\Lambda(a)$ *jeste najmanji potpuno poluprim levi ideal od* S *koji sadrži* a.

Dokaz. Dokazuje se slično Lemi 5.2. $\square$

Ideal $\Lambda(a)$, $a \in S$, nazivamo *glavni levi radikal* polugrupe S generisan sa a.

U Posledici 5.4. smo dokazali da svaki potpuno poluprim ideal polugrupe S jeste presek potpuno poluprim ideala od S. Za potpuno poluprim leve ideale, tvrdjenje takvog tipa ne važi u opštem slučaju. Na primer, pravougaona traka $I \times \Lambda$, gde $|I|, |\Lambda| \geq 2$, sadrži potpuno poluprim levi ideal koji nije presek potpuno prim levih ideala od $I \times \Lambda$. Narednom teoremom ćemo opisati uslove pod kojima tvrdjenje napred navedenog tipa važi i za potpuno poluprim leve ideale.

Teorema 5.7. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(i) *svaki potpuno poluprim levi ideal od* S *je presek potpuno prim levih ideala od* S;

(ii) $(\forall a, b \in S)\ a \xrightarrow{l}{}^{\infty} c \wedge b \xrightarrow{l}{}^{\infty} c \ \Rightarrow\ ab \xrightarrow{l}{}^{\infty} c$;

(iii) *za svaki* $a \in S$, $\{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a\}$ *je najmanji desni filter od* S *koji sadrži* a.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (i). Neka $a, b \in S$ i neka L jeste potpuno prim ideal od S koji sadrži $\Lambda(ab)$. Tada $ab \in L$, odakle $a \in L$ ili $b \in L$. Kako L jeste potpuno poluprim, to je $\Lambda(a) \subseteq L$ ili $\Lambda(b) \subseteq L$, odakle je $\Lambda(a) \cap \Lambda(b) \subseteq L$. Sada prema (i) dobijamo da je $\Lambda(a) \cap \Lambda(b) \subseteq \Lambda(ab)$, odakle sledi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $F = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a\}$. Kako $y \xrightarrow{l} xy$, za sve $x, y \in S$, to dobijamo da F jeste desno dosledan podskup od S. Prema (ii), F je podpolugrupa od S. Dakle, F je desni filter od S koji sadrži a.

Neka je G desni filter od S koji sadrži a. Uzmimo $y \in S$ tako da $y \xrightarrow{l} a$. Tada je $a^n = uy$, za neke $u \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$, pa iz $uy = a^n \in G$ dobijamo da je $y \in G$. Na osnovu indukcije dobijamo da iz $x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a$ sledi da $x \in G$, odakle je $F \subseteq G$. Prema tome, F je najmanji desni filter od S koji sadrži a.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je A potpuno poluprim levi ideal od S. Neka je M presek svih potpuno prim levih ideala od S koji sadrže A. Uzmimo $a \in M - A$. Prema (iii) imamo da $F = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a\}$

jeste desni filter od S, pa $L = S - F$ jeste potpuno prim levi ideal od S. Uzmimo $x \in A$. Ako $x \in F$, tada $a \in \Lambda(a) \subseteq A$, što vodi kontradikciji. Prema tome, $x \in L$, pa $A \subseteq L$, odakle je $M \subseteq L$. Medjutim, sada je $a \in F$ i $a \in L = S - F$, što predstavlja kontradikciju. Dakle, $M = A$, pa važi (i). $\square$

Sledeća lema dokazuje se slično Lemi 5.5.

Lema 5.11. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$, neka je A klasa u nekom polumrežnom razlaganju polugrupe S i neka $a, b \in A$. Tada $a \xrightarrow{l}{}^{n} b$ u S ako i samo ako $a \xrightarrow{l}{}^{n} b$ u A.* $\square$

Na polugrupi S, definišimo *relaciju tipa* λ sa:

$$a \,\lambda\, b \ \Leftrightarrow\ \Lambda(a) = \Lambda(b) \qquad (a, b \in S).$$

Jasno da je λ relacija ekvivalencije i $\lambda = \xrightarrow{l}{}^{\infty} \cap \left(\xrightarrow{l}{}^{\infty} \right)^{-1}$. Polugrupa S je λ-*prosta* ako i samo ako je $a \xrightarrow{l}{}^{\infty} b$, za sve $a, b \in S$.

Sledećom teoremom opisujemo polumreže λ-prostih polugrupa.

Teorema 5.8. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža λ-prostih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)\ a \xrightarrow{l}{}^{\infty} ab$;

(iii) *za svaki $a \in S$, $\Lambda(a)$ je ideal od S;*

(iv) *svaki potpuno poluprim levi ideal od S je dvostrani ideal;*

(v) $(\forall a, b \in S)\ \Lambda(ab) = \Lambda(a) \cap \Lambda(b)$;

(vi) *za svaki $a \in S$, $N(a) = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a\}$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (i) i neka je ξ odgovarajuća polumrežna kongruencija. Uzmimo $a, b \in S$. Neka A jeste ξ-klasa elementa ab. Tada $ab, ba \in A$, pa kako A jeste λ-prosta polugrupa, to $ba \xrightarrow{l}{}^{\infty} ab$. Odavde i iz činjenice da $a \xrightarrow{l} ba$ dobijamo (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Uzmimo $a, b \in S$ i $x \in \Lambda(a)$. Prema (ii) dobijamo da $a \xrightarrow{l}{}^{\infty} x \xrightarrow{l}{}^{\infty} ab$, odakle $xb \in \Lambda(a)$. Odavde i iz Leme 5.10. dobijamo da $\Lambda(a)$ jeste ideal od S.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Sledi prema Teoremi 5.2, jer je $\Lambda(a) = \Sigma(a)$, za sve $a \in S$.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Neka važi (v), neka je $a \in S$ i neka je $A = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a\}$. Prema (v) i prema Teoremi 5.1. dobijamo da A jeste najmanji desni filter od S koji sadrži a, pa je $A \subseteq N(a)$. Uzmimo $x, y \in S$ tako da $xy \in A$, tj. $xy \xrightarrow{l}{}^{\infty} a$. kako prema (v) dobijamo da $x \xrightarrow{l}{}^{\infty} xy$, to $x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a$, tj. $x \in A$. Prema tome, A je levo dosledan, pa A jeste filter. Dakle, $A = N(a)$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Kako $ab \in N(ab)$ povlači da $a \in N(ab)$, to prema (vi) dobijamo (ii).

$(v) \Rightarrow (i)$. Prema (v) dobijamo da λ jeste polumrežna kongruencija na S, dok prema Lemi 5.11. dobijamo da svaka λ-klasa od S jeste λ-prosta polugrupa. $\square$

Za lance λ-prostih polugrupa dobijamo sledeće karakterizacije:

Teorema 5.9. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac λ-prostih polugrupa;*

(ii) *glavni levi radikali od S su potpuno prim ideali od S;*

(iii) *S je polumreža λ-prostih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $ab \overset{l}{\longrightarrow}{}^{\infty} a$ ili $ab \overset{l}{\longrightarrow}{}^{\infty} b$;*

(iv) *S je polumreža λ-prostih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $a \overset{l}{\longrightarrow}{}^{\infty} b$ ili $b \overset{l}{\longrightarrow}{}^{\infty} a$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ako važi (i), onda su, prema Teoremi 5.8, glavni levi radikali od S jednaki glavnim radikalima od S, odakle je $\lambda = \sigma$ i S je lanac σ-prostih polugrupa, pa prema Teoremi 5.4. dobijamo (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Iz (ii), prema Teoremi 5.8, S je polumreža λ-prostih polugrupa. Za $a, b \in S$, iz činjenice da je $ab \in \Lambda(ab)$ i $\Lambda(ab)$ je potpuno prim, sledi da je $a \in \Lambda(ab)$ ili $b \in \Lambda(ab)$, pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Iz (iii), prema Teoremi 5.8, $\Lambda(a) = \Sigma(a)$, za svaki $a \in S$, tj. $\overset{l}{\longrightarrow}{}^{\infty} = \longrightarrow^{\infty}$, pa prema Teoremi 5.4. dobijamo (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Osim relacije tipa λ, za $n \in \mathbf{Z}^+$, na polugrupi S definišemo i *relaciju tipa* λ_n sa:

$$a \,\lambda_n\, b \;\Leftrightarrow\; \Lambda_n(a) = \Lambda_n(b) \qquad (a, b \in S).$$

Prema Lemi 5.9. dobijamo da je

$$\mathcal{L} \subseteq \lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \cdots \subseteq \lambda_n \subseteq \cdots \subseteq \lambda.$$

Sledećom teoremom opisujemo polugrupe u kojima je $\lambda_n = \lambda$.

Teorema 5.10. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada su za polugrupu S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\overset{l}{\longrightarrow}{}^{n}$ je kvazi-uredjenje na S;*

(ii) *$(\forall a \in S)\ a \,\lambda_n\, a^2$;*

(iii) *$(\forall a, b \in S)\ a \overset{l}{\longrightarrow}{}^{n} b \;\Rightarrow\; a^2 \overset{l}{\longrightarrow}{}^{n} b$;*

(iv) *za svaki $a \in S$, $\Lambda_n(a)$ je levi ideal od S;*

(v) *$\lambda_n = \overset{l}{\longrightarrow}{}^{n} \cap (\overset{l}{\longrightarrow}{}^{n})^{-1}$ na S.*

Dokaz. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka $a \xrightarrow{l}^{n+1} b$, tj. $a \xrightarrow{l} x \xrightarrow{l}^{n} b$, za neki $x \in S$. Prema (iii) dobijamo da $x^k \xrightarrow{l}^{n} b$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$, pa kao u dokazu Teoreme 5.5. dobijamo da $a \xrightarrow{l}^{n} b$. Dakle, $\xrightarrow{l}^{n} = \xrightarrow{l}^{\infty}$, pa važi (i).

$(i) \Rightarrow (iv)$. Sledi prema Lemi 5.10, jer iz (i) sledi da je $\xrightarrow{l}^{n} = \xrightarrow{l}^{\infty}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iv). Tada prema Lemi 5.10. dobijamo da je $\Lambda_n(a) = \Lambda(a)$, za svaki $a \in S$, odakle sledi da je $\xrightarrow{l}^{n} = \xrightarrow{l}^{\infty}$, tj. važi (i).

$(v) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (v)$. Kako je $(i) \Leftrightarrow (iv)$, to je $\lambda_n = \lambda$ i $\xrightarrow{l}^{n} = \xrightarrow{l}^{\infty}$, odakle neposredno dobijamo (v). $\square$

Za $n \in \mathbf{Z}^+$, čitalac može sam proveriti da je $\lambda_n \subseteq \xrightarrow{l}^{n} \cap (\xrightarrow{l}^{n})^{-1}$. Polugrupa S je λ_n-*prosta* ako i samo ako je $a \xrightarrow{l}^{n} b$, za sve $a, b \in S$. Polumreže λ_n-prostih polugrupa opisuje sledeća teorema:

Teorema 5.11. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža λ_n-prostih polugrupa;*

(ii) *$a \, \lambda_n \, a^2$, za sve $a \in S$, i $a \xrightarrow{l}^{n} ab$, za sve $a, b \in S$;*

(iii) *za svaki $a \in S$, $\Lambda_n(a)$ je ideal od S;*

(iv) *$(\forall a, b \in S)\ \Lambda_n(ab) = \Lambda_n(a) \cap \Lambda_n(b)$;*

(vi) *za svaki $a \in S$, $N(a) = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}^{n} a\}$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (i) i neka je ξ odgovarajuća polumrežna kongruencija.

Uzmimo $a, b \in S$ tako da $a \xrightarrow{l}^{n} b$. Neka A jeste ξ-klasa elementa b. Prema Lemi 5.5. dobijamo da je $b\xi \leq a\xi$ u S/ξ, odakle je $ba^2 \, \xi \, b$, tj. $ba^2, b \in A$. Kako A jeste λ_n-prosta polugrupa, to $ba^2 \xrightarrow{l}^{n} b$, pa $a^2 \xrightarrow{l}^{n} b$. Dakle, prema Teoremi 5.10. dobijamo da je $a \, \lambda_n \, a^2$ za svaki $a \in S$.

Uzmimo $a, b \in S$. Neka A jeste ξ-klasa elementa ab. Tada $ba, ab \in A$, i kako A jeste λ_n-prosta, to $ba \xrightarrow{l}^{n} ab$, odakle $a \xrightarrow{l}^{n} ab$. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Prema (ii), Teoremi 5.10. i Lemi 5.10. dobijamo da je $\Lambda_n(a) = \Lambda(a)$, za svaki $a \in S$, pa prema Teoremi 5.8. dobijamo da važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Prema (iii) i Lemi 5.10. dobijamo da je $\Lambda_n(a) = \Lambda(a)$, za svaki $a \in S$, pa prema (iii) i Teoremi 5.8. dobijamo (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iv). Tada λ_n jeste polumrežna kongruencija na S. Prema Lemi 5.11. sledi da svaka λ_n-klasa od S jeste λ_n-prosta polugrupa.

$(iii) \Rightarrow (v)$. Prema (iii) i Lemi 5.10. sledi da je $\Lambda_n(a) = \Lambda(a)$, za svaki $a \in S$, pa je $\overset{l}{\longrightarrow}^n = \overset{l}{\longrightarrow}^\infty$. Odavde i iz Teoreme 5.8. dobijamo (v).

$(v) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (v). Tada za $a, b, x \in S$ dobijamo da

$$x \in \Lambda_n(a) \cap \Lambda_n(b) \;\Leftrightarrow\; a, b \in N(x) \;\Leftrightarrow\; ab \in N(x) \;\Leftrightarrow x \in \Lambda_n(ab).$$

Dakle, važi (iv). $\square$

Za lance λ_n-prostih polugrupa mogu biti date karakterizacije slične karakterizacijama lanaca λ-prostih polugrupa, datim u Teoremi 5.9.

Iz prethodnih razmatranja, videli smo da relacije tipa σ i σ_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, odnosno λ i λ_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, predstavljaju uopštenja Greenovih relacija tipa $\mathcal{J}$, odnosno tipa $\mathcal{L}$. Na kraju ovog poglavlja, uvešćemo i relacije koje uopštavaju i Greenove relacije tipova $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$.

Na polugrupi S, uvodimo sledeće skupove:

$$\mathrm{P}(a) = \{x \in S \mid a \overset{r}{\longrightarrow}^\infty x\}, \quad \mathrm{P}_n(a) = \{x \in S \mid a \overset{r}{\longrightarrow}^n x\}, \qquad (a \in S,\ n \in \mathbf{Z}^+).$$

Relaciju tipa ρ na S definišemo sa:

$$a \,\rho\, b \;\Leftrightarrow\; \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}(b), \qquad (a, b \in S),$$

a za $n \in \mathbf{Z}^+$, *relaciju tipa* ρ_n na S definišemo sa:

$$a \,\rho_n\, b \;\Leftrightarrow\; \mathrm{P}_n(a) = \mathrm{P}_n(b), \qquad (a, b \in S).$$

Relaciju tipa τ na S definišemo sa $\tau = \lambda \cap \rho$, a za $n \in \mathbf{Z}^+$, *relaciju tipa* τ_n na S definišemo sa $\tau_n = \lambda_n \cap \rho_n$.

Odnos relacija koje su razmatrane u ovoj glavi i Greenovih relacija dat je sledećom

Propozicija 5.1. *Na polugrupi* S *je:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathcal{H} & \subseteq & \tau_1 & \subseteq & \tau_2 & \subseteq & \cdots & \subseteq & \tau_n & \subseteq & \cdots & \subseteq & \tau \\
\cap\!| & & \cap\!| & & \cap\!| & & & & \cap\!| & & & & \cap\!| \\
\mathcal{L} & \subseteq & \lambda_1 & \subseteq & \lambda_2 & \subseteq & \cdots & \subseteq & \lambda_n & \subseteq & \cdots & \subseteq & \lambda \\
\cap\!| & & \cap\!| & & & & & & & & & & \cap\!| \\
\mathcal{J} & \subseteq & \sigma_1 & \subseteq & \sigma_2 & \subseteq & \cdots & \subseteq & \sigma_n & \subseteq & \cdots & \subseteq & \sigma \\
\cup\!| & & \cup\!| & & & & & & & & & & \cup\!| \\
\mathcal{R} & \subseteq & \rho_1 & \subseteq & \rho_2 & \subseteq & \cdots & \subseteq & \rho_n & \subseteq & \cdots & \subseteq & \rho
\end{array} \quad .$$

Dokaz. Inkluzije u drugoj i trećoj vrsti sheme slede na osnovu Leme 5.1, dok inkluzije u drugoj i četvrtoj vrsti slede prema Lemi 5.9. i njenom dualu.

Dalje, imamo da je $\lambda \overset{l}{\longrightarrow}^\infty \cap (\overset{l}{\longrightarrow}^\infty)^{-1} \subset \longrightarrow^\infty \cap (\longrightarrow^\infty)^{-1} = \sigma$, tj. $\lambda \subseteq \sigma$, i slično dokazujemo da je $\rho \subseteq \sigma$.

Uzmimo $(a, b) \in \lambda_1$. Tada je $\Lambda_1(a) = \Lambda_1(b)$. Neka je $x \in \Sigma_1(a)$, tj. $x^n = uav$, za neke $u, v \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada $vua \in \Lambda_1(a) = \Lambda_1(b)$, odakle je $(vua)^k = wb$, za neke $k \in \mathbf{Z}^+$, $w \in S$. Prema tome,

$$x^{n(k+1)} = (uav)^{k+1} = ua(vua)^k v = uawbv \in SbS,$$

pa $x \in \Sigma_1(b)$. Dakle, $\Sigma_1(a) \subseteq \Sigma_1(b)$. Na isti način dokazujemo i obratnu inkluziju, pa je $\Sigma_1(a) = \Sigma_1(b)$, tj. $(a,b) \in \sigma_1$. Dakle, $\lambda_1 \subseteq \sigma_1$.

Ostatak dokaza sledi neposredno. $\square$

Zadaci.

1. Na polugrupi S definišemo sledeće skupove:

$$Q(a) = \Lambda(a) \cap \mathrm{P}(a), \quad Q_n(a) = \Lambda_n(a) \cap \mathrm{P}_n(a), \qquad (a \in S,\ n \in \mathbf{Z}^+).$$

(A) Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža τ-prostih polugrupa;

(ii) $(\forall a,b \in S)\ a \xrightarrow{l}{}^{\infty} ab \wedge b \xrightarrow{r}{}^{\infty} ab$;

(iii) za svaki $a \in S$, $Q(a)$ je ideal od S;

$(iv$ $(\forall a,b \in S)\ Q(ab) = Q(a) \cap Q(b)$;

(v) $L \cap R$ je ideal od S, za svaki potpuno poluprim levi ideal L i svaki potpuno poluprim desni ideal R od S;

(vi) za svaki $a \in S$, $N(a) = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{\infty} a \wedge b \xrightarrow{r}{}^{\infty} a\}$.

(B) Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža τ_n-prostih polugrupa;

(ii) za svaki $a \in S$, $Q_n(a)$ je ideal od S;

$(iii$ $(\forall a,b \in S)\ Q_n(ab) = Q_n(a) \cap Q_n(b)$;

(iv) $a\,\tau_n\,a^2$, za svaki $a \in S$, i $a \xrightarrow{l}{}^{n} ab \wedge b \xrightarrow{r}{}^{\infty} ab$, za sve $a,b \in S$;

(vi) za svaki $a \in S$, $N(a) = \{x \in S \mid x \xrightarrow{l}{}^{n} a \wedge b \xrightarrow{r}{}^{n} a\}$.

2. Relacija $\tau^{\#}$ polugrupe S je najmanja tračna kongruencija na S.

Literatura. Ćirić and Bogdanović [11].

5.4. Polumreže Arhimedovih polugrupa.

Polumreže σ_n-prostih i λ_n-prostih polugrupa su razmatrane u Tačkama 5.2. i 5.3. Ovde ćemo dati još neke karakterizacije za polumreže σ_1-prostih i λ_1-prostih polugrupa, tj. za polumreže Arhimedovih polugrupa i polumreže levo Arhimedovih polugrupa.

Teorema 5.12. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a,b \in S)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ a^k \longrightarrow ab$;

(iii) $(\forall a,b \in S)\ a^2 \longrightarrow ab$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (i) i neka je ξ odgovarajuća polumrežna kongruencija na S. Uzmimo $a,b \in S$ i uzmimo da A jeste ξ-klasa elementa ab. Tada A jeste Arhimedova polugrupa i $ab, a^kb \in A$, za proizvoljni $k \in \mathbf{Z}^+$, pa $a^kb \longrightarrow ab$, odakle $a^k \longrightarrow ab$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i naka $a, b \in S$ tako da $a \longrightarrow b$, tj. $b^m = uav$, za neke $u, v \in S$, $m \in \mathbf{Z}^+$. Tada je $b^{m(n+1)} = u(avu)^nav$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa prema (iii) dobijamo da postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da

$$b^{m(n+1)} = u(avu)^nav \in uSa^2Sav \subseteq Sa^2S.$$

Prema tome, $a^2 \longrightarrow b$, pa prema Teoremi 5.5. dobijamo (i). $\square$

Posledica 5.6. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža nil-ekstenzija prostih polugrupa;*

(ii) *S je intra π-regularna i polumreža Arhimedovih polugrupa;*

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ a^k \mid (ab)^n$;

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^{4n} \mid (ab)^n$.

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 3.13. i Propoziciji 2.1.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (i) i neka je ξ odgovarajuća polumrežna kongruencija. Uzmimo $a, b \in S$ i uzmimo da A jeste ξ-klasa elementa ab. Tada A jeste nil-ekstenzija proste polugrupe K, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(ab)^n \in K$. Uzmimo $k \in \mathbf{Z}^+$. Kako $a^kb \in A$, to $(a^kb)^m \in K$, za neki $m \in \mathbf{Z}^+$. Prema tome,

$$(ab)^n \in K(a^kb)^mK \subseteq Sa^kS,$$

jer je K prosta polugrupa. Dakle, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Prema (iv) dobijamo da za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^{4n} \mid a^{2n}$, pa S jeste intra π-regularna. Prema Teoremi 5.9. dobijamo da S jeste polumreža Arhimedovih polugrupa. Dakle, važi (ii). $\square$

Podskup A polugrupe S je *poluprimaran* ako

$$(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ ab \in A \ \Rightarrow\ a^n \in A\ \vee\ b^n \in A.$$

Polugrupa S je *poluprimarna* ako svaki njen ideal jeste poluprimaran podskup od S. Sledećom teoremom dokazujemo da je klasa poluprimarnih polugrupa jednaka klasi lanaca Arhimedovih polugrupa:

Teorema 5.13. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)\ ab \longrightarrow a\ \vee\ ab \longrightarrow b$;

(iii) *S je poluprimarna;*

(iv) *Za svaki ideal A od S, $\sqrt{A}$ je potpuno prim ideal od S;*

(v) *Za svaki ideal A od S, $\sqrt{A}$ je potpuno prim podskup od S.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 5.6.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je A ideal od S i neka su $a, b \in S$. Prema (ii), $ab \longrightarrow a$ ili $ab \longrightarrow b$, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in SabS$ ili $b^n \in SabS$. Sada, ako je $ab \in A$, tada je $a^n \in SabS \subseteq SAS \subseteq A$ ili $b^n \in SabS \subseteq SAS \subseteq A$. Prema tome, S je poluprimarna polugrupa.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je S poluprimarna polugrupa i neka su $a, b \in S$. Kako $(ba)(ab) \in J((ba)(ab))$, to postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(ba)^n \in S(ba)(ab)S \quad \text{ili} \quad (ab)^n \in S(ba)(ab)S,$$

odakle je $(ab)^{n+1} \in Sa^2S$. Sada prema Teoremama 5.12. i 5.5. dobijamo da je $\sqrt{A}$ ideal od S, za svaki ideal A od A. Uzmimo proizvoljan ideal A od S, i uzmimo $a, b \in S$ tako da je $ab \in \sqrt{A}$. Prema (iii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in \sqrt{A}$ ili $b^n \in \sqrt{A}$, pa je $a \in \sqrt{A}$ ili $b \in \sqrt{A}$. Prema tome, $\sqrt{A}$ je potpuno prim ideal od S.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Sledi neposredno.

$(v) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, b \in S$. Prema (v), $\sqrt{SabS}$ je potpuno prim podskup od S, pa iz $a^2b^2 \in \sqrt{SabS}$ dobijamo da je $a^2 \in \sqrt{SabS}$ ili $b^2 \in \sqrt{SabS}$, odakle sledi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, b \in S$. Tada prema (ii), $(ba)(ab) \longrightarrow ba$ ili $(ba)(ab) \longrightarrow ab$, odakle lako dobijamo da $a^2 \longrightarrow ab$, pa prema Teoremi 5.12, S je polumreža Y Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Lako se dokazuje da Y jeste lanac. $\square$

Teorema 5.14. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) $(\forall a, b \in S)\ a \xrightarrow{l} b \ \Rightarrow\ a^2 \xrightarrow{l} b$;

(ii) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ b^k \xrightarrow{l} ab$;

(iii) $(\forall a, b \in S)\ b^2 \xrightarrow{l} ab$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, b \in S$ i $k \in \mathbf{Z}^+$. tada $b \xrightarrow{l} ab$, pa prema (i) lako dobijamo da $b^k \xrightarrow{l} ab$. Dakle, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, b \in S$ tako da $a \xrightarrow{l} b$, tj. $b^n = xa$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $x \in S$. Prema (iii), $a^2 \xrightarrow{l} xa$, tj. $(xa)^m = ya^2$, za neke $m \in \mathbf{Z}^+$, $y \in S$. Prema tome, $b^{mn} = ya^2$, pa $a^2 \xrightarrow{l} b$. Dakle, važi (i). $\square$

Teorema 5.15. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža levo Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ a^k \xrightarrow{l} ab$;

(iii) $(\forall a, b \in S)\ a \xrightarrow{l} ab$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Dokazuje se slično kao $(i) \Rightarrow (ii)$ u Teoremi 5.12.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, b \in S$. Prema (iii) postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da $(ba)^n = xb$. Sada imamo da je $(ab)^{n+1} = axb^2$, pa $b^2 \xrightarrow{l} ab$. Prema (iii), Teoremama 5.8. i 5.10, za $n = 1$, i Teoremi 5.12, dobijamo (i). □

Neposredno iz Teorema 5.9, 5.10. i 5.11. dobijamo:

Posledica 5.7. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac levo Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *za svaki levi ideal A od S, $\sqrt{A}$ je potpuno prim ideal od S;*

(iii) *S je polumreža levo Arhimedovih polugrupa i svaki levi ideal od S je poluprimaran;*

(iii) *S je polumreža levo Arhimedovih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $ab \xrightarrow{l} a$ ili $ab \xrightarrow{l} b$.* □

Slično Posledici 5.6, dokazuje se sledeća posledica:

Posledica 5.8. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža nil-ekstenzija levo prostih polugrupa;*

(ii) *S je levo π-regularna i polumreža levo Arhimedovih polugrupa;*

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ a^k \mid_l (ab)^n$*;*

(iv) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^{2n+1} \mid_l (ab)^n$*.*

Za polumreže i lance t-Arhimedovih polugrupa, lako se dobijaju sledeće karakterizacije:

Posledica 5.9. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža t-Arhimedovih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n \in bSa$*;*

(iii) *za svaki bi-ideal A od S, $\sqrt{A}$ je ideal od S.* □

Posledica 5.10. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac t-Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *S je polumreža t-Arhimedovih polugrupa i za sve $a, b \in S$, $ab \xrightarrow{t} b$ ili $ab \xrightarrow{t} a$;*

(iii) *za svaki bi-ideal A od S, $\sqrt{A}$ je potpuno prim ideal od S.* □

Teorema 5.16. *Za svaku podpolugrupu A od S, $\sqrt{A}$ je potpuno prim podskup od S ako i samo ako za sve $a, b \in S$ je $ab \overset{p}{—} a$ ili $ab \overset{p}{—} b$.*

Dokaz. Neka radikal svake podpolugrupe od S jeste potpuno prim. Tada iz $ab \in \langle ab\rangle \subseteq \sqrt{\langle ab\rangle}$ dobijamo da je $a \in \sqrt{\langle ab\rangle}$ ili $b \in \sqrt{\langle ab\rangle}$, tj. $ab \overset{p}{—} a$ ili $ab \overset{p}{—} b$.

Obratno, neka je $ab \overset{p}{—} a$ ili $ab \overset{p}{—} b$, za sve $a, b \in S$, i neka je A podpolugrupa od S. Neka je $ab \in \sqrt{A}$, $a, b \in S$, tj. $(ab)^k \in A$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$. Kako je $a^n = (ab)^m$ ili $b^n = (ab)^m$, za neke $n, m \in \mathbf{Z}^+$, to je $a^{nk} = (ab)^{mk} \in A$ ili $b^{nk} = (ab)^{mk} \in A$, tj. $a \in \sqrt{A}$ ili $b \in \sqrt{A}$. Dakle, $\sqrt{A}$ je potpuno prim podskup od A. □

Prema Teoremi 5.5. znamo da je polugrupa S traka Arhimedovih polugrupa ako i samo ako S jeste polumreža Arhimedovih polugrupa. Ako izraz "Arhimedova" zamenimo sa "levo (desno) Arhimedova", tvrdjenje tog tipa ne važi. To potvrdjuje svaka potpuno prosta polugrupa koja nije leva grupa (vidi Posledicu 3.8.). Sledećom teoremom opisujemo trake levo Arhimedovih polugrupa.

Teorema 5.17. *Polugrupa S je traka levo Arhimedovih polugrupa ako i samo ako*

$$xay \overset{l}{—} xa^2y, \tag{2}$$

za sve $a \in S$, $x, y \in S^1$.

Dokaz. Neka je S traka levo Arhimedovih polugrupa i neka je ξ odgovarajuća tračna kongruencija. Uzmimo $a \in S$, $x, y \in S^1$ i uzmimo da A jeste ξ-klasa elementa xay, Tada $xay, xa^2y \in A$, pa kako je A levo Arhimedova polugrupa, to dobijamo da je $xay \overset{l}{—} xa^2y$.

Obrnuto, neka važi (2). Uzmimo $a, b \in S$. Prema (2) dobijamo da $ab \overset{l}{—} ab^2$, pa $(ab)^n \in Sab^2 \subseteq Sb^2$. Prema tome, $b^2 \overset{l}{\longrightarrow} ab$, pa prema Teoremi 5.14. ($(i) \Leftrightarrow (iii)$) i Teoremi 5.10. ($(iii) \Leftrightarrow (v)$, za $n = 1$), dobijamo da je $\overset{l}{—} = \lambda_1$, pa $\overset{l}{—}$ jeste relacija ekvivalencije.

Definišimo relaciju ξ na S sa:

$$a \,\xi\, b \;\Leftrightarrow\; (\forall x, y \in S^1)\; xay \overset{l}{—} xby, \qquad (a, b \in S).$$

Prema Teoremi 1.2. i prema (2) dobijamo da ξ jeste tračna kongruencija na S. Neka A jeste ξ-klasa od S. Uzmimo $a, b \in A$. Tada $a^2 \,\xi\, b$, odakle je $b^n = xa^2$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $x \in S$. Sada imamo da je $xa \,\xi\, xa^2 = b^n \,\xi\, b$, pa $xa \in A$. Prema tome, $b^n = (xa)a \in Aa$, tj. $a \overset{l}{\longrightarrow} b$ u A, pa A jeste levo Arhimedova polugrupa. Dakle, S je traka levo Arhimedovih polugrupa. □

Posledica 5.11. *Polugrupa S je traka t-Arhimedovih polugrupa ako i samo ako*

$$xay \overset{t}{—} xa^2y,$$

za sve $a \in S$, $x, y \in S^1$.

Dokaz. Sledi prema Teoremi 5.17. i njenom dualu. □

Inače, lako se dokazuje da t-Arhimedove polugrupe jesu *tračno nerazložive*, tj. univerzalna relacija na t-Arhimedovoj polugrupi S je jedina tračna kongruencija na S.

Posledica 5.12. *Polugrupa S je levo polunormalna traka levo Arhimedovih polugrupa ako i samo ako za sve $a,b,c\in S$, $ac \xrightarrow{l} abc$.*

Dokaz. Neka je S levo polunormalna traka levo Arhimedovih polugrupa i neka je ξ odgovarajuća tračna kongruencija. Uzmimo $a,b,c\in S$. Kako je S/ξ levo polunormalna traka, to je $abc\,\xi\,abcac$. Uzmimo da je A ξ-klasa elemenata abc i $abcac$. Kako je A levo Arhimedova polugrupa, to je $(abc)^n\in Sabcac\subseteq Sac$, pa $ac\xrightarrow{l} abc$.

Obratno, neka je $ac\xrightarrow{l} abc$, za sve $a,b,c\in S$. Uzmimo $x,y,a\in S$. Tada je

$$\begin{aligned} xa^2y=(xa)(ay) &\xrightarrow{l} (xa)(yx)(ay)=(xay)^2,\\ xay &\xrightarrow{l} (xa)(ayxa^2)y=(xa^2y)^2, \end{aligned}$$

odakle $xa^2y\xrightarrow{l} xay$ i $xay\xrightarrow{l} xa^2y$, tj. $xay \overset{l}{—} xa^2y$. Dakle, prema Teoremi 5.18, S je traka B levo Arhimedovih polugrupa. Kako je B homomorfna slika od S, to je $ik\xrightarrow{l} ijk$ u B, za sve $i,j,k\in B$, tj. $ijk\in Bik$, odakle je $ijk=ijkik$. Prema tome, B je levo polunormalna traka. $\square$

Posledica 5.13. *Polugrupa S je normalna traka t-Arhimedovih polugrupa ako i samo ako za sve $a,b,c\in S$, $ac\xrightarrow{t} abc$.*

Dokaz. Sledi iz Posledice 5.12, Teoreme 1.25. i iz činjenice da t-Arhimedove polugrupe jesu tračno nerazložive. $\square$

Teorema 5.19. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je traka stepeno vezanih polugrupa;*

(*ii*) $(\forall a,b\in S)\ ab \overset{p}{—} a^2b \overset{p}{—} ab^2$;

(*iii*) $(\forall a,b\in S)(\forall m,n\in \mathbf{Z}^+)\ ab\overset{p}{—} a^mb^n$.

Dokaz. $(i)\Rightarrow(ii)$. Neka je S traka stepeno vezanih polugrupa i neka je ξ odgovarajuća tračna kongruencija. Uzmimo $a,b\in S$ i uzmimo da A jeste ξ-klasa elementa ab. Tada $ab,a^2b,ab^2\in A$, odakle dobijamo da važi (ii).

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Neka važi (ii). Uzmimo $a,b\in S$. Prema (ii) dobijamo da $ab\overset{p}{—} a^2b\overset{p}{—} a^2b^2$, tj $ab\overset{p}{—} a^2b^2$, jer je $\overset{p}{—}$ relacija ekvivalencije. Uzmimo da $ab\overset{p}{—} a^mb^n$, za $m,n\in\mathbf{Z}^+$, $m,n\geq 2$. Tada prema (ii) dobijamo da

$$\begin{aligned} ab &\overset{p}{—} a^mb^n=(a^mb^{n-1})b\overset{p}{—}(a^mb^{n-1})b^2=a^mb^{n+1}=a(a^{m-1}b^{n+1})\\ &\overset{p}{—} a^2(a^{m-1}b^{n+1})=a^{m+1}b^{n+1}, \end{aligned}$$

tj. $ab \overset{p}{\text{---}} a^{m+1}b^{n+1}$. Dakle, na osnovu indukcije dobijamo da važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Jasno da je $\overset{p}{\text{---}}$ relacija ekvivalencije. Neka $a \overset{p}{\text{---}} b$, $a, b \in S$, i uzmimo $x \in S$. Tada je $a^m = b^n$ za neke $m, n \in \mathbf{Z}^+$, pa prema (iii) dobijamo da je

$$ax \overset{p}{\text{---}} a^m x = b^n x \overset{p}{\text{---}} bx, \quad xa \overset{p}{\text{---}} xa^m = xb^n \overset{p}{\text{---}} xb.$$

Prema tome, $\overset{p}{\text{---}}$ je kongruencija na S. Jasno da je $a \overset{p}{\text{---}} a^2$, za svaki $a \in S$, pa $\overset{p}{\text{---}}$ jeste tračna kongruencija. Takodje je jasno da svaka $\overset{p}{\text{---}}$-klasa jeste stepeno vezana polugrupa. $\square$

Posledica 5.14. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža stepeno vezanih polugrupa;*

(ii) $(\forall a, b \in S)\ ab \overset{p}{\text{---}} a^2b \overset{p}{\text{---}} ab^2 \overset{p}{\text{---}} ba;$

(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall m, n \in \mathbf{Z}^+)\ ba \overset{p}{\text{---}} a^m b^n.$ $\square$

Zadaci.

1. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža Arhimedovih polugrupa;

(ii) $(\forall a, b \in S)\ b^2 \longrightarrow ab$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ b^k \longrightarrow ab$;

(iv) u svakoj homomorfnoj slici sa nulom od S, skup svih nilpotenata čini ideal.

2. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža nil-ekstenzija prostih polugrupa;

(ii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ b^{4n} \mid (ab)^n$;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)(\forall k \in \mathbf{Z}^+)\ b^k \mid (ab)^n$.

3. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) radikal svakog ideala od S je podpolugrupa;

(ii) u svakoj homomorfnoj slici sa nulom od S, skup svih nilpotenata čini podpolugrupu;

(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall k, l \in \mathbf{Z}^+)\ a^k \longrightarrow ab \vee b^l \longrightarrow ab$.

4. Polugrupa $A_2 = \langle a, e \mid a^2 = a^3 = a^2e = ea^2,\ e^2 = e,\ aea = a,\ eae = e \rangle$ je izomorfna Reesovoj matričnoj polugrupi $\mathcal{M}^0(G; I, I, P)$, gde je $|G| = 1$, $|I| = 2$ i $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nilpotenti polugrupe A_2 čine podpolugrupu koja nije ideal od A_2.

5. Polugrupa $B_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = a^3,\ aba = a,\ bab = b \rangle$ je izomorfna Brandtovoj polugrupi $\mathcal{M}^0(G; I, I, P)$, gde je $|G| = 1$ i $|I| = 2$. Nilpotenti polugrupe B_2 ne čine podpolugrupu od B_2.

6. Neka ϑ jeste relacija ekvivalencije na A_2^+, $A_2 = \{x, y\}$, odredjena razbijanjem

$$C_a = \{(xy)^n x \mid n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\ \}, \quad C_b = \{(yx)^n y \mid n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\ \},$$

$$C_{ab} = \{(xy)^n \mid n \in \mathbf{Z}^+\}, \quad C_{ba} = \{(yx)^n \mid n \in \mathbf{Z}^+\},$$
$$C_0 = A_2^+ - (C_a \cup C_b \cup C_{ab} \cup C_{ba}).$$

Tada ϑ jeste kongruencija na A_2^+ i faktor A_2^+/ϑ je izomorfan sa B_2.

7. Sledeći uslovi za istotipni identitet $u = v$ nad alfabetom A_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$, su ekvivalentni:

(i) $[u = v]$ je u klasi polumreža Arhimedovih polugrupa;
(ii) $B_2 \notin [u = v]$;
(iii) postoji homomorfizam $\phi : A_n^+ \to A_2^+$ takav da $(u\phi, v\phi) \notin \vartheta$;
(iv) postoji homomorfizam $\phi : A_n^+ \to A_2^+$ i permutacija π skupa $\{u, v\}$ tako da važi jedan od sledećih uslova:
  (a) $(u\pi)\phi \in C_{ab}$ i $(v\pi)\phi \notin C_{ab}$;
  (b) $(u\pi)\phi \in C_a$ i $(v\pi)\phi \notin C_a$;
(v) postoje $k \in \mathbf{Z}^+$ i $w \in C_0 \subset A_2^+$ tako da je $[u = v] \subseteq [(xy)^k = w]$.

8. Svaka polugrupa koja zadovoljava *permutacioni identitet*, tj. identitet oblika $x_1 x_2 \dots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \dots x_{n\pi}$, gde je π neidentička permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, i svaka polugrupa koja zadovoljava *kvazi-permutacioni identitet*, tj. identitet oblika

$$x_1 \dots x_{k-1} y x_{k+1} \dots x_n = x_{1\pi} \dots x_{(l-1)\pi} y^2 x_{l\pi} \dots x_{n\pi},$$

gde je π permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, su polumreže Arhimedovih polugrupa.

9. Neka je $\mathcal{V}$ neki varijetet polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\mathcal{V}$ je u klasi polumreža Arhimedovih polugrupa;
(ii) B_2 nije u $\mathcal{V}$;
(iii) svaka regularna polugrupa iz $\mathcal{V}$ je potpuno regularna;
(iv) svaka potpuno 0-prosta polugrupa iz $\mathcal{V}$ je bez delitelja nule;
(v) u svakoj polugrupi za nulom iz $\mathcal{V}$ skup svih nilpotenata je podpolugrupa;
(vi) u svakoj polugrupi za nulom iz $\mathcal{V}$ skup svih nilpotenata je ideal.

10. Za istotipan identitet $u = v$ nad alfabetom $A_2 = \{x, y\}$, $c(u) = c(v) = A_2$, $[u = v]$ je u klasi polumreža Arhimedovih polugrupa ako i samo ako je $u = v$ p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:

(a) $xy = w$, gde je $w \in A_2^+ - \{xy\}$;
(b) $(xy)^k = w$, gde je $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq 2$ i $w \in A_2^+ - \{(xy)^m \mid m \in \mathbf{Z}^+\}$;
(c) $(xy)^k x = w$, gde je $k \in \mathbf{Z}^+$ and $w \in A_2^+ - \{(xy)^m x \mid m \in \mathbf{Z}^+\}$;
(d) $xy^k = w$, gde je $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq 2$ i $w \in A_2^+ - \{xy^m \mid m \in \mathbf{Z}^+\}$;
(e) $x^k y = w$, gde je $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq 2$ i $w \in A_2^+ - \{x^m y \mid m \in \mathbf{Z}^+\}$.

11. Označimo sa R_2 dvoelementnu desno nultu traku. Tada su sledeći uslovi za istotipni identitet $u = v$ nad alfabetom $A_2 = \{x, y\}$, $c(u) = c(v) = A_2$, ekvivalentni:

(i) $[u = v]$ je u klasi polumreža levo Arhimedovih polugrupa;

(*ii*) B_2 i R_2 nisu u $[u=v]$;

(*iii*) $u=v$ zadovoljava uslove Zadatka 10. i $t(u)\neq t(v)$.

12. Radikal svakog levog ideala polugrupe S je podpolugrupa ako i samo ako $(\forall a,b\in S)(\forall k,l\in \mathbf{Z}^+)\ a^k \xrightarrow{l} ab \vee b^l \xrightarrow{l} ab$.

13. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(*i*) $(\forall a,b\in S)\ a^2b \xrightarrow{r} ab$;

(*ii*) $(\forall a,b,c\in S)\ a \xrightarrow{r} c \wedge b \xrightarrow{r} c \ \Rightarrow\ ab \xrightarrow{r} c$.

14. Polugrupa S je normalna traka t-Arhimedovih polugrupa ako i samo ako za sve $a,b,c\in S$ važi:

$$a \underset{r}{|}\, c \ \wedge\ b \underset{l}{|}\, c \ \Rightarrow\ ab \xrightarrow{t} c.$$

Literatura. Babcsányi [1], Babcsányi and Nagy [1], Bogdanović [1], [2], [4], [5], 6[], [10], [13], Bogdanović and Ćirić [6], [11], [13], Chrislock [3], Ćirić and Bogdanović [6], [11], [12], Clifford [4], Krapež [1], Lajos [4], [5], [6], [7], Машевицкий [1], Mukherjee [1], Nordahl [2], [3], Numakura [1], O'Carroll and Schein [1], Petrich [1], Ponděliček [1], [4], [5], Protić [3], [4], Putcha [1], [2], [4], [5], [8], [9], Putcha and Weissglass [1], [3], Raju and Hanumanthachari [1], [2], Schwarz [3], Spoletini Cherubini and Varisco [8], [9], [10], [11], Tamura [13], [14], [15], [20], [21], Tamura and Kimura [1], Yamada [6], [13].

GLAVA 6

Polumreže potpuno Arhimedovih polugrupa

Ova glava je prirodan nastavak prethodne. Ovde ćemo izložiti Teoriju polumrežnih razlaganja potpuno π-regularnih polugrupa na Arhimedove komponente, tj. biće reči o potpuno π-regularnim polugrupama u kojima je svaki regularan element grupni. Ovu klasu prvi je razmatrao L.N.Ševrin 1977. godine, a prvi dokaz srećemo u radu M.L.Veronesi iz 1984. godine. Polugrupe sa pomenutim svojstvom će biti opisane Teoremom 6.1. i to strukturno i indikatorno (eliminacijom nekih podpolugrupa odnosno faktora). Posebno su zanimljive polumreže pravovernih potpuno Arhimedovih polugrupa. Razne strukturne, sintaktičke i indikatorne karakterizacije ovih polugrupa su rezultati S.Bogdanovića i M.Ćirića dati Teoremom 6.3. U poslednjoj tački ove glave se izlaže materija o trakama i polumrežama nil-ekstenzija grupa.

6.1. Opšti slučaj.

Ovde ćemo razmatrati (potpuno) π-regularne polugrupe u kojima svaki regularan element jeste potpuno regularan. Videće se da je reč o polumrežama potpuno Arhimedovih polugrupa.

Neka je S π-regularna polugrupa. Za element $a \in S$, najmanji broj $p \in \mathbf{Z}^+$ za koji je $a^p \in Reg(S)$ nazivamo π-*indeks* elementa a. Jasno je da se kod periodičnog elementa, π-indeks poklapa sa indeksom tog elementa (vidi Tačku 1.4.). Definišimo sada relacije ekvivalencije $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$, $\mathcal{H}^*$ i $\mathcal{J}^*$ na S sa:

$$a\,\mathcal{L}^*\,b \;\Leftrightarrow\; Sa^p = Sb^q, \quad a\,\mathcal{R}^*\,b \;\Leftrightarrow\; a^pS = b^qS,$$
$$\mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*, \quad a\,\mathcal{J}^*\,b \;\Leftrightarrow\; Sa^pS = Sb^qS,$$

gde su p i q redom π-indeksi elemenata a i b. Za element $a \in S$, sa L^*_a, R^*_a, H^*_a i J^*_a označavamo redom $\mathcal{L}^*$-, $\mathcal{R}^*$-, $\mathcal{H}^*$- i $\mathcal{J}^*$-klasu elementa a.

Neposredno se dokazuju sledeće leme:

Lema 6.1. *Neka S jeste π-regularna polugrupa. Tada svaka $\mathcal{L}^*$-klasa i svaka $\mathcal{R}^*$-klasa sadrže bar jedan idempotent.* $\square$

Lema 6.2. *Neka* S *jeste* π*-regularna polugrupa. Tada svaki* $e \in E(S)$ *je desna (leva, dvostrana) jedinica za regularne elemente iz* L_e^* $(R_e^*,\ H_e^*)$. $\square$

Lema 6.3. *U* π*-regularnoj polugrupi* S *svaka* $\mathcal{H}^*$*-klasa sadrži najviše jedan idempotent.* $\square$

Lema 6.4. *Neka* S *jeste* π*-regularna polugrupa, neka je* $a \in S$ *i neka* n *jeste* π*-indeks od* a*. Tada je* $a^n \in L_a^* \cap R_a^* = H_a^*$. $\square$

Propozicija 6.1. *Neka su* a, b *elementi* π*-regularne polugrupe* S*. Tada je*

(a) $(a,b) \in \mathcal{L}^* \ \Leftrightarrow\ (\exists a' \in V(a^p))(\exists b' \in V(b^q))\ a'a^p = b'b^q$;

(b) $(a,b) \in \mathcal{R}^* \ \Leftrightarrow\ (\exists a' \in V(a^p))(\exists b' \in V(b^q))\ a^pa' = b^qb'$;

(c) $(a,b) \in \mathcal{H}^* \ \Leftrightarrow\ (\exists a' \in V(a^p))(\exists b' \in V(b^q))\ a'a^p = b'b^q,\ a^pa' = b^qb'$;

gde su p *i* q *redom* π*-indeksi od* a *i* b*.*

Dokaz. Dokazaćemo samo (c). Neka je $(a,b) \in \mathcal{H}^*$ i $a' \in V(a^p)$. Tada je

$$e = a'a^p \in L_a^* \cap E(S) = L_b^* \cap E(S), \quad f = a^pa' \in R_a^* \cap E(S) = R_b^* \cap E(S),$$

pa je

$$b^q = b^qe = fb^q, \quad f = b^qx, \quad e = yb^q,$$

za neke $x, y \in S$. Ako je $b' = exf$, onda je

$$b^qb'b^q = b^qexfb^q = b^qxb^q = fb^q = b^q, \quad b'b^qb' = exfb^qexf = exb^qxf = exf = b',$$

pa je $b' \in V(b^q)$. Sa druge strane,

$$b^qb' = b^qexf = b^qxf = f = a^pa',$$
$$b'b^q = exfb^q = yb^qxfb^q = yfb^q = yb^q = e = a'a^p.$$

Obratno, ako je $a^pa' = b^qb'$ i $a'a^p = b'b^q$, za neke $a' \in V(a^p)$, $b' \in V(b^q)$, tada je

$$a^p = a^pa'a^p = a^pb'b^q = b^qb'a^p, \quad b^q = b^qb'b^q = b^qa'a^p = a^pa'b^q,$$

pa je $Sa^p = Sb^q$, $a^pS = b^qS$, tj. $(a,b) \in \mathcal{H}^*$. $\square$

Propozicija 6.2. *Neka je* e *idempotent* π*-regularne polugrupe* S*. Tada je* $G_e \subseteq H_e^*$*. Dalje, ako je* $a \in H_e^*$ *i ako* n *jeste* π*-indeks od* a*, tada je* $a^k \in G_e$*, za svaki* $k \in \mathbf{Z}^+$*,* $k \geq n$*.*

Dokaz. Neka je $a \in G_e$ i neka je y inverz od a u grupi G_e. Tada je $y \in V(a)$ i $ya = e = ay$, pa prema Propoziciji 6.1. je $a \in H_e^*$. Prema tome, $G_e \subseteq H_e^*$.

Neka je $a \in H_e^*$ i neka n jeste π-indeks od a. Prema Propoziciji 6.1.(c), postoji $x \in V(a^n)$ tako da je $xa^n = e = a^nx$. Prema tome, a^n je potpuno regularan, pa je $a^n \in G_f$, za neki $f \in E(S)$. Lako se proverava da je $f = e$, tj. $a^n \in G_e$, pa prema Munnovoj lemi dobijamo da je $a^k \in G_e$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$, $k \geq n$. $\square$

Neka je S polugrupa. Za $e \in E(S)$, sa T_e označavamo skup $T_e = \sqrt{G_e} = \{x \in S \mid (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ x^n \in G_e\}$. Prema Munnovoj lemi i Teoremi 1.7., za $e, f \in E(S)$, $e \neq f$, je $T_e \cap T_f = \varnothing$. Relaciju $\mathfrak{T}$ na S definišemo sa:

$$a\,\mathfrak{T}\,b \quad \Leftrightarrow \quad ((\exists e \in E(S))\ a, b \in T_e) \ \vee \ a = b, \qquad (a, b \in S).$$

Jasno je da $\mathfrak{T}$ jeste relacija ekvivalencije na S. Na potpuno π-regularnoj polugrupi je $a\,\mathfrak{T}\,b \Leftrightarrow (\exists e \in E(S))\ a, b \in T_e$.

Dokazaćemo sada glavnu teoremu ove glave. Njome su na razne načine opisane polumreže potpuno Arhimedovih polugrupa. Podsetimo čitaoca da su polugrupe A_2 i B_2, koje se koriste u ovoj teoremi, definisane u Tački 5.4.

Teorema 6.1. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *S je polumreža Arhimedovih polugrupa i potpuno π-regularna;*

(iii) *S je π-regularna i $Reg(S) = Gr(S)$;*

(iv) *S je π-regularna i svaka $\mathcal{H}^*$ klasa sadrži idempotent;*

(v) *S je π-regularna i svaka $\mathcal{H}^*$ klasa je π-grupa;*

(vi) *S je potpuno π-regularna i $\mathfrak{T} = \mathcal{H}^*$;*

(vii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n \in (ab)^n Sa(ab)^n$;

(vii′) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n \in (ab)^n bS(ab)^n$;

(viii) *S je potpuno π-regularna i svaka regularna $\mathcal{D}$-klasa od S je podpolugrupa;*

(ix) *S je potpuno π-regularna i medju faktorima potpuno π-regularnih podpolugrupa od S nema polugrupa A_2 i B_2.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (vii)$. Neka je S polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo $a, b \in S$. Tada $ab, ba \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa prema Teoremi 3.14,

$$(ab)^n \in (ab)^n S(ba)(ab)^n \subseteq (ab)^n Sa(ab)^n,$$

za neki $n \in \mathbf{Z}^+$.

$(vii) \Rightarrow (ii)$. Iz (vii) neposredno dobijamo da S jeste potpuno π-regularna. Uzmimo $a, b \in S$. Prema (vii), $(ab)^n \in Sa^2S$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa prema Teoremi 5.9, S je polumreža Arhimedovih polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Propoziciji 2.1. i Teoremi 3.14.

$(i) \Rightarrow (v)$. Neka je S polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Prema Teoremi 3.14, S je potpuno π-regularna. Neka H^* jeste proizvoljna $\mathcal{H}^*$-klasa polugrupe S, i neka su $a, b \in H^*$. Prema Propoziciji 6.1, postoje $x \in V(a^p)$, $y \in V(b^q)$, tako da je

$$xa^p = yb^q, \quad a^p x = b^q y,$$

gde su p i q redom π-indeksi od a i b. Uzmimo da je $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Iz $x \in V(a^p)$, $y \in V(b^q)$, dobijamo da je $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, pa iz $a^p = a^p y b^q$, $b^q = a^p x b^q$, dobijamo da je $\alpha = \beta$. Prema tome, $a, b, ab \in S_\alpha$, pa prema Teoremi 3.14, $a^p, b^q \in Gr(S_\alpha)$, dok iz $(a, b) \in \mathcal{H}^*$, koristeći Propoziciju 6.2, dobijamo da $a^p, b^q \in G_e$, za neki $e \in E(S_\alpha)$. Ako r jeste π-indeks elementa ab, onda je $(ab)^r \in G_f$, za neki $f \in E(S_\alpha)$. Prema Munnovoj lemi, $ea = ae$ i $eb = be$, odakle je $e(ab)^r = (ab)^r e$. Sada prema Teoremi 3.14. i Lemi 3.13. imamo da je $e(ab)^r = (ab)^r e = e(ab)^r e \in G_e$, odakle je $(ab)^r e(ab)^r \in G_e$. Sa druge strane, ponovo prema Lemi 3.13, $(ab)^r e(ab)^r = f(ab)^r e(ab)^r f \in G_f$, pa je $e = f$, prema Teoremi 1.7. Prema tome, $(ab)^r \in G_e$, pa prema Propoziciji 6.2, $ab \in H^*$. Dakle, H^* je podpolugrupa od S sa tačno jednim idempotentom e, pa kako H^* jeste π-regularna polugrupa, to H^* jeste π-grupa.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Iz (v) neposredno sledi da S jeste potpuno π-regularna.

Uzmimo $(a, b) \in \mathcal{H}^*$. Tada $H_a^* = H_b^*$ jeste π-grupa, uzmimo sa idempotentom e, pa $a, b \in T_e$, tj $(a, b) \in \mathfrak{T}$.

Obratno, neka je $(a, b) \in \mathfrak{T}$. Tada $a^p, b^q \in G_e$, za neke $p, q \in \mathbf{Z}^+$, $e \in E(S)$, i prema Propoziciji 6.2, $G_e \subseteq H_e^*$. Kako $\mathcal{H}^*$-klase jesu podpolugrupe od S, to $a, b \in H_e^*$, tj. $(a, b) \in \mathcal{H}^*$.

Dakle, $\mathfrak{T} = \mathcal{H}^*$.

$(vi) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Uzmimo $a \in Reg(S)$. Prema (iv), $a \in H_e^*$, za neki $e \in E(S)$, pa prema Propziciji 6.2, $a \in G_e$, tj. $a \in Gr(S)$. Prema tome, $Reg(S) = Gr(S)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Iz (iii) neposredno sledi da S jeste potpuno π-regularna. Uzmimo $a, b \in S$. Tada je $(ab)^n \in G_e$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $e \in E(S)$, pa prema Munnovoj lemi je $eab \in G_e$. Neka x jeste inverz od eab u grupi G_e. Tada je $e = eabx = eabxe$, odakle je $ea = eabxea$. Prema tome, $ea \in Reg(S) = Gr(S)$, tj. $ea = (ea)^2 y = (eae)(ay)$, za neki $y \in S$. Sada imamo da je $eae = eabxeae = (eae)(ay)(bx)(eae)$, pa $eae \in Reg(S) = Gr(S)$, tj. $eae \in G_f$, za neki $f \in E(S)$. Odavde lako dobijamo da je $ef = fe = f$. Sa druge strane, $e = eabxe = (eae)(ay)(bx) = f(eae)(ay)(bx)$, odakle je $fe = e$. Dakle, $f = e$, tj. $eae, eab \in G_e$, odakle je

$$ea^2 be = (ea)(abe) = (ea)e(ab) = (eae)(eab) \in G_e.$$

Prema tome, $(ab)^n, ea^2 be \in G_e$, odakle je

$$(ab)^n \in G_e ea^2 be \subseteq Sa^2 S,$$

pa prema Teoremi 5.9, S je polumreža Arhimedovih polugrupa.

$(i) \Rightarrow (ix)$. Neka S jeste polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo potpuno π-regularnu podpolugrupu T od S. Tada je

T polumreža Z polugrupa T_α, $\alpha \in Y$, gde je $Z = \{\alpha \in Y \mid T \cap S_\alpha \neq \varnothing\}$ i $T_\alpha = T \cap S_\alpha$, $\alpha \in Z$. Jasno da je T_α, $\alpha \in Z$, potpuno π-regularna polugrupa i da su svi idempotenti iz T_α, $\alpha \in Z$, primitivni. Prema Teoremi 3.14, polugrupe T_α, $\alpha \in Y$ su potpuno Arhimedove. Znači, T jeste polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Kako je $(i) \Leftrightarrow (vii)$, to svaki faktor od T jeste polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Dakle, medju faktorima od T nema polugrupa A_2 ili B_2.

$(ix) \Rightarrow (viii)$. Uzmimo da postoji regularna $\mathcal{D}$-klasa D_a, $a \in S$, koja nije podpolugrupa od S. Prema Propoziciji 1.5, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, pa je $D_a = J_a$. Ideal $J(a)$ polugrupe S je potpuno π-regularna polugrupa, pa je takav i glavni faktor $K = J(a)/I(a)$. Iz Teoreme 1.21, K je potpuno 0-prosta polugrupa, tj. $K = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$, gde je P regularna matrica. Kako J_a nije podpolugrupa od S, to K ima delitelje nule, tj. postoje $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ tako da je $p_{\lambda i} = 0$. Sa druge strane, zbog regularnosti matrice P postoje $j \in I$ i $\mu \in \Lambda$ tako da je $p_{\mu i} \neq 0$ i $p_{\lambda j} \neq 0$. Neka je $I_0 = \{i, j\}$, $\Lambda_0 = \{\lambda, \mu\}$, i neka P_0 jeste $I_0 \times \Lambda_0$ podmatrica od P. Uočimo podpolugrupu $M = \mathcal{M}^0(G; I_0, \Lambda_0, P_0)$ od K. Tada $T = M^\bullet \cup I(a)$ jeste potpuno π-regularna podpolugrupa od S, jer su takve i M i $I(a)$. Osim toga, M je faktor od T, i kako je M potpuno 0-prosta, to je $\mathcal{H}$ kongruencija na M i $M/\mathcal{H} \cong A_2$, za $p_{\mu j} \neq 0$, odnosno $M/\mathcal{H} \cong B_2$, ako je $p_{\mu j} = 0$. Prema tome, jedna od polugrupa A_2 ili B_2 je faktor od T, što je u suprotnosti sa (ix). Prema tome, važi $(viii)$.

$(viii) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, b \in S$. Prema Teoremi 2.2. i Munnovoj lemi, $(ab)^n, (ba)^n \in Gr(S)$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $(ab)^n \in (ab)^{n+1}S \subseteq (ab)^n aS$, $(ba)^n \in S(ba)^{n+1} \subseteq Sa(ba)^n$, pa $(ab)^n \,\mathcal{R}\, (ab)^n a = a(ba)^n \,\mathcal{L}\, (ba)^n$. Prema tome, $(ab)^n \,\mathcal{D}\, (ba)^n$, pa kako svaka regularna $\mathcal{D}$-klasa od S jeste podpolugrupa, to je $(ab)^n \,\mathcal{D}\, (ba)^n(ab)^n$. Sa druge strane, iz $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ dobijamo da je $(ab)^n \,\mathcal{J}\, (ba)^n(ab)^n$. Odavde, $(ab)^n \in S(ba)^n(ab)^nS \subseteq Sa^2S$. Sada prema Teoremi 5.9. sledi da S jeste polumreža Arhimedovih polugrupa. $\square$

Teorema 6.2. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac potpuno Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *S je potpuno π-regularna i za sve $e, f \in E(S)$ je $e \in efSfe$ ili $f \in feSef$;*

(iii) *S je potpuno π-regularna i za sve $e, f \in E(S)$ je $e \in efS$ ili $f \in Sef$;*

(iv) *S je potpuno π-regularna i $Reg(S)$ je lanac potpuno prostih polugrupa.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S lanac Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Jasno da je S potpuno π-regularna. Uzmimo

$e, f \in E(S)$, i uzmimo da je $e \in S_\alpha$, $f \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Kako je Y lanac, to je $\alpha\beta = \alpha$ ili $\alpha\beta = \beta$. Ako je $\alpha\beta = \alpha$, tada $e, ef, fe \in S_\alpha$, pa prema Teoremi 3.14. i Lemi 3.13. imamo da je $efe = e(ef)e \in eS_\alpha e = G_e$. Prema tome, $e, efe \in G_e$, pa je

$$e \in efeG_eefe \subseteq efSfe.$$

Slično dokazujemo da iz $\alpha\beta = \beta$ sledi da je $f \in feSef$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, b \in S$. Tada $(ab)^m, (ba)^n \in Reg(S)$, za neke $m, n \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo $x \in V((ab)^m)$, $y \in V((ba)^n)$. Tada $(y(ba)^n, (ab)^m x \in E(S)$, pa prema (iii) dobijamo da je

$$y(ba)^n \in y(ba)^n(ab)^m xS \quad \text{ili} \quad (ab)^m x \in Sy(ba)^n(ab)^m x,$$

pa je

$$(ba)^n \in (ba)^n(ab)^m xS \quad \text{ili} \quad (ab)^m \in Sy(ba)^n(ab)^m.$$

Prema tome, $(ab)^{n+1} \in Sa^2S$ ili $(ab)^m \in Sa^2S$, pa prema Teoremama 5.12. i 6.1. dobijamo da S jeste polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $e \in E(S_\alpha)$, $f \in E(S_\beta)$. Tada je $e \in efS$ ili $f \in Sef$. Ako je $e \in efS$, tj. $e = efu$, za neki $u \in S$, i ako uzmemo da je $u \in S_\gamma$, za neki $\gamma \in Y$, tada dobijamo da je $\alpha = \alpha\beta\gamma$, odakle je $\alpha\beta = \beta$. Slično dokazujemo da iz $f \in Sef$ sledi da je $\alpha\beta = \beta$. Prema tome, Y je lanac.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Neka je $T = Reg(S)$. Uzmimo $a, b \in T$, $x \in V(a)$, $y \in V(b)$. Tada $xa, by \in E(S)$, pa prema (ii) sledi da je $xa \in xabySbyxa$ ili $by \in byxaSxaby$. Ako je $xa \in xabySbyxa$, tada je:

$$ab = axabyb \in axabySbyxabyb = abySyxab \subseteq abSab,$$

pa je $ab \in T$. Slično dokazujemo da i iz $by \in byxaSxaby$ sledi da je $ab \in T$. Prema tome, $T = Reg(S)$ je podpolugrupa od S. Kako je $Gr(S) = Gr(T) \subseteq T$, to iz činjenice da je S potpuno π-regularna dobijamo da T jeste takodje potpuno π-regularna.

Uzmimo $a \in T$, $x \in V(a)$. Tada iz $ax, xa \in E(S)$, prema (ii), dobijamo da je $ax \in ax^2aSxa^2x$ ili $xa \in xa^2xSax^2a$, odakle je $a = axa \in Sa^2S$. Sada prema Teoremi 2.4. dobijamo da T jeste polumreža Y prostih polugrupa T_α, $\alpha \in Y$, pa prema Propoziciji 2.1. i Teoremi 2.3, T_α, $\alpha \in Y$, jesu potpuno proste polugrupe. Na isti način kao u dokazu za $(iii) \Rightarrow (i)$ dokazujemo da Y jeste lanac.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Sledi na osnovu činjenice da je $E(S) = E(Reg(S))$ i činjenice da je $(i) \Leftrightarrow (ii)$. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $u = v$ istotipan identitet nad alfabetom A_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$. Tada svaka π-regularna polugrupa iz $[u = v]$ je polumreža potpuno

Arhimedovih polugrupa ako i samo ako svaka polugrupa iz $[u = v]$ je polumreža Arhimedovih polugrupa.
2. Ako polugrupa S jeste polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa, onda je $\mathcal{J}^*$ kongruencija na S i $\mathcal{J}^*$-klase su potpuno Arhimedove polugrupe.
3. Neka je S polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Tada kongruencija ξ na S razdvaja idempotente ako i samo ako je $\xi \subseteq \mathcal{H}^*$.
4. Neka S jeste π-regularna polugrupa. Tada svaka $\mathcal{J}^*$ klasa sadrži najmanje jedan idempotent.

Literatura. Bogdanović [13], [18], Bogdanović and Ćirić [11], [12], Ćirić and Bogdanović [5], [6], [12], Galbiati e Veronesi [1], [2], [3], [4], [5], Madison, Mukherjee and Sen [1], [2], Putcha [1], [4], [9], Сапир и Суханов [1], Шеврин [5], [6], [7] ,[9], Шеврин и Волков [1], Шеврин и Суханов [1], Veronesi [1].

6.2. Polumreže nil-ekstenzija pravougaonih grupa.

U prethodnoj tački smo razmatrali razlaganja (potpuno) π-regularnih polugrupa u polumrežu potpuno Arhimedovih polugrupa, tj. polumrežu nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa (Teorema 3.14.). U ovoj tački ćemo razmatrati jedan poseban slučaj takvih razlaganja, tj. polumrežna razlaganja kod kojih svaka od komponenti jeste *pravoverna* (*ortodoksna*) *polugrupa*, odnosno kod kojih skup idempotenata svake od komponenti jeste podpolugrupa te komponente.

Počnimo sledećim opštim rezultatom:

Propozicija 6.3. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(*i*) *$E(S)$ je podpolugrupa od S;*
(*ii*) *Ako su $a, b \in S$ i $x \in V(a)$, $y \in V(b)$, onda je $yx \in V(ab)$;*
(*iii*) *Za sve $a, b, x, y \in S$, $a = axa$ i $b = byb$ povlači $ab = abyxab$.*
Ako je S regularna polugrupa, tada svaki od prethodna tri uslova je ekvivalentan sa sledećim:
(*iv*) *Svaki inverz svakog idempotenta iz S je idempotent.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $a, b \in S$, $x \in V(a)$, $y \in V(b)$. Tada iz $xa, by \in E(S)$ i iz (i) dobijamo da $xaby, byxa \in E(S)$, odakle je:

$$abyxab = axabyxabyb = a(xaby)^2b = axabyb = ab,$$
$$yxabyx = ybyxabyxax = y(byxa)^2x = ybyxax = yx.$$

Prema tome, $yx \in V(ab)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $a = axa$, $b = byb$, $a, b, x, y \in S$. Tada $xax \in V(a)$, $yby \in V(b)$, pa prema (ii), $ybyxax \in V(ab)$. Prema tome,

$$ab = ab(yby)(xax)ab = abyxab.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka je $e \in E(S)$ i neka je $x \in V(e)$. Tada $xe, ex \in E(S)$, pa prema (i) dobijamo:

$$x = xex = (xe)(ex) = [(xe)(ex)]^2 = (xex)^2 = x^2.$$

Uzmimo sada da S jeste regularna polugrupa.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $e, f \in E(S)$. Kako je S regularna, to postoji $x \in V(ef)$, odakle je:

$$(ef)(fxe)(ef) = efxef = ef, \quad (fxe)(ef)(fxe) = f(xefx)e = fxe,$$

pa $ef \in V(fxe)$. Sa druge strane, $fxe = f(xefx)e = (fxe)^2$, tj. $fxe \in E(S)$, pa prema (iv) dobijamo da je $ef \in E(S)$. $\square$

Sledećom lemom opisujemo neke potpuno proste polugrupe koje nisu pravoverne, tj. koje nisu pravougaone grupe.

Lema 6.5. *Neka je R prsten $\mathbb{Z}$ celih brojeva ili prsten $\mathbb{Z}_p$ ostataka celih brojeva po modulu p, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$, i neka je $I = \{0, 1\} \subseteq R$. Skup $R \times I \times I$ sa množenjem definisanim sa:*

$$(m; i, \lambda)(n; j, \mu) = (m + n - (i - j)(\lambda - \mu); i, \mu), \qquad m, n \in R, \ i, j, \lambda, \mu \in I.$$

je polugrupa, u oznaci $E(\infty) = \mathbb{Z} \times I \times I$, $E(p) = \mathbb{Z}_p \times I \times I$. Štaviše, $E(\infty)$ i $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$, su potpuno proste polugrupe i nisu pravougaone grupe.

Dokaz. Neposredno se proverava da $E(\infty)$ i $E(p)$ jesu polugrupe. Takodje, jasno da je $E(\infty)$ $((E(p))$ pravougaona traka $I \times I$ grupa $E_{i,\lambda} = \{(m; i, \lambda) \mid m \in R\}$, $i, \lambda \in I$, gde je $R = \mathbb{Z}$ $(R = \mathbb{Z}_p)$, pa prema Posledici 3.8, $E(\infty)$ i $E(p)$ jesu potpuno proste polugrupe. Pri tome, skup idempotenata iz $E(\infty)$ $(E(p))$ jednak je $\{(0; i, \lambda) \mid i, \lambda \in I\}$, i lako se proverava da taj skup nije podpolugrupa od $E(\infty)$ $(E(p))$. Dakle, prema Teoremi 3.6, $E(\infty)$ i $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$, nisu pravougaone grupe. $\square$

Neka je S potpuno π-regularna polugrupa, i neka je $x \in S$. Prema Teoremama 2.2. i 1.7, postoji jedinstven $e_x \in E(S)$ takav da postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $x^n \in G_{e_x}$, i prema Munnovoj lemi je $xe_x \in G_{e_x}$. Odavde, na potpuno π-regularnoj polugrupi S možemo definisati dve unarne operacije $x \mapsto \overline{x}$ i $x \mapsto x^0$ sa:

$$\overline{x} = (xe_x)^{-1}, \qquad x^0 = x\,\overline{x},$$

gde je $(xe_x)^{-1}$ inverz od xe_x u grupi G_{e_x}. Kako je $(xe_x)^{-1} \in G_{e_x}$, to

$$x^0 = x\,\overline{x} = x(xe_x)^{-1} = xe_x(xe_x)^{-1} = e_x.$$

Podsećamo čitaoca da je $\overline{x}$ ustvari pseudoinverz elementa x o kome je bilo reči u Tački 2.2.

Sledeća teorema je glavni rezultat ove tačke.

Teorema 6.3. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je polumreža nil-ekstenzija pravougaonih grupa;*

(*ii*) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (ef)^{n+1}$;*

(*iii*) *S je potpuno π-regularna i $(xy)^0 = (xy)^0(yx)^0(xy)^0$;*

(*iv*) *S je π-regularna i $a = axa$ povlači $a = ax^2a^2$;*

(*v*) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i inverz svakog idempotenta iz S je idempotent;*

(*vi*) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i medju podpolugrupama od S nema polugrupa $E(\infty)$ i $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$;*

(*vii*) *S je potpuno π-regularna i medju faktorima potpuno π-regularnih podpolugrupa od S nema polugrupa A_2, B_2 i $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α. Uzmimo $e, f \in E(S)$. Tada $ef, fe \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(ef)^n, (fe)^n \in K_\alpha$. Dalje, imamo da $(ef)^n \in G_g$, $(fe)^n \in G_h$, za neke $g, h \in E(K_\alpha)$, pa je $(ef)^n x = g$, $(fe)^n y = h$, za neke $x \in G_g$, $y \in G_h$, i iz Munnove leme sledi da je $(ef)^{n+1} \in G_g$. Kako je K_α pravougaona grupa, to je $ghg = g$. Sada imamo da je

$$\begin{aligned}(fe)^n &= (ef)^n g = (ef)^n (ef)^n x = (ef)^n e (ef)^n x = (efe)^n g \\ &= e(fe)^n g = e(fe)^n hg = e(fe)^n (fe)^n yg = e(fe)^n f (fe)^n yg \\ &= (ef)^{n+1} hg = (ef)^{n+1} ghg = (ef)^{n+1} g = (ef)^{n+1}.\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je S polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i neka za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (ef)^{n+1}$. Za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Uzmimo $\alpha \in Y$, $e, f \in K_\alpha$. Prema pretpostavci, $(ef)^n = (ef)^{n+1}$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa je $(ef)^n = (ef)^{n+1} \in E(S)$. Sa druge strane $ef \in K_\alpha$, pa je $ef \in G_g$, za neki $g \in E(K_\alpha)$. Kako je $\langle ef \rangle \subseteq G_g$, to je $(ef)^n = (ef)^{n+1} = g$, odakle je $ef = efg = ef(ef)^n = (ef)^{n+1} = g \in E(S)$. Prema tome, $E(K_\alpha)$ je podpolugrupa od K_α, pa prema Teoremi 3.6, K_α je pravougaona grupa. Dakle, važi (i).

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je S polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija pravougaone grupe. Prema Teoremi 6.1, S je potpuno π-regularna. Uzmimo $x, y \in S$. Tada $xy, yx \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle $(xy)^0, (yx)^0 \in E(S_\alpha)$, pa prema Posledici 3.10, $(xy)^0 = (xy)^0(yx)^0(xy)^0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Iz (iii) neposredno sledi da S jeste π-regularna. Neka je $a = axa$, $a, x \in S$. Tada $ax, xa \in E(S)$, odakle je $(ax)^0 = ax$, $(xa)^0 = xa$, pa prema (iii) dobijamo da je $a = (ax)a = (ax)(xa)(ax)a = ax^2a^2xa = ax^2a^2$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Neka važi (iv). Uzmimo $a \in Reg(S)$, $x \in V(a)$. Tada prema (iv) dobijamo da je $a = ax^2a^2 \in Sa^2$, i $x = xa^2x^2$, odakle je $a = axa = axa^2x^2a = a^2x^2a \in a^2S$. Dakle $a \in Gr(S)$. Prema tome, $Reg(S) = Gr(S)$, pa prema Teoremi 6.1, S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Uzmimo $e \in E(S)$, $y \in V(e)$. Tada prema (iv) imamo da je $y = ye^2y^2 = yey^2 = y^2$. Prema tome, važi (v).

$(v) \Rightarrow (vi)$. Neka važi (v). Ako S sadrži podpolugrupu izomorfnu polugrupi $E(\infty)$ ili $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$, tada postoji idempotent iz S i njegov inverz koji nije idempotent. Zaista, element $(1;0,0)$ je inverz idempotenta $(0;1,1)$ u $E(\infty)$, odnosno $E(p)$, pri čemu $(1;0,0)$ nije idempotent.

$(vi) \Rightarrow (i)$. Neka važi (vi). Da bi smo dokazli (i), dovoljno je dokazati da svaka potpuno prosta podpolugrupa od S jeste pravougaona grupa. Neka je K potpuno prosta podpolugrupa od S. Uzmimo da K nije pravougaona grupa. Prema Teoremi 3.6, postoje $e, f \in E(S)$ tako da $ef \notin E(S)$. Dakle, ef je grupni element reda $p \geq 2$ ili beskonačnog reda polugrupe K, i lako se proverava da su ef, efe, fef i fe medjusobno različiti elementi istog reda (konačnog ili beskonačnog). Takodje, lako se proverava da su ef, efe, fef i fe u različitim $\mathcal{H}$-klasama od K i da je u K:

$$ef \,\mathcal{L}\, fef, \; ef \,\mathcal{R}\, efe, \; fe \,\mathcal{L}\, efe, \; fe \,\mathcal{R}\, fef. \tag{1}$$

Prema Teoremi 3.8, K je pravougaona traka $I \times \Lambda$ grupa $H_{i\lambda}$, $i \in I, \lambda \in \Lambda$, koje su $\mathcal{H}$-klase od K. Radi lakšeg označavanja, uzmimo da je $ef \in H_{00}$, $fe \in H_{11}$, $0, 1 \in I$, $0, 1 \in \Lambda$. Prema (1), $efe \in H_{01}$, $fef \in H_{10}$. Sa G_{00}, G_{01}, G_{10} i G_{11} označimo redom monogene podgrupe od H_{00}, H_{01}, H_{10} i H_{11} generisane elementima ef, efe, fef i fe, i neka je $T = G_{00} \cup G_{01} \cup G_{10} \cup G_{11}$. Sada razlikujemo dva slučaja:

(A) Elementi ef, efe, fef i fe su beskonačnog reda, tj. grupe G_{00}, G_{01}, G_{10} i G_{11} su izomorfne aditivnoj grupi celih brojeva. Tada se lako proverava da je T podpolugrupa od K izomorfna sa $E(\infty)$, pri čemu je jedan izomorfizam φ iz $E(\infty)$ na T dat sa: za $n \in \mathbb{Z}$,

$$(n;0,0)\varphi = (ef)^n, \; (n;0,1)\varphi = (efe)^n, \; (n;1,0)\varphi = (fef)^n, \; (n;1,1)\varphi = (fe)^n.$$

(B) Elementi ef, efe, fef i fe su konačnog reda $p \geq 2$, tj. grupe G_{00}, G_{01}, G_{10} i G_{11} su izomorfne aditivnoj grupi ostataka celih brojeva po modulu p. Tada se lako proverava da je T podpolugrupa od K izomorfna sa $E(p)$, pri čemu je jedan izomorfizam φ iz $E(p)$ na T dat sa: za

$n \in \mathbb{Z}_p$,

$$(n;0,0)\varphi = (ef)^n,\ (n;0,1)\varphi = (efe)^n,\ (n;1,0)\varphi = (fef)^n,\ (n;1,1)\varphi = (fe)^n.$$

Dakle, u oba slučaja dobijamo tvrdjenja koja protivreče polaznoj pretpostavci (vi). Prema tome, K mora biti pravougaona grupa.

$(vii) \Leftrightarrow (vi)$. Sledi na osnovu Teoreme 6.1. i iz činjenice da je $E(p)$ faktor od $E(\infty)$, za svaki $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$. $\square$

Lema 6.6. *Polugrupa S je lanac pravougaonih traka ako i samo ako za sve $x, y \in S$ je $x = xyx$ ili $y = yxy$.*

Dokaz. Neka je S lanac Y pravougaonih traka S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo $x, y \in S$. Tada $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, i kako je Y lanac, to je $\alpha\beta = \alpha$ ili $\alpha\beta = \beta$. Ako je $\alpha\beta = \alpha$, tada $x, xy \in S_\alpha$, pa kako je S_α pravougaona traka, to je $xyx = x(xy)x = x$. Slično dobijamo da iz $\alpha\beta = \beta$ sledi da je $yxy = y$.

Obratno, neka je $x = xyx$ ili $y = yxy$, za sve $x, y \in S$. Tada za $x \in S$ imamo da je $x = x^3$, i $x = xx^2x$ ili $x^2 = x^2xx^2$, tj. $x = x^4$ ili $x^2 = x^5$. Prema tome, $x = x^3$ i $x^2 = x^5$, odakle je $x = x^2$. Dakle, S je traka, pa prema Posledici 3.6, S je polumreža Y pravougaonih traka S_α, $\alpha \in Y$. Lako se dokazuje da Y jeste lanac. $\square$

Lanci nil-ekstenzija pravougaonih grupa biće opisani sledećom teoremom.

Teorema 6.4. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac nil-ekstenzija pravougaonih grupa;*

(ii) *S je potpuno π-regularna i $Reg(S)$ je lanac pravougaonih grupa;*

(iii) *S je potpuno π-regularna i $E(S)$ je lanac pravougaonih traka.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je S lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α. Prema Teoremi 6.1, S je potpuno π-regularna. Uzmimo $e, f \in E(S)$. tada $e \in K_\alpha$, $f \in K_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Kako je Y lanac, to je $\alpha\beta = \alpha$ ili $\alpha\beta = \beta$. Ako je $\alpha\beta = \alpha$, tada $ef = e(ef) \in K_\alpha S_\alpha \subseteq K_\alpha$, dok prema Teoremi 6.3. imamo da je $(ef)^n = (ef)^{n+1}$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $ef \in E(S_\alpha) = E(K_\alpha)$, pa prema Lemi 3.8. sledi da je $e = e(ef)e = efe$. Slično dobijamo da iz $\alpha\beta = \beta$ sledi da je $ef \in E(S_\beta)$ i $f = fef$. Prema tome, $E(S)$ je podpolugrupa od S, i prema Lemi 6.6, $E(S)$ je lanac pravougaonih traka.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Dokazuje se slično kao $(i) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ i $(iii) \Rightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 6.2. $\square$

Polugrupa S je *singularna traka* ako S jeste ili levo nulta traka ili desno nulta traka. Polugrupa S je *Rédeieva traka* ako za sve $x, y \in S$ je $xy = x$ ili $xy = y$. Pravougaone Rédeieve trake opisuje sledeća lema:

Lema 6.7. *Polugrupa S je pravougaona Rédeieva traka ako i samo ako S jeste singularna traka.*

Dokaz. Neka je $S = I \times \Lambda$ pravougaona traka. Uzmimo da je $|I| \geq 2$ i $|\Lambda| \geq 2$, tj. da postoje $i, j \in I$, $i \neq j$, i $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$. Tada je $(i, \lambda)(j, \mu) = (i, \mu)$, pa je $(i, \lambda)(j, \mu) \neq (i, \lambda$ i $(i, \lambda)(j, \mu) \neq (j, \mu)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da S jeste Rédeieva traka. Prema tome, $|I| = 1$ ili $|\Lambda| = 1$, pa S jeste singularna traka.

Obrat sledi neposredno. □

Sada ćemo razmotriti polumreže polugrupa čija je proizvcoljna komponenta ili nil-ekstenzija ili nil-ekstenzija desne grupe ("mešano svojstvo").

Teorema 6.5. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je polumreža nil-ekstenzija levih i desnih grupa;*

(*ii*) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n \in (ab)^n S(ba)^n \cup (ba)^n S(ab)^n$*;*

(*iii*) *S je π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^n \in Sa \cup bS$;*

(*iv*) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (efe)^n$ ili $(ef)^n = (fef)^n$;*

(*v*) *S je potpuno π-regularna i $(xy)^0 = (xy)^0(yx)^0$ ili $(xy)^0 = (yx)^0(xy)^0$;*

(*vi*) *S je π-regularna i $a = axa$ povlači $ax = ax^2a$ ili $ax = xa^2x$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa. Uzmimo $a, b \in S$. Tada $ab, ba \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(ab)^n, (ba)^n \in K_\alpha$, pa prema Teoremi 3.7. i njenom dualu dobijamo da je

$$(ab)^n \in (ab)^n K_\alpha (ba)^n \subseteq (ab)^n S(ba)^n,$$

ako K_α jeste leva grupa, odnosno

$$(ab)^n \in (ba)^n K_\alpha (ab)^n \subseteq (ba)^n S(ab)^n,$$

ako K_α jeste desna grupa. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (iii). Uzmimo $a \in Reg(S)$, $x \in V(a)$. Tada prema (iii) dobijamo da je $ax \in Sa \cup xS$ i $xa \in Sx \cup aS$. Ako je $ax = ua$, za neki $u \in S$, tada je $a = axa = ua^2 \in Sa^2$. Ako je $ax = xv$, za neki $v \in S$, tada je $a = axa = xva$, odakle je $a^2 = axva$ i $a = xva = xaxva = xa^2 \in Sa^2$. Prema tome, iz $ax \in Sa \cup xS$ sledi da je $a \in Sa^2$. Na isti način dokazujemo da iz $xa \in Sa \cup xS$ sledi da je $a \in a^2S$. Prema tome, $a \in Gr(S)$, tj. $Reg(S) = Gr(S)$, pa prema Teoremi 6.1, S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa.

Za $e,f\in E(S)$, prema (iii), postoji $n\in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n\in Se\cup fS$. Ako je $(ef)^n=ue$, za neki $u\in S$, tada je $(ef)^n=ue=uee=(ef)^ne=(efe)^n$. Slično dokazujemo da iz $(ef)^n\in fS$ sledi da je $(ef)^n=(fef)^n$.

$(iv)\Rightarrow(i)$. Iz (iv) neposredno dobijamo da za sve $e,f\in E(S)$ postoji $n\in\mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n=(ef)^{n+1}$, pa prema Teoremi 6.3. dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha\in Y$, i za $\alpha\in Y$, S_α je nil-ekstenzija pravougaone grupe. Uzmimo $\alpha\in Y$, $e,f\in E(S_\alpha)$. Iz (iv), prema Posledici 3.10, sledi da je $ef=efe=e$ ili $ef=fef=f$, odakle $E(S_\alpha)$ jeste pravougaona Rédeieva traka, pa prema Lemi 6.7, $E(S_\alpha)$ je singularna traka. Dakle, prema Teoremi 3.15, S_α je nil-ekstenzija leve ili desne grupe.

$(i)\Rightarrow(v)$. Dokazuje se slično kao $(i)\Rightarrow(iii)$ Teoreme 6.3.

$(v)\Rightarrow(vi)$. Dokazuje se slično kao $(iii)\Rightarrow(iv)$ Teoreme 6.3.

$(vi)\Rightarrow(i)$. Iz (vi) dobijamo da iz $a=axa$ sledi da je $ax=ax^2a$ ili $ax=xa^2x$, odakle je $a=(ax)a=ax^2a^2$ ili $a=ax(ax)a=ax(xa^2x)a=ax^2a^2xa=ax^2a^2$. Dakle, u oba slučaja je $a=ax^2a^2$, pa prema Teoremi 6.3, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha\in Y$, i za $\alpha\in Y$, S_α je nil-ekstenzija pravougaone grupe. Uzmimo $\alpha\in Y$, $e,f\in E(S_\alpha)$. Prema Posledici 3.10, $E(S_\alpha)$ je pravougaona traka, pa je $e=efe$, pa prema (v) dobijamo da je $ef=ef^2e=efe=e$ ili $ef=fe^2f=fef=f$. Dakle, $E(S_\alpha)$ je pravougaona Rédeieva traka, pa prema Lemi 6.7, $E(S_\alpha)$ je singularna traka. Dakle, prema Teoremi 3.15, S_α je nil-ekstenzija leve ili desne grupe. $\square$

Korišćenjem Teoreme 6.5, sledeća posledica se dokazuje slično Teoremi 6.4.

Posledica 6.1. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je lanac nil-ekstenzija levih i desnih grupa;*

(ii) *S je potpuno π-regularna i $Reg(S)$ je lanac levih i desnih grupa;*

(iii) *S je potpuno π-regularna i $E(S)$ je lanac singularnih traka;*

(iv) $(\forall a,b\in S)(\exists n\in\mathbf{Z}^+)\ a^n\in a^{2n}S(ab)^n\cup(ba)^nSa^{2n}\ \vee\ b^n\in b^{2n}S(ba)^n\cup(ab)^nSb^{2n}$. $\square$

Slično Teoremi 6.5, dokazuje se sledeća teorema:

Teorema 6.6. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža nil-ekstenzija levih grupa;*

(ii) $(\forall a,b\in S)(\exists n\in\mathbf{Z}^+)\ (ab)^n\in(ab)^nS(ba)^n$;

(iii) *S je π-regularna i polumreža levo Arhimedovih polugrupa;*

(iv) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i za sve $e,f\in E(S)$ postoji $n\in\mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n=(efe)^n$;*

(v) *S je potpuno π-regularna i $(xy)^0=(xy)^0(yx)^0$;*

(*vi*) S *je* π*-regularna i* $a = axa$ *povlači* $ax = ax^2a$. $\square$

Posledica 6.2. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*
(*i*) S *je lanac nil-ekstenzija levih grupa;*
(*ii*) S *je potpuno* π*-regularna i* $Reg(S)$ *je lanac levih grupa;*
(*iii*) S *je potpuno* π*-regularna i* $E(S)$ *je lanac levo nultih traka;*
(*iv*) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n \in a^{2n}S(ab)^n \cup (ba)^nSa^{2n}$. $\square$

Zadaci.

1. Polugrupa $E(\infty)$ ($E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$) je izomorfna Reesovoj matričnoj polugrupi tipa $I \times I$ nad aditivnom grupom prstena $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_p$) sa sendvič matricom $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(*i*) S je polumreža nil-ekstenzija pravougaonih traka;
(*ii*) S je π-regularna i $E(S) = Reg(S)$;
(*iii*) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^{2n+1} = (ab)^nba^2(ab)^n$.

3. Traka S je *levo* (*desno*) *regularna* ako je $ax = axa$ ($xa = axa$), za sve $a, x \in S$. Dokazati da polugrupa S jeste levo (desno) regularna traka ako i samo ako S jeste polumreža levo nultih (desno nultih) traka.

4. Svaka potpuno prosta polugrupa koja zadovoljava identitet $u(x, y) = v(x, y)$ je pravougaona grupa ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:
(*a*) $h(u) \neq h(v)$ ili $t(u) \neq t(v)$;
(*b*) $u = v$ is p-ekvivalentan nekom identitetu oblika

$$x^{m_1}y^{n_1}x^{m_2}y^{n_2}\cdots x^{m_h}y^{n_h} = x^{k_1}y^{l_1}x^{k_2}y^{l_2}\cdots x^{k_s}y^{l_s}$$

$m_i,\ n_i,\ k_j,\ l_j \in \mathbf{Z}^+$, sa g.c.d.$(p_x, p_y, h - s) = 1$, gde jee $p_x = \Sigma_{i=1}^{h} m_i - \Sigma_{j=1}^{s} k_j$ i $p_y = \Sigma_{i=1}^{h} n_i - \Sigma_{j=1}^{s} l_j$.
(*c*) $u = v$ je p-ekvivalentan nekom identitetu oblika

$$x^{m_1}y^{n_1}x^{m_2}y^{n_2}\cdots x^{m_h}y^{n_h}x^{m_{h+1}} = x^{k_1}y^{l_1}x^{k_2}y^{l_2}\cdots x^{k_s}y^{l_s}x^{k_{s+1}}$$

$m_i,\ n_i,\ k_j,\ l_j \in \mathbf{Z}^+$, sa g.c.d.$(p_x, p_y, h - s) = 1$, gde je $p_x = \Sigma_{i=1}^{h+1} m_i - \Sigma_{j=1}^{s+1} k_j$ i $p_y = \Sigma_{i=1}^{h} n_i - \Sigma_{j=1}^{s} l_j$.

7. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:
(*i*) S je polumreža nil-ekstenzija levih grupa;
(*ii*) $(\forall x \in S)(\forall e \in E(S))\ x \mid e \ \Rightarrow\ ex = exe$;
(*iii*) S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i svaka $\mathcal{R}^*$-klasa sadrži tačno jedan idempotent;
(*iv*) S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ da je $(ef)^n\,\mathcal{L}\,(fe)^n$;
(*v*) S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i $a = axa = aya$ povlači $ax = ay$.

8. Potpuno prosta polugrupa S nije pravougaona grupa ako i samo ako S sadrži neku od polugrupa $E(\infty)$ ili $E(p)$, $p \in \mathbf{Z}^+$, $p \geq 2$, kao podpolugrupu.

Literatura. Bogdanović [13], [18], Bogdanović and Ćirić [2], [3], [4], [11], [12], [16], Ćirić and Bogdanović [1], [6], [12], Евсеев [1], Jones [1], [2], Putcha [1], [9], Шеврин [9], Tang [1].

6.3. Trake π-grupa.

U ovoj tački razmatraćemo tračna razlaganja čije su komponente π-grupe, tj. nil-ekstenzije grupa.

Dokažimo najpre sledeću teoremu.

Teorema 6.7. *Neka S jeste π-regularna polugrupa i neka za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je*

(2) $$(ab)^n \in a^2Sb^2.$$

Tada S jeste polumreža retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa.

Dokaz. Uzmimo $a \in Reg(S)$, $x \in V(a)$. Prema (1), $(ax)^n \in a^2Sx^2$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $a = axa = (ax)^n a \in a^2Sx^2a \subseteq a^2S$. Slično dokazujemo da je $a \in Sa^2$. Prema tome, $a \in Gr(S)$, tj. $Reg(S) = Gr(S)$, pa prema Teoremi 6.1, S je polumreža Y potpuno Arhimedovih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Za $\alpha \in Y$, neka S_α jeste nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α.

Uzmimo $\alpha \in Y$, $e, f \in S_\alpha$, $a \in T_e$. Dokazaćemo da je

(3) $$af = eaf \quad \text{i} \quad fa = fae.$$

Prvo ćemo dokazati da za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$ postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $u \in S$ tako da je

(4) $$(af)^n = a^m uf.$$

Jasno je da to važi za $m = 1$. Uzmimo da je $(af)^n = a^m uf$, za neke $m, n \in \mathbf{Z}^+$, $u \in S$. Tada prema (2) dobijamo da postoje $k \in \mathbf{Z}^+$, $v \in S$, tako da je $(a^m uf)^k = a^{2m}v(uf)^2$, odakle je

$$(af)^{nk} = ((af)^n)^k = (a^m uf)^k = (a^{2m}v(uf)^2 = a^{m+1}wf,$$

gde je $w = a^{m-1}vufu$. Sada indukcijom dobijamo da za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$ postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $u \in S$ tako da važi (4).

Neka je $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^m \in G_e$, i neka su $n \in \mathbf{Z}^+$, $u \in S$ takvi da važi (4). Kako je $af \in K_\alpha = Gr(S_\alpha)$, to je $af = (af)^2 y$, za neki $y \in S$, odakle je

$$af = (af)^n y = a^m ufy = ea^m ufy = eaf.$$

Ovim je dokazan prvi deo tvrdjenja (3). Slično dokazujemo i drugi deo tog tvrdjenja.

Definišimo sada preslikavanje $\varphi : S_\alpha \to K_\alpha$ sa:

$$a\varphi = ae, \qquad \text{ako } a \in T_e,\ e \in E(S_\alpha).$$

Uzmimo $a \in T_e$, $b \in T_f$, $e, f \in E(S_\alpha)$, i uzmimo da je $ab \in T_g$, za neki $g \in E(S_\alpha)$. Tada prema (3) i prema Munnovoj lemi dobijamo da je

$$(ab)\varphi = abg = afbg = eafbg = eabg = eab = aeb = aebf = (a\varphi)(b\varphi).$$

Prema tome, φ je homomorfizam. Kako je $a\varphi = a$, to φ jeste retrakcija, pa S_α jeste retraktivna nil-ekstenzija od K_α. □

Iz Teoreme 6.7. dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 6.3. *Neka S jeste π-regularna polugrupa i neka za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^n \in a^2Sa$. Tada S jeste polumreža retraktivnih nil-ekstenzija levih grupa.*

Dokaz. Uzmimo $a, b \in S$. Tada postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^m \in a^2Sa$ i $(ba)^n \in b^2Sb$, odakle je $(ab)^{n+1} \in ab^2Sb^2$, pa je

$$(ab)^{m+n+1} \in a^2Saab^2Sb^2 \subseteq a^2Sb^2.$$

Dakle, prema Teoremi 6.7, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Slično kao u Teoremi 6.5. dokazujemo da K_α jesu leve grupe. □

Sledećom teoremom se opisuje odnos izmedju ralaganja u traku π-grupa i retrakcije polugrupe na svoj regularni deo.

Teorema 6.8. *Neka je S traka π-grupa i neka je $Reg(S)$ podpolugrupa od S. Tada $Reg(S)$ jeste traka grupa i retrakt od S.*

Obratno, ako S ima retrakt K koji je traka grupa i ako je $\sqrt{K} = S$, tada S jeste traka π-grupa.

Dokaz. Neka je S traka B π-grupa S_i, $i \in B$, i neka je $Reg(S)$ podpolugrupa od S. Za $i \in B$, neka je S_i nil-ekstenzija grupe G_i sa jedinicom e_i. Tada je $Reg(S) = Gr(S) = \cup\{G_i \mid i \in B\}$, pa je jasno da $Reg(S)$ jeste traka B grupa G_i, $i \in B$. Uzmimo $i, j \in B$. Iz $e_ie_{ij} = (e_ie_{ij})e_{ij} \in S_{ij}G_{ij} = G_{ij}$ i $e_{ij}e_j = e_{ij}(e_{ij}e_j) \in G_{ij}s_{ij} = G_{ij}$ dobijamo

$$(e_ie_{ij})^2 = e_i(e_{ij}(e_ie_{ij})) = e_i(e_ie_{ij}) = e_ie_{ij} \in S_{ij},$$
$$(e_{ij}e_j)^2 = ((e_{ij}e_j)e_{ij})e_j = (e_{ij}e_j)e_j = e_{ij}e_j \in S_{ij},$$

pa kako S_{ij} ima tačno jedan idempotent e_{ij}, to je $e_ie_{ij} = e_{ij}e_j = e_{ij}$.

Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to Reg(S)$ sa:

$$x\varphi = xe_i, \qquad \text{ako } x \in S_i,\ i \in B.$$

Sada za $x_i \in S_i$, $x_j \in S_j$, $i, j \in B$, imamo:

$$\begin{aligned}
(x_i\varphi)(x_j\varphi) &= (x_ie_i)(x_je_j) && \\
&= e_{ij}(x_ie_i)(x_je_j)e_{ij} && (\text{jer } \ x_ie_ix_je_j \in G_iG_j \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}e_ix_ix_je_je_{ij} && (\text{prema Mannovoj lemi}) \\
&= e_{ij}e_ix_ie_ix_je_{ij}e_je_{ij} && (\text{jer } \ e_{ij}e_ix_ix_j \in G_{ij}S_{ij} \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}e_ix_ix_je_{ij} && (\text{jer } \ e_{ij}e_j = e_{ij}) \\
&= e_{ij}e_ie_{ij}x_ix_je_{ij} && (\text{jer } \ x_ix_je_{ij} \in S_{ij}G_{ij} \subseteq G_{ij}) \\
&= e_{ij}x_ix_je_{ij} && (\text{jer } \ e_{ij}e_i = e_{ij}) \\
&= x_ix_je_{ij} && (\text{jer } \ x_ix_je_{ij} \in G_{ij}) \\
&= (x_ix_j)\varphi\ .
\end{aligned}$$

Dakle, φ je homomorfizam, pa kako je $a\varphi = a$ za svaki $a \in Reg(S)$, to φ jeste retrakcija iz S na $Reg(S)$.

Obratno, ako S ima retrakt K koji je traka B grupa G_i, $i \in B$, ako je $\sqrt{K} = S$, i ako uzmemo da je φ retrakcija iz S na K, tada S jeste traka B polugrupa $S_i = G_i\varphi^{-1}$, $i \in B$. kako za svaki $i \in B$ važi $S_i \cap K = G_i$, $\sqrt{Gi} = S_i$, to S_i jesu π-grupe. $\square$

Kao neposredne posledice Teoreme 6.8, dobijamo:

Posledica 6.4. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe ako i samo ako S jeste matrica π-grupa.* $\square$

Posledica 6.5. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija leve grupe ako i samo ako S jeste levo nulta traka π-grupa.* $\square$

Dokazaćemo sada glavnu teoremu ove tačke.

Teorema 6.9. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je traka π-grupa.*

(*ii*) *S je π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^n \in a^2bSab^2$;*

(*iii*) *S je potpuno π-regularna i za sve $a, b \in S$ je $ab\,\mathfrak{T}\,a^2b\,\mathfrak{T}\,ab^2$;*

(*iv*) *S je potpuno π-regularna i $(xy)^0 = (x^2y)^0 = (xy^2)^0$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S traka B π-grupa S_i, $i \in B$. Neka je $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B$. Tada $ab, a^2b, ab^2 \in S_{ij}$, pa važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema Teoremi 6.7. sledi da S jeste polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α, dok prema Posledici 6.4, za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica π-grupa.

Uzmimo $a, b \in S$. Tada $ab, a^2b, ab^2 \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Uzmimo da S_α jeste matrica $I \times \Lambda$ π-grupa $T_{i\lambda}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Uzmimo da je $ab \in T_{i\lambda}$, $a^2b \in T_{j\mu}$, $ab^2 \in T_{l\nu}$ za neke $i, j, l \in I$, $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Neka $e_{j\mu}$ jeste idempotent iz $T_{j\mu}$. Tada $e_{j\mu}a^2b \in T_{j\mu}^2 \subseteq T_{j\mu}$ i

$$e_{j\mu}a^2b = e_{j\mu}e_{j\mu}aab \in T_{j\mu}S_{\alpha\beta}T_{i\lambda} \subseteq T_{j\lambda},$$

pa je $\mu = \lambda$. Slično se dokazuje da je $l = i$. Takodje, prema (ii) dobijamo da postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $u \in S$ tako da je $(ab)^n = a^2buab^2$, odakle je $uab^2a^2bu \in S_{\alpha\beta}$, pa je
$$(ab)^{2n} = a^2b(uab^2a^2bu)ab^2 \in T_{j\lambda}S_{\alpha\beta}T_{i\nu} \subseteq T_{j\nu}.$$
Kako je $(ab)^{2n} \in T_{i\lambda}$, to je $j = i$ i $\nu = \lambda$. Prema tome, $ab, a^2b, ab^2 \in T_{i\lambda}$, pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Uzmimo $a, b \in S$. Neka je $a \in T_e$, $b \in T_f$, za neke $e, f \in E(S)$. Prema (iii), $ab\,\mathfrak{T}\,a^kb$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Neka je $k \in \mathbf{Z}^+$ tako da važi $a^k \in G_e$. Tada je
$$eb = a^k(a^k)^{-1}b\,\mathfrak{T}\,(a^k)^2(a^k)^{-1}b = a^keb = a^kb\,\mathfrak{T}\,ab.$$

Prema tome, $ab\,\mathfrak{T}\,eb$. Slično dokazujemo da je $eb\,\mathfrak{T}\,ef$. Dakle, $ab\,\mathfrak{T}\,ef$, pa $\mathfrak{T}$ jeste kongruencija na S. Jasno je da $\mathfrak{T}$ jeste tračna kongruencija i da svaka $\mathfrak{T}$-klasa jeste π-grupa. Prema tome, važi (i).

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Sledi neposredno. $\square$

Teoremom 6.9. dali smo karakterizacije trake π-grupa u opštem slučaju. U nastavku ćemo razmatrati neke značajnije posebne tipove traka π-grupa: normalne trake, polumreže i Rédeieve trake π-grupa.

Teorema 6.10. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je normalna traka π-grupa;*

(ii) *S je π-regularna i za sve $a, b, c \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(abc)^n \in acSac$;*

(iii) *S je potpuno π-regularna i za sve $a, b, c, d \in S$ je $abcd\,\mathfrak{T}\,acbd$;*

(iv) *S je potpuno π-regularna i $(xyzu)^0 = (xzyu)^0$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 1.25.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Neka važi (ii). Jasno da je S π-regularna. Uzmimo $a, b, c \in S$. Prema (iii) imamo da je
$$(abc)^2 = ab(cab)c\ \tau\ a(cab)bc = acab^2c \quad \text{i} \quad (abc)^2 = a(bca)bc\ \tau\ ab(bca)c = ab^2cac\ ,$$
odakle sledi da postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da
$$(abc)^{2m} \in acS \qquad \text{i} \qquad (abc)^{2n} \in Sac\ ,$$
pa je $(abc)^{2m+2n} \in acSac$. Dakle, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Prema Posledici 5.13, S je normalna traka B t-Arhimedovih polugrupa S_i, $i \in B$. Uzmimo $a \in Reg(S)$, $x \in V(a)$. Prema (ii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $ax = (axax)^n \in aaxSaax$, odakle je:
$$a = axa \in a^2xSa^2xa \subseteq a^2Sa^2\ .$$
Prema tome, $a \in Gr(S)$, pa S jeste potpuno π-regularna. Prema Propoziciji 2.2, S_i su potpuno π-regularne polugrupe, pa prema Teoremi 3.16, S_i su π-grupe.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Sledi neposredno. $\square$

Teorema 6.11. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža π-grupa;*

(ii) *S je π-regularna i polumreža t-Arhimedovih polugrupa;*

(iii) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (fe)^n$;*

(iv) *S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa i svaki regularan element iz S ima jedinstven inverz;*

(v) *S je potpuno π-regularna i za sve $a, b \in S$ je $ab\,\mathfrak{T}\,ba$;*

(vi) *S je potpuno π-regularna i $(xy)^0 = (yx)^0$;*

(vii) *S je π-regularna i $a = axa$ povlači $ax = xa$;*

$(viii)$ $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ (ab)^n \in b^{2n}Sa^{2n}$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (viii)$. Neka je S polumreža Y π-grupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, neka je S_α nil-ekstenzija grupe G_α. Uzmimo $a, b \in S$. Tada $ab, ba \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(ab)^n, (ba)^n \in G_\alpha$, odakle je $(ab)^n \in (ba)^n G_\alpha (ba)^n \subseteq (ba)^n S (ba)^n$.

$(viii) \Rightarrow (ii)$. Sledi prema Posledici 5.8.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Propoziciji 2.1. i Teoremi 3.16.

$(viii) \Rightarrow (iii)$. Iz $(viii)$, prema Teoremi 6.5, S je polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Uzmimo $e, f \in E(S)$. Prema $(viii)$, $(ef)^n = (fe)^n x (fe)^n$, za neke $n \in \mathbf{Z}^+$, $x \in S$, pa je $(fe)^{n+1} = f(ef)^n e = f(fe)^n x (fe)^n e = (fe)^n x (fe)^n = (ef)^n$ i $(ef)^n = (fe)^n x (fe)^n = (fe)^n x (fe)^n e = (ef)^n e$, odakle je $(ef)^{n+1} = (ef)^n ef = (ef)^n f = (ef)^n$. Dakle, $(ef)^{n+1} = (fe)^{n+1}$, pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Iz (iii), za $e, f \in E(S)$ dobijamo da je $(ef)^n = (fe)^n$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, odakle je $(ef)^n = e(ef)^n f = e(fe)^n f = (ef)^{n+1}$, pa prema Teoremi 6.3, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α. Uzmimo $\alpha \in Y$, $e, f \in E(K_\alpha)$. Kako je $E(K_\alpha)$ pravougaona traka, to prema (iii) dobijamo da je $ef = fe$, pa je $|E(K_\alpha)| = 1$, tj. K_α je grupa.

$(i) \Rightarrow (v)$. Neka je S polumreža Y π-grupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada $ab, ba \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa za $e \in E(S_\alpha)$, je $ab, ba \in S_\alpha = T_e$, odakle $ab\,\mathfrak{T}\,ba$.

$(v) \Rightarrow (vi)$ i $(vi) \Rightarrow (vii)$. Sledi neposredno.

$(vii) \Rightarrow (iv)$. Ako važi (vii), tada iz $a = axa$ sledi $ax = xa$, odakle je $a = axaxa = axxa = ax^2a^2$, pa prema Teoremi 6.3, S je polumreža Arhimedovih polugrupa. Uzmimo $a \in Reg(S)$, $x, y \in V(a)$. Prema (vii), $ax = xa$ i $ay = ya$, odakle je

$$\begin{aligned} x &= xax = x^2a = x^2aya = xya = xay = axy \\ &= axyay = axay^2 = ay^2 = yay = y. \end{aligned}$$

Dakle, važi (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Iz (iv) sledi da svaki inverz svakog idempotenta iz S jeste idempotent, pa prema Teoremi 6.3, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija pravougaone grupe K_α. Uzmimo $\alpha \in Y$, $e, f \in E(K_\alpha)$. Tada je $E(K_\alpha)$ pravougaona grupa, pa $e, f \in V(e)$, odakle, prema (iv), $e = f$. Dakle, $|E(K_\alpha)| = 1$, pa K_α jeste grupa. Prema tome, važi (i). $\square$

Polugrupa S je *ordinalna suma* Y *polugrupa* S_α, $\alpha \in Y$ ako S jeste lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha, \beta \in Y$, iz $\alpha < \beta$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, sledi da je $ab = ba = a$. Sledećom lemom dajemo strukturnu karakterizaciju Rédeievih traka:

Lema 6.8. *Polugrupa S je Rédeieva traka ako i samo ako S jeste ordinalna suma singularnih traka.*

Dokaz. Neka je S Rédeieva traka. Prema Lemi 6.6, S je lanac Y pravougaonih traka S_α, $\alpha \in Y$, dok prema Lemi 6.7, S_α jesu singularne trake. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $\alpha < \beta$, i uzmimo $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Tada $a, ab, ba \in S_\alpha$ i $ab, ba \in \{a, b\}$, odakle dobijamo da je $ab = ba = a$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Teorema 6.12. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je Rédeieva traka π-grupa;*

(ii) *S ima retrakt K koji je Rédeieva traka grupa i $\sqrt{K} = S$;*

(iii) $(\forall a, b \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ a^n \in (ab)^n S(ab)^n \ \vee\ b^n \in (ab)^n S(ab)^n$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S Rédeieva traka B π-grupa S_i, $i \in B$. Za $i \in B$, neka S_i jeste nil-ekstenzija grupe G_i sa jedinicom e_i. Jasno je da je $E(S) = \{e_i \mid i \in B\}$. Uzmimo $e_i, e_j \in E(S)$, $i, j \in B$. Tada $e_i e_j \in S_{ij}$. Ako je $ij = i$, tada $e_i e_j \in S_i$, pa $e_i e_j = e_i(e_i e_j) \in G_i S_i \subseteq G_i$, odakle je

$$(e_i e_j)^2 = ((e_i e_j)e_i)e_j = (e_i e_j)e_j = e_i e_j\ .$$

Slično dokazujemo da iz $ij = j$ sledi da je $(e_i e_j)^2 = e_i e_j$. Prema tome, $E(S)$ je podpolugrupa od S, pa prema Propoziciji 6.3, $Reg(S)$ je podpolugrupa od S, odakle prema Teoremi 6.8. dobijamo da važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi prema Teoremi 6.8.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka je S Rédeieva traka B π-grupa S_i, $i \in B$. Za $i \in B$, neka S_i jeste nil-ekstenzija grupe G_i. Uzmimo $a, b \in S$. Tada $a \in S_i$, $b \in S_j$, za neke $i, j \in B$. Ako je $ij = i$, tada $ab \in S_i$, pa postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^n, a^n \in G_i$, odakle

$$a^n \in (ab)^n G_i (ab)^n \subseteq (ab)^n S(ab)^n\ .$$

Slično dokazujemo da iz $ij = j$ sledi

$$b^n \in (ab)^n S(ab)^n \ ,$$

za neki $n \in \mathbf{Z}^+$. Dakle, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Jasno da je S potpuno π-regularna. Takodje, iz (iii) sledi da je $e \in Sf$ ili $f \in eS$, za sve $e, f \in E(S)$, pa $E(S)$ jeste Rédeieva traka. Prema Lemi 6.8. i Posledici 6.1, S je lanac Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa.

Uzmimo $\alpha \in Y$, $a, b \in S_\alpha$. Neka je K_α leva grupa. Neka $a \in T_e$, $b \in T_f$, $e, f \in E(S_\alpha)$, $e \neq f$. Prema (iii) dobijamo da postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$a^n \in (af)^n S(af)^n \qquad \text{ili} \qquad f \in (af)^n S(af)^n \ .$$

Uzmimo da je $f \in (af)^n S(af)^n \subseteq afSaf$, tj. $f = afuaf$, za neki $u \in S$. Kako je $af \in S_\alpha K_\alpha \subseteq K_\alpha$, to je $af \in G_g$, za neki $g \in E(S_\alpha)$. Sada prema Lemi 3.13. dobijamo da je:

$$f = afuaf = g(afuaf)g = gfg \in gS_\alpha g = G_g \ ,$$

odakle je $f = g$, tj. $af \in G_f$. Takodje, $fa = f(fa) \in G_f K_\alpha \subseteq G_f$, jer je K_α leva grupa, pa $af = f(af) = (fa)f = fa$. Kako je $a^k \in G_e$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, i kako je K_α leva grupa, to je:

$$a^k = a^k e = a^k ef = a^k f = fa^k \in G_f G_e \subseteq G_f \ ,$$

što nije moguće. Prema tome, $a^n \in (af)^n S(af)^n$, odakle je $a^n \in afS_\alpha af \subseteq afK_\alpha af$, pa prema Lemi 3.13, $a^n \,\mathcal{H}\, af$ u K_α. Dakle, $af \in G_e$. Slično dokazujemo da je $be \in G_f$, pa prema Munnovoj lemi sledi da je

$$be = fbe = bfe = bf = fb \qquad \text{i} \qquad af = eaf = aef = ae = ea \ ,$$

odakle je

$$abe = afb = eab \ .$$

Uzmimo da je $(ab)^m \in G_g$, za neke $g \in E(S_\alpha)$, $m \in \mathbf{Z}^+$. Tada

$$(ab)^m e \in G_g G_e \subseteq G_g \qquad \text{i} \qquad (ab)^m e = e(ab)^m \in G_e G_g \subseteq G_e \ .$$

Prema tome, $g = e$, tj. $(ab)^m \in G_e$, pa $ab \in T_e = T_{ef}$. Dakle, S_α je levo nulta traka $E(S_\alpha)$ π-grupa T_e, $e \in E(S_\alpha)$. Ako K_α jeste desna grupa, tada na sličan način dokazujemo da S_α jeste desno nulta traka $E(S_\alpha)$ π-grupa T_e, $e \in E(S_\alpha)$.

Uzmimo $a \in T_e \subseteq S_\alpha$, $b \in T_f \subseteq S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$. Neka je $\alpha < \beta$, tj. $\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha$ (na sličan način razmatramo slučaj $\beta < \alpha$). Kako je $E(S)$ Rédeieva traka i $ef, fe, e \in S_\alpha$, $f \notin S_\alpha$, to je $ef = fe = e$. Prema (iii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$b^n \in (be)^n S(be)^n \qquad \text{ili} \qquad e \in (be)^n S(be)^n \ .$$

Ako je $b^n = (be)^n u(be)^n$, za neki $u \in S$, tada je $u \in S_\gamma$, za neki $\gamma \in Y$, pa je $\alpha\beta\gamma = \beta$, odakle $\alpha\beta = \beta$, što nije moguće. Prema tome, $e \in (be)^n S(be)^n$, odakle

$$e \in beS_\alpha be\ .$$

Kako je $be = (be)e \in S_\alpha K_\alpha \subseteq K_\alpha$, to prema Lemi 3.13. sledi da je $be \in G_e$. Slično dokazujemo da je $eb \in G_e$, pa prema Munnovoj lemi, $eb = (eb)e = e(be) = be$ i $abe = aeb = eab$. Neka je $(ab)^m \in G_g$, za neke $g \in E(S_\alpha)$, $m \in \mathbf{Z}^+$. Prema Lemi 3.13. imamo da je

$$\begin{aligned}(ab)^m &= (ab)^m g = (ab)^m geg = (ab)^m eg = e(ab)^m g = e(ab)^m \\ &= ee(ab)^m = e(ab)^m e \in eS_\alpha e = G_e\ .\end{aligned}$$

Prema tome, $(ab)^m \in G_e$, tj. $ab \in T_e = T_{ef}$. Dakle, S je Rédeieva traka $E(S)$ π-grupa T_e, $e \in E(S)$. $\square$

Iz Teoreme 6.12. dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 6.6. *Polugrupa S je Rédeieva traka periodičnih π-grupa ako i smo ako S jeste π-regularna i za sve $a, b \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^n \in \langle a\rangle \cup \langle b\rangle$.* $\square$

Zadaci.

1. Polugrupu S koja zadovoljava zakon

$$x_1x_2\cdots x_{n+1} \in \langle x_1\rangle \cup \langle x_2\rangle \cup \ldots \cup \langle x_{n+1}\rangle\ ,$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in S$, nazivamo $\mathcal{U}_{n+1}$-*polugrupa*. $\mathcal{U}_2$-polugrupu kraće zovemo $\mathcal{U}$-*polugrupa*. Dokazati da važe sledeća tvrdjenja:

(a) G je $\mathcal{U}_{n+1}$-grupa ako i samo ako G jeste $\mathcal{U}$-grupa;

(b) G je $\mathcal{U}$-grupa ako i samo ako G jeste ciklična grupa reda p^k, $k \in \mathbf{Z}^+$, ili kvazi-ciklična Z_{p^∞}, za neki prost broj p.

2. Neka je S monogena polugrupa. Tada S jeste $\mathcal{U}$- ($\mathcal{U}_{3k}$-, $\mathcal{U}_{3k+}$-, $\mathcal{U}_{3k+2}$-) polugrupa ako i samo ako S jeste idealska ekstenzija ciklične grupe pomoću 5- ($(6k+1)$-, $(6k+5)$-, $(6k+5)$-)nilpotentne monogene polugrupe.

3. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je regularna $\mathcal{U}_{n+1}$-polugrupa;

(ii) S je regularna $\mathcal{U}$-polugrupa;

(iii) S je ordinalna suma $\mathcal{U}$-grupa i singularnih traka.

4. Traka (lanac) Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, je $\mathcal{U}_{n+1}$-*lanac* (*lanac*) *polugrupa* S_α, $\alpha \in Y$, ako je

$$x_1x_2\ldots x_{n+1} \in \langle x_1\rangle \cup \langle x_2\rangle \cup \ldots \cup \langle x_{n+1}\rangle\ ,$$

za sve $x_1 \in S_{\alpha_1}$, $x_2 \in S_{\alpha_2}, \ldots, x_{n+1} \in S_{\alpha_{n+1}}$, pri čemu postoje $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ da je $S_{\alpha_i} \neq S_{\alpha_j}$. $\mathcal{U}_2$-traku (lanac) polugrupa nazivamo $\mathcal{U}$-*traka* (*lanac polugrupa*.

Dokazati da sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je $\mathcal{U}_{n+1}$-polugrupa;

(ii) S je $\mathcal{U}_{n+1}$-lanac idealskih ekstenzija $\mathcal{U}$-grupa pomoću $\mathcal{U}_{n+1}$-nil-polugrupa i retraktivnih ekstenzija singularnih traka pomoću $\mathcal{U}_{n+1}$-nil-polugrupa;

(iii) S je $\mathcal{U}_{n+1}$-traka idealskih ekstenzija $\mathcal{U}$-grupa pomoću $\mathcal{U}_{n+1}$-nil-polugrupa.

5. Neka je S $\mathcal{U}_{n+1}$-polugrupa. Rada $Reg(S)$ jeste retrakt od S.

6. Polugrupa S je $\mathcal{U}_{n+1}$-polugrupa i $Reg(S)$ je ideal od S ako i samo ako

$$x_1x_2\cdots x_{n+1}\in \cup_{i=1}^{n+1}\{x_i^k \mid k\in \mathbf{Z}^+,\ k\geq 2\},$$

za sve $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$.

7. Polugrupa S je n-inflacija Rédeieve trake ako i samo ako

$$x_1x_2\cdots x_{n+1}\in \{x_1^{n+2},x_2^{n+2},\dots,x_{n+1}^{n+2}\},$$

za sve $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$.

8. Polugrupu S u kojoj za sve $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in S$ postoji $m\in\mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(x_1x_2\dots x_{n+1})^m\in\langle x_1\rangle\cup\langle x_2\rangle\cup\dots\cup\langle x_{n+1}\rangle\,,$$

Nazivamo $\mathcal{GU}_{n+1}$-*polugrupa*, $\mathcal{GU}_2$-polugrupu nazivamo $\mathcal{GU}$-*polugrupa*.

Dokazati da S jeste π-regularna $\mathcal{GU}_{n+1}$-polugrupa ako i samo ako S jeste π-regularna $\mathcal{GU}$-polugrupa.

9. Lanac Y polugrupa $S_\alpha,\ \alpha\in Y$, je $\mathcal{GU}$-*lanac* polugrupa $S_\alpha,\ \alpha\in Y$, ako za sve $\alpha,\beta\in Y,\ \alpha\neq\beta$, i sve $a\in S_\alpha,\ b\in S_\beta$ postoji $m\in\mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^m\in\langle a\rangle\cup\langle b\rangle$.

Dokazati da su sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je Rédeieva traka periodičnih π-grupa;

(ii) S je π-regularna $\mathcal{GU}$-polugrupa;

(iii) S je periodična $\mathcal{GU}$-polugrupa;

(iv) S $\mathcal{GU}$-lanac retraktivnih nil-ekstenzija periodičnih levih i desnih grupa;

(v) S ima retrakt T koji je regularna $\mathcal{GU}$-polugrupa i $\sqrt{T}=S$.

10. Neka je $\mathfrak{C}$ klasa polugrupa sa modularnom mrežom podpolugrupa, ili klasa polugrupa sa distributivnom mrežom podpolugrupa ili klasa $\mathcal{U}$-polugrupa. Tada su sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je iz $\mathfrak{C}$;

(ii) S je $\mathcal{U}$-traka idealskih ekstenzija grupa iz klase $\mathfrak{C}$ pomoću $\mathcal{U}$-nil-polugrupa;

(iii) S je $\mathcal{U}$-lanac idealskih ekstenzija grupa iz klase $\mathfrak{C}$ pomoću $\mathcal{U}$-nil-polugrupa i retraktivnih ekstenzija singularnih traka pomoću $\mathcal{U}$-nil-polugrupa.

11. Neka je S potpuno π-regularna polugrupa i $\overline{xy}=\overline{x}\,\overline{y}$. Tada je S polumreža retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa sa komutativnim maksimalnim podgrupama i za svaki $x\in\langle E(S)\rangle$ je $x=x^3$.

12. Neka je S potpuno π-regularna polugrupa i $\overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}}$. Tada je S polumreža retraktivnih nil-ekstenzija potpuno prostih polugrupa.

13. Ako je S potpuno π-regularna polugrupa i $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{T}$, onda je S polumreža π-grupa.

14. Neka je S polumreža π-grupa. Tada relacija $\xi = \{x, y \in S \times S \mid (\exists e \in E(S)\ ex = ey\}$ jeste najmanja kongruencija na S za koju je S/ξ grupa.

15. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža π-grupa;

(ii) S je π-regularna i $\mathcal{H}^* = \mathcal{J}^*$;

(iii) S je disjunktna unija π-grupa i za sve $e, f \in E(S)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ da je $(ef)^n = (fe)^n$.

16. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je polumreža π-grupa i $E(S)$ je podpolugrupa od S;

(ii) S je polumreža π-grupa i $ef = fe$, za sve $e, f \in E(S)$;

(iii) S je π-regularna i $Reg(S)$ podpolugrupa od S koja je polumreža grupa;

(iv) S je potpuno π-regularna i $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

Literatura. Bogdanović [13], [18], Bogdanović and Ćirić [3], [4], [11], [12], Chu, Guo and Ren [1], Ćirić and Bogdanović [1], [6], [12], Davenport [1], Евсеев [1], Freiman and Schein [1], Galbiati e Veronesi [1], [2], [3], [4], [5], Ляпин [5], Madison, Mukherjee and Sen [1], [2], Mel'nichuk [1], Pelikan [1], [2], Petrich [19], Pondeliček [2], Schwarz [3], Шеврин [4], [8], [9], Spoletini Cherubini and Varisco [3], Yamada [6],

GLAVA 7

Nil-ekstenzije unije grupa

S.Bogdanović 1989. godine daje neke karakterizacije za nil-ekstenzije unije grupa. Potom zajedno sa M.Ćirićem opisuju nil-ekstenzije regularnih i potpuno regularnih polugrupa, a posebno retraktivne, koje povezuju i sa poddirektnim proizvodima. Kako je kod nil-ekstenzija unije grupa ispunjen uslov da je svaki regularan element grupni, to je jasno da je reč o jednoj podklasi polugrupa koje su razmatrane u prethodnoj glavi. Zanimljivo je i da neki identiteti indukuju nil-ekstenzije unija grupa. Sve ovakve identitete su opisali autori ove knjige i taj materijal će biti izložen u poslednjoj tački ove glave.

7.1. Opšti slučaj.

U ovoj tački razmatramo nil-ekstenzije unije grupa. Dokažimo najpre jednu opštiju teoremu.

Teorema 7.1. *Polugrupa S je nil-ekstenzija regularne polugrupe ako i samo ako važi:*

(1) $$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in xa^n ySxa^n y.$$

Dokaz. Neka je S nil-ekstenzija regularne polugrupe K. Uzmimo $x, a, y \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in K$, odakle je $xa^n y \in K$, pa kako je K regularna, to je $xa^n \in xa^n yKxa^n y \subseteq xa^n ySxa^n y$.

Obratno, neka važi (1). Tada za $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^{n+2} \in a^{n+2}Sa^{n+2}$, pa je S π-regularna polugrupa. Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $xe = xe^n e \in xe^n eSxe^n e = xeSxe$. Prema tome, $S \cdot E(S) \subseteq Reg(S)$, odakle dobijamo da je

$$S \cdot Reg(S) = S \cdot Reg(S) \cdot E(S) \subseteq S \cdot E(S) \subseteq Reg(S).$$

Prema tome, $Reg(S)$ je levi ideal od S. Slično dokazujemo da je $Reg(S)$ desni ideal. Prema tome, S je nil-ekstenzija regularne polugrupe $Reg(S)$. $\square$

Teorema 7.2. *Polugrupa S je nil-ekstenzija unije grupa ako i samo ako važi:*

(2) $$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in xa^n ySxa^n y.$$

Dokaz. Neka S jeste nil-ekstenzija unije grupa K. Uzmimo $x, a, y \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in K$, odakle je $xa^ny \in K$, pa kako je K potpuno regularna, to je $xa^ny \in (xa^ny)^2Kxa^ny \subseteq xa^nyxSxa^ny$.

Obratno, neka važi (2). Prema Teoremi 7.1, S je nil-ekstenzija regularne polugrupe K. Uzmimo $a \in K$, $x \in V(a)$. Prema (2), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da

$$a = a(xa)^nxa \in a(xa)^nxaaSa(xa)^nxa = a^2Sa,$$

odakle, prema Teoremi 2.5, K je unija grupa. □

Narednim teoremama opisujemo nil-ekstenzije nekih posebnih tipova unija grupa.

Teorema 7.3. *Polugrupa S je nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa ako i samo ako važi:*

(3) $(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^ny \in xa^nySya^nx \cup ya^nxSxa^ny.$

Dokaz. Neka je S nil-ekstenzija polugrupe K, i neka je K polumreža levih i desnih grupa. Tada prema Teoremi 6.5, za sve $e, f \in E(K)$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ef)^n = (efe)^n$ ili $(ef)^n = (fef)^n$. Takodje, $Reg(S) = Gr(S)\,(= K\,)$ i $E(S) = E(K)$, pa prema Teoremama 6.1. i 6.5, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa. Jasno je da za svaki $\alpha \in Y$ važi: $K \cap S_\alpha = Reg(S) \cap S_\alpha = Reg(S_\alpha) = K_\alpha$. Uzmimo $x, a, y \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in K$, pa $xa^ny, ya^nx \in K$. Takodje, postoji $\alpha \in Y$ tako da $xa^ny, ya^nx \in S_\alpha$, pa, prema tome, $xa^ny, ya^nx \in K_\alpha$. Sada imamo da je $xa^ny \in xa^nyK_\alpha ya^nx \subseteq xa^nySya^nx$, ako K_α jeste leva grupa, odnosno, $xa^ny \in ya^nxK_\alpha xa^ny \subseteq ya^nxSxa^ny$. Dakle, važi (3).

Obratno, neka važi (3). Jasno da je S π-regularna. Uzmimo $e \in E(S)$, $x \in S$. Prema (3), postoji $n \in Z$ tako da je

$$\begin{aligned} xe &= (xe)e^ne \in (xe)e^neSee^n(xe) \cup ee^n(xe)S(xe)e^ne \\ &= xeSexe \cup exeSxe \subseteq xeSxe \cup exeSxe. \end{aligned}$$

Ako je $xe \in exeSxe$, tada je $exe = xe$, odakle je $xe \in xeSxe$. Prema tome, $xe \in Reg(S)$, pa kao u dokazu Teoreme 7.1. dobijamo da $Reg(S)$ jeste levi ideal od S. Slično dokazujemo da $Reg(S)$ jeste desni ideal od S. Neka je $K = Reg(S)$. Uzmimo $a, b \in Reg(S)$, $x \in V(a)$. Prema (3), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $ab = a(xa)^nb \in a(xa)^nbSb(xa)^na \cup b(xa)^naSa(xa)^nb \subseteq Ka \cup bK$, tj. $ab \in Ka \cup bK$, gde je $K = Reg(S)$, pa prema Teoremi 6.5, K je polumreža levih i desnih grupa. □

Teorema 7.4. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je nil-ekstenzija polumreže levih grupa;*

(*ii*) $(\forall x,a,y\in S)(\exists n\in \mathbf{Z}^+)\ xa^ny\in xa^nySya^nx$;

(*iii*) S *je* π*-regularna i za sve* $x,a,y\in S$ *postoji* $n\in \mathbf{Z}^+$ *tako da je* $xa^ny\in xSx$.

Dokaz. $(i)\Leftrightarrow(ii)$. Dokazuje se slično kao Teorema 7.3.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Sledi neposredno.

$(iii)\Rightarrow(i)$. Uzmimo $x\in S$, $e\in E(S)$. Prema (iii), postoji $n\in \mathbf{Z}^+$ tako da je $xe=(xe)e^ne\in xeSxe$, odakle $xe\in Reg(S)$, odakle kao u Teoremi 7.1. dobijamo da $Reg(S)$ jeste levi ideal od S. Osim toga, postoji $m\in \mathbf{Z}^+$ tako da je $ex=ee^nx\in eSe$, pa je $ex=exe$, odakle, dobijamo da postoji $k\in \mathbf{Z}^+$ tako da je $ex=exe=(ex)e^ne\in exSex$. Dakle, $ex\in Reg(S)$, odakle sledi da $Reg(S)$ jeste desni ideal od S. Prema tome, S je nil-ekstenzija regularne polugrupe $K=Reg(S)$.

Uzmimo $a,b\in K$. Tada postoji $n\in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^{n+1}=a(ba)^nb\in a(ba)^nbSb(ba)^na\subseteq Ka$, pa prema Teoremi 5.10, Propoziciji 2.1 i Teoremi 3.15, K je polumreža levih grupa. $\square$

Poseban tip nil-ekstenzija su retraktivne nil-ekstenzije. Sledeća teorema tvrdi da, kada je reč o nil-ekstenzijama polumreže grupa, onda one jesu i retraktivne.

Teorema 7.5. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(*i*) S *je nil-ekstenzija polumreže grupa;*

(*ii*) S *je retraktivna nil-ekstenzija polumreže grupa;*

(*iii*) $(\forall x,a,y\in S)(\exists n\in \mathbf{Z}^+)\ xa^ny\in ya^nxSya^nx$;

(*iv*) S *je* π*-regularna i za sve* $x,a,y\in S$ *postoji* $n\in \mathbf{Z}^+$ *tako da je* $xa^ny\in yxSx$.

Dokaz. $(i)\Rightarrow(ii)$. Neka je S nil-ekstenzija polugrupe K i neka je K polumreža grupa. Tada je $Reg(S)=Gr(S)\,(=K\,)$, pa S jeste polumreža potpuno Arhimedovih polugrupa. Za $e,f\in E(K)$, prema Teoremi 6.11, $(ef)^n=(fe)^n$, za neki $n\in \mathbf{Z}^+$, pa kako je $E(S)=E(K)$, to ponovo prema Teoremi 6.11. dobijamo da S jeste polumreža grupa. Sada prema Teoremi 6.8, $K=Reg(S)$ je retrakt od S, pa važi (ii).

$(ii)\Rightarrow(i)$. Sledi neposredno.

$(i)\Rightarrow(iii)$. Neka je S nil-ekstenzija polugrupe K i neka je K polumreža grupa. Kao u dokazu za $(i)\Rightarrow(ii)$ dobijamo da S jeste polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha\in Y$, i za $\alpha\in Y$, S_α je nil-ekstenzija grupe G_α. Jasno da za $\alpha\in Y$ je $K\cap S_\alpha=Reg(S)\cap S_\alpha=Reg(S_\alpha)=G_\alpha$. Uzmimo $x,a,y\in S$. Tada je $a^n\in K$, za neki $n\in \mathbf{Z}^+$, odakle $xa^ny, ya^nx\in K$. Sa druge strane, $xa^ny, ya^nx\in S_\alpha$, za neki $\alpha\in Y$, pa $xa^ny, ya^nx\in G_\alpha$. Prema tome, $xa^ny\in ya^nxG_\alpha ya^nx\subseteq ya^nxSya^nx$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Prema (iii), S je π-regularna. Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Tada je $xe = (xe)e^n e \in ee^n(xe)See^n xe = exeSexe$, odakle dobijamo da je $xe = exe$ i $xe \in xeSxe$. Prema tome, $xe \in Reg(S)$, pa kao u dokazu Teoreme 7.1. dobijamo da je $Reg(S)$ levi ideal od S. Slično dokazujemo da je $Reg(S)$ desni ideal od S. Prema tome, S je nil-ekstenzija regularne polugrupe $K = Reg(S)$.

Uzmimo $a, b \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in b(ba)^n aSb(ba)^n a \subseteq bKa$, pa prema Posledici 5.8, Propoziciji 2.1 i Teoremi 3.16, K je polumreža grupa.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Dokazuje se slično kao $(i) \Rightarrow (iii)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iv). Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Slično kao u dokazu za $(iii) \Rightarrow (i)$ dokazujemo da je $xe = exe$, $xe \in Reg(S)$ i $Reg(S)$ je levi ideal od S. Prema (iii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $ex = ee^n(ex) \in eexSe \subseteq Se$, odakle dobijamo da je $ex = exe$, pa je $ex = xe \in Reg(S)$. Dakle, $Reg(S)$ je desni ideal od S. Slično kao u dokazu za $(iii) \Rightarrow (i)$ dokazujemo da $Reg(S)$ jeste polumreža grupa. $\square$

Zadaci.

1. Podskup B polugrupe S je (m, n)-*dvostrano čist* ako je

$$B \cap x_1 x_2 \cdots x_m S y_1 y_2 \cdots y_n = x_1 x_2 \cdots x_m S y_1 y_2 \cdots y_n,$$

za sve $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in S$, gde su $m, n \in \mathbf{Z}^+$. Polugrupa S je (m, n)-*dvostrano čista* ako i samo ako svaki bi-ideal od S jeste (m, n)-dvostrano čist podskup od S.

Dokazati da su sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je (m, n)-dvostrano čista;
(ii) S^{m+n+1} je polumreža grupa;
(iii) S je $(m+n)$-inflacija polumreže grupa;
(iv) $x_1 \cdots x_m S y_1 \cdots y_n = (y_1 \cdots y_n)^2 S x_1 \cdots x_m$, za $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in S$.

2. Svaka podpolugrupa polugrupe S je (m, n)-dvostrano čista ako i samo ako je $S^{m+n+1} = 0$.

3. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je n-inflacija polumreže grupa;
(ii) S^{n+1} je polumreža grupa;
(iii) $(\forall a, b \in S)\ aS^{n-1}b = b^2 S^n a$.

4. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je nil-ekstenzija pravougaone grupe;
(ii) S je poddirektan proizvod grupe i nil-ekstenzije pravougaone trake;
(iii) S je poddirektan proizvod grupe, nil-ekstenzije levo nulte trake i nil-ekstenzije desno nulte trake.

Literatura. Bogdanović [20], Bogdanović and Ćirić [5], [11], Ćirić and Bogdanović [2], [13], Bogdanović and Milić [2], [3], Bogdanović and Stamenković [1], Bogdanović and Malinović [1], Guo, Ren and Shum [1], [2], [3], Putcha [1].

7.2. Retraktivne nil-ekstenzije unije grupa.

Sobzirom da je konstrukcija retraktivnih ekstenzija relativno jednostavnija od konstrukcija nekih drugih tipova ekstenzija polugrupa, to je od posebnog interesa izučavanje ovakvih ekstenzija.

Najpre ćemo dati neke rezultate o odnosu retraktivnih ekstenzija i poddirektnih proizvoda.

Lema 7.1. *Svaka retraktivna ekstenzija S polugrupe K pomoću polugrupe Q sa nulom je poddirektan proizvod od K i Q.*

Dokaz. Neka je φ retrakcija iz S na K, uzmimo da je $Q = S/K$ i uzmimo da je ν prirodni homomorfizam iz S na Q. Uzmimo $a, b \in S$ tako da je $a\varphi = b\varphi$ i $a\nu = b\nu$. Iz $a\nu = b\nu$ dobijamo da je $a = b$ ili $a, b \in K$. Ako $a, b \in K$, tada je $a = a\varphi = b\varphi = b$. Dakle, iz $a\varphi = b\varphi$ i $a\nu = b\nu$ sledi da je $a = b$, pa prema Teoremi 1.5, S je poddirektan proizvod od K i Q. $\square$

Neki uslovi pod kojima važi obrat Leme 7.1. dati su narednim lemama.

Lema 7.2. *Neka je $S \subseteq K \times Q$ poddirektan proizvod polugrupe K i polugrupe Q sa nulom 0, tako da važi $K \times \{0\} \subseteq S$. Tada je S izomorfna polugrupi koja je retraktivna ekstenzija od K pomoću neke polugrupe Q' sa nulom. Pri tome, Q je izomorfna nekoj faktor polugrupi polugrupe Q'.*

Dokaz. Pod pretpostavkama Leme 7.2, $K \cong K \times \{0\}$ je ideal od S. Neka su $\pi_1 : S \to K$ i $\pi : K \times \{0\} \to K$ projekcije, neka je ξ Reesova kongruencija na S indukovana idealom $K \times \{0\}$, i neka je η kongruencija na S indukovana projekcijom $\pi_2 : S \to Q$. Jasno je da je π izomorfizam i da je π_1 epimorfizam. Dakle, preslikavanje $\varphi = \pi_1\pi^{-1} : S \to K \times \{0\}$ je retrakcija. Prema tome, S je izomorfna polugrupi koja je retraktivna ekstenzija od K pomoću polugrupe $Q' = S/\xi$ sa nulom.

Kako je $S/\eta \cong Q$, to prema Teoremi 1.4. dobijamo da je $(S/\xi)/(\eta/\xi) \cong S/\eta \cong Q$, odakle je Q izomorfna faktoru polugrupe $Q' \cong S/\eta$. $\square$

Lema 7.3. *Neka je K polugrupa takva da za svaki $a \in K$ postoji $e \in E(K)$ koji je leva ili desna jedinica za K. Tada je polugrupa S izomorfna retraktivnoj nil-ekstenziji od K ako i samo ako je S poddirektan proizvod od K i nil-polugrupe.*

Dokaz. Neka je $S \subseteq K \times Q$ poddirektan proizvod polugrupe K i nil-polugrupe Q sa nulom 0. Uzmimo $a \in K$. Kako je S poddirektan proizvod od K i Q, to postoji $u \in Q$ tako da je $(a, u) \in S$. Takodje, prema pretpostavci leme, postoji $e \in E(K)$ tako da je $ea = a$ ili $ae = a$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da je $ea = a$. tada postoji $v \in Q$ tako da je $(e, v) \in S$. Osim toga, postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $v^n = 0$, odakle dobijamo da je $(e, 0) = (e^n, v^n) = (e, v)^n \in S$, odakle je $(a, 0) = (ea, 0u) = (e, 0)(a, u) \in S^2 \subseteq S$. Prema tome, $K \times \{0\} \subseteq S$. Prema Lemi 7.2, S je izomorfna retraktivnoj ekstenziji od K pomoću neke polugrupe F sa nulom. Uzmimo $(a, u) \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $u^n = 0$, odakle je $(a, u)^n = (a^n, u^n) = (a, 0) \in K \times \{0\}$. Dakle, F je nil-polugrupa.

Obrat sledi prema Lemi 7.1. $\square$

Na osnovu prethodnih rezultata dobijamo jednu značajnu karakterizaciju retraktivnih nil-ekstenzija regularnih polugrupa.

Teorema 7.6. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija regularne polugrupe K ako i samo ako S jeste poddirektan proizvod od K i neke nil-polugrupe.*

Dokaz. Za svaki $a \in K$ i svaki $x \in V(a)$ su $ax, xa \in E(S)$, ax je leva i xa je desna jedinica za a, pa ostatak dokaza sledi prema Lemi 7.3. $\square$

Posledica 7.1. *Polugrupa S je n-inflacija regularne polugrupe K ako i samo ako S jeste poddirektan proizvod od K i neke $(n+1)$-nilpotentne polugrupe.* $\square$

Od posebne koristi u daljem radu biće sledeća lema o predstavljanju retrakcije (ukoliko postoji) potpuno π-regularne polugrupe na svoj grupni deo.

Lema 7.4. *Neka je S potpuno π-regularna polugrupa i neka $Gr(S)$ jeste podpolugrupa od S. Ako je φ retrakcija od S na $Gr(S)$, onda se φ može predstaviti na sledeći način:*

$$x\varphi = xe \qquad \text{za } x \in T_e,\ e \in E(S).$$

Dokaz. Uzmimo $x \in S$. Neka je $x \in T_e$, $e \in E(S)$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $x^n \in G_e \subseteq Gr(S)$, pa je $(x\varphi)^n = (x^n)\varphi = x^n \in G_e$, odakle prema Munnovoj lemi i Teoremi 1.7, $x\varphi \in G_e$. Prema Munnovoj lemi je $xe \in G_e$, odakle je

$$x\varphi = (x\varphi)e = (x\varphi)(e\varphi) = (xe)\varphi = xe. \quad \square$$

Kako je, prema Munnovoj lemi, $xe = ex$, za $x \in T_e$, $e \in E(S)$, to se predstavljanje retrakcije φ iz prethodne leme može napisati i na sledeći način: $x\varphi = ex$, za $x \in T_e$, $e \in E(S)$.

Neke karakterizacije retraktivnih nil-ekstenzija unije grupa biće date sledećom teoremom.

Teorema 7.7. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je retraktivna nil-ekstenzija unije grupa;*

(ii) *S je π-regularna i za sve $x,a,y \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je:*

$$xa^ny \in x^2Sy^2;$$

(iii) *S je poddirektan proizvod unije grupa i nil-polugrupe.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S retraktivna nil-ekstenzija unije grupe K, sa retrakcijom φ iz S na K. Jasno da je S π-regularna. Uzmimo $x,a,y \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in K$, pa $xa^ny \in K$. Neka $x^m \in G_e$, $y^k \in G_f$, za neke $m,k \in \mathbf{Z}^+$, $e,f \in E(S)$. Prema Lemi 7.4, $x\varphi = xe = xx^mu \in x^2S$, za neki $u \in G_e$. Slično dokazujemo da je $y\varphi \in Sy^2$. Prema tome,

$$xa^ny = (xa^ny)\varphi = (x\varphi)a^n(y\varphi) \in x^2SSSy^2 \subseteq x^2Sy^2.$$

Dakle, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (ii). Uzmimo $a,b \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $(ab)^{n+1} = a(ba)^nb \in a^2Sb^2$, pa prema Teoremi 6.7, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je retraktivna nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Takodje, prema Teoremi 6.1, $Reg(S) = Gr(S)$.

Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Prema (ii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $xe = (xe)e^ne \in (xe)^2Se \subseteq (xe)^2S$, tj. postoji $u \in S$ tako da je $xe = (xe)^2u$. Odavde neposredno sledi da je $xe = (xe)^{m+1}u^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Sa druge strane, $xe \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da $(xe)^m \in K_\alpha$, i iz $xe = (xe)^2u$ sledi da je $xe \in S_\alpha$, pa je $xeu^k \in S_\alpha$, za svaki $k \in \mathbf{Z}^+$. Odavde dobijamo da je $xe = (xe)^{m+1}u^m = (xe)^m(xeu^m) \in K_\alpha S_\alpha \subseteq K_\alpha \subseteq Reg(S)$. Prema tome, $SE(S) \subseteq Reg(S)$, pa kao u dokazu Teoreme 7.1. dobijamo da je $Reg(S)$ levi ideal od S. Slično dokazujemo da je $Reg(S)$ desni ideal od S. Dakle, S je nil-ekstenzija polugrupe $K = Reg(S)$, i kako je $Reg(S) = Gr(S)$, to je K unija grupa.

Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$, i uzmimo da je $xe \in x^mSe$, za neki $m \in \mathbf{Z}^+$, tj. da je $xe = x^mue$, za neki $u \in S$. Prema (ii), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $x^m(ue)^ne \in x^{2m}Se$. Kako je K unija grupa, to postoji $v \in K$ tako da je $ue = (ue)^mv$, odakle je

$$xe = x^mue = x^m(ue)^nve = x^m(ue)^neve \in x^{2m}Seve \subseteq x^{m+1}Se.$$

Sada indukcijom dobijamo da je

$$xe \in x^mSe, \qquad \text{za svaki } m \in \mathbf{Z}^+. \tag{4}$$

Slično se dokazuje da je

(5) $$ex \in eSx^m, \qquad \text{za svaki } m \in \mathbf{Z}^+.$$

Definišimo preslikavanje $\varphi : S \to K$ sa $x\varphi = xe$, za $x \in T_e$, $e \in E(S)$. Uzmimo $x, y \in S$. Neka $x \in T_e$, $y \in T_f$, $xy \in T_g$, $e, f, g \in E(S)$, tj. neka $x^k \in G_e$, $y^m \in G_f$, $(xy)^n \in G_g$, za neke $k, m, n \in \mathbf{Z}^+$. Prema (4) i (5), $yg \in y^mSg = fy^mSg$, $xf \in x^kSf = ex^kSf$, $ey \in eSy^m = eSy^mf$ i $exy \in eS(xy)^n = eS(xy)^kg$, odakle je $yg = fyg$, $xf = exf$, $ey = eyf$ i $exy = exyg$. Odavde i iz Munnove leme dobijamo da je

$$(xy)\varphi = xyg = xfyg = exfyg = exyg = exy = xey = xeyf = (x\varphi)(y\varphi).$$

Dakle, φ je retrakcija od S na K.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 7.6. $\square$

Posledica 7.2. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada su sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:*

(i) *S je n-inflacija unije grupa;*

(ii) *za sve $x, y \in S$ je $xS^{n-1}y \subseteq x^2S^ny^2$ ($xy \in x^2Sy^2$, ako je $n = 1$);*

(iii) *S je poddirektan proizvod unije grupa i $(n+1)$-nilpotentne polugrupe.* $\square$

Narednim teoremama opisuju se retraktivne nil-ekstenzije nekih posebnih tipova unija grupa.

Teorema 7.8. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih i desnih grupa ako i samo ako je S π-regularna i važi:*

(6) $$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^ny \in x^2Sy^2x \cup yx^2Sy^2.$$

Dokaz. Neka je S retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K, i neka je K polumreža Y polugrupa K_α, $\alpha \in Y$, pri čemu za $\alpha \in Y$, K_α jeste leva ili desna grupa. Uzmimo $x, a, y \in S$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $a^n \in K$, odakle $xa^ny, a^ny^2x, yx^2a^n \in K$. Kao u dokazu Teoreme 7.7. dobijamo da je $xa^ny \in x^2Sy^2$. Sa druge strane, $(x\varphi)a^n(y\varphi), a^n(y\varphi)^2(x\varphi), (y\varphi)(x\varphi)^2a^n \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, pa prema Teoremi 3.7. i njenom dualu dobijamo da je

$$\begin{aligned} xa^ny &= (xa^ny)\varphi = (x\varphi)a^n(y\varphi) \in (x\varphi)a^n(y\varphi)K_\alpha a^n(y\varphi)^2(x\varphi) \\ &= xa^nyK_\alpha a^ny^2x \subseteq x^2Sy^2Sy^2x \subseteq x^2Sy^2x, \end{aligned}$$

ako je K_α leva grupa, ili je

$$\begin{aligned} xa^ny &= (xa^ny)\varphi = (x\varphi)a^n(y\varphi) \in (y\varphi)(x\varphi)^2a^nK_\alpha(x\varphi)a^n(y\varphi) \\ &= yx^2a^nK_\alpha xa^n \subseteq yx^2Sx^2Sy^2 \subseteq yx^2Sy^2, \end{aligned}$$

ako je K_α desna grupa. Prema tome, važi (6). Jasno je da je S π-regularna.

Obratno, neka je S π-regularna i neka važi (6). Uzmimo $a, b \in S$. Prema (6), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^nb \in a^2Sb^2a \cup ba^2Sb^2 \subseteq Sa \cup bS,$$

pa prema Teoremi 6.5, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija polugrupe K_α, pri čemu K_α jeste leva ili desna grupa. Takodje, prema Teoremi 6.1, $Reg(S) = Gr(S)$. Neka je $K = Reg(S)$. Jasno da je $K = \cup_{\alpha\in Y} K_\alpha$.

Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Prema (6) dobijamo da postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$xe = (xe)e^n e \in (xe)^2 S(exe) \cup e(xe)^2 Se \subseteq (xe)^2 S \cup e(xe)^2 S.$$

Ako je $xe \in e(xe)^2 S$, tada je $xe = exe$, odakle je $xe \in (xe)^2 S$. Slično dokazujemo da je $ex \in (ex)^2 S$, pa kao u dokazu Teoreme 7.7, dobijamo da $K = Reg(S)$ jeste ideal od S. Jasno je da K jeste polumreža Y polugrupa K_α, $\alpha \in Y$.

Sada ćemo dokazati da je

$$xe \in x^m Se, \qquad \text{za svaki} \quad m \in \mathbf{Z}^+. \tag{7}$$

Najpre uzmimo da je $xe = exe$. Tada se neposredno proverava da je $(xe)^m = x^m e$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Kako je $xe \in K$ i K je potpuno regularna polugrupa, to je $xe = (xe)^m u$, za neki $u \in K$, odakle je $xe = xee = (xe)^m ue = x^m eue \in x^m Se$. Dakle, važi (7). Uzmimo sada da je $xe \neq exe$ i uzmimo da je $xe = x^m ue$, za neki $m \in \mathbf{Z}^+$. Prema (6), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $x^m (ue)^n e \in x^{2m} Sex^m \cup ex^{2m} Se$. Osim toga, kako $ue \in K$ i K je potpuno regularna, to je $ue = (ue)^n v$, za neki $v \in K$. Dakle,

$$xe = x^m ue = x^m uee = x^m (ue)^n ve = x^m (ue)^n eve \in x^{2m} Sevex^m \cup exex^{2m} Se.$$

Kako je, prema pretpostavci, $xe \neq exe$, to je $xe \in x^{2m} Sexex^m$, odakle je $xe \in x^{m+1} Se$. Odavde indukcijom dobijamo (7). Slično dokazujemo da je

$$ex \in eSx^m, \qquad \text{za svaki} \quad m \in \mathbf{Z}^+. \tag{8}$$

pa iz (7) i (8), kao u dokazu Teoreme 7.7, dobijamo da je K retrakt od S. $\square$

Teorema 7.9. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija polumreže levih grupa ako i samo ako je S π-regularna i važi:*

$$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in x^2 Sx. \tag{9}$$

Dokaz. Neka je S π-regularna i neka važi (9). Tada prema Teoremi 7.4, S je nil-ekstenzija polugrupe K, gde je K polumreža levih grupa. Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Kao u dokazu Teoreme 7.7. dobijamo da je $xe \in x^m Se$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$, Sa druge strane, iz (9) dobijamo da je $ex = ee^n(ex) \in eSe$, za neki $n \in Z$, pa je $ex = exe$, odakle kao u dokazu Teoreme 7.8. dobijamo da je $ex \in eSx^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Sada kao u dokazu Teoreme 7.7. dobijamo da je K retrakt od S.

Obrat se dokazuje slično kao odgovarajući deo Teoreme 7.8. $\square$

Kombinacijom metoda razlaganja u retraktivnu nil-ekstenziju unije grupa i metoda razlaganja u traku π-grupa dobijamo

Teorema 7.10. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija trake grupa ako i samo ako je S π-regularna i važi:*

$$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in x^2 aSay^2. \tag{10}$$

Dokaz. Neka je S retraktivna nil-ekstenzija polugrupe K, i neka je K traka B grupa G_i, $i \in B$. Neka je ξ odgovarajuću tračnu kongruenciju na K, i neka je φ retrakcija iz S na K. Jasno da je S π-regularna polugrupa. Uzmimo $x, a, y \in S$, Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in K$, odakle $xa^n y, x^2 a^n y^2 \in K$. Sada imamo da je

$$xa^n y = (xa^n y)\varphi = (x\varphi)a^n(y\varphi)\,\xi\,(x\varphi)^2 a^n (y\varphi)^2 = (x^2 a^n y^2)\varphi = x^2 a^n y^2.$$

Prema tome, $xa^n y, x^2 a^n y^2 \in G$, gde je G podgrupa od K, odakle je $xa^n y \in x^2 a^n y^2 G x^2 a^n y^2 \subseteq x^2 aSay^2$.

Obratno, neka je S π-regularna i neka važi (10). Prema Teoremi 7.7, S je retraktivna nil-ekstenzija unije grupa K. Uzmimo $a, b \in K$. Prema (10), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(ab)^{n+1} = a(ba)^n b \in a^2 baSbab^2 \subseteq a^2 bKab^2,$$

pa prema Teoremi 6.9, K je traka π-grupa. Kako je K unija grupa, to je jasno da K jeste traka grupa. $\square$

Teorema 7.11. *Polugrupa S je retraktivna nil-ekstenzija normalne trake grupa ako i samo ako S jeste π-regularna i važi:*

$$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in xyaSxy. \tag{11}$$

Dokaz. Direktni deo teoreme se dokazuje slično kao direktni deo Teoreme 7.10.

Obratno, neka je S π-regularna i neka važi (11). Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Prema (11) dobijamo da postoje $m, n \in \mathbf{Z}^+$ tako da $xe = xe^m e \in xeSxe$ i $ex = ee^n x \in exSex$, odakle $xe, ex \in Reg(S)$, pa kao u dokazu Teoreme 7.1. dobijamo da S jeste nil-ekstenzija regularne polugrupe $K = Reg(S)$. Uzmimo $a \in K$, $x \in V(a)$. Prema (11), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a = ax(ax)^n a \in axaaxSaxa = a^2 xSa \subseteq a^2 Ka$, pa prema Teoremi 2.5, K je unija grupa.

Uzmimo $x \in S$, $e \in E(S)$. Prvo ćemo dokazati da je

$$(xe)^m \in x^m eS, \qquad \text{za svaki } m \in \mathbf{Z}^+. \tag{12}$$

Zaista, uzmimo da je $(xe)^m = x^m eu$, za neki $u \in S$. Prema (11), postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je

$$(xe)^{m+1} = xe(xe)^m = xex^m eu = xe^n x^m eu \in xx^m eueSxx^m eu \subseteq x^{m+1} eS.$$

Sada indukcijom dobijamo da važi (12). Sa druge strane, iz činjenice da je K potpuno regularna sledi da je $xe = (xe)^2 v$, za neki $v \in S$, odakle je $xe = (xe)^{m+1} v^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$, pa prema (12) je

$$xe = xee = (xe)^{m+1} v^m e \in x^m eSxev^m e \subseteq x^m Se.$$

Dakle, $xe \in x^m Se$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$, i slično dokazujemo da je $ex \in eSx^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$, pa kao u dokazu Teoreme 7.7. dobijamo da je K retrakt od S.

Prema Teoremi 2.5, K je polumreža Y potpuno prostih polugrupa K_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo $a, b \in K$. Tada $ab, a^2b, ab^2 \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, dok prema (12), postoje $n \in \mathbf{Z}^+$, $u \in S$, tako da je $a(ab)^n b = abuab$. Kako je $a(ab)^n b \in K_\alpha$, to je $abuab \in K_\alpha$. Ako je $ab \in G_e$, za neki $e \in E(K_\alpha)$, tada prema Lemi 3.13. imamo da je $abuab = eabuabe \in eK_\alpha e = G_e$. Prema tome, $ab, a(ab)^n b \in G_e$, pa je $ab \in a(ab)^n bG_e a(ab)^n b \subseteq a^2bKab^2$, odakle prema Teoremi 6.9, K je traka π-grupa. Kako je K potpuno regularna, to je jasno da je K traka B grupa G_i, $i \in B$. Kako je B homomorfna slika od S, to B zadovoljava (12), odakle, prema Posledici 5.13, B je normalna traka. Dakle, S je retraktivna nil-ekstenzija normalne trake grupa. $\square$

Lako se proverava da se uslov (11) u Teoremi 7.11. može zameniti bilo kojim uslovom oblika

$$(\forall x, a, y \in S)(\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ xa^n y \in xyuSvxy,$$

gde su u i v proizvoljne reči iz monoida $\{x, a, y\}^*$ takve da je $u \neq \varepsilon$ ili $v \neq \varepsilon$.

Zadaci.

1. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je nil-ekstenzija pravougaone grupe i za sve $a \in S$, $e \in E(S)$, je $(ae)^2 = a^2e$ i $(ea)^2 = ea^2$;

(ii) S je poddirektan proizvod pravougaone grupe i nil-polugrupe;

(iii) S je poddirektan proizvod grupe, levo nulte trake, desno nulte trake i nil-polugrupe;

(iii) S je retraktivna nil-ekstenzija pravougaone grupe.

2. Polugrupa S je inflacija unije grupa ako i samo ako je $aS = a^2S$ i $Sa = Sa^2$, za svaki $a \in S$.

3. Polugrupa S je inflacija pravougaone trake ako i samo ako S zadovoljava identitet $xyz = xz$.

Literatura. Bogdanović [14], Bogdanović and Ćirić [3], [4], [5], [8], [9], [11], [14], Ćirić and Bogdanović [2], [4], [13], Bogdanović and Milić [3], Bogdanović and Stamenković [1], Galbiati e Veronesi [1], Petrich [12], Putcha

[1], Putcha and Weissglass [2], [4], Шутов [1], Tamura [11], Tamura, Merkel and Latimer [1].

7.3. Nil-ekstenzije unije grupa indukovane identitetima.

Postoje identiteti sa osobinom da svaka polugrupa koja ih zadovoljava mora biti nil-ekstenzija unije grupa. U ovoj tački opisaćemo sve takve identitete.

Za identitet $u = v$ nad alfabetom $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbf{Z}^+$, za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sa p_i označavamo broj $p_i = ||x_i|_u - |x_i|_v|$. Identitet $u = v$ je *periodičan* ako je $p_i \neq 0$, za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. U tom slučaju, najveći zajednički delilac $p = \text{n.z.d.}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ brojeva $p_1, p_2, \dots, p_n$ nazivamo *period identiteta* $u = v$. U suprotnom, ako je $p_i = 0$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kažemo da je $u = v$ *neperiodičan identitet* i da je njegov period $p = 0$.

Lema 7.6. *Sledeći uslovi za identitet $u = v$ nad alfabetom A_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, su ekvivalentni:*

(*i*) $[u = v]$ *se sastoji od π-regularnih polugrupa;*
(*ii*) $[u = v]$ *se sastoji od potpuno π-regularnih polugrupa;*
(*iii*) $[u = v]$ *se sastoji od periodičnih polugrupa;*
(*iv*) $u = v$ *je periodičan identitet.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iv)$. Ako je $u = v$ neperiodičan, tada je on zadovoljen u multiplikativnoj polugrupi pozitivnih celih brojeva, koja nije π-regularna, što je u suprotnosti sa (i). Prema tome, $u = v$ je periodičan.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka je $S \in [u = v]$. Uzmimo da je $|u| \neq |v|$. Za $a \in S$, neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam oderedjen sa $x_i\phi = a$, za svaki $x_i \in A_n$. Tada iz $u\phi = v\phi$ sledi da je $a^{|u|} = a^{|v|}$. Prema tome, S je periodična.

Uzmimo da je $|u| = |v| = s$. Iz (iv) imamo da je $|x_i|_u = k$, $|x_i|_v = m$ i $k \neq m$, za neki $x_i \in A_n$. Za $a \in S$, neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa $x_i\phi = a^2$, $x_j\phi = a$, za $x_j \in A_n - \{x_i\}$. Tada iz $u\phi = v\phi$ dobijamo da je $a^{s+k} = a^{s+m}$, pri čemu je $s + m \neq s + k$. Prema tome, S je periodična.

$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Ako su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ date klase polugrupa, tada *Maljcevljev proizvod klasa* $\mathcal{X}_1$ *i* $\mathcal{X}_2$, u oznaci $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$, jeste klasa svih polugrupa S za koje postoji kongruencija ξ na S takva da je faktor polugrupa S/ξ u klasi $\mathcal{X}_2$ i svaka ξ-klasa koja je podpolugrupa od S je u klasi $\mathcal{X}_1$. Na primer, ako sa $\mathcal{S}$ označimo klasu svih polumreža, tada je $\mathcal{X} \circ \mathcal{S}$ klasa svih polugrupa koje su polumreže polugrupa iz klase $\mathcal{X}$. Ako je $\mathcal{X}_2$ podklasa klase $\mathcal{N}$ svih nil-polugrupa, onda je $\mathcal{X}_1 \circ \mathcal{X}_2$ klasa svih polugrupa koje su idealske ekstenzije polugrupa iz klase $\mathcal{X}_1$ pomoću polugrupa iz klase $\mathcal{X}_2$. U tom slučaju, sa $\mathcal{X}_1 \circledast \mathcal{X}_2$ označavamo *klasu svih polugrupa koje su retraktivne ekstenzije polugrupa iz* $\mathcal{X}_1$ *pomoću polugrupa iz* $\mathcal{X}_2$.

Neka je $\mathcal{X}$ data klasa polugrupa. Identitet $u = v$ je $\mathcal{X}$-*identitet* ako svaka polugrupa koja zadovoljava $u = v$ je u klasi $\mathcal{X}$, tj. ako je $[u = v] \subseteq \mathcal{X}$. Kao što je napred rečeno u ovoj tački razmatraćemo identitete $u = v$ za koje se varijetet $[u = v]$ sastoji od nil-ekstenzija unija grupa. Počećemo od istotipnih identiteta. Naime, nadalje ćemo razmatrati identitet

$$u = v, \tag{13}$$

gde su $u, v \in A_n^+$ reči za koje je $c(u) = c(v) = A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Ako je $w \in A^+$ reč nad alfabetom A, sa $\Pi(w)$ ćemo označavati skup $\Pi(w) = \{x \in A \mid |x|_w = 1\}$. Sa $C_{1,1}$ označavamo polugrupu datu kopredstavljanjem $C_{1,1} = \langle\, a, e \mid a^2 = a^3, e^2 = e, ae = a, ea = a \rangle$.

Lema 7.7. *Polugrupa* $C_{1,1}$ *zadovoljava identitet* (13) *ako i samo ako je* $\Pi(u) = \Pi(v)$.

Dokaz. Neka $C_{1,1}$ zadovoljava (13). Uzmimo da je $\Pi(u) \neq \Pi(v)$, tj. da važi:

$$(\exists x_k \in A_n) \quad (|x_k|_u = 1 \ \wedge \ |x_k|_v \geq 2) \ \vee \ (|x_k|_u \leq 2 \ \wedge \ |x_k|_v = 1) \ .$$

Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je $|x_k|_u = 1$ i $|x_k|_v \geq 2$. Neka je $\phi : A_n^+ \to C_{1,1}$ homomorfizam odredjen sa:

$$x_k\phi = a \ , \quad x_i\phi = e \text{ za } x_i \in A_n^+ - \{x_k\} \ .$$

Tada dobijamo da je $u\phi = a \neq 0 = v\phi$, pa $C_{1,1}$ ne zadovoljava (13), što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Dakle, $\Pi(u) = \Pi(v)$.

Obratno, neka je $\Pi(u) = \Pi(v)$. Uzmimo da je $\Pi(u) = \Pi(v) = \varnothing$. Tada reči u i v imaju u $C_{1,1}$ raspodelu:

$$\begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \dots, e) \\ 0 & \text{inače} \end{cases} ,$$

odakle sledi da $C_{1,1}$ zadovoljava (13). Neka je $\Pi(u) = \Pi(v) = \Pi \neq \varnothing$ i neka je $\phi : A_n^+ \to C_{1,1}$ homomorfizam. Tada je:

$$u\phi = \begin{cases} a & \text{ako je } |\{x \mid x \in \Pi \ \wedge \ x\phi = a\}| = 1 \\ e & \text{ako je } x_1\phi = \ldots = x_n\phi = e \\ 0 & \text{inače} \end{cases} = v\phi \ .$$

Prema tome, $C_{1,1}$ zadovoljava (13). $\square$

Ako je $w \in A^+$ reč nad alfabetom A i ako je $x \in A$, tada sa $x \underset{l}{\|} u$ ($x \underset{r}{\|} u$)

označavamo da je $u = xu'$, $u' \in A^+$, $x \nmid u'$ ($u = u'x$, $u' \in A^+$, $x \nmid u'$). U suprotnom pišemo $x \underset{l}{\nparallel} u$ ($x \underset{r}{\nparallel} u$). Sa $C_{1,2}$ označavamo polugrupu datu kopredstavljanjem $C_{1,2} = \langle\, a, e \mid a^2 = a^3, e^2 = e, ae = a, ea = a^2 \rangle$. Sa $C_{2,1}$ označavamo *dualnu polugrupu polugrupe* $C_{1,2}$.

Lema 7.8. *Neka je* $u \in A_n^+$ *reč takva da je* $h(u) = x_1$. *Tada* u *u* $C_{1,2}$ *nema raspodelu*

$$(14) \qquad \begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \dots, e) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

ako i samo ako je $x_1 \underset{r}{\parallel} u$. *U tom slučaju,* u *ima u* $C_{1,2}$ *sledeću raspodelu:*

$$(15) \qquad \begin{cases} a & \text{za valuaciju } (a, e, \dots, e) \\ e & \text{za valuaciju } (e, e, \dots, e) \\ 0 & \text{inače} \end{cases} .$$

Dokaz. Neka u nema u $C_{1,2}$ raspodelu (14), i neka je $u = x_1u'$, za neki $u' \in A_n^+$. Uzmimo da je $x_1 \mid u'$, i neka je $\phi : A_n^+ \to C_{1,2}$ homomorfizam. Ako postoji $x_i \in A_n$ tako da je $x_i\phi = 0$, tada je jasno da je $u\phi = 0$. Neka je $x_i\phi \neq 0$, za sve $x_i \in A_n$. Ako je $x_i\phi = e$, za sve $x_i \in A_n$, tada je $u\phi = e$. Uzmimo da postoji $x_i \in A_n$ tako da je $x_i\phi = a$. Ako je $x_1\phi = e$, tada je $u\phi = 0$, jer $a \mid u'\phi$. Na kraju, neka je $x_1\phi = a$. Kako po pretpostavci $x_1 \mid u'$, i kako a i e komutiraju, to dobijamo da $0 = a^2 \mid u\phi$, tj. $u\phi = 0$. Dakle, u ima u $C_{1,2}$ raspodelu (14), što protivreči polaznoj pretpostavci. Dakle, $x_1 \underset{l}{\parallel} u'$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Sa $\mathcal{UG}$ ćemo označavati *klasu svih unija grupa* (potpuno regularnih polugrupa). Sledeća teorema je glavni rezultat ove tačke:

Teorema 7.12. *Sledeći uslovi za identitet* (13) *su ekvivalentni:*

(*i*) (13) *je* $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet;*

(*ii*) (13) *nije zadovoljen u polugrupama* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$ *and* $C_{2,1}$*;*

(*iii*) $\Pi(u) \neq \Pi(v)$ *i* (13) *je p-ekvivalentan identitetu nekom od sledećih oblika:*

(*A*1) $x_1u'(x_2, \dots, x_n) = v'(x_1, \dots, x_{n-1})x_n$, *gde* $x_1 \underset{l}{\nparallel} v'$ *i* $x_n \underset{r}{\nparallel} u'$*;*

(*A*2) $x_1u'x_n = v'$, *gde* $x_1, x_n \nmid u'$, $x_1 \underset{l}{\nparallel} v'$ *i* $x_n \underset{r}{\nparallel} v'$*;*

(*A*3) $x_1u'(x_2, \dots, x_n) = v'(x_2, \dots, x_n)x_1$.

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Sledi iz činjenice da polugrupe $C_{1,1}$, $C_{1,2}$ i $C_{2,1}$ nisu nil-ekstenzije unije grupa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Tada prema Lemi 7.7. dobijamo da je $\Pi(u) \neq \Pi(v)$. Kako $C_{1,2}$ ne zadovoljava (13), to jedna od reči u i v nema u $C_{1,2}$ raspodelu (14). Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da to važi za reč u. Osim toga, bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je $h(u) = x_1$. Sada prema Lemi 7.8. dobijamo da je $u = x_1 u'(x_2, \dots, x_n)$. Sa druge strane, kako polugrupa $C_{2,1}$ ne zadovoljava (13), to jedna od reči u i v nema u $C_{2,1}$ raspodelu:

$$(16) \qquad \begin{cases} e & \text{za valuaciju } (e, e, \dots, e) \\ 0 & \text{inače} \end{cases} .$$

Uzmimo da reč u nema respodelu (16) u $C_{2,1}$. Bez umanjena opštosti dokaza, možemo uzeti da je $t(u) = x_n$. Tada prema dualu Leme 7.8. dobijamo da je $u = x_1 u'' x_n$, za neki $u'' \in A_n^*$, i $x_1, x_n \nmid u''$. Ako $x_1 \underset{l}{\|} v$, tada u i v imaju u $C_{1,2}$ raspodelu (15), pa $C_{1,2}$ zadovoljava (13), što je u suprotnosti sa (ii). Prema tome, $x_1 \underset{l}{\nparallel} v$. Slično dokazujemo da $x_n \underset{r}{\nparallel} v$. Dakle, važi $(A2)$.

Uzmimo da reč v nema raspodelu (16) u $C_{2,1}$. Uzmimo da je $t(v) = x_1$. Tada prema dualu Leme 7.8, dobijamo da je $v = v'(x_2, \dots, x_n)x_1$, pa važi $(A3)$. Neka je $t(v) \neq x_1$. Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je $t(v) = x_n$. Prema dualu Leme 7.8. sledi da je $v = v'(x_1, \dots, x_{n-1})x_n$. Takodje, kako polugrupe $C_{1,2}$ i $C_{2,1}$ ne zadovoljavaju (13), prema Lemi 7.8. i njenom dualu sledi da $x_1 \underset{l}{\nparallel} v'$ i $x_n \underset{r}{\nparallel} u'$. Prema tome, važi $(A1)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je S polugrupa koja zadovoljava (13). Tada iz $\Pi(u) \neq \Pi(v)$, prema Lemi 7.6, sledi da je S periodična. Neka je $a \in S$, $e \in E(S)$. Neka je $x_i \in (\Pi(u) - \Pi(v)) \cup (\Pi(v) - \Pi(u))$, i neka su $\alpha, \beta : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa

$$\begin{aligned} x_i\alpha &= ea, \quad x_j\alpha = e \;\text{ za }\; x_j \in A_n - \{x_i\}, \\ x_i\beta &= ae, \quad x_j\beta = e \;\text{ za }\; x_j \in A_n - \{x_i\}. \end{aligned}$$

Tada iz $u\alpha = v\alpha$ i $u\beta = v\beta$ dobijamo da je

$$(17) \qquad \begin{cases} eae^l = (ea)^k e^m \\ e^p ae = e^q (ae)^k \end{cases} \qquad \text{za neke } l, m, p, q \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\},$$

gde je $k = \max\{|x_i|_u, |x_i|_v\}$.

Uzmimo da je identitet (13) p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $(A1)$. Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je (13) oblika $(A1)$. Neka su $\varphi, \psi : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa:

$$\begin{aligned} x_1\varphi &= ae \;, \qquad x_j\varphi = e \quad \text{za } \; x_j \in A_n - \{x_1\} \;, \\ x_n\psi &= ea \;, \qquad x_j\psi = e \quad \text{za } \; x_j \in A_n - \{x_n\} \;. \end{aligned}$$

Tada je $u\varphi = v\varphi$ i $u\psi = v\psi$, odakle je:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} ae = e^s(ae)^{|x_1|_{v'}} \\ ea = (ea)^{|x_n|_{u'}}e^t \end{cases} \qquad \text{za neke } s,t \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Ako je $s = 0$, tada je $h(v') = x_1$, pa prema $(A1)$ sledi da je $|x_1|_{v'} \geq 2$, odakle je $ae = (ae)^{|x_1|_{v'}} \in Gr(S)$. Uzmimo da je $s \geq 1$. Tada iz (18) sledi da je $ae = eae$, pa prema (17) dobijamo da je $ae = (ae)^k \in Gr(S)$. Slično dokazujemo da je $ea \in Gr(S)$. Prema tome,

$$\text{(19)} \qquad S \cdot E(S) \cup E(S) \cdot S \subseteq Gr(S)\ .$$

Neka je (13) oblika $(A2)$. Kao u prethodnom slučaju dobijamo da je:

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} ae = e^s(ae)^{|x_1|_{v'}} \\ ea = (ea)^{|x_n|_{v'}}e^t \end{cases} \qquad \text{za neke } s,t \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Ako je $s = 0$, tada prema $(A2)$ dobijamo da je $|x_1|_{v'} \geq 2$, pa je $ae = (ae)^{|x_1|_{v'}} \in Gr(S)$. Ako je $s \geq 1$, tada prema (20) dobijamo da je $ae = eae$, pa prema (17), $ae = (ae)^k \in Gr(S)$. Slično dokazujemo da je $ea \in Gr(S)$. Prema tome, važi (9).

Na kraju, uzmimo da je (13) oblika $(A3)$. Neka su $\varphi, \psi : A_n^+ \to S$ homomorfizmi odredjeni sa:

$$\begin{aligned} x_1\varphi &= ae\ , \qquad x_j\varphi = e \quad \text{za } x_j \in A_n - \{x_1\}\ , \\ x_1\psi &= ea\ , \qquad x_j\psi = e \quad \text{za } x_j \in A_n - \{x_1\}\ . \end{aligned}$$

Tada je $u\varphi = v\varphi$ i $u\psi = v\psi$, odakle je $ae = eae = ea$, pa prema (17) dobijamo da je $ae = ea = (ae)^k \in Gr(S)$. Prema tome, važi (9).

Dakle, u svim slučajevima smo dobili da važi (9), odakle, slično kao u dokazu Teoreme 7.1, dokazujemo da je $Gr(S)$ ideal od S. Prema tome, S je nil-ekstenzija unije grupa, pa važi (i). $\square$

Sa R_2 i L_2 označavamo *dvoelementnu desno nultu traku* i *dvoelementnu levo nultu traku*, tim redom. Sa $\mathcal{LG}$ označavamo *klasu svih levih grupa*, a sa $\mathcal{G}$ *klasu svih grupa*.

Posledica 7.3. *Sledeći uslovi za identitet* (13) *su ekvivalentni:*

(i) (13) *je* $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{N}$*-identitet;*

(ii) (13) *nije zadovoljen u polugrupama* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, R_2*;*

(iii) (13) *je* $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet i* $t(u) \neq t(v)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je S polugrupa koja zadovoljava (13). Prema Teoremi 7.12, S je nil-ekstenzija unije grupa K. Uzmimo $e, f \in E(K)$. Neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa:

$$(t(u))\phi = e, \quad x_i\phi = f, \quad \text{za } x_i \in A_n - \{t(u)\}.$$

Tada je $u\phi = (fe)^k$ ili $u\phi = e(fe)^k$, za neki $k \in \mathbf{Z}^+$, i $v\phi = (ef)^m$ ili $v\phi = f(ef)^m$, za neki $m \in \mathbf{Z}^+$, pa iz $u\phi = v\phi$ dobijamo da je $(ef)^{m+1} \in Se$, odakle je $(ef)^{m+1} = (ef)^{m+1}e = (efe)^{m+1}$. Odavde, prema Teoremi 6.6. dobijamo da je K polumreža nil-ekstenzija levih grupa, pa kako je K potpuno regularna, to je K polumreža grupa. Dakle, važi (i). $\square$

Posledica 7.4. *Sledeći uslovi za identitet* (13) *su ekvivalentni:*

(i) (13) *je* $(\mathcal{G} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{N}$*-identitet;*

(ii) (13) *je* $(\mathcal{G} \circ \mathcal{S}) \circledast \mathcal{N}$*-identitet;*

(iii) (13) *nije zadovoljen u polugrupama* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, R_2 *i* L_2*;*

(iv) (13) *je* $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet,* $t(u) \neq t(v)$ *I* $h(u) \neq h(v)$. $\square$

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ sledi prema Teoremi 7.5. Ostatak se dokazuje slično kao Posledica 7.3. $\square$

Sa $L_{3,1}$ označavamo polugrupu datu kopredstavljanjem

$$L_{3,1} = \langle a, f \mid a^2 = a^3, f^2 = f, a^2 f = a^2, fa = f \rangle$$

a sa $R_{3,1}$ označavamo *dualnu polugrupu polugrupe* $L_{3,1}$. Lako se proverava da ove polugrupe jesu nil-ekstenzije unije grupa, ali nisu retraktivne nil-ekstenzije unije grupa.

Neposredno se dokazuje sledeća lema:

Lema 7.9. *Polugrupa* $L_{3,1}$ *zadovoljava identitet* (13) *sa* $h^{(2)}(u) = h^{(2)}(v)$. $\square$

Identiteti koji indukuju retraktivne nil-ekstenzije unije grupa biće opisani narednom teoremom. Može se primetiti da postojenje retrakcije zavisi samo od prva dva i poslednja dva slova u rečima koje odredjuju identitet.

Teorema 7.13. *Sledeći uslovi za identitet* (13) *su ekvivalentni:*

(i) (13) *je* $\mathcal{UG} \circledast \mathcal{N}$*-identitet;*

(ii) (13) *nije zadovoljen u polugrupama* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $L_{3,1}$ *i* $R_{3,1}$*;*

(iii) (13) *je* $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet,* $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$ *i* $t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii). Prema Teoremi 7.12, (13) je $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$-identitet. Takodje, prema Lemi 7.9. i njenom dualu, i prema polaznim pretpostavkama, dobijamo da je $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$ i $t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii) i neka je S polugrupa koja zadovoljava (13). Jasno je da je S nil-ekstenzija unije grupa K. Uzmimo $a \in S$, $e \in E(S)$.

Prema Teoremi 7.12, identitet (13) je p-ekvivalentan identitetu nekog od oblika $(A1), (A2)$ ili $(A3)$. Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je (13) jednog od oblika $(A1), (A2)$ ili $(A3)$. Ako je (13) oblika $(A3)$, tada prema Teoremi 7.12. i Posledici 7.4. dobijamo da je S retraktivna nil-ekstenzija od K.

Uzmimo da je (13) oblika $(A1)$ ili $(A2)$. Tada je $|x_1|_u = 1$ i $h^{(2)}(u) = x_1x_k$, za neki $k \in \{2,\dots,n\}$. Uzmimo da je $h(v) \neq x_1$. Neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam oderedjen sa:

$$x_1\phi = ae\ , \quad x_i\phi = e \quad \text{za}\ \ i \in \{2,\dots,n\}\ .$$

Iz $u\phi = v\phi$ sledi da je $ae = e(ae)^r$, gde je $r = |x_1|_v$, pa je $ae = eae$, odakle je $a^m e = (ae)^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Sa druge strane, kako je K potpuno regularna, to je $ae = (ae)^2u$, za neki $u \in K$, odakle je $ae = (ae)^{m+1}u^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Sada imamo da je $ae = (ae)^m aeu = a^m eaeu$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Prema tome, dokazali smo da je

$$(21) \qquad ae \in a^m S, \qquad \text{za svaki}\ \ m \in \mathbf{Z}^+.$$

Neka je $h(v) = x_1$. Prema (iii) imamo da je $h^{(2)}(v) = x_1^2$ ili $h^{(2)}(v) = x_1x_j$, za neki $j \in \{2,\dots,n\}$, $j \neq k$. Uzmimo da je $h^{(2)}(v) = x_1^2$. Neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa:

$$x_1\phi = a\ , \quad x_i\phi = e \quad \text{za}\ \ i \in \{2,\dots,n\}\ .$$

Kako je $u\phi = v\phi$, to je $ae = a^r es$, za neke $r \in \mathbf{Z}^+$, $r \geq 2$, $s \in S$. Odavde sledi da je $ae = a^{m(r-1)}aes^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$, odakle sledi (21).

Uzmimo da je $h^{(2)}(v) = x_1x_j$, za $j \in \{2,\dots,n\}$, $j \neq k$. Kako je $Reg(S) = K = Gr(S)$, to prema Teoremi 6.1, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, S_α je nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe K_α. Uzmimo da je $a \in S_\alpha$, $e \in S_\beta$, za neke $\alpha, \beta \in Y$. Tada je $ae \in K \cap S_{\alpha\beta} = Reg(S) \cap S_{\alpha\beta} = Reg(S_{\alpha\beta}) = K_{\alpha\beta}$. Prema Teoremi 3.8, $K_{\alpha\beta}$ je pravougaona traka $I \times \Lambda$ grupa $H_{i\lambda}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, pa je $ae \in H_{i\lambda}$, za neke $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Neka je $e_{i\lambda}$ jedinica grupe $H_{i\lambda}$. Tada se lako proverava da je $ae_{i\lambda} \in H_{j\lambda}$, za neki $j \in I$. Neka je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa:

$$x_1\phi = a\ ,\ x_k\phi = e \quad \text{i} \quad x_l\phi = e_{i\lambda} \ \ \text{za}\ \ x_l \in A_n - \{x_1, x_k\}\ .$$

Tada iz $u\phi = v\phi$ sledi da je

$$(22) \qquad aes_1 = ae_{i\lambda}s_2 \quad \text{za neke}\ s_1, s_2 \in K_{\alpha\beta}\ .$$

Kako $aes_1 \in H_{i\eta}$ i $ae_{i\lambda}s_2 \in H_{j\nu}$ za neke $\eta, \nu \in \Lambda$, to prema (22) dobijamo da je $i = j$, pa je $ae_{i\lambda} \in H_{i\lambda}$. Odavde imamo da je $ae_{i\lambda} = e_{i\lambda}ae_{i\lambda}$, pa kao u prethodnom slučaju dokazujemo da za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$ postoji $s \in S$ tako da je $ae = (ae_{i\lambda})^m s = a^m e_{i\lambda}s \in a^m S$, odakle sledi da važi (21). Dakle, (21) važi u svim slučajevima. Na sličan način, koristeći da je $t^{(2)}(u) \neq t^{(2)}(v)$, dobijamo da je $ea \in Sa^m$, za svaki $m \in \mathbf{Z}^+$. Sada kao u dokazu Teoreme 7.7. dobijamo da je K retrakt od S. $\square$

Posledica 7.5. *Sledeći uslovi za identitet* (13) *su ekvivalentni:*

(i) (13) *je* $(\mathcal{LG} \circ \mathcal{S}) \circledast \mathcal{N}$*-identitet;*

(ii) (13) *nije zadovoljen u polugrupama* $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $L_{3,1}$ *i* R_2*;*

(iii) (13) *je* $\mathcal{UG} \circ \mathcal{N}$*-identitet,* $h^{(2)}(u) \neq h^{(2)}(v)$ *i* $t(u) \neq t(v)$. $\square$

Napred je, kao što smo već napomenuli, bilo reči samo o istotipnim identitetima. Sada ćemo preći na razmatranje raznotipnih identiteta. Sa $\mathcal{CS}$ ćemo označiti *klasu svih potpuno prostih polugrupa* a sa C_2 označavamo *dvoelementni lanac*. Sledeća teorema pokazuje da je skup raznotipnih identiteta jednak skupu $\mathcal{CS} \circ \mathcal{N}$-identiteta.

Teorema 7.14. *Sledeći uslovi za identitet $u = v$ nad alfabetom A_n, $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$, su ekvivalentni:*
(*i*) $u = v$ *je* $\mathcal{CS} \circ \mathcal{N}$*-identitet;*
(*ii*) $u = v$ *nije zadovoljen u polugrupi* C_2*;*
(*iii*) $u = v$ *je raznotipan identitet.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka je $u = v$ raznotipan identitet i neka je S polugrupa koja zadovoljava $u = v$. Prema Lemi 7.6, S je periodična polugrupa. Kako je $c(u) \neq c(v)$, to je $c(u) - c(v) \neq \varnothing$ ili $c(v) - c(u) \neq \varnothing$. Bez umanjenja opštosti dokaza, možemo uzeti da je $c(u) - c(v) \neq \varnothing$, tj. da postoji $x_i \in c(u) - c(v)$. Uzmimo $a, b \in S$, i uzmimo da je $\phi : A_n^+ \to S$ homomorfizam odredjen sa

$$x_i\phi = b, \qquad x_j\phi = a, \quad \text{za } x_j \in A_n - \{x_i\}.$$

Tada je $u\phi = v\phi$, odakle $a^{|v|} = u\phi \in S^1bS^1$. Prema tome, S je Arhimedova polugrupa, pa prema Teoremi 3.14, S je nil-ekstenzija (periodične) potpuno proste polugrupe. Dakle, važi (i). □

Metodologijom koju smo primenjivali na istotipne identitete, mogu se dati karakterizacije $\mathcal{CS} \circledast \mathcal{N}$-identiteta, $\mathcal{LG} \circ \mathcal{N}$-identiteta, $\mathcal{LG} \circledast \mathcal{N}$-identiteta, $\mathcal{G} \circ \mathcal{N}$-identiteta, itd.

Zadaci.

1. Neka je Q nil-polugrupa koja zadovoljava identitet $x_1x_2 \dots x_n = w$, gde je $|w| \geq n + 1$. Tada je $Q^n = \{0\}$.

2. Neka je $A_N = \{\, x_k \mid k \in \mathbf{Z}^+ \,\}$ i $D_N = \{u \in A_N^+ \mid \Pi(u) = c(u)\} \cup 0$, gde $0 \notin A_N^+$. Dokazati da D_N sa množenjem definisanim sa

$$u \cdot v = \begin{cases} uv & \text{ako } u, v \neq 0 \text{ i } c(u) \cap c(v) = \varnothing \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

jeste polugrupa. Ako je $I = \{u \in A_N^+ \mid (\exists x_i \in A_N)\ |x_i|_u \geq 2$, dokazati da je I ideal od A_N^+ i $(A_N^+)/I \cong D_N$. Dokazati da D_n jeste nil-polugrupa i nije nilpotentna.

3. Neka je $N_m = \langle a \mid a^{m+1} = a^{m+2} \rangle$, $m \in \mathbf{Z}^+$, i neka je $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbf{Z}^+$, *klasa svih* $(k+1)$*-nilpotentnih* polugrupa. Dokazati da su sledeći uslovi za identitet $u = v$, $c(u) = c(v) = A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ekvivalentni:

(i) $u=v$ je $\mathcal{UG}\circ\mathcal{N}_k$-identitet;
(ii) $u=v$ nije zadovoljen u $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, D_N and N_{k+1};
(iii) $n\leq k+1$ i $u=v$ je p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $x_1x_2\dots x_n=w$, gde je $|w|\geq n+1$, $x_1 \underset{l}{\nmid\!\mid} w$ i $x_n \underset{l}{\nmid\!\mid} w$.

4. Sledeći uslovi za identitet $u=v$, $c(u)=c(v)=A_n=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, su ekvivalentni:
(i) $u=v$ je $\mathcal{UG}\circledast\mathcal{N}_k$-identitet;
(ii) $u=v$ nije zadovoljen u $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $L_{3,1}$, $R_{3,1}$, D_N i N_{k+1};
(iii) $u=v$ je p-ekvivalentan nekom identitetu oblika $x_1x_2\dots x_n=w$, gde je $|w|\geq n+1$, $h^{(2)}(u)\neq x_1x_2$ i $t^{(2)}(v)\neq x_{n-1}x_n$.

5. Identitet $u=v$ odredjuje varijetet koji se sastoji od polugrupa koje su inflacije unije grupa ako i samo ako je $u=v$ p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika
(i) $x=w$, gde je w reč različita od x;
(ii) $xy=w$, gde je w reč različita od yx koja niti počinje niti se završava sa xy.

6. Identitet $u(x,y)=v(x,y)$ je $\mathcal{UG}\circ\mathcal{N}$-identitet ako i samo ako je p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:
(a) $xy=w$, gde je $w\in A_2^+$ i $w\notin\{xy^m \mid m\in\mathbf{Z}^+\}\cup\{x^my\mid m\in\mathbf{Z}^+\}\cup\{yx\}$;
(b) $xy^m=x^ny$, gde je $m,n\in\mathbf{Z}^+$, $m,n\geq 2$.

7. Identitet $u(x,y)=v(x,y)$ je $\mathcal{UG}\circledast\mathcal{N}$-identitet ako i samo ako je p-ekvivalentan identitetu jednog od sledećih oblika:
(a) $xy=w$, gde je $w\in A_2^+$, $|w|\geq 3$ i $h^{(2)}(w)\neq xy\neq t^{(2)}(w)$;
(b) $xy^m=x^ny$, gde je $m,n\in\mathbf{Z}^+$, $m,n\geq 2$.

8. Pravovernu (ortodoksnu) uniju grupa nazivamo *ortogrupa*, traku grupa nazivamo *kriptogrupa*, pravovernu kriptogrupu nazivamo *ortokriptogrupa*, a za $\mathcal{J}$-klase unije grupa kažemo da su njene *potpuno proste komponente*.

Neka je $w=x^{m_1}y^{n_1}x^{m_2}y^{n_2}\cdots x^{m_h}y^{n_h}$, sa h, m_i, $n_i\in\mathbf{Z}^+$, $i\in\{1,2,\dots,h\}$ i $h=1\Rightarrow m_1,n_1\geq 2$, i neka je $p_x=\Sigma_{i=1}^h m_i-1$, $p_y=\Sigma_{i=1}^h n_i-1$, $p=\text{n.z.d.}(p_x,p_y)$. Dokazati

(a) $S\in[xy=w]$ sa n.z.d.$(p_x,p_y,\ h-1)=1$ ako i samo ako S^2 jeste ortogrupa čije su podgrupe iz $[xy=w]$ i $ab\,\mathcal{L}\,a^{m_1}b$, $ab\,\mathcal{R}\,ab^{n_h}$, za sve $a,b\in S$.

(b) $S\in[xy=w]$ sa $m_1,n_h=1$ ako i samo ako S^2 jeste ortogrupa čije podgrupe su iz $[xy=w]$.

(c) $S\in[xy=w]$ sa $m_1,n_h\geq 2$ i n.z.d.$(p_x,p_y,m_1-1)=$ n.z.d.$(p_x,p_y,n_h-1)=1$ ako i samo ako S jeste inflacija kriptogrupe čije potpuno proste komponente su iz $[xy=w]$.

(d) $S\in[xy=w]$ sa $p=m_1=n_h=1$ ako i samo ako S^2 jeste traka.

(e) Ako je $p=1$ i $m_1, n_h \geq 2$, tada je $[xy=w]=[xy=x^2y,\ xy=xy^2]=[xy=x^2y^2]$ i $S\in[xy=w]$ ako i samo ako S jeste inflacija trake.

(f) $S\in[xy=w]$ sa $p=1$ i $m_1\geq 2,\ n_h=1$ $(m_1=1,\ n_h\geq 2)$ ako i samo ako S^2 jeste traka i $S\in[xy=x^2y]$ $(S\in[xy=xy^2w])$.

(g) $S\in[xy=w]$ sa $m_1,n_h\geq 2$ i n.z.d.$(p_x,p_y,m_1-1)=$ n.z.d.$(p_x,p_y,n_h-1)=$ n.z.d.$(p_x,p_y,h-1)=1$ ako i samo ako S jeste inflacija ortokriptogrupe čije podgrupe su iz $[xy=w]$.

9. Neka je $w=y^{n_0}x^{m_1}y^{n_1}x^{m_2}y^{n_2}\cdots x^{m_h}y^{n_h}$, sa $h,\ n_0,\ m_i,\ n_i\in\mathbf{Z}^+,\ i\in\{1,2,\dots,h\}$, i neka je $p_x=\Sigma_{i=1}^{h}m_i-1,\ p_y=\Sigma_{i=0}^{h}n_i-1,\ p=$ n.z.d.(p_x,p_y).

(a) $S\in[xy=w]$ ako i samo ako S^2 jeste polumreža desnih grupa čije podgrupe su iz $[xy=w]$ i $ab\,\mathcal{R}\,ab^{n_h}$, za sve $a,b\in S$.

(b) $S\in[xy=w]$ sa $n_h=1$ ako i samo ako S^2 jeste polumreža desnih grupa čije podgrupe su iz $[xy=w]$.

(c) $S\in[xy=w]$ sa $p=n_h=1$ ako i samo ako S^2 jeste desna regularna traka.

(d) $S\in[xy=w]$ sa $p=1$ i $n_h\geq 2$ ako i samo ako S jeste inflacija desno regularne trake.

(e) $S\in[xy=w]$ sa $n_h\geq 2$ i n.z.d.$(p_x,p_y,n_h-1)=1$ ako i samo ako S jeste inflacija desno regularne trake grupa čije podgrupe su iz $[xy=w]$.

10. Neka je $w=y^{n_1}x^{m_1}y^{n_2}x^{m_2}y^{n_2}\cdots y^{n_h}x^{m_h}$, sa $h,\ m_i,\ n_i\in\mathbf{Z}^+,\ i\in\{1,2,\dots,h\},\ \Sigma_{i=1}^{h}m_i+\Sigma_{i=0}^{h}n_i\geq 3$. Tada je $S\in[xy=w]$ ako i samo ako S jeste inflacija polumreže grupa čije podgrupe su iz $[xy=w]$.

11. Polugrupa S zadovoljava identitet $xy^m=x^ny$, gde je $m,n\in\mathbf{Z}^+,\ m,n\geq 2$, ako i samo ako S jeste retraktivna ekstenzija polugrupe koja zadovoljava $x=x^{p+1}$ pomoću nil-polugrupe koja zadovoljava $xy^m=x^ny$.

12. Neka je $n\in\mathbf{Z}^+,\ n\geq 2$. Polugrupa S je n-*distributivna* ako zadovoljava identitete $a(x_1x_2\dots x_n)=(ax_1)(ax_2)\dots(ax_n)$, $(x_1x_2\dots x_n)a=(x_1a)(x_2a)\dots(x_na)$. Dokazati da je polugrupa S n-distributivna ako i samo ako S jeste n-inflacija pravoverne polugrupe koja je normalna traka komutativnih grupa koje zadovoljavaju $x^n=x$.

Literatura. Bogdanović [18], Bogdanović and Ćirić [11], Bogdanović and Milić [3], Bogdanović and Stamenković [1], Chrislock [4], Ćirić and Bogdanović [2], [6], [7], [12], [13], Clarke [1], [2], [3], [4], Gerhard [1], Lee Sin-Min [1], Мальцев [1], Mead and Tamura [1], Petrich [11], Putcha and Weissglass [2], [4], Салий [1], Сапир и Суханов [1], Шеврин [2], Шеврин и Волков [1], Шеврин и Суханов [1], Stein [1], Tamura [11], Тищенко [1].

GLAVA 8

Teorija razlaganja polugrupa sa nulom

Aparati koji se koriste kod razlaganja polugrupa, kod razlaganja polugrupa sa nulom ne daju željene rezultate. Da ne nabrajamo mnogo, dobar primer za to su razlaganja u levo (desno) nultu traku, jer su polugrupe sa nulom nerazložive u tom smislu. To iziskuje i neke nove metode razlaganja specifične za polugrupe sa nulom. Naime, u ovoj glavi će biti izloženi rezultati o razlaganju polugrupe sa nulom u desnu sumu polugrupa i o ortogonalnim razlaganjima. U oba slučaja će biti opisane, i to induktivno, sumandi odgovarajućeg razlaganja. Naš pristup problemu razlaganja polugrupa sa nulom razlikuje se od onog koji su forsirali J.Dieudonné (1942.) u Teoriji prstena i Š.Schwarz (1951) u Teoriji polugrupa. Njihova glavna sredstva bili su cokl i 0-minimalni (levi) ideali. Ovde će glavnu ulogu igrati (desno) 0-dosledni (levi) ideali. Spomenimo da je pojam (desno) doslednog skupa uveo P.Dubreil 1941. godine. Uticaj 0-primitivnih idempotenata na strukturu π-regularne polugrupe će se videti u Tački 8.4. Potom će biti izloženi rezultati koji povezuju ortogonalna i polumrežna razlaganja. U poslednjoj tački ove glave uspostavljena je prirodna veza izmedju ortogonalnih razlaganja i Booleovih algebri. Koristeći te rezultate opisuju se razlaganja mreža ideala polugrupe sa nulom u direktne proizvode.

8.1. Najveće razlaganje u desnu sumu.

U ovoj tački dokazaćemo da proizvoljna polugrupa sa nulom ima najveće razlaganje u desnu sumu polugrupa i opisaćemo relaciju ekvivalencije koja odredjuje to razlaganje.

Polugrupa $S = S^0$ je *desna suma* polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, u oznaci $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ ili $S = \mathrm{R}\Sigma_Y S_\alpha$, ako $S_\alpha \neq 0$, za sve $\alpha \in Y$, $S = \cup_{\alpha\in Y} S_\alpha$, $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$ i $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$, za sve $\alpha, \beta \in Y$. U tom slučaju, familija $\mathfrak{D} = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je *razlaganje u desnu sumu* polugrupe S i S_α su *desni sumandi* od S i *sumandi u* $\mathfrak{D}$. Ako $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{D}'$ jesu dva razlaganja u desnu sumu poluugrupe $S = S^0$, tada kažemo da $\mathfrak{D}$ jeste *veće od* $\mathcal{D}'$ ako svaki sumand iz $\mathfrak{D}$ jeste podskup nekog sumanda iz $\mathfrak{D}'$. Polugrupa $S = S^0$ je *nerazloživa u desnu sumu* ako $\mathfrak{D} = \{S\}$ jeste jedino razlaganje u desnu sumu polugrupe S.

Neka su A i B neprazni podskupovi polugrupe $S = S^0$ tako da je $A \subseteq B$. Tada A jeste *0-dosledan* (*desno 0-dosledan, levo 0-dosledan*) podskup od B ako je $A^\bullet$ dosledan (desno dosledan, levo dosledan) podskup od B. Ako je A neprazan podskup polugrupe $S = S^0$, tada sa A' označavamo podskup $(S - A)^0$ od S.

Najpre ćemo razmotriti osnovne osobine desno 0-doslednih levih ideala:

Lema 8.1. *Sledeći uslovi za levi ideal A polugrupe $S = S^0$ su ekvivalentni:*
(*i*) *A je desno 0-dosledan;*
(*ii*) *A' je levi ideal od S;*
(*iii*) *A je desni sumand od S.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema Lemi 1.13.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Ako je A desno 0-dosledan, tada prema $(i) \Leftrightarrow (ii)$ dobijamo da S jeste desna suma polugrupa A i A'.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Ako je A desno 0-dosledan levi ideal polugrupe $S = S^0$, tada kažemo da A jeste *pravi desno 0-dosledan levi ideal* od S ako je $A \neq 0, S$.

Lema 8.2. *Polugrupa $S = S^0$ je nerazloživa u desnu sumu ako i samo ako S nema pravih desno 0-doslednih levih ideala.*

Dokaz. Sledi prema Lemi 8.1. $\square$

Neka je $S = S^0$. Za $a \in S$, sa $\mathrm{K}(a)$ ćemo označavati presek svih desno 0-doslednih levih ideala od S koji sadrže a. Kako je $\mathrm{K}(a)$ desno 0-dosledan levi ideal od S (prema Lemi 1.12.), to $\mathrm{K}(a)$ jeste najmanji desno 0-dosledni levi ideal od S koji sadrži a, i nazivamo ga *glavni desno 0-dosledan levi ideal od S generisan sa a*. Uvedimo *relaciju tipa* κ na S sa:

$$a \,\kappa\, b \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K}(a) = \mathrm{K}(b), \qquad\qquad (a, b \in S).$$

Tada κ jeste relacija ekvivalencije na S, i sa K_a ćemo označavati κ-klasu od S koja sadrži element $a \in S$. Jasno je da $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}(0) = 0$.

Lema 8.3. *Ako $S = S^0$ i $a, b \in S$, tada*

$$ab \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{K}(ab) = \mathrm{K}(b).$$

Dokaz. Kako je $\mathrm{K}(b)$ levi ideal od S, to $ab \in \mathrm{K}(b)$, odakle $\mathrm{K}(ab) \subseteq \mathrm{K}(b)$. Sa druge strane, za $ab \neq 0$, iz $ab \in \mathrm{K}(ab)$ sledi da je $b \in \mathrm{K}(ab)$, jer je $\mathrm{K}(ab)$ desno 0-dosledan, pa je tada $\mathrm{K}(b) \subseteq \mathrm{K}(ab)$. Prema tome, za $ab \neq 0$ je $\mathrm{K}(ab) = \mathrm{K}(b)$. $\square$

Na polugrupi $S = S^0$, definišimo *relaciju tipa* $\overset{\ell}{\sim}$ sa:

$$x \overset{\ell}{\sim} y \ \Leftrightarrow \ L(x) \cap L(y) \neq 0, \quad \text{za } \ x, y \in S^{\bullet}, \qquad 0 \overset{\ell}{\sim} 0.$$

Sa $\overset{\ell}{\sim}{}^{n}$, $n \in \mathbf{Z}^{+}$, i $\overset{\ell}{\sim}{}^{\infty}$ označimo redom n-ti stepen i tranzitivno zatvorenje relacije $\overset{\ell}{\sim}$. Jasno da je $\overset{\ell}{\sim}$ refleksivna i simetrična relacija. Za $a \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^{+}$, uvedimo oznaku:

$$\mathrm{K}_n(a) = \{x \in S \mid x \overset{\ell}{\sim}{}^{n} a\} \cup 0.$$

Tada je $\mathrm{K}_n(0) = 0$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^{+}$, i $\mathrm{K}_n(a) \subseteq \mathrm{K}_{n+1}(a)$, za sve $a \in S$, $n \in \mathbf{Z}^{+}$.

Lema 8.4. *Neka je $S = S^0$ i neka je $n \in \mathbf{Z}^{+}$. Tada*
(1) *za svaki $a \in S$, $\mathrm{K}_n(a)$ je desno 0-dosledan podskup od S;*
(2) *za sve $x, y \in S$, $\mathrm{K}_n(xy) \subseteq \mathrm{K}_n(y)$.*

Dokaz. (1) Uzmimo $a, x, y \in S$ tako da je $xy \in \mathrm{K}_1^{\bullet}(a)$. Tada je $xy \overset{\ell}{\sim} a$, odakle je $L(y) \cap L(a) \supseteq L(xy) \cap L(a) \neq 0$, pa je $y \overset{\ell}{\sim} a$, tj. $y \in \mathrm{K}_1(a)$. Prema tome, $\mathrm{K}_1(a)$ je desno 0-dosledan podskup od S.

Uzmimo $n \in \mathbf{Z}^{+}$ i $x, y \in S$ tako da $xy \in \mathrm{K}_{n+1}^{\bullet}(a)$. Tada je $xy \neq 0$ i $xy \overset{\ell}{\sim}{}^{n+1} a$, tj. $xy \overset{\ell}{\sim} b \overset{\ell}{\sim}{}^{n} a$, za neki $b \in S$. Prema napred dokazanom, $\mathrm{K}_1(b)$ je desno 0-dosledan podskup od S, i kako $xy \in \mathrm{K}_1^{\bullet}(b)$, to $y \in \mathrm{K}_1(b)$, pa $y \in \mathrm{K}_{n+1}(a)$. Prema tome, $\mathrm{K}_n(a)$ je desno 0-dosledan podskup od S, za svaki $n \in \mathbf{Z}^{+}$ i svaki $a \in S$.

(2) Uzmimo $x, y \in S$. Ako je $xy = 0$, tada je $\mathrm{K}_n(xy) = 0 \subseteq \mathrm{K}_n(y)$. Neka je $xy \neq 0$. Tada iz $a \in \mathrm{K}_n(xy)$ dobijamo da $xy \in \mathrm{K}_n^{\bullet}(a)$, pa prema (1) dobijamo da $y \in \mathrm{K}_n(a)$, odakle $a \in \mathrm{K}_n(y)$. Dakle, važi (2). □

Sledeća teorema daje način za konstrukciju glavnog desno 0-doslednog levog ideala. Ova karakterizacija je korisna zbog svoje induktivne prirode.

Teorema 8.1. *Neka je $a \neq 0$ element polugrupe $S = S^0$. Tada:*
(1) $\mathrm{K}(a) = \mathrm{K}_a^0$;
(2) 0 *i* $\mathrm{K}(a)$ *su jedini desno 0-dosledni levi ideali od* S *sadržani u* $\mathrm{K}(a)$;
(3) $\mathrm{K}(a) = \cup_{n \in \mathbf{Z}^{+}} \mathrm{K}_n(a)$.

Dokaz. (1) Najpre ćemo dokazati da je K_a^0 desno 0-dosledan levi ideal od S. Uzmimo $x \in S$, $y \in \mathrm{K}_a$. Tada $\mathrm{K}(y) = \mathrm{K}(a)$. Ako je $xy = 0$, tada je $xy \in \mathrm{K}_a^0$. Neka je $xy \neq 0$. Tada prema Lemi 8.3. dobijamo da je $\mathrm{K}(xy) = \mathrm{K}(y)$, odakle je $\mathrm{K}(xy) = \mathrm{K}(a)$, t.j. $xy \in \mathrm{K}_a$. Prema tome, K_a^0 je levi ideal od S. Neka $x, y \in S$ i $xy \in \mathrm{K}_a$. Tada je $\mathrm{K}(xy) = \mathrm{K}(a)$ i $xy \neq 0$, pa prema Lemi 8.3. dobijamo da je $\mathrm{K}(y) = \mathrm{K}(a)$, t.j. $y \in \mathrm{K}(a)$. Prema tome, K_a^0 je desno 0-dosledan levi ideal od S.

Kako je K_a^0 desno 0-dosledan levi ideal od S koji sadrži a, to je $\mathrm{K}(a) \subseteq \mathrm{K}_a^0$. Sa druge strane, za $x \in \mathrm{K}_a$ dobijamo da $\mathrm{K}(x) = \mathrm{K}(a)$, pa

$x \in \mathrm{K}(x) = \mathrm{K}(a)$, odakle dobijamo da je $\mathrm{K}_a \subseteq \mathrm{K}(a)$, t.j. $\mathrm{K}_a^0 \subseteq \mathrm{K}(a)$. Dakle, važi (1).

(2). Neka je A nenula desno 0-dosledan levi ideal od S i neka je $A \subseteq \mathrm{K}(a)$. Neka je $C = A' \cap \mathrm{K}(a)$, Tada A i C jesu desno 0-dosledni levi ideali od S, i $a \in A$ ili $a \in C$, jer je $\mathrm{K}(a) = A \cup C$, odakle je $A = \mathrm{K}(a)$. Prema tome, važi (2).

(3) Neka je $A = \cup_{n \in \mathbf{Z}^+} \mathrm{K}_n(a) = \{x \in S \mid x \overset{\ell}{\sim}{}^{\infty} a\} \cup 0$. Prema Lemama 8.4. i 1.12. imamo da A jeste desno 0-dosledan podskup od S. Uzmimo $x \in S$, $y \in A$. Ako je $xy = 0$, tada $xy \in A$. Neka je $xy \neq 0$. Tada prema Lemi 8.4.(2) dobijamo da je $xy \overset{\ell}{\sim} y \overset{\ell}{\sim}{}^{\infty} a$, pa $xy \overset{\ell}{\sim}{}^{\infty} a$, tj. $xy \in A$. Prema tome, A je desno 0-dosledan levi ideal od S koji sadrži a, pa je $\mathrm{K}(a) \subseteq A$.

Indukcijom ćemo dokazati da je $\mathrm{K}_n(a) \subseteq \mathrm{K}(a)$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo $x \in \mathrm{K}_1(a)$. Tada je $x \overset{\ell}{\sim} a$, pa je $ux = va \neq 0$, za neke $u, v \in S^1$. Kako je $\mathrm{K}(a)$ desno 0-dosledan levi ideal od S koji sadrži a, to imamo da je $ux = va \in \mathrm{K}^{\bullet}(a)$, odakle $x \in \mathrm{K}(a)$. Prema tome, $\mathrm{K}_1(a) \subseteq \mathrm{K}(a)$.

Uzmimo da je $\mathrm{K}_n(a) \subseteq \mathrm{K}(a)$, za $n \in \mathbf{Z}^+$, i uzmimo $x \in \mathrm{K}_{n+1}(a)$. Tada $x \overset{\ell}{\sim} b \overset{\ell}{\sim}{}^{n} a$, za neki $b \in S$, i $b \in \mathrm{K}_n(a) \subseteq \mathrm{K}(a)$, odakle je $\mathrm{K}(b) \subseteq \mathrm{K}(a)$. Sada prema napred dokazanom dobijamo da je $x \in \mathrm{K}_1(b) \subseteq \mathrm{K}(b) \subseteq \mathrm{K}(a)$, pa $x \in \mathrm{K}(a)$. Prema tome, $\mathrm{K}_{n+1} \subseteq \mathrm{K}(a)$.

Indukcijom dobijamo da je $\mathrm{K}_n(a) \subseteq \mathrm{K}(a)$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa je $A \subseteq \mathrm{K}(a)$. Prema tome, važi (3). $\square$

Prema (1) i (3) Teoreme 8.1, neposredno dobijamo:

Posledica 8.1. *Na svakoj polugrupi* $S = S^0$ *je* $\kappa = \overset{\ell}{\sim}{}^{\infty}$. $\square$

U prethodnoj teoremi smo dokazali da proizvoljan nenula desno 0-dosledan levi ideal A polugrupe $S = S^0$ ne može sadržati nijedan desno 0-dosledan levi ideal od S različit od 0 i A. Medjutim, A može sadržati svoj desno 0-dosledan levi ideal. To ilustrujemo sledećim primerom:

Primer 8.1. Neka je $S = T^0$, gde je T polugrupa data tablicom:

	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	a	b	b	d
c	a	b	b	d
d	a	b	b	d

Tablica 8.1.

Nenula glavni desno 0-dosledni levi ideali polugrupe S su $\{0, a\}$ i $\{0, b, c, d\}$. Nenula glavni desno 0-dosledni levi ideali polugrupe $\{0, b, c, d\}$ su $\{0, b, c\}$

i $\{0, d\}$. Polugrupa $\{0, d\}$ je levi ideal od S, ali nije desno 0-dosledan, dok je polugrupa $\{0, b, c\}$ desno 0-dosledan podskup od S ali nije levi ideal od S.

Sada ćemo dokazati glavnu teoremu ovog poglavlja koja tvrdi postojanje najvećeg razlaganja proizvoljne polugrupe sa nulom u desnu sumu.

Teorema 8.2. *Svaka polugrupa $S = S^0$ ima najveće razlaganje u desnu sumu polugrupa.*

Dokaz. Neka je $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ skup svih nenula glavnih desno 0-doslednih levih ideala polugrupe S. Kako za svaki $a \in S$, $a \in \mathrm{K}(a)$, to je $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, prema Lemi 1.12. i Teoremi 8.1.(2) imamo da je $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha \neq \beta$ i $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$, za sve $\alpha, \beta \in Y$. Prema tome, S je desna suma polugrupa S_α, $\alpha \in Y$.

Neka $S = \mathrm{R}\Sigma_{i \in I} T_i$. Uzmimo proizvoljan $\alpha \in Y$. Kako je $S = \cup_{i \in I} T_i$, to postoji $i \in I$ tako da je $T_i \cap S_\alpha \neq 0$. Kako je S_α nenula glavni desno 0-dosledan levi ideal od S, i kako je $T_i \cap S_\alpha \subseteq S_\alpha$, to prema Teoremi 8.1.(2) dobijamo da je $T_i \cap S_\alpha = S_\alpha$, tj. $S_\alpha \subseteq T_i$. Prema tome, razlaganje polugrupe S u desnu sumu polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, jeste najveće razlaganje polugrupe S u desnu sumu. $\square$

Primedba. *Sumandi u najvećem razlaganju polugrupe u desnu sumu ne moraju biti nerazloživi u desnu sumu.*

Naime, sumandi u najvećem razlaganju polugrupe S iz Primera 8.1. u desnu sumu su $\{0, a\}$ i $\{0, b, c, d\}$, pri čemu se $\{0, b, c, d\}$ može dalje raložiti u desnu sumu svojih levih ideala $\{0, b, c\}$ i $\{0, d\}$. Prema tome, sumandi u najvećem razlaganju proizvoljne polugrupe sa nulom u desnu sumu, mogu biti dalje razloživi u desnu sumu. $\square$

Relacija ekvivalencije ξ polugrupe $S = S^0$ je *desno 0-dosledna ekvivalencija* na S, ako važi:

$$(\forall x, y \in S)\ xy \neq 0 \ \Rightarrow\ xy \,\xi\, y.$$

Ulogu koju ovakve ekvivalencije imaju u razlaganjima polugrupa u desnu sumu, opisuje sledeća teorema:

Teorema 8.3. *Ako je ξ desno 0-dosledna ekvivalencija polugrupe S, tada je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, pri čemu je $S_\alpha = C_\alpha^0$ i $\{C_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je skup svih ξ-klasa polugrupe S.*

Obratno, ako $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, tada relacija ekvivalencije ξ na S odredjena razbijanjem $\{S_\alpha^\bullet \mid \alpha \in Y\} \cup \{\{0\}\}$ polugrupe S, jeste desno 0-dosledna ekvivalencija na S.

Relacija κ je najmanja desno 0-dosledna ekvivalencija na S, tj. jednaka je preseku svih desno 0-doslednih ekvivalencija polugrupe $S = S^0$.

Dokaz. Neka je ξ desno 0-dosledna ekvivalencija na S. Uzmimo $\alpha \in Y$ i $x, y \in S_\alpha$. Ako je $xy = 0$, tada je $xy \in S_\alpha$. Neka je $xy \neq 0$. Tada je $y \neq 0$, pa $y \in C_\alpha$, i sa druge strane, $xy \,\xi\, y$, pa $xy \in C_\alpha$. Prema tome, $xy \in S_\alpha$, pa S_α jeste podpolugrupa od S.

Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$, $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$. Ako je $xy = 0$, tada je $xy \in S_\beta$. Neka je $xy \neq 0$, tada dobijamo da je $xy \,\xi\, y$, odakle sledi da je $xy \in C_\beta$, tj. $xy \in S_\beta$. Kako je $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in Y$ i $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, to je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

Obratno, neka je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$ i neka je ξ relacija ekvivalencije na S odredjena razbijanjem $\{S_\alpha^\bullet \mid \alpha \in Y\} \cup \{\{0\}\}$ polugrupe S. Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \neq 0$. Tada $x \in S_\alpha^\bullet$, $y \in S_\beta^\bullet$, za neke $\alpha, \beta \in Y$, i $xy \in S_\beta^\bullet$, pa je $xy \,\xi\, y$. Dakle, ξ je desno 0-dosledna ekvivalencija na S.

Neka je ξ proizvoljna desno 0-dosledna ekvivalencija na S i neka je $\{T_i \mid i \in I\}$ razlaganje polugrupe S u desnu sumu odredjeno ekvivalencijom ξ na napred opisani način. Neka je $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ najveće razlaganje u desnu sumu polugrupe S. Uzmimo proizvoljan par $(x, y) \in \kappa$. Ako je $(x, y) = (0, 0)$, tada $(x, y) \in \xi$. Neka je $(x, y) \neq (0, 0)$. Tada $x, y \in S_\alpha^\bullet$, za neki $\alpha \in Y$. Kako je $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ najveće razlaganje polugrupe S u desnu sumu, to postoji $i \in I$ tako da je $S_\alpha \subseteq T_i$, odakle $x, y \in T_i^\bullet$. Prema tome, $(x, y) \in \xi$, pa je $\kappa \subseteq \xi$. Kako je κ desno 0-dosledna ekvivalencija na S, to je κ jednaka preseku svih desno 0-doslednih ekvivalencija na S. $\square$

Analogon Teorije razlaganja polugrupa sa nulom u desnu sumu polugrupa je Teorija razlaganja polugrupa u desno nultu traku polugrupa. Kod polugrupa sa nulom, ova druga teorija nema smisla, jer je svaka polugrupa sa nulom nerazloživa u desno nultu traku polugrupa. Zbog toga ćemo sada razmotriti polugrupe S bez nule. Na polugrupu S^0 možemo primeniti rezultate Teorije razlaganja polugrupa u desnu sumu. Kako S^0 nema delitelja nule, to svakom tako dobijenom tvrdjenju odgovara jedno tvrdjenje koje se tiče razlaganja polugrupe S u desno nultu traku polugrupa. Drugim rečima, svako tvrdjenje Teorije razlaganja polugrupa sa nulom u desnu sumu polugrupa, ima svoj analogon u Teoriji razlaganja polugrupa u desno nultu traku polugrupa. Pri tome, desno 0-doslednim levim idealima u prvoj teoriji, u drugoj teoriji odgovaraju desno dosledni levi ideali.

Ovde ćemo navesti samo neke rezultate Teorije razlaganja polugrupa u desno nultu traku polugrupa. Pre toga, uvešćemo neke definicije: na polugrupi S (koja ne mora sadržati nulu), definišimo *relaciju tipa* $\overset{\ell}{\approx}$ sa:

$$x \overset{\ell}{\approx} y \;\Leftrightarrow\; L(x) \cap L(y) \neq \varnothing, \qquad x, y \in S.$$

Sa $\overset{\ell}{\approx}{}^{\infty}$ označimo tranzitivno zatvorenje relacije $\overset{\ell}{\approx}$. Dualno, pomoću glavnih desnih ideala polugrupe S, definišemo *relacije tipa* $\overset{r}{\approx}$ i $\overset{r}{\approx}{}^{\infty}$. Kongruencija ξ na polugrupi S je *desno nulta kongruencija* ako S/ξ jeste desno nulta traka.

Teorema 8.4. *Svaka polugrupa S ima najveće razlaganje u desno nultu traku polugrupa (pri čemu komponente u tom razlaganju ne moraju biti nerazložive u desno nultu traku polugrupa). Relacija $\overset{\ell}{\approx}{}^{\infty}$ je najmanja desno nulta kongruencija na polugrupi S.* $\square$

Zadaci.

1. Neka je $S = S^0$, neka je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ i neka je $n \in \mathbf{Z}^+$.

(a) Neka $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Ako $x \overset{\ell}{\sim}{}^n y$ u S, tada je $\alpha = \beta$;

(b) Neka je $\alpha \in Y$ i $x, y \in S_\alpha$. Tada $x \overset{\ell}{\sim}{}^n y$ u S ako i samo ako $x \overset{\ell}{\sim}{}^n y$ u S_α.

2. Na polugrupi $S = S^0$, za $n \in \mathbf{Z}^+$, definišimo *relaciju tipa* κ_n sa:

$$x \;\kappa_n\; y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{K}_n(x) = \mathrm{K}_n(y) \qquad (x, y \in S).$$

Jasno da je κ_n relacija ekvivalencije i da je $\kappa_n \subseteq \overset{\ell}{\sim}{}^n$.

Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Dokazati da su sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ ekvivalentni:

(i) $(\forall x, y \in S)\; xy \neq 0 \;\Rightarrow (\; y \overset{\ell}{\sim}{}^n a \;\Rightarrow\; xy \overset{\ell}{\sim}{}^n a\;)$;

(ii) za svaki $a \in S$, $\mathrm{K}_n(a)$ je levi ideal od S;

(iii) $\overset{\ell}{\sim}{}^n$ je relacija ekvivalencije na S;

(iv) κ_n je desno 0-dosledna ekvivalencija na S.

3. Presek levo nulte kongruencije i desno nulte kongruencije polugrupe je matrična kongruencija. Obratno, svaka matrična kongruencija je presek levo nulte kongruencije i desno nulte kongruencije.

Presek najmanje levo nulte kongruencije i najmanje desno nulte kongruencije polugrupe je najmanja matrična kongruencija.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [15], [17], Clifford and Preston [2], Dickinson [1], Hashimoto [2], Petrich [3], [19], Schwarz [2], [8], [9], Steinfeld [3], Yoshida [1], [2].

8.2. Najveće ortogonalno razlaganje.

Slično kao u prethodnoj tački ovde ćemo dokazati postojanje najvećeg ortogonalnog razlaganja proizvoljne polugrupe sa nulom. Takodje, opisaćemo relaciju ekvivalencije koja odredjuje to razlaganje. Za razliku od razlaganja u desnu sumu polugrupa, ovde dokazujemo da svaka komponenta u najvećem ortogonalnom razlaganju polugrupe sa nulom jeste ortogonalno nerazloživa polugrupa.

Polugrupa $S = S^0$ je *ortogonalna suma* polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, u oznaci $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, ako $S_\alpha \neq 0$, za sve $\alpha \in Y$, $S = \cup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ i $S_\alpha \cap S_\beta = S_\alpha S_\beta = 0$, za sve $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$. U tom slučaju, familija $\mathfrak{D} = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je *ortogonalno razlaganje* od S i S_α su *ortogonalni sumandi* od S ili *sumandi* u $\mathcal{D}$. Ako $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{D}'$ jesu dva ortogonalna razlaganja polugrupe $S = S^0$, tada kažemo da $\mathfrak{D}$ jeste *veće od* $\mathfrak{D}'$ ako svaki sumand iz $\mathfrak{D}$ jeste podskup nekog sumanda iz $\mathfrak{D}'$. Polugrupa $S = S^0$ je *ortogonalno nerazloživa* ako $\mathfrak{D} = \{S\}$ jeste jedino ortogonalno razlaganje od S.

U Glavi 5. smo videli da u Teoriji polumrežnih razlaganja polugrupa, značajnu ulogu imaju potpuno poluprim ideali. Ovde ćemo dokazati da u ortogonalnim razlaganjima polugrupe sa nulom važnu ulogu igraju 0-dosledni ideali.

Najpre ćemo razmotriti osnovne osobine 0-doslednih ideala:

Lema 8.5. *Sledeći uslovi za ideal A polugrupe $S = S^0$ su ekvivalentni:*
(*i*) *A je 0-dosledan;*
(*ii*) *A' je ideal od S;*
(*iii*) *A je ortogonalni sumand od S.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema Lemi 1.13.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Ako A jeste 0-dosledan, tada prema $(i) \Leftrightarrow (ii)$ dobijamo da S jeste ortogonalna suma polugrupa A i A'.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Sa $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$, $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ i $\mathcal{RI}d^{\mathbf{c}}(S)$ ćemo označavati *skupove svih 0-doslednih ideala, desno 0-doslednih levih ideala i levo 0-doslednih desnih ideala* polugrupe $S = S^0$, tim redom. Osobinu 0-doslednih ideala koju dajemo sledećom lemom za 0-dosledan ideal A nemaju desno 0-dosledni levi ideali, što se može proveriti na polugrupi iz Primera 8.1.

Lema 8.6. *Neka je A 0-dosledan ideal polugrupe $S = S^0$. Tada*
$\mathcal{LI}d(A) \subseteq \mathcal{LI}d(S)$, $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(A) \subseteq \mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$, $\mathcal{I}d(A) \subseteq \mathcal{I}d(S)$, $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(A) \subseteq \mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$.

Dokaz. Neka je $L \in \mathcal{LI}d(A)$. Uzmimo $x \in S$, $a \in L$. Tada je $xa \in SA \subseteq A$, odakle $x, a \in A$. Prema tome, $xa \in AL \subseteq L$, pa je $L \in \mathcal{LI}d(S)$. Dakle, $\mathcal{LI}d(A) \subseteq \mathcal{LI}d(S)$. Odgovarajuća osobina se može dokazati i za desne ideale, odakle dobijamo da odgovarajuća osobina važi i za ideale. Ostatak dokaza sledi iz Leme 1.11. $\square$

Ako A jeste 0-dosledan ideal polugrupe $S = S^0$, tada kažemo da A jeste *pravi 0-dosledan ideal* od S ako je $A \neq 0, S$.

Lema 8.7. *Polugrupa* $S = S^0$ *je ortogonalno nerazloživa ako i samo ako* S *nema pravih 0-doslednih ideala.*

Dokaz. Sledi prema Lemi 8.5. $\square$

Neka je $S = S^0$. Za $a \in S$, sa $\Delta(a)$ ćemo označavati presek svih 0-doslednih ideala od S koji sadrže a. Kako $\Delta(a)$ takodje jeste 0-dosledan ideal od S (vidi Lemu 1.12.), to $\Delta(a)$ jeste najmanji 0-dosledni ideal od S koji sadrži a, i nazivaćemo ga *glavni 0-dosledan ideal od* S *generisan sa* a. Uvedimo *relaciju tipa* δ na S sa:

$$a \,\delta\, b \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(a) = \Delta(b), \qquad (a, b \in S).$$

Tada δ jeste relacija ekvivalencije na S, i sa Δ_a ćemo označavati δ-klasu od S koja sadrži element $a \in S$. Jasno da je $\Delta_0 = \Delta(0) = 0$.

Lema 8.8. *Ako* $S = S^0$ *i* $a, b \in S$, *tada*

$$ab \neq 0 \;\Rightarrow\; \Delta(ab) = \Delta(a) = \Delta(b).$$

Dokaz. Kako $\Delta(a)$ i $\Delta(b)$ jesu ideali od S i $a \in \Delta(a)$, $b \in \Delta(b)$, to $ab \in \Delta(a)$, $ab \in \Delta(b)$, odakle $\Delta(ab) \subseteq \Delta(a)$ i $\Delta(ab) \subseteq \Delta(b)$.

Sa druge strane, $ab \in (\Delta(ab))^\bullet$, odakle $a, b \in (\Delta(ab))^\bullet \subseteq \Delta(ab)$, jer $\Delta(ab)$ jeste 0-dosledan. Prema tome, $a, b \in \Delta(ab)$, pa $\Delta(a) \subseteq \Delta(ab)$ i $\Delta(b) \subseteq \Delta(ab)$. Dakle, $\Delta(ab) = \Delta(a) = \Delta(b)$. $\square$

Na polugrupi $S = S^0$, definišimo *relaciju tipa* $\sim$ sa:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; J(x) \cap J(y) \neq 0, \quad \text{za } x, y \in S^\bullet, \qquad 0 \sim 0.$$

Sa $\sim^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$, i $\sim^\infty$ označimo redom n-ti stepen i tranzitivno zatvorenje relacije $\sim$. Jasno da je $\sim$ refleksivna i simetrična relacija. Za $a \in S$ i $n \in \mathbf{Z}^+$, uvedimo oznaku:

$$\Delta_n(a) = \{x \in S \mid x \sim^n a\} \cup 0.$$

Jasno da je $\Delta_n(0) = 0$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, i $\Delta_n(a) \subseteq \Delta_{n+1}(a)$, za sve $a \in S$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

Lema 8.9. *Neka je* $S = S^0$ *i neka je* $n \in \mathbf{Z}^+$. *Tada*

(1) *za svaki* $a \in S$, $\Delta_n(a)$ *je 0-dosledan podskup od* S;

(2) *za sve* $x, y \in S$, $\Delta_n(xy) \subseteq \Delta_n(x) \cap \Delta_n(y)$.

Dokaz. (1) Uzmimo $a, x, y \in S$ tako da je $xy \in (\Delta_1(a))^\bullet$. Tada je $xy \sim a$, tj. $J(xy) \cap J(a) \neq 0$, odakle

$$J(x) \cap J(a) \supseteq J(xy) \cap J(a) \neq 0,$$

pa je $x \sim a$. Slično je $y \sim a$. Prema tome, $\Delta_1(a)$ je 0-dosledan podskup od S.

Uzmimo $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x, y \in S$ tako da $xy \in (\Delta_{n+1}(a))^\bullet$. Tada je $xy \neq 0$ i $xy \sim^{n+1} a$, tj. $xy \sim b \sim^n a$, za neki $b \in S$. Kako prema napred dokazanom, $\Delta_1(b)$ jeste 0-dosledan podskup od S, i kako $xy \in (\Delta_1(b))^\bullet$, to $x, y \in \Delta_1(b)$, pa $x, y \in \Delta_{n+1}(a)$. Prema tome, indukcijom dobijamo da je $\Delta_n(a)$ 0-dosledan podskup od S, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$ i svaki $a \in S$.

(2) Uzmimo $x, y \in S$. Ako je $xy = 0$, tada je $\Delta_n(xy) = 0 \subseteq \Delta_n(x) \cap \Delta_n(y)$. Neka je $xy \neq 0$. Tada iz $a \in \Delta_n(xy)$ dobijamo da $xy \in (\Delta_n(a))^\bullet$, pa prema (1) dobijamo da $x, y \in \Delta_n(a)$, odakle $a \in \Delta_n(x) \cap \Delta_n(y)$. Dakle, važi (2). $\square$

Narednom teoremom dajemo induktivnu karakterizaciju nenula glavnih 0-doslednih ideala polugrupe sa nulom. Dokazujemo da su oni nulta proširenja odgovarajućih δ-klasa. Za razliku od glavnih desno 0-doslednih levih ideala, koji ne moraju biti nerazloživi u desnu sumu polugrupa, ovde se dokazuje da su glavni 0-dosledni ideali ortogonalno nerazložive polugrupe.

Teorema 8.5. *Neka $a \neq 0$ jeste element polugrupe $S = S^0$. Tada:*

(1) $\Delta(a) = \Delta_a^0$;

(2) $\Delta(a)$ *je ortogonalno nerazloživa;*

(3) $\Delta(a) = \cup_{n \in \mathbf{Z}^+} \Delta_n(a)$.

Dokaz. (1) Neka $\Delta_a^0 = \Delta_a \cup 0$. Najpre ćemo dokazati da Δ_a^0 jeste 0-dosledan ideal od S. Uzmimo $x \in \Delta_a$, $y \in S$. Tada $\Delta(x) = \Delta(a)$. Ako je $xy = 0$, tada je $xy \in \Delta_a^0$. Neka je $xy \neq 0$. Tada prema Lemi 8.8. dobijamo da je $\Delta(xy) = \Delta(x)$, odakle $\Delta(xy) = \Delta(a)$, t.j. $xy \in \Delta_a \subset \Delta_a^0$.

Slično dokazujemo da je $yx \in \Delta_a^0$. Prema tome, Δ_a^0 je ideal od S. Neka $x, y \in S$ i $xy \in \Delta_a$. Tada $\Delta(xy) = \Delta(a)$ i $xy \neq 0$, pa prema Lemi 8.8. dobijamo da $\Delta(x) = \Delta(y) = \Delta(a)$, tj. $x, y \in \Delta(a)$. Prema tome, Δ_a^0 je 0-dosledan.

Kako Δ_a^0 jeste 0-dosledan ideal od S koji sadrži a, to je $\Delta(a) \subseteq \Delta_a^0$. Sa druge strane, za $x \in \Delta_a$ dobijamo da $\Delta(x) = \Delta(a)$, pa $x \in \Delta(x) = \Delta(a)$, odakle dobijamo da $\Delta_a \subseteq \Delta(a)$, tj. $\Delta_a^0 \subseteq \Delta(a)$. Dakle, $\Delta_a^0 = \Delta(a)$.

(2) Ako $\Delta(a)$ ima pravi 0-dosledan ideal A, tada A i $B = (\Delta(a) - A)^0$ jesu pravi 0-dosledni ideali od $\Delta(a)$ i S (prema Lemama 8.5. i 8.6.), i $a \in A$ ili $a \in B$, što protivreči pretpostavci da $\Delta(a)$ jeste najmanji 0-dosledan ideal od S koji sadrži a. Prema tome, $\Delta(a)$ nema pravih 0-doslednih ideala, pa prema Lemi 8.7, $\Delta(a)$ jeste ortogonalno nerazloživa polugrupa.

(3) Neka je $A = \cup_{n \in \mathbf{Z}^+} \Delta_n(a) = \{x \in S \mid x \sim^\infty a\} \cup 0$. Prema Lemama 8.9.(1) i 1.12. imamo da A jeste 0-dosledan podskup od S. Uzmimo $x \in A$, $y \in S$. Ako je $xy = 0$, tada je $xy \in A$. Neka je $xy \neq 0$. Tada prema Lemi 8.9.(2) dobijamo da je $xy \sim x \sim^\infty a$, pa $xy \sim^\infty a$, tj. $xy \in A$. Slično dobijamo da je $yx \in A$. Prema tome, A je 0-dosledan ideal od S koji sadrži a, pa je $\Delta(a) \subseteq A$.

Indukcijom ćemo dokazati da je $\Delta_n(a) \subseteq \Delta(a)$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$. Uzmimo $x \in \Delta_1(a)$. Tada je $x \sim a$, pa je $uxv = paq \neq 0$, za neke $u, v, p, q \in S^1$. Kako $\Delta(a)$ jeste 0-dosledan ideal od S koji sadrži a, to imamo da je $uxv = paq \in (\Delta(a))^\bullet$, odakle $u, x, v \in \Delta(a)$. Prema tome, $x \in \Delta(a)$, tj. $\Delta_1(a) \subseteq \Delta(a)$.

Uzmimo da je $\Delta_n(a) \subseteq \Delta(a)$, za $n \in \mathbf{Z}^+$, i uzmimo $x \in \Delta_{n+1}(a)$. Tada je $x \sim b \sim^n a$, za neki $b \in S$, i $b \in \Delta_n(a) \subseteq \Delta(a)$, odakle je $\Delta(b) \subseteq \Delta(a)$. Sada prema napred dokazanom dobijamo da je $x \in \Delta_1(b) \subseteq \Delta(b) \subseteq \Delta(a)$, pa $x \in \Delta(a)$. Prema tome, $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta(a)$.

Sada na osnovu indukcije dobijamo da je $\Delta_n(a) \subseteq \Delta(a)$, za svaki $n \in \mathbf{Z}^+$, pa je $A \subseteq \Delta(a)$. Prema tome, važi (3). $\square$

Prema (1) i (3) Teoreme 8.5. neposredno dobijamo

Posledica 8.2. *Na svakoj polugrupi $S = S^0$ je $\delta = \sim^\infty$.* $\square$

Sada ćemo dokazati glavnu teoremu ove tačke.

Teorema 8.6. *Svaka polugrupa $S = S^0$ ima najveće ortogonalno razlaganje i svaki sumand u tom razlaganju je ortogonalno nerazloživa polugrupa.*

Dokaz. Neka je $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ skup svih nenula glavnih 0-doslednih ideala polugrupe S. Kako za svaki $a \in S$, $a \in \Delta(a)$, to je $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, dok prema Teoremi 8.5.(2) i Lemi 8.7. imamo da je $S_\alpha \cap S_\beta = S_\alpha S_\beta = S_\beta S_\alpha = 0$, za $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in Y$, odakle dobijamo da je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$. Prema Teoremi 8.5.(2) imamo da S_α jesu ortogonalno nerazložive polugrupe.

Neka je $\{T_i \mid i \in I\}$ proizvoljno ortogonalno razlaganje polugrupe S. Uzmimo proizvoljan $\alpha \in Y$. Kako je $S = \cup_{i \in I} T_i$, to postoji $i \in I$ tako da je $S_\alpha \cap T_i \neq 0$. Kako $S_\alpha \cap T_i$ jeste 0-dosledni ideal od S, to prema Lemi 8.7. dobijamo da je $S_\alpha \cap T_i = S_\alpha$, odakle je $S_\alpha \subseteq T_i$. Prema tome, $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je najveće ortogonalno razlaganje polugrupe S. $\square$

Relacija ekvivalencije ξ na polugrupi $S = S^0$ je *0-dosledna ekvivalencija* na S, ako važi:

$$(\forall x, y \in S)\ xy \neq 0 \ \Rightarrow\ xy\ \xi\ x \ \wedge\ xy\ \xi\ y.$$

Ove relacije imaju značajnu ulogu u ortogonalnim razlaganjima polugrupa. Tu ulogu opisuje sledeća teorema.

Teorema 8.7. *Ako je ξ 0-dosledna ekvivalencija polugrupe S, tada je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, pri čemu je $S_\alpha = C_\alpha^0$ i $\{C_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je skup svih ξ-klasa polugrupe S.*

Obratno, ako je $S = \Sigma_{\alpha \in} S_\alpha$, tada relacija ekvivalencije ξ na S odredjena razbijanjem $\{S_\alpha^\bullet \mid \alpha \in Y\} \cup \{\{0\}\}$ polugrupe S, jeste 0-dosledna ekvivalencija na S.

Relacija δ je najmanja 0-dosledna ekvivalencija na S, tj. jednaka je preseku svih 0-doslednih ekvivalencija polugrupe $S = S^0$.

Dokaz. Sledi prema Teoremi 8.3. i njenom dualu. $\square$

Lema 8.10. *Neka je $S = S^0$, neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$ i neka $n \in \mathbf{Z}^+$.*

(*a*) *Neka $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Ako $x \sim^n y$ u S, tada je $\alpha = \beta$;*

(*b*) *Neka je $\alpha \in Y$ i $x, y \in S_\alpha$. Tada $x \sim^n y$ u S ako i samo ako $x \sim^n y$ u S_α.*

Dokaz. (*a*) Iz $x \sim y$ imamo da je $J(x) \cap J(y) \neq 0$. Sa druge strane, $J(x) \subseteq S_\alpha$, $J(y) \subseteq S_\beta$ i $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha \neq \beta$. Prema tome, $x \sim y$ povlači da je $\alpha = \beta$. Indukcijom dobijamo da $x \sim^n y$ povlači da je $\alpha = \beta$.

(*b*) Za proizvoljni element $a \in S_\alpha$, je jasno da je $Sa = S_\alpha a$, $aS = aS_\alpha$, $SaS = S_\alpha a S_\alpha$, pa je glavni ideal generisan sa a u S jednak glavnom idealu generisanom sa a u S_α, odakle neposredno sledi da $x \sim y$ u S ako i samo ako $x \sim y$ u S_α.

Neka je $n \geq 2$ i $x \sim^n y$ u S_α, tj. $x \sim a_1 \sim \cdots \sim a_{n-1} \sim y$ u S_α, za neke $a_1, \ldots, a_{n-1} \in S_\alpha$, odakle $x \sim a_1 \sim \cdots \sim a_{n-1} \sim y$ u S. Obratno, neka $x \sim^n y$ u S, tj. neka $x \sim a_1 \sim \cdots \sim a_{n-1} \sim y$ u S, za neke $a_1, \ldots, a_{n-1} \in S$. Prema (*a*) dobijamo da $a_1, \ldots, a_{n-1} \in S_\alpha$, odakle $x \sim a_1 \sim \cdots \sim a_{n-1} \sim y$ u S_α, tj. $x \sim^n y$ u S_α. $\square$

Na polugrupi $S = S^0$, za $n \in \mathbf{Z}^+$, definišimo *relaciju tipa* δ_n sa:

$$x \; \delta_n \; y \;\Leftrightarrow\; \Delta_n(x) = \Delta_n(y) \qquad (x, y \in S).$$

Jasno je da δ_n jeste relacija ekvivalencije i da je $\delta_n \subseteq \sim^n$. Polugrupa $S = S^0$ je *0-δ_n-prosta* ako S ima tačno dve δ_n-klase, tj. ako je $x \sim^n y$, za sve $x, y \in S^\bullet$. Sledećom teoremom opisujemo ortogonalne sume 0-δ_n-prostih polugrupa.

Teorema 8.8. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Tada su sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ ekvivalentni:*

(*i*) *S je ortogonalna suma 0-δ_n-prostih polugrupa;*

(*ii*) $(\forall x, y, a \in S)\ xy \neq 0 \Rightarrow [(x \sim^n a \,\vee\, y \sim^n a) \Rightarrow xy \sim^n a]$;

(*iii*) *za svaki $a \in S$, $\Delta_n(a)$ je ideal od S;*

(*iv*) *$\sim^n$ je relacija ekvivalencije na S;*

(*v*) *δ_n je 0-dosledna ekvivalencija na S.*

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, pri čemu S_α jesu 0-δ_n-proste polugrupe. Uzmimo $x, y \in S$ takve da je $xy \neq 0$. Tada $x, y \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Neka $x \sim^n a$, za neki $a \in S$. Prema Lemi 8.10.(*a*) imamo da je $a \in S_\alpha$. Jasno da je $a \neq 0$. Prema tome, $a, xy \in S_\alpha^\bullet$, pa kako S_α jeste 0-δ_n-prosta polugrupa, to $xy \sim^n a$ u S_α, dok prema Lemi

8.10.(b) dobijamo da $xy \sim^n a$ u S. Slično dokazujemo da iz $y \sim^n a$ sledi da $xy \sim^n a$. Prema tome, važi (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka važi (ii). Uzmimo $a \in S$, $x \in \Delta_n(a)$, $y \in S$. Ako je $xy = 0$, tada $xy \in \Delta_n(a)$. Neka je $xy \neq 0$. Kako $x \sim^n a$, to prema (ii) dobijamo da $xy \sim^n a$, pa $xy \in \Delta_n(a)$. Slično dokazujemo da je $yx \in \Delta_n(a)$. Prema tome, $\Delta_n(a)$ je ideal od S.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Neka važi (iii). Tada za svaki $a \in S$, $\Delta_n(a)$ jeste 0-dosledni ideal od S, odakle dobijamo da je $\Delta_n(a) = \Delta(a)$, za svaki $a \in S$. Prema tome, $\sim^n = \sim^\infty$, odakle dobijamo da važi (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Neka je $\sim^n$ relacija ekvivalencije na S. Tada je $\sim^n = \sim^\infty$, odakle je $\Delta_n(a) = \Delta(a)$, za svaki $a \in S$, pa je $\delta_n = \delta$. Kako δ jeste 0-dosledna , to dobijamo (v).

(v) $\Rightarrow$ (i). Neka važi (v). Tada prema Teoremi 8.7. imamo da je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, pri čemu $S_\alpha = C_\alpha^0$ i $\{C_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je skup svih δ_n-klasa od S. Uzmimo $\alpha \in Y$ i $x, y \in S_\alpha^\bullet$. Tada je $x \,\delta_n\, y$, tj. $\Delta_n(x) = \Delta_n(y)$, odakle dobijamo da je $x \in \Delta_n(y)$. Prema tome, $x \sim^n y$ u S, pa prema Lemi 8.10. dobijamo da je $x \sim^n y$ u S_α. Prema tome, S_α je 0-δ_n-prosta polugrupa. $\square$

Za konačne polugrupe, značajna je sledeća posledica:

Posledica 8.3. *Neka je S konačna polugrupa. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \leq |S|$, tako da S jeste ortogonalna suma 0-δ_n-prostih polugrupa.* $\square$

Ako $S = S^0$ jeste polugrupa i ako je $S = \mathrm{R}\Sigma_{i \in I} S_i$, tada na skupu I definišemo relaciju θ sa

$$i \;\theta\; j \;\Leftrightarrow\; S_i S_j \neq 0 \;\vee\; S_j S_i \neq 0, \qquad \text{za } i \neq j,\; i, j \in I,$$

i $i \;\theta\; i$, za svaki $i \in I$, i sa ϑ označavamo tranzitivno zatvorenje relacije θ. Kako θ jeste refleksivna i simetrična relacija, to ϑ jeste relacija ekvivalencije na I.

Sledećom teoremom dajemo vezu izmedju ortogonalnih razlaganja polugrupa i razlaganja u desnu sumu. Videće se da je razlaganje u desnu sumu polugrupa "finije" od ortogonalnog razlaganja.

Teorema 8.9. *Neka je $S = S^0$ polugrupa, neka je $S = \mathrm{R}\Sigma_{i \in I} S_i$ i neka je $\{I_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ skup ϑ-klasa od I. Tada je*

$$S = \Sigma_{\alpha \in Y} \left(\mathrm{R}\Sigma_{i \in I_\alpha} S_i \right).$$

Pri tome, ako je $\{S_i \mid i \in I\}$ najveće razlaganje od S u desnu sumu, onda $\{\mathrm{R}\Sigma_{i \in I_\alpha} S_i \mid \alpha \in Y\}$ jeste najveće ortogonalno razlaganje od S.

Dokaz. Neka je $S_\alpha = \mathrm{R}\Sigma_{i \in I_\alpha} S_i$. Jasno da su S_α podpolugrupe od S, da je $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha \neq \beta$, i da je $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$, $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$. Tada je $x \in S_i$, $i \in I_\alpha$, $y \in S_j$, $j \in I_\beta$.

Ako je $xy \neq 0$, tada je $S_iS_j \neq 0$, odakle je $i\ \theta\ j$, odnosno $i\ \vartheta\ j$. Medjutim, to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\alpha \neq \beta$. Prema tome, $xy = 0$. Slično dokazujemo da je $yx = 0$. Prema tome, $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

Neka je $\{S_i \mid i \in I\}$ najveće razlaganje polugrupe S u desnu sumu. Uzmimo $\alpha \in Y$. Neka A jeste 0-dosledan ideal od S_α i $A \neq 0, S_\alpha$, i neka je $B = A' \cap S_\alpha$. Kako S_α i A jesu 0-dosledni ideali od S, to B takodje jeste 0-dosledan ideal od S. Jasno da je $S_\alpha = A \cup B$. Kako S_i, $i \in I_\alpha$, jesu glavni desno 0-dosledni levi ideali od S, to za svaki $i \in I_\alpha$ je $S_i \subseteq A$ ili $S_i \subseteq B$. Neka je $I'_\alpha = \{i \in I_\alpha \mid S_i \subseteq A\}$, $I''_\alpha = \{i \in I_\alpha \mid S_i \subseteq B\}$. Jasno da je $I'_\alpha \cup I''_\alpha = I_\alpha$, $I'_\alpha \cap I''_\alpha = \varnothing$. Uzmimo proizvoljne $i \in I'_\alpha$, $j \in I''_\alpha$. Tada je $S_iS_j = S_jS_i = 0$. Medjutim, to je u suprotnosti sa činjenicom da je $i\ \vartheta\ j$, za sve $i, j \in I_\alpha$. Prema tome, S_α nema pravih 0-doslednih ideala. Dakle, $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ je najveće ortogonalno razlaganje od S. $\square$

Zadaci.

1. Ako je $S = S^0$ i $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, tada je S poddirektan proizvod familije $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Kada važi obrat?

2. Polugrupa S je inflacija polugrupe $T = \Sigma_{\alpha \in Y} T_\alpha$ ako i samo ako je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$ i za svaki $\alpha \in Y$, S_α je inflacija od T_α.

3. Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ regularna Reesova matrična polugrupa (potpuno 0-prosta polugrupa). Tada, u oznakama iz Posledice 3.3, $S = \mathrm{R}\Sigma_{\lambda \in \Lambda} L^0_\lambda = \mathrm{L}\Sigma_{i \in I} R^0_i$, i S je ortogonalno nerazloživa.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [15], [17], Clifford and Preston [2], Ляпин [1], [2], Petrich [8], Schwarz [2].

8.3. Ortogonalne sume 0-prostih i nul-polugrupa.

U prethodnoj tački smo dokazali da sumandi u najvećem razlaganju polugrupe sa nulom jesu minimalni elementi skupa svih nenula 0-doslednih ideala te polugrupe. Ovde ćemo razmatrati slučaj akad su ti elementi minimalni i u skupu svih nenula ideala te polugrupe.

Polugrupa $S = S^0$ je *bi-0-naslojena* ako za sve $x, y \in S$, iz $xy \neq 0$ sledi da $x \in SxyS$ i $y \in SxyS$. Polugrupa $S = S^0$ je *levo* (*desno*) *0-naslojena* ako za sve $x, y \in S$, iz $xy \neq 0$ sledi da $y \in Sxy$ $(x \in xyS)$.

Teorema 8.10. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(*i*) *S je unija svojih 0-minimalnih ideala;*

(*ii*) *S je ortogonalna suma 0-prostih polugrupa i nul-polugrupa;*

(*iii*) *svaki ideal od S je 0-dosledan;*

(*iv*) *svaki glavni ideal od* S *je 0-dosledan;*
(*v*) S *je bi-0-naslojena;*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Jasno da je svaka unija 0-minimalnih ideala polugrupe S, ukoliko je neprazna, njihova ortogonalna suma. Prema Posledici 1.7. dobijamo da svaki sumand u toj sumi jeste ili 0-prosta polugrupa ili nul-polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, pri čemu za svaki $\alpha \in Y$, S_α jeste 0-prosta ili nul-polugrupa. Uzmimo proizvoljan ideal A od S, i uzmimo da je $A_\alpha = A \cap S_\alpha$, $\alpha \in Y$. Tada A_α jeste ideal od S_α, odakle je $A_\alpha = 0$ ili $A_\alpha = S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Kako 0 i S_α jesu 0-dosledni ideali i $A = \cup_{\alpha\in Y} A_\alpha$, to prema Lemi 1.12. dobijamo da A jeste 0-dosledan. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \neq 0$. Tada $xy \in (J(xy))^\bullet$, pa kako $J(xy)$ jeste 0-dosledan ideal od S, to $x, y \in J(xy) = S^1xyS^1$. Prema tome, $x = axyb$, $y = cxyd$, za neke $a, b, c, d \in S^1$, pa je

$$x = axyb = ax(cxyd)b = (axc)(axyb)(ydb) = (axca)xy(bydb) \in SxyS,$$

i slično, $y \in SxyS$.

$(v) \Rightarrow (iii)$. Neka je A ideal od S i neka su $x, y \in S$ tako da $x, y \in A^\bullet$. Tada prema (v) dobijamo da $x, y \in SxyS \subseteq SAS \subseteq A$, pa A jeste 0-dosledan ideal od S.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Prema Teoremi 8.6. imamo da je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, gde su S_α nenula glavni 0-dosledni ideali od S. Prema (iii) i prema Teoremi 8.5.(2), dobijamo da S_α jesu 0-minimalni ideali od S. Dakle, važi (i). □

Uniju nula ideala i svih 0-minimalnih levih (desnih) ideala polugrupe $S = S^0$ nazivamo *desni* (*levi*) *cokl* polugrupe S. Levi cokl polugrupe $S = S^0$ je ideal od S i predstavlja desnu sumu 0-minimalnih levih ideala od S.

Teorema 8.11. *Sledeći uslovi za polugrupu* $S = S^0$ *su ekvivalentni:*
(*i*) S *je jednaka svom levom coklu;*
(*ii*) S *je levo 0-naslojena;*
(*iii*) *svaki levi ideal od* S *je desno 0-dosledan.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $x, y \in S$ tako da $xy \neq 0$. Tada y pripada nekom 0-minimalnom levom idealu L polugrupe S. Prema Teoremi 1.12. imamo da je $Sa = L$, za svaki $a \in L^\bullet$, ili je $L = \{0, a\}$ i $Sa = 0$. Kako je $y \in L$ i $xy \neq 0$, to je druga mogućnost isključena, pa kako je $xy \in L^\bullet$, to je $L = Sxy$. Prema tome, $y \in Sxy$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je L levi ideal od S i neka su $x, y \in S$ tako da $xy \in L^\bullet$. Tada prema (ii) dobijamo da $y \in Sxy \subseteq SL \subseteq L$. Prema tome, L je desno 0-dosledan.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Prema Teoremi 8.2. imamo da je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, gde S_α jesu nenula glavni desno 0-dosledni levi ideali od S. Prema (iii) i prema Teoremi 8.1.(2), dobijamo da S_α jesu 0-minimalni levi ideali od S. Dakle, važi (i). $\square$

Teorema 8.12. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je jednaka svom levom i svom desnom coklu;*

(ii) *S je ortogonalna suma potpuno 0-prostih polugrupa i nul-polugrupa;*

(iii) *S je levo i desno 0-naslojena;*

(iv) *svaki levi ideal od S je desno 0-dosledan i svaki desni ideal od S je levo 0-dosledan.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. Sledi prema Teoremi 8.11. i njenom dualu.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $x, y \in S$ tako da $xy \neq 0$. Tada je $x = xya$ i $y = bxy$, za neke $a, b \in S$ (prema (iii)), pa je $x = xya = x(bxy)a = (xb)xya \in SxyS$, i slično, $y \in SxyS$, pa S jeste bi-0-naslojena. Prema Teoremi 8.10. dobijamo da je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, gde za $\alpha \in Y$, S_α jeste 0-prosta ili nul-polugrupa. Uzmimo $\alpha \in Y$ tako da S jeste 0-prosta polugrupa i uzmimo $x \in S$. Ako je $x^2 = 0$, tada x jeste potpuno π-regularan element od S_α. Ako je $x^2 \neq 0$, tada prema (iii) imamo da je $x = x^2 a = bx^2$, za neke $a, b \in S$, i kako je $x \neq 0$, to $a, b \in S_\alpha$. Prema tome, S_α je potpuno π-regularna polugrupa, pa prema Teoremi 3.1. dobijamo da S_α jeste potpuno 0-prosta polugrupa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, pri čemu za svaki $\alpha \in Y$, S_α jeste potpuno 0-prosta ili nul-polugrupa. Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \neq 0$. Tada je $x, y \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i S_α jeste potpuno 0-prosta polugrupa. Prema Lemi 3.2. i njoj dualnom tvrdjenju, dobijamo da S_α jeste unija svojih 0-minimalnih levih ideala i unija svojih 0-minimalnih desnih ideala, pa prema Teoremi 8.11. i njenom dualu dobijamo da S_α jeste levo i desno 0-naslojena. Odavde neposredno dobijamo da S jeste levo i desno 0-naslojena. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $S = S^0$ polugrupa bez nilpotentnih ideala. Ako S jeste levo (desno) 0-naslojena, tada S jeste bi-0-naslojena.

2. Polugrupa S je *levo* (*desno*) *naslojena* ako je $x \in Syx$ ($x \in xyS$), za sve $x, y \in S$. Polugrupa S je *bi-naslojena* ako $x, y \in SxyS$, za sve $x, y \in S$. Dokazati

(A) Polugrupa S je bi-naslojena ako i samo ako je prosta.

(B) Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je prosta i ima minimalan levi (desni) ideal;

(ii) S je unija svojih minimalnih levih (desnih) ideala;

(*iii*) S je levo (desno) naslojena;
(*iv*) svaki levi (desni) ideal od S je desno (levo) dosledan.

Literatura. Clifford and Preston [2], Dickinson [1], Dieudonné [1], Dubreil [1], Schwarz [2].

8.4. 0-primitivne π-regularne polugrupe.

Kod polugrupa sa nulom, nula je jedini primitivni idempotent, pa pojam primitivnog idempotenta u tom slučaju gubi onaj smisao koji je imao kod polugrupa bez nule. Zbog toga je uveden pojam 0-primitivnog idempotenta.

Teoremom 3.14. su opisane π-regularne polugrupe čiji je svaki idempotent primitivan. U ovoj tački ćemo dati neke karakterizacije π-regularnih polugrupa sa nulom u kojima svaki nenula idempotent jeste 0-primitivan.

Podsetimo se (vidi Tačku 3.1.) da nenula idempotent e polugrupe $S = S^0$ jeste *0-primitivan* ako za svaki $f \in (E(S))^\bullet$, $f = ef = fe \Rightarrow f = e$, tj. ako e jeste minimalan element u skupu $(E(S))^\bullet$, u odnosu na prirodno uredjenje na $E(S)$. Polugrupa $S = S^0$ je *0-primitivna* ako svaki njen nenula idempotent jeste 0-primitivan.

Za nenula idempotent e polugrupe $S = S^0$ koji generiše 0-minimalan levi (desni) ideal kažemo da je *levo* (*desno*) *potpuno 0-primitivan*. Idempotent e je *potpuno 0-primitivan* ako e jeste levo i desno potpuno 0-primitivan. Polugrupa S jeste (*levo, desno*) *potpuno 0-primitivna* ako svi njeni nenula idempotenti jesu (levo, desno) potpuno 0-primitivni.

Lema 8.11. *Svaki* (*levo, desno*) *potpuno 0-primitivan idempotent polugrupe* $S = S^0$ *je 0-primitivan.*

Dokaz. Neka je e levo potpuno 0-primitivan idempotent polugrupe S, tj. neka je Se 0-minimalan levi ideal. Uzmimo $f \in (E(S))^\bullet$ tako da je $f = ef = fe$. Tada iz $f = fe$ dobijamo de je $0 \neq Sf \subseteq Se$, pa iz uslova 0-minimalnosti za Se dobijamo da je $Sf = Se$. Prema tome, $e = xf$, za neki $x \in S$, pa je $e = xf = xff = ef = f$. Dakle, e je 0-primitivan.

Ostatak dokaza se izvodi neposredno. $\square$

Lema 8.12. *Neka je* e *nenula idempotent regularne polugrupe* $S = S^0$. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(*i*) e *je 0-primitivan;*
(*ii*) e *je levo* (*desno*) *potpuno 0-primitivan;*
(*iii*) e *je potpuno 0-primitivan.*

Dokaz. (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Sledi prema Lemi 8.11.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iii*). Neka je e 0-primitivan idempotent polugrupe S. Neka L jeste nenula levi ideal od S sadržan u Se. Za proizvoljan $a \in L^\bullet$, postoji $x \in S^\bullet$ tako da je $a = aba$. Uzmimo da je $f = ba$. Tada je $f \in (E(S))^\bullet$ i $f \in Sa \subseteq SL \subseteq L \subseteq Se$, tj. $f = xe$, za neki $x \in S$. Iz $0 \neq f = f^2 = xexe$ sledi da je $ef = exe \neq 0$. Kako je $e(ef) = ef = (ef)e$, i e je 0-primitivan, to je $ef = e$. Sada je $e \in Sf$, pa je $Se \subseteq Sf$. Prema tome, $Sf = Se$, pa je $L = Se$. Dakle, Se je 0-minimalan levi ideal, tj. e je levo potpuno 0-primitivan. Slično dokazujemo da e jeste desno potpuno 0-primitivan, pa e jeste potpuno 0-primitivan. □

Teorema 8.13. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) S *je 0-primitivna regularna polugrupa;*

(ii) S *je unija 0-minimalnih levih ideala oblika* Se, $e \in E(S)$;

(iii) S *je regularna i jednaka je svom levom coklu;*

(iv) S *je ortogonalna suma potpuno 0-prostih polugrupa.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste 0-primitivna regularna polugrupa. Prema Lemi 8.12, Se je 0-minimalan levi ideal od S, za svaki $e \in E(S)$. Neka je $a \in S$. Tada je $a = axa$, za neki $x \in S$, pa $a \in Sxa$, $xa \in E(S)$. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (ii) i uzmimo $a \in S^\bullet$. Tada je $a \in Se$, za neki $e \in E(S)$, pa zbog 0-minimalnosti levog ideala Se, $Sa = Se$. Sada je $e = xa$, za neki $x \in S$, i iz $a \in Se$ dobijamo da je $ae = e$, odakle je $axa = ea = a$. Prema tome, S je regularna, pa važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka važi (iii). Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \neq 0$. Kako prema Teoremi 8.11. imamo da je S levo 0-naslojena, to je $y = axy$, za neki $a \in S$. Sa druge strane, kako je S regularna, to je $xy = xybxy$, za neki $b \in S$. Prema tome, $xy = xaxy = xaxybxy \in SxyS$, pa S jeste bi-0-naslojena. Sada prema Teoremi 8.10. dobijamo da $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde za $\alpha \in Y$, S_α jeste 0-prosta ili nul-polugrupa. Lako se proverava da za svaki $\alpha \in Y$, S_α jeste regularna polugrupa, pa nijedna od polugrupa S_α ne može biti nul-polugrupa, tj. svaka od polugrupa S_α jeste 0-prosta regularna polugrupa. Sa druge strane, kako je S levo 0-naslojena, to svaka od polugrupa S_α jeste levo π-regularna, pa prema Teoremi 2.2. dobijamo da je S_α potpuno π-regularna. Dakle, prema Teoremi 3.1. dobijamo da S_α, $\alpha \in Y$, jesu potpuno 0-proste polugrupe.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. □

Posledica 8.4. *Polugrupa $S = S^0$ je 0-primitivna inverzna polugrupa ako i samo ako S jeste ortogonalna suma Brandtovih polugrupa.* □

Lema 8.13. *Neka $S = S^0$ jeste 0-primitivna π-regularna polugrupa. Tada S jeste potpuno π-regularna sa maksmalnim podgrupama datim sa:*

$$G_e = eSe - N \ ,$$

gde $e \in (E(S))^\bullet$ *i* $N = Nil(S)$.

Dokaz. Dokazuje se slično kao Lema 3.13. $\square$

Teoremom 8.13. su opisane 0-primitivne regularne polugrupe. Nil-ekstenzije takvih polugrupa, tj. potpuno 0-primitivne π-regularne polugrupe, opisuje sledeća

Teorema 8.14. *Sledeći uslovi za polugrupu* $S = S^0$ *su ekvivalentni:*
(i) S *je nil-ekstenzija 0-primitivne regularne polugrupe;*
(ii) S *je potpuno 0-primitivna* π*-regularna polugrupa;*
(iii) S *je potpuno* π*-regularna i* SeS *je 0-minimalan ideal od* S, *za svaki* $e \in (E(S))^\bullet$*;*
(iv) S *je 0-primitivna* π*-regularna polugrupa i* $\mathfrak{R}(SE(S)S) = \{0\}$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S nil-ekstenzija 0-primitivne regularne polugrupe T. Uzmimo $e \in (E(S))^\bullet$. Tada je

$$eS = e^2S \subseteq eTS \subseteq eT \subseteq eS \ ,$$

odakle $eS = eT$. Prema Lemi 8.12. dobijamo da eT jeste 0-minimalan desni ideal od T, i od S takodje. Prema tome, S jeste desno potpuno 0-primitivna. Slično se dokazuje da je S levo potpuno 0-primitivna. Jasno da je S π-regularna. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka S jeste π-regularna potpuno 0-primitivna polugrupa. Neka je

$$R = \bigcup_{e\in E} eS \ , \quad L = \bigcup_{e\in E} Se \ , \quad E = E(S) \ .$$

Lako se proverava da je R desni ideal i L levi ideal od S. Kako $eS \subseteq R$, $Se \subseteq L$, za svaki $e \in (E(S))^\bullet$, to prema pretpostavci dobijamo da je $eS = eR$ i $Se = Le$, odakle

$$R = \bigcup_{e\in E} eR \ , \quad L = \bigcup_{e\in E} Le \ .$$

Prema Teoremi 8.13. sledi da R i L jesu 0-primitivne regularne polugrupe. Prema tome, $R, L \subseteq Reg(S)$. Uzmimo $a \in (Reg(S))^\bullet$. Tada je $a = eaf$, za neki $e, f \in (E(S))^\bullet$, odakle je $a \in eS \cap Sf \subseteq R \cap L$. Prema tome, $Reg(S) \subseteq R \cap L$. Dakle, $Reg(S) = R = L$ je ideal od S, i kako za svaki $a \in S$ postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $a^n \in Reg(S)$, to dobijamo da S jeste nil-ekstenzija 0-primitivne regularne polugrupe.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka S jeste nil-ekstenzija regularne 0-primitivne polugrupe T. Jasno je da S jeste 0-primitivna i π-regularna, i da je $T = SE(S)S$. Kako T nema nenula nil-ideala, to je $\mathfrak{R}(SE(S)S) = \mathfrak{R}(T) = \{0\}$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka je S 0-primitivna π-regularna polugrupa i $\mathfrak{R}(SE(S)S) = \{0\}$. Uzmimo $e \in (E(S))^\bullet$. Neka I jeste nenula ideal od S sadržan u SeS. Tada I jeste ideal od $SE(S)S$, prema pretpostavci dobijamo da

I nije nil-ideal, pa postoji $a \in I - Nil(S)$. Osim toga, postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in S$ tako da je $a^n = a^n x a^n$. Neka je $f = a^n x$. Tada $f \in (E(S))^\bullet$ i kako je $a^n \in I$, to dobijamo da $f \in I \subseteq SeS$, pa $f = uev$, za neki $u, v \in S$. Neka $g = evfue$. Tada $g^2 = g = ge = eg$ i $ugv = f$, pa $g \neq 0$. Kako e jeste 0-primitivan, to je $g = e$, odakle

$$e = evfue \in SfS \subseteq SIS \subseteq I\ .$$

Prema tome, $SeS \subseteq I$, tj. $SeS = I$. Dakle, SeS jeste 0-minimalan ideal od S. Prema 8.13. sledi da S jeste potpuno π-regularna.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka (iii) važi i neka je

$$T = SE(S)S = \bigcup_{e \in E} SeS\ , \quad E = E(S)\ .$$

Za $a \in (Reg(S))^\bullet$ imamo da je $a = ea$, za neki $e \in (E(S))^\bullet$, pa je $a = ea \in SeS \subseteq T$. Prema tome, $Reg(S) \subseteq T$. Kako S jeste potpuno π-regularna, to za svaki $e \in (E(S))^\bullet$, SeS jeste takodje potpuno π-regularna polugrupa, pa prema Teoremi 3.1. dobijamo da SeS jeste potpuno 0-prosta polugrupa. Prema tome, $T \subseteq Reg(S)$, tj. $Reg(S) = T$. Dakle, S jeste nil-ekstenzija 0-primitivne regularne polugrupe $T = Reg(S)$. $\square$

Predjimo sada na glavnu teoremu ove tačke.

Teorema 8.15. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je 0-primitivna π-regularna polugrupa;*

(ii) *S je idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću potpuno 0-primitivne π-regularne polugrupe;*

(iii) *S je nil-ekstenzija polugrupe koja je idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću 0-primitivne regularne polugrupe.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka S jeste 0-primitivna π-regularna polugrupa. Tada je jasno da $S/\mathfrak{R}(S)$ jeste 0-primitivna π-regularna polugrupa, pa prema Lemi 3.9. i prema Teoremi 8.14. dobijamo da $S/\mathfrak{R}(S)$ jeste potpuno 0-primitivna. Prema tome, važi (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je S idealska ekstenzija nil-polugrupe T pomoću potpuno 0-primitivne π-regularne polugrupe Q. Identifikujmo parcijalne polugrupe $S - T$ i $Q^\bullet$. Uzmimo $a \in S$. Ako je $\langle a \rangle \subseteq S - T$, tada je $\langle a \rangle \subseteq Q^\bullet$ u Q, pa postoje $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x \in Q^\bullet$ tako da je $a^n = a^n x a^n$ u Q, odakle je $a^n = a^n x a^n$ u S. Ako je $\langle a \rangle \cap T \neq \emptyset$, tada a jeste nilpotent, pa jeste π-regularan. Jasno da je S 0-primitivna. Dakle, S jeste 0-primitivna π-regularna polugrupa.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka S jeste 0-primitivna π-regularna polugrupa i neka je $K = SES$, gde je $E = E(S)$. Kako je $Reg(S) \subseteq K$ i S jeste π-regularna, to S jeste nil-ekstenzija od K. Neka je $R = \mathfrak{R}(K)$, $Q = K/R$ i $E' = E(Q)$. Neka $x \in Q$. Tada je $x = \varphi(a)$, za neki $a \in K$, i φ jeste prirodni homomorfizam od K na Q. Kako je

$$KEK \subseteq SES \subseteq SE^2EE^2S \subseteq (SES)E(SES) = KEK \ ,$$

pa $K = KEK$, to imamo da je $a = uev$, za neki $u, v \in K$, $e \in E$, odakle

$$x = \varphi(a) = \varphi(u)\varphi(e)\varphi(v) \in QE'Q \ .$$

Dakle $Q = QE'Q$. Kako $\mathfrak{R}(Q) = \mathfrak{R}(QE'Q) = 0$ i Q jeste 0-primitivna i π-regularna, to iz dokaza Teoreme 8.14. sledi da Q jeste 0-primitivna regularna polugrupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka je S nil-ekstenzija polugrupa T i neka je T idealska ekstenzija nil-polugrupa R pomoću 0-primitivne regularne polugrupe Q. Kako možemo poistovetiti parcijalne polugrupe $E(S) = E(T)$ i $E(Q)$, to S jeste 0-primitivna. Jasno da je S π-regularna. Prema tome, važi (i). □

Posledica 8.5. *Polugrupa je $S = S^0$ potpuno 0-primitivna π-inverzna polugrupa ako i samo ako S jeste nil-ekstenzija 0-primitivne inverzne polugrupe.* □

Posledica 8.6. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je 0-primitivna π-inverzna polugrupa;*

(ii) *S je idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću potpuno 0-primitivne π-inverzne polugrupe;*

(iii) *S je nil-ekstenzija polugrupe koja je idealska ekstenzija nil-polugrupe pomoću 0-primitivne inverzne polugrupe.* □

Zadaci.

1. Polugrupa $S = S^0$ je 0-primitivna inverzna polugrupa ako i samo ako za svaki $a \in S^\bullet$ postoji tačno jedan $x \in S$ tako da je $a = axa$.

2. Polugrupa $S = S^0$ je ortogonalna suma potpuno 0-prostih polugrupa ako i samo ako S nema nilpotentnih ideala i S je levo i desno 0-naslojena.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [5], Clifford and Preston [2], Fountain [3], Hall [1], [2], Lallement et Petrich [2], Preston [1], Steinfeld [1], [3], Venkatesan [1], [2].

8.5. Ortogonalne sume 0-σ-prostih polugrupa.

Primetimo da glavni 0-dosledni ideali polugrupe sa nulom čine Kroneckerovu polumrežu. Kako i glavni radikali polugrupe čine polumrežu, to se prirodno postavlja pitanje odnosa tih polumreža. O tome će biti reči u ovoj tački.

Polugrupa $S = S^0$ je *0-σ-prosta* (*0-σ_n-prosta*) ako $a \longrightarrow^\infty b$ ($a \longrightarrow^n b$) za sve $a, b \in S^\bullet$, ($n \in \mathbf{Z}^+$). Jasno da su 0-σ_1-proste polugrupe ustvari 0-Arhimedove.

Lema 8.14. *Neka je* $S = S^0$ *i neka je* $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$.
(*a*) *Ako* $x, y \in S_\alpha$, $\alpha \in Y$, *i ako* $x \to y$ *u* S, *tada* $x \to y$ *u* S_α*;*
(*b*) *Ako* $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$, *i ako* $x \to y$ *u* S, *tada je* $y \in Nil(S)$*;*
(*c*) *Neka je* $n \in \mathbf{Z}^+$. *Ako* $x, y \in S_\alpha$, $\alpha \in Y$, *i ako* $x \longrightarrow^n y$ *u* S, *tada* $x \longrightarrow^n y$ *u* S_α.

Dokaz. (*a*) Iz $x \to y$ dobijamo da je postoji $m \in \mathbf{Z}^+$ tako da je $y^m \in SxS = \cup_{\beta,\gamma\in Y} S_\beta x S_\gamma = S_\alpha x S_\alpha$, pa $x \to y$ u S_α.

(*b*) Kao u (*a*) dobijamo da je $y^m \in S_\alpha x S_\alpha \subseteq S_\alpha$, pa kako $y^m \in S_\beta$, to je $y^m = 0$, pa $y \in Nil(S)$.

(*c*) Prema (*a*) dobijamo da (*c*) važi za $n = 1$. Uzmimo da (*c*) važi za neki prirodan broj n. Uzmimo da $x \longrightarrow^{n+1} y$ u S, tj. $x \longrightarrow^n a \longrightarrow y$ u S. Ako $a \notin S_\alpha$, tada prema (*b*) dobijamo da je $y \in Nil(S)$. Prema tome, $x \longrightarrow y$, odakle prema (*a*) sledi da $x \longrightarrow y$ in S_α, pa $x \longrightarrow^{n+1} y$ u S_α. Ako $a \in S_\alpha$, tada prema pretpostavci imamo da $x \longrightarrow^n a$ u S_α, dok prema (*a*) imamo da $a \longrightarrow y$ u S_α, pa $x \longrightarrow^{n+1} y$ u S_α. Dakle, na osnovu indukcije dobijamo da (*c*) važi za svaki prirodan broj n. $\square$

Neka je S neprazan skup i neka je $0 \in S$ fiksiran element. Tada S sa množenjem:

$$xy = \begin{cases} x & \text{ako je } x = y, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

jeste polumreža koju nazivamo *Kroneckerova polumreža*.

Teorema 8.16. *Sledeći uslovi za polugrupu* $S = S^0$ *su ekvivalentni:*
(*i*) S *je ortogonalna suma 0-σ-prostih polugrupa;*
(*ii*) $(\forall x, y \in S)\ xy \neq 0 \ \Rightarrow\ x\,\sigma\, y$*;*
(*iii*) $(\forall x, y \in S)\ xy \neq 0 \ \Rightarrow\ (xy \longrightarrow^\infty x \ \wedge\ xy \longrightarrow^\infty y)$*;*
(*iv*) *svaki glavni radikal od* S *je 0-dosledan;*
(*v*) *svaki potpuno poluprim ideal od* S *je 0-dosledan;*
(*vi*) Σ_S *je Kroneckerova polumreža i* $\Sigma(0)$ *je 0-dosledan ideal od* S.

Dokaz. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Neka je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$, pri čemu S_α jesu 0-σ-proste polugrupe. Uzmimo $x, y \in S$ da $xy \neq 0$. Tada $x, y \in S_\alpha^\bullet$, za neki $\alpha \in Y$, pa $x \longrightarrow^\infty y$ i $y \longrightarrow^\infty x$, tj. $x\,\sigma\, y$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Uzmimo $x, y \in S$ da je $xy \neq 0$. Tada je $x\,\sigma\, y$, tj. $\Sigma(x) = \Sigma(y)$. Sada prema Teoremi 5.2. imamo da je $\Sigma(xy) = \Sigma(x) \cap \Sigma(y) = \Sigma(x) = \Sigma(y)$, pa $xy \longrightarrow^\infty x$ i $xy \longrightarrow^\infty y$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*). Neka je $a \in S$, i uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \in \Sigma(a)$, $xy \neq 0$. Tada $a \longrightarrow^\infty xy$, dok prema (*iii*) dobijamo da $xy \longrightarrow^\infty x$ i $xy \longrightarrow^\infty y$, odakle sledi da $a \longrightarrow^\infty x$ i $a \longrightarrow^\infty y$, tj. $x, y \in \Sigma(a)$. Prema tome, $\Sigma(a)$ je 0-dosledan ideal, pa važi (*iv*).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka svaki glavni radikal od S jeste 0-dosledan. Tada za $x, y \in S$,

$$(1) \qquad xy \neq 0 \;\Rightarrow\; \Sigma(xy) = \Sigma(x) = \Sigma(y).$$

Neka $\{C_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ jeste familija svih σ-klasa od S, i neka je $S_\alpha = C^0_\alpha$, $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha \in Y$ i $x, y \in S_\alpha$. Ako je $xy = 0$, tada $xy \in S_\alpha$. Neka je $xy \neq 0$. Tada prema (1) dobijamo da je $xy\ \sigma\ x$, pa $xy \in C_\alpha \subseteq S_\alpha$. Prema tome, S_α je podpolugrupa od S. Takodje, iz $x\ \sigma\ y$ dobijamo da $x \longrightarrow^\infty y$ u S, pa prema Lemi 8.14. dobijamo da $x \longrightarrow^\infty y$ u S_α. Prema tome, S_α je 0-σ-prosta polugrupa.

Uzmimo $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$. Ako je $xy \neq 0$, tada prema (1) sledi da je $x\ \sigma\ y$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, $xy = 0$. Dakle, $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Sledi prema Lemi 1.12, jer svaki potpuno poluprim ideal od S jeste unija glavnih radikala sadržanih u njemu.

$(v) \Rightarrow (iv)$. Sledi neposredno.

$(i) \Rightarrow (vi)$. Uzmimo $A, B \in \Sigma_S$, $A \neq B$. Tada je $A = \Sigma(a)$, $B = \Sigma(b)$, za neke $a, b \in S$, $(a, b) \notin \sigma$. Kako je $(i) \Leftrightarrow (ii)$, to iz $ab \neq 0$ sledi $(a, b) \in \sigma$, što protivreči polaznoj pretpostavci. Prema tome, $ab = 0$, odakle $A \cap B = \Sigma(a) \cap \Sigma(b) = \Sigma(ab) = \Sigma(0)$. Dakle, Σ_S je Kroneckerova polumreža. Kako je $(i) \Leftrightarrow (iv)$, $\Sigma(0)$ je 0-dosledan.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Uzmimo $x, y \in S$, $xy \neq 0$. Akoje $\Sigma(x) = \Sigma(y)$, tada je $x \,\sigma\, y$. Neka je $\Sigma(x) \neq \Sigma(y)$. Tada je $\Sigma(xy) = \Sigma(x) \cap \Sigma(y) = \Sigma(0)$, odakle je $xy \in \Sigma(0)$. Kako je $\Sigma(0)$ 0-dosledan, to $x, y \in \Sigma(0)$. Sada $0 \longrightarrow u \longrightarrow^n x$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, i neki $u \in Nil(S)$, odakle $y \longrightarrow u \longrightarrow^n x$, t.j. $y \longrightarrow^\infty x$. Slično, $x \longrightarrow^\infty y$. Dakle, važi (ii). $\square$

U narednim teoremama razmatramo razne posebne tipove polugrupa iz Teoreme 8.16.

Teorema 8.17. *Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$. Polugrupa $S = S^0$ je ortogonalna suma 0-σ_n-prostih polugrupa ako i samo ako*

$$(\forall x, y, a \in S)\ xy \neq 0 \;\Rightarrow\; [(x \longrightarrow^n a \,\vee\, y \longrightarrow^n a) \;\Rightarrow\; xy \longrightarrow^n a].$$

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde su $S_\alpha, \alpha \in Y$ jesu 0-σ_n-proste polugrupe. Uzmimo $x, y \in S$ tako da je $xy \neq 0$. Tada postoji $\alpha \in Y$ tako da $x, y \in S^\bullet_\alpha$. Neka je $a \in S$ tako da $x \longrightarrow^n a$. Ako je $a \in S_\alpha$, tada $xy \longrightarrow^n a$. Ako $a \notin S_\alpha$, tada prema Lemi 8.14. dobijamo da je $a \in Nil(S)$, pa $xy \longrightarrow a$, odakle $xy \longrightarrow^n a$. Slično se dokazuje da iz $y \longrightarrow^n a$ sledi da $xy \longrightarrow^n a$. Prema tome, važi (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Iz (iii) dobijamo da za $x, y \in S$, važi:

$$xy \neq 0 \;\Rightarrow\; \Sigma_n(xy) = \Sigma_n(x) = \Sigma_n(y),$$

pa slično dokazu za $(iv) \Rightarrow (i)$ Teoreme 8.16. dobijamo (i). $\square$

Lema 8.16. *Neka je* $S = S^0$ *polugrupa u kojoj je* 0 *prim ideal. Tada* S *jeste ortogonalno nerazloživa polugrupa.*

Dokaz. Neka A jeste 0-dosledan ideal od S. Prema Lemi 8.5. imamo da A' jeste ideal od S, pa je $AA' = 0$. Kako je 0 prim ideal od S, tada je $A = 0$ ili $A' = 0$, tj. $A = 0$ ili $A = S$. Prema tome, prema Lemi 8.7. dobijamo da S jeste ortogonalno nerazloživa polugrupa. $\square$

Teorema 8.18. *Polugrupa* $S = S^0$ *je ortogonalna suma polugrupa koje imaju* 0 *kao prim ideal ako i samo ako važe sledeći uslovi:*
(a) 0 *je poluprim ideal od* S*;*
(b) $(\forall a, b, c \in S)\ aSb \neq 0 \ \wedge\ bSc \neq 0 \ \Rightarrow\ aSc \neq 0.$

Dokaz. Neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, pri čemu za svaki $\alpha \in Y$, 0 jeste prim ideal od S_α. Uzmimo da je $aSa = 0$, za neki $a \in S$. Neka je $a \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Tada je $aS_\alpha a = 0$, odakle sledi da je $a = 0$, jer 0 jeste prim ideal od S_α. Prema tome, važi (a). Uzmimo $a, b, c \in S$ tako da je $aSb \neq 0$ i $bSc \neq 0$. Tada $a, b, c \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Kako 0 jeste prim ideal od S_α i $a, c \neq 0$, to je $aSc = aS_\alpha c \neq 0$. Prema tome, važi (b).

Obratno, neka važi (a) i (b). Definišimo relaciju ξ na $S^\bullet$ sa: $a\,\xi\,b \Leftrightarrow aSb \neq 0$. Prema (a) dobijamo da ξ jeste refleksivna. Uzmimo da je $a\,\xi\,b$, tj. $aSb \neq 0$, $a, b \in S$. Tada $axb \neq 0$, za neki $x \in S$, i iz (a) sledi da postoji $y \in S$ tako da je $axbyaxb \neq 0$. Odavde dobijamo da je $bya \neq 0$, pa $b\,\xi\,a$. Dakle, ξ je simetrična. Prema (b) dobijamo da ξ jeste tranzitivna. Prema tome, ξ je relacija ekvivalencije na $S^\bullet$.

Neka je $\{C_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ familija svih ξ-klasa od $S^\bullet$, i neka je $S_\alpha = C_\alpha^0$, $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha \in Y$ i $a, b \in S_\alpha$. Ako je $ab = 0$, tada je $ab \in S_\alpha$. Ako je $ab \neq 0$, tada prema (a) dobijamo da je $abxab \neq 0$, za neki $x \in S$, odakle je $ab\,\xi\,b$, tj. $ab \in S_\alpha$. Prema tome, S_α je podpolugrupa od S. Iz definicije relacije ξ sledi da 0 jeste prim ideal od S_α. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \neq \beta$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Ako je $ab \neq 0$, tada prema (a) dobijamo da je $abxab \neq 0$, za neki $x \in S$, odakle $a\,\xi\,b$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\alpha \neq \beta$. Prema tome, $ab = 0$, pa $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$. $\square$

Lema 8.16. *Ako je polugrupa* $S = S^0$ *ortogonalna suma nil-ekstenzija 0-prostih polugrupa, tada* S *jeste nil-ekstenzija ortogonalne sume 0-prostih polugrupa.*

Dokaz. Neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde su S_α nil-ekstenzije 0-prostih polugrupa K_α, $\alpha \in Y$. Neka je $T = \cup\{K_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Za $a, b \in T$ postoji $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $a \in K_\alpha$, $b \in K_\beta$, i ako $\alpha = \beta$, tada $ab \in K_\alpha \subseteq T$, dok za $\alpha \neq \beta$ je $ab = 0 \in T$. Prema tome, T jeste podpolugrupa od S.

Neka je $a \in T$, $b \in S$. Tada $a \in K_\alpha$, $b \in S_\beta$, i $ab = 0$ ili $ab \in K_\alpha S_\alpha \subseteq K_\alpha \subseteq T$. Slično, $ba = 0$ ili $ba \in T$. Dakle, T jeste ortogonalna suma 0-prostih polugrupa. Jasno da je S nil-ekstenzija od T. $\square$

Teorema 8.19. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je ortogonalna suma 0-Arhimedovih polugrupa sa 0-prostim 0-jezgrom;*

(ii) *S je ortogonalna suma ne-nil 0-Arhimedovih polugrupa i S jeste intra-π-regularna;*

(iii) *S je nil-ekstenzija ortogonalne sume 0-prostih polugrupa i važe uslovi (a) i (b) iz Teoreme* 8.18.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi neposredno.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde S_α jesu ne-nil 0-Arhimedove polugrupe i neka S jeste intra-π-regularan. Uzmimo $\alpha \in Y$ i $a \in S_\alpha$. Tada postoji $n \in \mathbf{Z}^+$ i $x, y \in S$ tako da $a^n = xa^{2n}y$. Ako $x, y \in S_\alpha$, tada a jeste intra-π-regularan u S_α. Ako $x \notin S_\alpha$ ili $y \notin S_\alpha$, tada $xa^{2n}y = 0$, pa $a^n = 0$, odakle a jeste intra-π-regularna u S_α. Prema tome, na osnovu Teoreme 3.11, S_α jeste 0-Arhimedova polugrupa sa 0-prostim 0-jezgrom.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Sledi prema Teoremi 3.11, Lemi 8.16. i Teoremi 8.18.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iii). Uzmimo da je S nil-ekstenzija polugrupe K, gde je K ortogonalna suma 0-prostih polugrupa. Takodje, prema Teoremi 8.18. dobijamo da je $S = \Sigma_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde za svaki $\alpha \in Y$, 0 jeste prim ideal od S_α.

Uzmimo $\alpha \in Y$ i uzmimo da $K_\alpha = S \cap K$. Jasno da je K_α ideal od S_α. Neka $a, b \in K_\alpha$ tako da je $aK_\alpha b = 0$. Uzmimo da $a, b \neq 0$. Kako su a, b u nekoj 0-prostoj podpolugrupi od K, to postoje $x, y, u, v \in K$ tako da $a = xay$, $b = ubv$. Iz $a, b \neq 0$ dobijamo da $x, y, u, v \in S_\alpha$, pa $x, y, u, v \in K_\alpha$. Sada je $yS_\alpha u \in K_\alpha S_\alpha K_\alpha \subseteq K_\alpha$, odakle

$$aS_\alpha b = xayS_\alpha ubv \subseteq xaK_\alpha bv = 0,$$

što nije moguće, jer 0 jeste prim ideal od S_α. Prema tome, $a = 0$ ili $b = 0$, pa 0 jeste prim ideal od K_α.

Uzmimo $a, b \in K_\alpha$ tako da je $ab \neq 0$. Kako je K ortogonalna suma 0-prostih polugrupa, to prema Teoremi 8.10. imamo da $a, b \in SabS$, tj. $a = xaby$, $b = uabv$, za neki $x, y, u, v \in K$. Kako $a, b \neq 0$, to $x, y, u, v \in S_\alpha$, tj. $x, y, u, v \in K_\alpha$. Ponovo prema Teoremi 8.10. dobijamo da K_α jeste ortogonalna suma 0-prostih polugrupa i nul-polugrupa, i prema Lemi 8.15. imamo da K_α jeste ortogonalno nerazloživa, pa K_α jeste 0-prosta polugrupa ili nul-polugrupa. Kako je dokazano da za bilo koji $a \in K_\alpha$, $a \neq 0$, postoji $x, y \in K_\alpha$ tako da $a = xay$, to K_α nije nul-polugrupa.

Dakle, S_α jeste nil-ekstenzija 0-proste polugrupe K_α i 0 jeste prim ideal od S_α, pa prema Teoremi 3.11. imamo da važi (i). $\square$

Posledica 8.7. *Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:*

(i) *S je ortogonalna suma potpuno 0-Arhimedovih polugrupa;*

(ii) *S je ortogonalna suma ne-nil 0-Arhimedovih polugrupa i S jeste potpuno π-regularna;*

(iii) *S je nil-ekstenzija ortogonalne sume potpuno 0-prostih polugrupa i važe uslovi (a) i (b) iz Teoreme* 8.18. $\square$

Lema 8.17. *Ako je $S = S^0$ ne-nil 0-Arhimedova polugrupa, tada S jeste ortogonalno nerazloživa polugrupa.*

Dokaz. Uzmimo da postoji netrivijalno ortogonalno razlaganje $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ od S $(|Y| \geq 2,\ |S_\alpha| \geq 2$ za sve $\alpha \in Y)$. Neka je $\alpha \in Y$ i uzmimo $a \in S_\alpha^\bullet$. Neka $\beta \in Y$, $\beta \neq \alpha$ i uzmimo $b \in S_\beta^\bullet$. Tada $a, b \in S^\bullet$, odakle $b \longrightarrow a$, tj. $a^n = xby$, za neki $n \in \mathbf{Z}^+$, $x, y \in S$. Kako je $a^n \in S_\alpha$ i $xby \in SS_\beta S \subseteq S_\beta$, to je $a^n = 0$. Prema tome, $S = Nil(S)$, što protivreči polaznoj pretpostavci. Dakle, S je ortogonalno nerazloživa. $\square$

Jasno je da, na primer, nul-polugrupa sa više od dva elementa nije ortogonalno nerazloživa. Prirodno se nameće problem izučvanja strukture ortogonalno nerazloživih nil-polugrupa. On ostaje otvoren.

Zadaci.

1. Ortogonalna suma polumrežno nerazloživih polugrupa je polumrežno nerazloživa polugrupa.
2. Ortogonalna suma 0-σ_n-prostih polugrupa koje imaju nenula nilpotente je 0-σ_{n+1}-prosta.
3. Neka je $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 2$. Dokazati da nenil 0-σ_n-prosta polugrupa ne mora biti ortogonalno nerazloživa.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [15], [17], Ćirić and Bogdanović [12], Lallement et Petrich [2].

8.6. Mreže ideala polugrupa sa nulom.

Teorija ortogonalnih razlaganja polugrupa sa nulom ima značajne implikacije na direktna razlaganja mreže ideala te polugrupe, što će biti naša naredna tema. Takodje, biće reči i o nekim sličnim rezultatima koji se odnose na mreže ideala polugrupa sa jezgrom i mreže levih ideala polugrupa.

Teorema 8.20. *Za svaku polugrupu* $S = S^0$, $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ *jeste potpuna atomična Booleova algebra i* $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S) = \mathfrak{B}(\mathcal{I}d(S))$.

Štaviše, svaka potpuna atomična Boleova algebra je izomorfna Booleovoj algebri 0-doslednih ideala neke polugrupe sa nulom.

Dokaz. Prema Lemi 8.5. dobijamo da je $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S) = \mathfrak{B}(\mathcal{I}d(S))$, pa prema Lemi 1.4. dobijamo da $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ jeste Booleova algebra. Prema Lemi 1.12. dobijamo da $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ jeste potpuna Booleova algebra. Prema Teoremi 8.5, atomi u $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ su nenula glavni 0-dosledni ideali od S i za proizvoljan $A \in \mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$, $A = \cup_{a\in A}\Delta(a)$. Dakle, prema Teoremi 1.11, $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ je potpuna atomična Booleova algebra.

Primetimo, osim toga, da ako $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ jeste skup svih nenula glavnih 0-doslednih ideala od S, tada je Booleova algebra $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ izomorfna Booleovoj algebri $\mathcal{P}(Y)$ podskupova skupa Y. Uzmimo sada da B jeste proizvoljna potpuna atomična Booleova algebra sa skupom atoma $\{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Prema Posledici 1.3. dobijamo da je B izomorfna sa $\mathcal{P}(Y)$. Svakom elementu $\alpha \in Y$, pridružimo ortogonalno nerazloživu polugrupu S_α sa nulom 0 (na primer 0-prostu polugrupu) tako da je $S_\alpha \cap S_\beta = 0$, za $\alpha \neq \beta$. Neka je $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$. Tada $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ jeste skup svih nenula glavnih 0-doslednih ideala od S, pa prema napred dokazanom imamo da je $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ izomorfna Booleovoj algebri $\mathcal{P}(Y)$. Prema tome, $\mathcal{I}d^{\mathbf{c}}(S)$ i B su izomorfne Booleove algebre. $\square$

Na osnovu Teorema 8.20. i 8.10. dobijamo:

Posledica 8.8. *Neka je* $S = S^0$ *polugrupa. Tada je* $\mathcal{I}d(S)$ *Booleova algebra ako i samo ako* S *jeste ortogonalna suma 0-prostih polugrupa i nul-polugrupa.* $\square$

Za naša dalja razmatranja potrebni su nam neki rezultati iz opšte Teorije mreža. Najpre dokažimo

Lema 8.18. *Neka je* L *ograničena mreža, beskonačno distributivna za presek. Ako je* $\{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ *podskup od* L *za koji važi*

$$\bigvee_{\alpha\in Y} a_\alpha = 1, \qquad a_\alpha \wedge a_\beta = 0, \quad \text{za } \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in Y,$$

onda je L *izomorfna direktnom proizvodu svojih intervala* $[0, a_\alpha]$, $\alpha \in Y$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\phi : L \to \Pi_{\alpha\in Y}[0, a_\alpha]$, sa:

$$x\phi = (x \wedge a_\alpha)_{\alpha\in Y} \qquad (x \in L).$$

Kako je L distributivna mreža, to se lako dokazuje da ϕ jeste homomorfizam. Ako $x, y \in L$ tako da je $x\phi = y\phi$, tada je $x \wedge a_\alpha = y \wedge a_\alpha$, za sve $\alpha \in Y$, odakle

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (\bigvee_{\alpha \in Y} a_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in Y} (x \wedge a_\alpha)$$
$$= \bigvee_{\alpha \in Y} (y \wedge a_\alpha) = y \wedge (\bigvee_{\alpha \in Y} a_\alpha) = y \wedge 1 = y.$$

Ako je $(x_\alpha)_{\alpha \in Y} \in \Pi_{\alpha \in Y}[0, a_\alpha]$, tada za $x = \vee_{\alpha \in Y} x_\alpha$ je $x\phi = (x_\alpha)_{\alpha \in Y}$. Prema tome, ϕ je izomorfizam. $\square$

Posledica 8.9. *Neka je L ograničena mreža, beskonačno distributivna za presek. Tada je L direktno nerazloživa ako i samo ako je $\mathfrak{B}(L) = \{0, 1\}$.* $\square$

Teorema 8.21. *Neka je L ograničena mreža, beskonačno distributivna za presek. Tada L ima razlaganje u direktan proizvod direktno nerazloživih mreža ako i samo ako $\mathfrak{B}(L)$ jeste potpuna atomična Booleova algebra.*

Dokaz. Neka je $L = \Pi_{\alpha \in Y} L_\alpha$, pri čemu su L_α direktno nerazložive mreže. Kako su L_α homomorfne slike od L, to L_α jesu ograničene. Sa 1_α i 0_α označimo redom jedinicu i nulu mreže L_α, $\alpha \in Y$. Za $\alpha \in Y$, neka $a_\alpha \in L$ jeste element odredjen sa:

$$a_\alpha \pi_\beta = \begin{cases} 1_\alpha & \text{za } \beta = \alpha \\ 0_\beta & \text{za } \beta \neq \alpha \end{cases},$$

i neka je $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Tada za svaki $\alpha \in Y$, mreža L_α je izomorfna intervalu $[0, a_\alpha]$ mreže L, pa kako je $[0, a_\alpha]$ mreža beskonačno distributivna za presek, to istu osobinu ima i L_α.

Za $\alpha \in Y$ i $Z = Y - \{\alpha\}$, element $\vee_{\beta \in Z} a_\beta$ je dopuna elementa a_α u L, pa je $A \subseteq \mathfrak{B}(L)$. Uzmimo $x \in \mathfrak{B}(L)$, $x \neq 0$. Tada za svaki $\alpha \in Y$, $x\pi_\alpha \in \mathfrak{B}(L_\alpha)$. Prema Posledici 8.9. imamo da je $\mathfrak{B}(L_\alpha) = \{0_\alpha, 1_\alpha\}$, pa za svaki $\alpha \in Y$, $x\pi_\alpha = 0_\alpha$ ili $x\pi_\alpha = 1_\alpha$. Prema tome, $\mathfrak{B}(L) = \Pi_{\alpha \in Y} \mathfrak{B}(L_\alpha)$, pa je $\mathfrak{B}(L)$ potpuna Booleova algebra. Dalje, neka je $W = \{\alpha \in Y \mid x\pi_\alpha = 1_\alpha\}$. Tada je $x = \vee_{\alpha \in W} a_\alpha$, pa prema Teoremi 1.11, $\mathfrak{B}(L)$ je potpuna atomična Booleova algebra sa skupom atoma A.

Obratno, neka je $\mathfrak{B}(L)$ potpuna atomična Booleova algebra sa skupom atoma $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$. Prema Lemi 8.18, L je izomorfna direktnom proizvodu $\Pi_{\alpha \in Y}[0, a_\alpha]$. Uzmimo $\alpha \in Y$. Ako je $x \in [0, a_\alpha]$ element sa dopunom y u $[0, a_\alpha]$, tada za $W = Y - \{\alpha\}a$, $z = y \vee (\vee_{\beta \in W} a_\beta)$, je dopuna od x u L, tj. svaki element iz $[0, a_\alpha]$ koji ima dopunu u tom intervalu, ima dopunu i u L. Kako a_α jeste atom u $\mathfrak{B}(L)$, to imamo da je $\mathfrak{B}([0, a_\alpha]) = \{0, a_\alpha\}$. Dakle, prema Posledici 8.9. dobijamo da svaki od intervala $[0, a_\alpha]$, $\alpha \in Y$, jeste direktno nerazloživa mreža. $\square$

Prethodni rezultati, primenjeni na mreže ideala polugrupa sa nulom, otkrivaju nam neke značajne osobine tih mreža koje ističemo sledećim teoremama.

Teorema 8.22. *Mreža ideala polugrupe* $S = S^0$ *je direktno nerazloživa ako i samo ako* S *jeste ortogonalno nerazloživa.*

Dokaz. Sledi prema Teoremi 8.20, Lemi 8.7. i Posledici 8.9. $\square$

Teorema 8.23. *Neka je* $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ *najveće ortogonalno razlaganje polugrupe* $S = S^0$. *Tada je mreža* $\mathcal{I}d(S)$ *izomorfna direktnom proizvodu mreža* $\mathcal{I}d(S_\alpha)$, $\alpha \in Y$, *i mreže* $\mathcal{I}d(S_\alpha)$ *su direktno nerazložive.*

Dokaz. Prema Lemi 8.18. i Teoremama 8.21. i 8.20. dobijamo da je mreža $\mathcal{I}d(S)$ izomorfna direktnom proizvodu svojih intervala $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, pri čemu su $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, direktno nerazložive mreže. Sa druge strane, prema Lemi 8.6. imamo da je mreža $[0, S_\alpha]$ jednaka mreži $\mathcal{I}d(S_\alpha)$, za svaki $\alpha \in Y$. $\square$

Prethodni rezultati za mreže ideala polugrupa sa nulom, mogu se proširiti na mreže ideala polugrupa sa jezgrom. Najpre ćemo dokazati sledeću

Teorema 8.24. *Neka je* K *ideal polugrupe* S. *Tada je interval* $[K, S]$ *mreže* $\mathcal{I}d(S)$ *izomorfan mreži* $\mathcal{I}d(S/K)$.

Dokaz. Neka je θ prirodni homomorfizam polugrupe S na Reesovu faktor polugrupu S/K. Tada za proizvoljan ideal A od S, $A\theta$ jeste takodje ideal od S/K, i za proizvoljne podskupove A, B od S važi: $(A \cap B)\theta \subseteq A\theta \cap B\theta$, $(A \cup B)\theta = A\theta \cup B\theta$ (ove osobine važe i za bilo koji drugi homomorfizam ovih polugrupa).

Uzmimo $A, B \in [K, S]$ i uzmimo $y \in A\theta \cap B\theta$. Tada je $y = a\theta = b\theta$, za neke $a \in A$, $b \in B$. Iz $a\theta = b\theta$ dobijamo da je $a = b$ ili $a, b \in K$. U oba slučaja dobijamo da je $a \in B$, pa je $y = a\theta \in (A \cap B)\theta$. Prema tome, $A\theta \cap B\theta \subseteq (A \cap B)\theta$, pa je $(A \cap B)\theta = A\theta \cap B\theta$.

Uzmimo $A, B \in [K, S]$ tako da je $A\theta = B\theta$. Uzmimo $a \in A$. Tada je $a\theta \in A\theta = B\theta$, pa je $a\theta = b\theta$, za neki $b \in B$, odakle je $a = b$ ili $a, b \in K$. U oba slučaja dobijamo da je $a \in B$. Prema tome, $A \subseteq B$. Slično dokazujemo da je $B \subseteq A$. Prema tome, $A = B$.

Uzmimo $Q \in \mathcal{I}d(S/K)$ i uzmimo da je $A = Q\theta^{-1}$. Tada se lako proverava da je $A \in \mathcal{I}d(S)$, $A \in [K, S]$ i da je $A\theta = Q$.

Prema tome, preslikavanje $\phi : [K, S] \to \mathcal{I}d(S/K)$ definisano sa $\phi : A \mapsto A\theta$, je izomorfizam. $\square$

Neposredno iz Teoreme 8.24. dobijamo

Posledica 8.10. *Neka je* K *jezgro polugrupe* S. *Tada je mreža* $\mathcal{I}d(S)$ *izomorfna mreži* $\mathcal{I}d(S/K)$. $\square$

Koristeći Posledicu 8.10, osobine mreže ideala polugrupe sa nulom mogu se preneti na mrežu ideala polugrupe sa jezgrom. Ulogu koju u mreži ideala polugrupe sa nulom igraju 0-dosledni ideali, u mreži ideala polugrupe sa jezgrom K igraju K-dosledni ideali, koje definišemo na sledeći način: Neka je S polugrupa sa jezgrom K. Ideal A polugrupe S je *K-dosledan* ako $A-K$ jeste dosledan podskup od S. Prema Lemi 1.12. dobijamo da presek proizvoljne familije K-doslednih ideala od S jeste takodje K-dosledan ideal od S. Prema tome, za element $a \in S$, presek svih K-doslednih ideala od S koji sadrže a je K-dosledan ideal od S, i nazivamo ga *glavni K-dosledan ideal od S generisan sa a*. Pri izomorfizmu ϕ iz Teoreme 8.24, K-doslednim idealima od S odgovaraju 0-dosledni ideali od S/K i obratno. Takodje, glavnim K-doslednim idealima od S odgovaraju glavni 0-dosledni ideali od S/K, i obratno. Zbog toga, koristeći Teoremu 8.23. i Posledicu 8.10, neposredno dobijamo:

Teorema 8.25. *Neka je S polugrupa sa jezgrom K i neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ skup svih glavnih K-doslednih ideala od S. Tada mreža $\mathcal{I}d(S)$ jeste izomorfna direktnom proizvodu mreža $\mathcal{I}d(A_\alpha)$, $\alpha \in Y$, i mreže $\mathcal{I}d(A_\alpha)$ su direktno nerazložive.* $\square$

Slično kao kod mreža ideala polugrupa sa nulom, dokazaćemo da i najveće razlaganje polugrupe sa nulom u desnu sumu indukuje razlaganje mreže levih ideala te polugrupe u direktan proizvod svojih intervala, koji su direktno nerazloživi. Medjutim, mreža ideala polugrupe sa nulom je potpuno odredjena mrežama ideala sumanada u svom najvećem ortogonalnom razlaganju, dok mreža levih ideala nije potpuno odredjena mrežama levih ideala sumanada u svom najvećem razlaganju u desnu sumu.

Teorema 8.26. *Za svaku polugrupu $S = S^0$, $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ je potpuna atomična Booleova algebra i $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S) = \mathfrak{B}(\mathcal{LI}d(S))$.*

Dokaz. Prema Lemi 8.1. dobijamo da je $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S) = \mathfrak{B}(\mathcal{I}d(S))$, pa prema Lemi 1.4. dobijamo da $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ jeste Booleova algebra. Prema Lemi 1.12. dobijamo da $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ jeste potpuna Booleova algebra. Prema Teoremi 8.1, atomi u $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ su nenula glavni desno 0-dosledni levi ideali od S i za proizvoljan $A \in \mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$, $A = \cup_{a\in A}\mathrm{K}(a)$. Prema tome, $\mathcal{LI}d^{\mathbf{c}}(S)$ je potpuna atomična Booleova algebra. $\square$

Teorema 8.27. *Neka je $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ najveće razlaganje polugrupe $S = S^0$ u desnu sumu. Tada je mreža $\mathcal{LI}d(S)$ izomorfna direktnom proizvodu svojih intervala $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, koji su direktno nerazložive mreže.*

Dokaz. Sledi prema Prema Lemi 8.18. i Teoremama 8.21. i 8.26. $\square$

Prethodnu primedbu da intervali $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, ne moraju biti jednaki mrežama $\mathcal{LI}d(S_\alpha)$, $\alpha \in Y$, ilustruje Primer 8.1.

Odnos mreža $\mathcal{LI}d(S)$ i $\mathcal{LI}d(S_\alpha)$, $\alpha \in Y$, opisuje sledeća posledica, koja neposredno sledi iz Teoreme 8.27.

Posledica 8.11. *Neka je* $S = \mathrm{R}\Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ *najveće razlaganje polugrupe* $S = S^0$ *u desnu sumu. Tada se mreža* $\mathcal{LI}d(S)$ *može potopiti u direktan proizvod mreža* $\mathcal{LI}d(S_\alpha)$, $\alpha \in Y$. $\square$

Alternativni put u izučavanju mreža levih ideala polugrupa sa nulom daje nam sledeća teorema:

Teorema 8.28. *Neka je* $S = \Sigma_{\alpha\in Y} S_\alpha$ *najveće ortogonalno razlaganje polugrupe* $S = S^0$. *Tada je mreža* $\mathcal{LI}d(S)$ *izomorfna direktnom proizvodu mreža* $\mathcal{LI}d(S_\alpha)$, $\alpha \in Y$.

Dokaz. Ako skup $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ nenula glavnih 0-doslednih ideala polugrupe S posmatramo kao podskup mreže levih ideala od S, tada taj skup zadovoljava uslove Leme 8.18, odakle dobijamo da je mreža $\mathcal{LI}d(S)$ izomorfna direktnom proizvodu mreža $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$ (primetimo da ove mreže ne moraju biti direktno nerazložive). Prema Lemi 8.6. imamo da je interval $[0, S_\alpha]$ mreže $\mathcal{LI}d(S)$ jednak mreži $\mathcal{LI}d(S_\alpha)$, za svaki $\alpha \in Y$. $\square$

Kao što smo napomenuli u Tački 1.6, mreža levih ideala $\mathcal{LI}d(S)$ polugrupe S bez nule je izomorfna mreži $\mathcal{LI}d(S^0)$, pa iz rezultata koji tretiraju mreže levih ideala polugrupa sa nulom, možemo dobiti rezultate koji se tiču mreža ideala polugrupa bez nule. Koristeći Teoremu 8.27, neposredno dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 8.29. *Neka je* $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ *najveće razlaganje polugrupe* S *u desno nultu traku polugrupa. Tada je mreža* $\mathcal{LI}d(S)$ *izomorfna direktnom proizvodu svojih intervala* $[0, S_\alpha]$, $\alpha \in Y$, *koji su direktno nerazložive mreže.* $\square$

Zadaci.

1. Sledeći uslovi za polugrupu $S = S^0$ su ekvivalentni:
(i) $\mathcal{LI}d(S)$ je Booleova algebra;
(ii) svaki levi ideal od S je desno 0-dosledan;
(iii) S je levo 0-naslojena;
(iv) S je jednaka svom levom coklu.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [15], [17], Szász [1].

GLAVA 9

Tračna slaganja polugrupa

Do sada smo se, uglavnom, bavili problemima razlaganja polugrupa. Obrnuti problem za problem razlaganja je problem slaganja polugrupa. U ovoj glavi bavićemo se problemom tračnih slaganja polugrupa, tj. problemom sledećeg tipa: Ako je data familija polugrupa indeksirana nekom trakom, kako definisati množenje na uniji te familije tako da ona postane polugrupa, a da data traka bude njena homomorfna slika? Takav problem, zajedno sa problemom tračnih razlaganja, prvi put srećemo u radu A.H.Clifforda iz 1941. godine. On daje konstrukciju polumreže polugrupa pomoću tranzitivnog sistema homomorfizama. Ova konstrukcija je poslužila kao inspiracija za većinu rezultata koji će biti izloženi u ovoj glavi. Od značaja za dalji razvoj ove teorije bilo je odstupanje od tranzitivnosti sistema homomorfizama. U tom smislu je i fundamentalna konstrukcija, za polumreže proizvoljne familije polugrupa, M.Petricha iz 1973. godine, pomoću sistema homomorfizama nad prirodnim uredjenjem polumreže. Uopštavanja ove konstrukcije autori ove knjige sprovode u dva pravca. Prvi je, opšta konstrukcija za trake proizvoljne familije polugrupa, koja se potom primenjuje na slaganja u normalne trake. Drugi pravac je konstrukcija trake polugrupa pomoću sistema homomorfizama nad kvazi-uredjenjem. Obe vrste konstrukcija povezuju se sa poddirektnim proizvodima, posebno sa (probušenim) kičmenim proizvodom. Pomenimo da je pojam kičmenog proizvoda uveo N.Kimura 1958. godine, a javlja se i u radu M.Yamade iz 1964. godine. Kako na problem tračnih slaganja bitno utiču struktura trake kojom se indeksira, osobine homomorfizama i struktura komponenti, to se njihovom interakcijom dobijaju razni tipovi slaganja. To bogatstvo tipova je naročito uočljivo kod traka monoida. Prve rezultate u vezi sa tim dao je B.M.Schein 1974. godine.

9.1. Trake polugrupa i sistemi homomorfizama.

U ovoj tački biće reči o nekim tračnim slaganjima koja se realizuju pomoću sistema homomorfizama nad kvazi-uredjenjem.

Neka su $\{S_i \mid i \in I\}$ i $\{D_i \mid i \in I\}$ dve familije polugrupa indeksirane istim skupom I i neka $\trianglelefteq$ je kvazi-uredjenje na I. Ako je svakom paru i, j elemenata iz I, za koje je $i \trianglerighteq j$, pridruženo preslikavanje $\phi_{i,j}$ koje slika S_i u D_j, tada familiju tih preslikavanja, koju kraće označavamo sa

$\{\phi_{i,j}\}$, nazivamo *sistem preslikavanja iz* S_i *u* D_j *nad kvazi-uredjenjem* $\trianglelefteq$. Ako su $\phi_{i,j}$ homomorfizmi, tada je $\{\phi_{i,j}\}$ *sistem homomorfizama iz* S_i *u* D_j *nad* $\trianglelefteq$.

Ako je $\{\phi_{i,j}\}$ sistem homomorfizama iz S_i u S_j nad kvazi-uredjenjem $\trianglelefteq$ i ako važi:

(i) za svaki $i \in I$, $\phi_{i,i}$ je identičko preslikavanje od S_i;

(ii) $\phi_{i,j}\phi_{j,k} = \phi_{i,k}$, za $i \trianglerighteq j \trianglerighteq k$, $i, j, k \in I$;

tada $\{\phi_{i,j}\}$ jeste *tranzitivni sistem homomorfizama iz* S_i *u* S_j *nad* $\trianglelefteq$.

Neka je B traka. Relacije $\leq_1$ i $\leq_2$ definisane na B sa:

$$j \leq_1 i \;\Leftrightarrow\; ij = j \quad (j, i \in B), \qquad\qquad j \leq_2 i \;\Leftrightarrow\; ji = j \quad (j, i \in B),$$

su kvazi-uredjenja na B i njihov presek je jednak prirodnom uredjenju $\leq$ na B. Relacija $\preccurlyeq$ definisana na B sa:

$$j \preccurlyeq i \;\Leftrightarrow\; j = jij \qquad (j, i \in B),$$

takodje je kvazi-uredjenje na B. Ako je $i \mapsto [i]$ homomorfizam iz B na najveću polumrežnu homomorfnu sliku od B indukovan najmanjom polumrežnom kongruencijom na B, i ako je $\leq$ prirodno uredjenje na najvećoj polumrežnoj homomorfnoj slici od B, tada je:

$$j \preccurlyeq i \;\Leftrightarrow\; [j] \leq [i] \qquad (j, i \in B).$$

Kvazi-uredjenja $\leq_1$ i $\leq_2$ komutiraju u polugrupi relacija trake B i njihov proizvod je jednak relaciji $\preccurlyeq$. Kvazi-uredjenje $\preccurlyeq$ na B je jednako univerzalnoj relaciji na B ako i samo ako B jeste pravougaona traka.

Lema 9.1. *Neka je* B *traka. Svakom* $i \in B$ *pridružimo polugrupu* S_i *i nadpolugrupu* D_i *od* S_i *tako da je* $D_i \cap D_j = \varnothing$, *za* $i \neq j$. *Neka je* $\{\phi_{i,j}\}$ *sistem preslikavanja iz* S_i *u* D_j *nad kvazi-uredjenjem* $\preccurlyeq$ *na* B *tako da važe sledeći uslovi:*

(1) *za svaki* $i \in B$, $\phi_{i,i}$ *je identičko preslikavanje od* S_i*;*

(2) $(S_i\phi_{i,ij})(S_j\phi_{j,ij}) \subseteq S_{ij}$, *za sve* $i, j \in B$*;*

(3) $[(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,k} = (a\phi_{i,k})(b\phi_{j,k})$, *za* $a \in S_i$, $b \in S_j$, $ij \succcurlyeq k$, $i, j, k \in B$.

Definišimo množenje $*$ *na* $S = \cup_{i\in B} S_i$ *sa:*

(4) $$a * b = (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}), \qquad (a \in S_i,\ b \in S_j).$$

Tada S *jeste polugrupa, u oznaci* $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$, *i* S *je traka* B *polugrupa* S_i, $i \in B$.

Dokaz. Uzmimo $a \in S_i$, $b \in S_j$, $c \in S_k$, $i, j, k \in B$. Tada prema (3) dobijamo

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= [(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})] * c = [(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,ijk}(c\phi_{k,ijk})\\ &= (a\phi_{i,ijk})(b\phi_{j,ijk})(c\phi_{k,ijk}) = (a\phi_{i,ijk})[(b\phi_{j,jk})(c\phi_{k,jk})]\phi_{jk,ijk}\\ &= a * [(b\phi_{j,jk})(c\phi_{k,jk})] = a * (b * c).\end{aligned}$$

Prema tome, S je polugrupa. Prema (4) dobijamo da S jeste traka B polugrupa S_i, $i \in B$. $\square$

Uslov (2) služi kao opravdanje za (3), tj. da relacija (3) ima smisla, i doprinosi da je $*$ operacija na S. U slučaju da je B lanac, uslov (2) se može izostaviti.

Iz uslova (3), za $i = j$, prema (1) dobijamo da $\{\phi_{i,k}\}$ jeste sistem homomorfizama. Ako za svaki par $i, j \in B$, $i \succcurlyeq j$, $\phi_{i,j}$ slika S_i u S_j, tj. ako je $S_i\phi_{i,j} \subseteq S_j$, ili ako je $D_i = S_i$, za svaki $i \in B$, tada pišemo da je $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$. I u ovom slučaju uslov (2) može biti izostavljen.

Neka je polugrupa S traka B polugrupa S_i, $i \in B$. Za $k \in B$, sa F_k ćemo označavati polugrupu $F_k = \cup_{i \succcurlyeq k} S_i$. Jasno da je $S_k \subseteq F_k$, za svaki $k \in B$. Ako je B polumreža, tada F_k jeste idealska ekstenzija od S_k, za svaki $k \in B$.

Sledećom teoremom se preciziraju uslovi pod kojima postoji slaganje iz Leme 9.1.

Teorema 9.1. *Neka je polugrupa S traka B polugrupa S_i, $i \in B$. Tada:*
(a) $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$ ako i samo ako za svaki $k \in B$ postoji nadpolugrupa D_k od S_k i S_k-homomorfizam iz F_k u D_k;
(b) Ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$, tada svaka od polugrupa D_k može biti izabrana tako da je $D_k = \{a\phi_{i,k} \mid a \in S_i,\ i \in B,\ i \succcurlyeq k\}$.
(c) $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$ ako i samo ako S_k jeste retrakt od F_k, za svaki $k \in B$.

Dokaz. (*a*) Ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$, tada za $k \in B$, preslikavanje $\theta_k : F_k \to D_k$ definisano sa: $a\theta_k = a\phi_{i,k}$, za $a \in S_i$, $i \succcurlyeq k$, jeste S_k-homomorfizam.

Obratno, neka za svaki $k \in B$ postoji nadpolugrupa D_k i S_k-homomorfizam θ_k iz F_k u D_k. Za $i, j \in B$, $i \succcurlyeq j$, definišimo preslikavanje $\phi_{i,j}$ iz S_i u D_j sa: $a\phi_{i,j} = a\theta_j$, $a \in S_i$. Jasno da važi (1). Neka $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B$. Tada $a, b \in F_{ij}$, $ab \in S_{ij}$, odakle

$$(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}) = (a\theta_{ij})(b\theta_{ij}) = (ab)\theta_{ij} = ab.$$

Neka je $k \in B$, $ij \succcurlyeq k$. Tada je

$$[(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,k} = (ab)\theta_k = (a\theta_k)(b\theta_k) = (a\phi_{i,k})(b\phi_{j,k}).$$

Prema tome, $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$.

(*b*). U oznakama iz (*a*), za $k \in B$ imamo da je $\{a\phi_{i,k} \mid a \in S_i,\ i \succcurlyeq k\} = F_k\phi_k$, pa taj skup jeste podpolugrupa od D_k. Jasno da se sve naše operacije vrše u okviru tog skupa, pa bez ikakvih problema polugrupu D_k možemo zameni tom njenom podpolugrupom.

(*c*) Sledi prema (*a*). $\square$

Sobzirom na Teoremu 1.19, uslovi Teoreme 9.1.(a) su kod polumrežnih slaganja uvek ispunjeni, što će se videti iz sledeće teoreme kojom se rešava problem polumrežnih slaganja u opštem slučaju.

Teorema 9.2. *Svaka polugrupa S koja je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, ima slaganje oblika $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$. Pri tome, svaka od polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi:*
(5) $D_\alpha = \{b\phi_{\beta,\alpha} \mid b \in S_\beta,\ \beta \in Y,\ \beta \geq \alpha\}$;
(6) D_α *je gusta ekstenzija od* S_α.

Dokaz. Za svaki $\alpha \in Y$, F_α je idealska ekstenzija od S_α, pa prema Teoremi 1.19, postoji idealska ekstenzija D_α od S_α i parcijalni homomorfizam φ_α iz $F_\alpha - S_\alpha$ u D_α. Kako parcijalni homomorfizam φ_α odredjuje jedan S_α-homomorfizam iz F_α u D_α, to prema Teoremi 9.1. dobijamo da je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$. Ponovo prema Teoremi 1.19. dobijamo da svaka od polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi (5) i (6). $\square$

Veza izmedju polumrežnih slaganja i poddirektnih proizvoda data je sledećom teoremom.

Teorema 9.3. *Neka je Y polumreža, neka je $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa i neka je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$, pri čemu je svaka od polugrupa D_α izabrana tako da važi* (5)*. Ako uzmemo da je*

$$E_\alpha = \begin{cases} D_\alpha & \text{ako je } \alpha \text{ nula u } Y, \\ D_\alpha \cup 0_\alpha & \text{inače}, \end{cases} \qquad (\alpha \in Y),$$

pri čemu u drugom slučaju 0_α jeste nula u E_α, tada S jeste poddirektan proizvod polugrupa E_α, $\alpha \in Y$.

Dokaz. Neka je $\gamma \in Y$ i neka je θ_γ preslikavanje iz S u S_γ definisano sa:

$$a\theta_\gamma = \begin{cases} a\phi_{\alpha,\gamma} & \text{ako je } a \in S_\alpha,\ \alpha \geq \gamma, \\ 0_\gamma & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz (5) dobijamo da θ_γ slika S na E_α. Uzmimo $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Tada prema (3) i (4) dobijamo da je

$$(a\theta_\gamma)(b\theta_\gamma) = (a\phi_{\alpha,\gamma})(b\phi_{\beta,\gamma}) = [(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta})]\phi_{\alpha\beta,\gamma} = (a*b)\phi_{\alpha\beta,\gamma} = (a*b)\theta_\gamma,$$

ako je $\alpha\beta \geq \gamma$, i $(a\theta_\gamma)(b\theta_\gamma) = 0_\gamma = (a*b)\theta_\gamma$, inače. Prema tome, θ_γ je homomorfizam iz S na E_α.

Neka je $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, i neka je $a\theta_\gamma = b\theta_\gamma$, za svaki $\gamma \in Y$. Tada je $\alpha \geq \gamma$ ako i samo ako je $\beta \geq \gamma$, pa kako je $\leq$ uredjenje na Y, to je $\alpha = \beta$, odakle je $a = a\theta_\alpha = b\theta_\alpha = b$. Prema tome, $\cap_{\gamma \in Y}\theta_\gamma = \epsilon$, pa prema Teoremi 1.5. dobijamo da S jeste poddirektan proizvod polugrupa E_α, $\alpha \in Y$. $\square$

Posledica 9.1. *Neka je* Y *polumreža, neka je* $\{S_\alpha \mid \alpha\in Y\}$ *familija po parovima disjunktnih polugrupa i neka je* $S=(Y;S_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$. *Ako uzmemo da je*

$$E_\alpha=\begin{cases} S_\alpha & \text{ako je } \alpha \text{ nula u } Y,\\ S_\alpha\cup 0_\alpha & \text{inače },\end{cases}\qquad (\alpha\in Y),$$

pri čemu u drugom slučaju 0_α *jeste nula u* E_α, *tada* S *jeste poddirektan proizvod polugrupa* E_α, $\alpha\in Y$. $\square$

Zadaci.

1. Neka je B traka. Tada za sve $x,y\in X$ je $xyx=xy$ ili $xyxy=yx$, ako i samo ako je $\leq_1\cup\leq_2$ kvazi-uredjenje na B. U tom slučaju je $\leq_1\cup\leq_2=\preccurlyeq$.

Literatura. Ćirić and Bogdanović [3], [8], [10], Clifford [1], Petrich [15], [16], Płonka [1], [2], Schein [4], [8].

9.2. Jake trake polugrupa.

Predmet proučavanja ove tačke biće tračna slaganja odredjena tranzitivnim sistemima homomorfizama.

Neka je B traka i neka je $\{S_i \mid i\in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa. Ako je $S=(B;S_i,\phi_{i,j})$ i ako je $\{\phi_{i,j}\}$ tranzitivni sistem homomorfizama, tada S jeste *jaka traka* B *polugrupa* S_i, $i\in B$, u oznaci $S=[B;S_i,\phi_{i,j}]$. Ako je $S=[B;S_i,\phi_{i,j}]$ i ako su svi homomorfizmi $\phi_{i,j}$ injektivni, tada je S *čvrsta traka* B *polugrupa* S_i, $i\in B$, u oznaci $S=\langle B;S_i,\phi_{i,j}\rangle$. Ako je B polumreža (pravougaona traka), tada govorimo o *jakoj i čvrstoj polumreži* (*matrici*) *polugrupa*.

Neka je B traka. Svakom $i\in B$ pridružimo polugrupu S_i tako da je $S_i\cap S_j=\varnothing$, za $i\neq j$. Neka su $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ tranzitivni sistemi homomorfizama iz S_i u S_j redom nad kvazi-uredjenjima $\leq_1$ i $\leq_2$, tako da važi:

$$\varphi_{i,j}\psi_{j,kj}=\psi_{i,k}\varphi_{k,kj},\qquad \text{za } i\geq_1 j,\ i\geq_2 k. \tag{7}$$

Definišimo množenje $*$ na $S=\cup_{i\in B}S_i$ sa:

$$a*b=(a\varphi_{i,ij})(b\psi_{j,ij})\qquad (a\in S_i,\ b\in S_j). \tag{8}$$

Tada je S polugrupa, u oznaci $S=[B;S_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j}]$, i S jeste traka B polugrupa S_i, $i\in B$. Sledećom teoremom dokazujemo da je ovo slaganje analogon jakih traka polugrupa, pa ćemo i $S=[B;S_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j}]$ nazivati *jaka traka* B *polugrupa* S_i, $i\in B$.

Teorema 9.4. *Neka je B traka i neka je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa. Tada je $S = [B; S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$ ako i samo ako je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$.*

Dokaz. Neka je $S = [B; S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$. Uzmimo $i, j \in B$ tako da je $i \succcurlyeq j$. Tada je $i \geq_1 ij \geq_2 j$, pa $\phi_{i,j} = \varphi_{i,ij}\psi_{ij,j}$ jeste homomorfizam iz S_i u S_j. Jasno da je $\phi_{i,i}$ identičko preslikavanje od S_i, za svaki $i \in B$. Uzmimo $i, j, k \in B$ tako da je $i \succcurlyeq j \succcurlyeq k$. Prema (7) imamo da je $\psi_{ij,j}\varphi_{j,jk} = \varphi_{ij,ijk}\psi_{ijk,jk}$, pa je

$$\begin{aligned}\phi_{i,j}\phi_{j,k} &= \varphi_{i,ij}\psi_{ij,j}\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k} = \varphi_{i,ij}\varphi_{ij,ijk}\psi_{ijk,jk}\psi_{jk,k} \\ &= \varphi_{i,ijk}\psi_{ijk,k} = \psi_{i,ki}\varphi_{ki,k} = \varphi_{i,ik}\psi_{ik,k} = \phi_{i,k}.\end{aligned}$$

Prema tome, $\{\phi_{i,j}\}$ je tranzitivni sistem homomorfizama.

Uzmimo $i, j \in B$, $a \in S_i$, $b \in S_j$. Tada je $\phi_{i,ij} = \varphi_{i,ij}\psi_{ij,ij} = \varphi_{i,ij}$, i prema (7) je $\phi_{j,ij} = \varphi_{j,jij}\psi_{jij,j} = \psi_{j,ij}\varphi_{ij,ij} = \psi_{j,ij}$, pa odatle i iz (8) dobijamo da je

$$a * b = (a\varphi_{i,ij})(b\psi_{j,ij}) = (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}).$$

Prema tome, $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$.

Obratno, neka je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. Uzmimo da je $\varphi_{i,j} = \phi_{i,j}$, za $i \geq_1 j$, i $\psi_{i,j} = \phi_{i,j}$, za $i \geq_2 j$. Jasno da su $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ tranzitivni sistemi homomorfizama nad $\leq_1$ i $\leq_2$. Za $i, j \in B$, $a \in S_i$, $b \in S_j$, je

$$a * b = (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}) = (a\varphi_{i,ij})(\psi_{j,ij}).$$

Uzmimo $i, j, k \in B$ tako da je $i \geq_1 j$ i $i \geq_2 k$. Tada je

$$\varphi_{i,j}\psi_{j,kj} = \phi_{i,j}\phi_{j,kj} = \phi_{i,kj} = \phi_{i,k}\phi_{k,kj} = \psi_{i,k}\varphi_{k,kj}.$$

Prema tome, $S = [B, S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$. $\square$

Ako je $S = [B; S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$, pri čemu su homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ injektivni, tada pišemo da je $S = \langle B; S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}\rangle$. Neposredno iz Teoreme 9.4, dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 9.2. *Neka je B traka i neka je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa. Tada je $S = \langle B; S_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}\rangle$ ako i samo ako je $S = \langle B; S_i, \phi_{i,j}\rangle$.* $\square$

Jake matrice polugrupa mogu se predstaviti i direktnim proizvodima, o čemu će biti reči u sledećoj teoremi.

Teorema 9.5. *Neka je B pravougaona traka.*

Ako je polugrupa S jaka matrica B polugrupa S_i, $i \in B$, tada sve polugrupe S_i, $i \in B$, jesu medjusobno izomorfne i S je izomorfna direktnom proizvodu polugrupa B i T, pri čemu T jeste polugrupa izomorfna polugrupama S_i, $i \in B$.

Obratno, ako je polugrupa S izomorfna direktnom proizvodu polugrupa B i T, tada S jeste traka B polugrupa S_i, $i \in B$, koje su sve izomorfne sa T.

Dokaz. Neka je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. Kako je $\preccurlyeq$ univerzalna relacija na B, to za proizvoljne $i, j \in B$ imamo da je $i \succcurlyeq j \succcurlyeq i$, odakle sledi da je $\phi_{i,j}\phi_{j,i} = \phi_{i,i}$, $\phi_{j,i}\phi_{i,j} = \phi_{j,j}$. Prema tome, za sve $i, j \in B$, $\phi_{i,j}$ je izomorfizam iz S_i na S_j. Fiksirajmo element $0 \in B$, uzmimo da je $T = S_0$ i definišimo preslikavanje Φ iz S u $T \times B$ sa:

$$a\Phi = (a\phi_{i,0}, i), \qquad \text{za } a \in S_i,\ i \in B.$$

Za $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B$, imamo da je

$$\begin{aligned}(a\Phi)(b\Phi) &= (a\phi_{i,0}, i)(b\phi_{j,0}, j) = ((a\phi_{i,0})(b\phi_{j,0}), ij) = ([(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,0}, ij)\\ &= ((a * b)\phi_{ij,0}, ij) = (a * b)\Phi.\end{aligned}$$

Dakle, Φ je homomorfizam. Neka je $a\Phi = b\Phi$, za $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B$. Tada je $(a\phi_{i,0}, i) = (b\phi_{j,0}, j)$, odakle je $i = j$ i $a\phi_{i,0} = b\phi_{i,0}$. Kako smo napred dokazali da je $\phi_{i,0}$ izomorfizam, to je $a = b$. Prema tome, Φ je injekcija. Na kraju, uzmimo $(u, i) \in T \times B$. Tada je $u \in S_0$, pa za $a = u\phi_{0,i}$, dobijamo da je $u = a\phi_{i,0}$ i $a \in S_i$, pa je $a\Phi = (u, i)$. Dakle, Φ je izomorfizam iz S na $T \times B$.

Obratno, neka je $S = T \times B$. Za $i \in B$, neka je $S_i = T \times \{i\}$. Za $i, j \in B$, definišimo preslikavanje $\phi_{i,j}$ iz S_i u S_j sa: $(a, i)\phi_{i,j} = (a, j)$, $(a, i) \in S_i$. Tada se neposredno proverava da je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. □

Neka je B traka, neka je T polugrupa i neka je η preslikavanje iz B u *skup* $\mathfrak{S}(T)$ *svih podpolugrupa polugrupe* T. Preslikavanje η je *puno* ako je $\cup_{i\in B} i\eta = T$, i *antitono* ako za $i, j \in B$, iz $i \succcurlyeq j$, sledi da je $i\eta \subseteq j\eta$.

Već je rečeno da i osobine homomorfizama koji učestvuju u slaganju polugrupe umnogome utiču na strukturu konstruisane polugrupe. Ilustrativan primer za to je sledeća teorema koja pokazuje uticaj injektivnosti tih homomorfizama na mogućnost predstavljanja konstruisane polugrupe odredjenim poddirektnim proizvodom.

Teorema 9.6. *Neka je B traka.*
Ako je T polugrupa i ako je $\eta : B \to \mathfrak{S}(T)$ puno antitono preslikavanje, tada $S = \{(a, i) \in T \times B \mid a \in i\eta\}$ jeste podpolugrupa direktnog proizvoda polugrupa T i B, u oznaci $S = [T, \eta, B]$, S je poddirektan proizvod polugrupa T i B, i S je čvrsta traka B polugrupa $S_i = i\eta \times \{i\} (\cong i\eta)$, $i \in B$.

Obratno, ako je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa i ako je $S = \langle B; S_i, \phi_{i,j}\rangle$, tada relacija ξ definisana na S sa:

$$a\,\xi\,b \;\Leftrightarrow\; a\phi_{i,ij} = b\phi_{j,ij} \qquad (a \in S_i,\ b \in S_j),$$

jeste kongruencija na S i $S = [S/\xi, \eta, B]$.

Dokaz. Uzmimo $(a,i),(b,j)\in S$. Tada je $a\in i\eta$, $b\in j\eta$, pa iz antitonosti preslikavanja η dobijamo da $a,b\in(ij)\eta$, odakle je $ab\in(ij)\eta$. Prema tome, $(a,i)(b,j)=(ab,ij)\in S$, pa je S podpolugrupa od $T\times B$. Kako je η puno preslikavanje, to S jeste poddirektan proizvod polugrupa T i B. Jasno da je S traka B polugrupa $S_i=i\eta$, $i\in B$. Za $i,j\in B$, $i\succcurlyeq j$, definišimo preslikavanje $\phi_{i,j}$ iz S_i u S_j sa:

$$(u,i)\phi_{i,j}=(u,j), \qquad (\,(u,i)\in S\,).$$

Iz antitonosti preslikavanja η dobijamo da je $\phi_{i,j}$ dobro definisano. Lako se proverava da je $S=\langle B;S_i,\phi_{i,j}\rangle$.

Obratno, neka je $S=\langle B;S_i,\phi_{i,j}\rangle$. Jasno da je ξ refleksivna relacija. Uzmimo $a,b\in S$ tako da je $a\,\xi\,b$. Tada je $a\in S_i$, $b\in S_j$, $i,j\in B$, i $a\phi_{i,ij}=b\phi_{j,ij}$. Kako je $ij\succcurlyeq ji$, to je

$$a\phi_{i,ji}=a\phi_{i,ij}\phi_{ij,ji}=b\phi_{j,ij}\phi_{ij,ji}=b\phi_{j,ji},$$

zbog tranzitivnosti sistema $\{\phi_{i,j}\}$. Prema tome, $b\;\xi\;a$, pa ξ jeste simetrična relacija.

Uzmimo $a,b,c\in S$ tako da je $a\,\xi\,b$ i $b\,\xi\,c$. Tada je $a\in S_i$, $b\in S_j$, $c\in S_k$, $i,j,k\in B$, i $a\phi_{i,ij}=b\phi_{j,ij}$, $b\phi_{j,jk}=c\phi_{k,jk}$, odakle je

$$\begin{aligned}a\phi_{i,ik}\phi_{ik,ijk}&=a\phi_{i,ijk}=a\phi_{i,ij}\phi_{ij,ijk}=b\phi_{j,ij}\phi_{ij,ijk}\\&=b\phi_{j,ijk}=b\phi_{j,jk}\phi_{jk,ijk}=c\phi_{k,jk}\phi_{jk,ijk}\\&=c\phi_{k,ijk}=c\phi_{k,ik}\phi_{ik,ijk}.\end{aligned}$$

Prema tome, $a\phi_{i,ik}\phi_{ik,ijk}=c\phi_{k,ik}\phi_{ik,ijk}$, pa kako je $\phi_{ik,ijk}$ injektivno preslikavanje, to je $a\phi_{i,ik}=c\phi_{k,ik}$. Dakle, $a\,\xi\,c$, pa ξ jeste tranzitivna relacija.

Uzmimo $a,b\in S$ tako da je $a\,\xi\,b$ i uzmimo $x\in S$. Neka je $a\in S_i$, $b\in S_j$, $c\in S_k$, $i,j,k\in B$. Prema pretpostavci, $a\phi_{i,ij}=b\phi_{j,ij}$, odakle je

$$\begin{aligned}(a*x)\phi_{ik,ikjk}&=[(a\phi_{i,ik})(x\phi_{k,ik})]\phi_{ik,ikjk}=(a\phi_{i,ik}\phi_{ik,ikjk})(x\phi_{k,ik}\phi_{ik,ikjk})\\&=(a\phi_{i,ikjk})(x\phi_{k,ikjk})=(a\phi_{i,ij}\phi_{ij,ikjk})(x\phi_{k,ikjk})\\&=(b\phi_{j,ij}\phi_{ij,ikjk})(x\phi_{k,ikjk})=(b\phi_{j,ikjk})(x\phi_{k,ikjk})\\&=(b\phi_{j,jk}\phi_{jk,ikjk})(c\phi_{k,jk}\phi_{jk,ikjk})=[(b\phi_{j,jk})(x\phi_{k,jk})]\phi_{jk,ikjk}\\&=(b*x)\phi_{jk,ikjk}.\end{aligned}$$

Prema tome, $a*x\,\xi\,b*x$. Slično dokazujemo da je $x*a\,\xi\,x*b$. Dakle, ξ je kongruencija.

Neka je μ tračna kongruencija na S čije klase su polugrupe S_i, $i\in B$. Tada je jasno da je $\xi\cap\mu=\epsilon$. Prema Teoremi 1.5. dobijamo da S jeste poddirektan proizvod od polugrupe S/ξ i polugrupe S/μ koja je izomorfna sa B, pri čemu je injektivni homomorfizam Φ iz S u $T\times B$ dat sa $a\Phi=(a\xi^\natural,a\mu^\natural)$, $a\in S$. Za $i\in B$, neka je $i\eta=\{u\in S/\xi\mid (u,i)\in S\Phi\}$. Lako se proverava da je $i\eta$ podpolugrupa od S/ξ, za svaki $i\in B$. Kako je S poddirektan proizvod od S/ξ i B, to η jeste puno preslikavanje iz B u $\mathfrak{S}(S/\xi)$. Uzmimo $i,j\in B$ tako da je $i\succcurlyeq j$, i uzmimo $u\in i\eta$. Tada je $(u,i)\in S\Phi$, pa je $(u,i)=a\Phi$, za neki $a\in S$, tj. $u=a\xi^\natural$, $a\in S_i$. Ako je $b=a\phi_{i,j}$, tada je $b\,\xi\,a$, tj. $b\xi^\natural=a\xi^\natural=u$, odakle dobijamo da je $(u,j)=b\Phi\in S\Phi$, pa je $u\in j\eta$. Prema tome, η je antitono preslikavanje, pa je $S=[T,\eta,B]$. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet koji sadrži varijetet polumreža. Ako je $S=[Y;S_\alpha,\phi_{\alpha,\beta}]$ jaka polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha\in Y$, i svaka od polugrupa S_α, $\alpha\in Y$ je iz $\mathcal{V}$, tada je i S iz $\mathcal{V}$.

2. Neka su S i T E-inverzivne polugrupe. Preslikavanje $\phi:S\to\mathcal{P}(T)$ je *sirjektivni podhomomorfizam* od S na T ako važi:

(a) $a\phi\neq\varnothing$, za svaki $a\in S$;

(b) $(a\phi)(b\phi)\subseteq(ab)\phi$, za sve $a,b\in S$;

(c) $\cup_{a\in S}a\phi=T$;

(a) za $u\in T$, $a\in S$, takve da je $u\in a\phi$, postoje $v\in T$, $b\in S$ tako da je $vu,uv\in E(T)$, $ab,ba\in E(S)$ i $v\in b\phi$.

Neka su S i T E-inverzivne polugrupe i neka je ϕ sirjektivan podhomomorfizam iz S na T. Tada

$$\pi(S;T,\phi)=\{(a,u)\in S\times T\mid u\in a\phi\}$$

jeste E-inverzivna polugrupa koja je poddirektan proizvod od S i T.

Obratno, svaka E-inverzivna polugrupa koja je poddirektan proizvod od S i T može biti ovako konstruisana.

3. Neka je S polugrupa i neka je B pravougaona traka. Neka je η preslikavanje iz B u skup svih bi-ideala od S, takvo da važi

$$(a)\quad S=\cup_{i\in B}i\eta,\qquad\qquad (b)\quad (i\eta)(j\eta)\subseteq(ij)\eta,\ \text{za sve } i,j\in B.$$

Tada $D=\{(a,i)\in S\times B\mid a\in i\eta\}$ jeste poddirektan proizvod od S i B. Obratno, svaki poddirektan proizvod od S i B se može ovako konstruisati.

4. Neka je S regularna polugrupa, neka je B pravougaona traka i $B=L\times R$, gde je L levo nulta traka i R je desno nulta traka. Neka su φ i ψ preslikavanja iz L i R u skup svih levih i skup svih desnih ideala od S, tim redom, tako da je $\cup_{i\in L}i\varphi=\cup_{\lambda\in R}\lambda\psi=S$. Tada preslikavanje η iz B u skup svih bi-ideala od S definisano sa: $(i,\lambda)\eta=i\varphi\cap\lambda\psi$, ($(i,\lambda)\in B$) zadovoljava uslove Zadatka 4.

Obratno, svako preslikavanje η koje zadovoljava uslove Zadatka 4. može biti dobijeno na ovaj način.

Literatura. Chrislock and Tamura [1], Ćirić and Bogdanović [3], [8], [10], Clifford [1], Lopez [1], Mitsch [2], Petrich [15], Płonka [1], [2], Салий [2], Schein [4], [8].

9.3. Kičmeni proizvod trake i polumreže polugrupa.

Čitalac je već zapazio da su neki tipovi tračnih slaganja u bliskoj vezi sa predstavljanjima polugrupa poddirektnim proizvodima odredjenog tipa. Ovde ćemo razmatrati tračna slaganja koja su u vezi sa tzv. kičmenim odnosno probušenim kičmenim proizvodima odredjenih polugrupa.

Neka su P i Q polugrupe i neka je Y njihova zajednička homomorfna slika, tj. neka su φ i ψ, tim redom, homomorfizmi iz P i Q na Y. Skup

$$S = \{(a,b) \in P \times Q \mid a\varphi = b\psi\},$$

je podpolugrupa direktnog proizvoda polugrupa P i Q, i S je poddirektan proizvod polugrupa P i Q. Polugrupu izomorfnu sa polugrupom S nazivamo *kičmeni proizvod polugrupa* P *i* Q *u odnosu na* Y. Ako za $\alpha \in Y$ uvedemo oznake: $P_\alpha = \alpha\varphi^{-1}$, $Q_\alpha = \alpha\psi^{-1}$, tada je

$$S = \cup_{\alpha\in Y} P_\alpha \times Q_\alpha,$$

pa kičmeni proizvod polugrupa P i Q u odnosu na Y možemo shvatiti kao "kičmu" direktnog proizvoda polugrupa P i Q.

Podpolugrupu kičmenog proizvoda polugrupa P i Q u odnosu na polugrupu Y, koja je istovremeno i poddirektan proizvod polugrupa P i Q, nazivamo *probušeni kičmeni proizvod polugrupa* P *i* Q *u odnosu na* Y.

Teorema 9.7. *Neka je traka* B *polumreža* Y *pravougaonih traka* B_α, $\alpha \in Y$.
Ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$, *tada*
(A1) S *je polumreža* Y *polugrupa* $S_\alpha = (B_\alpha; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$, $\alpha \in Y$;
(A2) *relacija* ξ *na* S *definisana sa:*

$a\,\xi\,b \;\Leftrightarrow\; a \in S_i,\ b \in S_j,\ [i] = [j],$ *i* $a\phi_{i,k} = b\phi_{j,k}$ *za sve* $k \in B,\ i,j \succcurlyeq k$;
je kongruencija na S *i* $T = S/\xi$ *je polumreža* Y *polugrupa* $T_\alpha = S_\alpha\xi^\natural$;
(A3) S *je probušeni kičmeni proizvod polugrupa* T *i* B *u odnosu na* Y.
Obratno, ako je S *probušeni kičmeni proizvod polugrupa* $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$ *i* B *u odnosu na* Y *i ako uzmemo da je:*
(B1) $S_i = (T_\alpha \times \{i\}) \cap S$, $D_i = D_\alpha \times \{i\}$, *za* $i \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$;
(B2) *za* $i,j \in B$, $[i] \geq [j]$, *preslikavanje* $\phi_{i,j}$ *iz* S_i *u* D_j *je definisano sa:*

$$(a,i)\phi_{i,j} = (a\phi_{[i],[j]}, j);$$

tada je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$.

Dokaz. Neka je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$. Jasno da važi $(A1)$.

$(A2)$ Jasno da je ξ relacija ekvivalencije. Uzmimo da je $a\,\xi\,b$ i $x \in S$. Neka je $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$ i neka je $x \in S_k$, $k \in B_\beta$, $\beta \in Y$. Tada je $a * x \in S_{ik}$, $b * x \in S_{jk}$, $ik, jk \in B_{\alpha\beta}$. Uzmimo $l \in B$, $\alpha\beta \geq [l]$. Tada je $\alpha \geq [l]$, pa je $a\phi_{i,l} = b\phi_{j,l}$. Odavde i iz (3) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(a * x)\phi_{ik,l} &= [(a\phi_{i,ik})(x\phi_{k,ik})]\phi_{ik,l} = (a\phi_{i,l})(x\phi_{k,l}) = (b\phi_{j,l})(x\phi_{k,l}) \\ &= [(b\phi_{j,jk})(x\phi_{k,jk})]\phi_{jk,l} = (b * x)\phi_{jk,l}.\end{aligned}$$

Prema tome, $a * x\,\xi\,b * x$. Slično dokazujemo da je $x * a\,\xi\,x * b$. Dakle, ξ je kongruencija. Neka je η kongruencija na S čije klase su polugrupe S_α. Tada je $\xi \subseteq \eta$, pa $T = S/\xi$ jeste polumreža Y polugrupa $T_\alpha = S_\alpha\xi^\natural$.

$(A3)$ Neka je μ tračna kongruencija na S čije klase su polugrupe S_i, $i \in B$. Jasno da je $\xi \cap \mu = \epsilon$, pa prema Teoremi 1.5, S je poddirektan proizvod polugrupa T i B, pri čemu injektivni homomorfizam Φ iz S u $T \times B$ je dat sa: $a\Phi = (a\xi^\natural, a\mu^\natural)$, $a \in S$. Uzmimo proizvoljan $a \in S$. Neka je $a \in S_i$, $i \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$. Tada je $a \in S_\alpha$, pa je $a\xi^\natural \in T_\alpha$, i $a\mu^\natural = i \in B_\alpha$. Prema tome, $S\Phi \subseteq \cup_{\alpha\in Y} T_\alpha \times B_\alpha$, pa S jeste probušeni kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y.

Obratno, neka je $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$, neka je S probušeni kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y i neka su S_i, D_i i $\phi_{i,j}$ definisani sa $(B1)$ i $(B2)$. Tada se lako proverava da je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$. $\square$

Neka je B traka, neka je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa. Ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$ i ako važe sledeći uslovi:

(10) $S_i\phi_{i,j} \subseteq S_j$, za $i, j \in B$, $[i] = [j]$;

(11) $\phi_{i,j}\phi_{j,k} = \phi_{i,k}$, za $i, j, k \in B$, $[i] = [j] \geq [k]$;

tada pišemo: $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}, D_i]\!]$. Ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$ i ako važi (11), tada pišemo: $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$. Postojanje slaganja ovakvog tipa je potreban i dovoljan uslov za moguć nost predstavljanja polugrupe kičmenim proizvodom trake i polumreža polugrupa, što će biti dokazano u sledećoj teoremi.

Teorema 9.8. *Neka je traka B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$.*

Ako je $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}, D_i]\!]$, tada

$(C1)$ S je polumreža Y polugrupa $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \phi_{i,j}]$, $\alpha \in Y$;

$(C2)$ za svaki $\alpha \in Y$, S_α je izomorfna polugrupi $T_\alpha \times B_\alpha$, gde je T_α polugrupa izomorfna polugrupama S_i, $i \in B_\alpha$;

$(C3)$ postoji polumrežno slaganje $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$ tako da je S izomorfna kičmenom proizvodu polugrupa T i B u odnosu na Y.

Obratno, ako je S kičmeni proizvod polugrupa $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$ i B u odnosu na Y, i ako uzmemo da je:

$(D1)$ $S_i = T_\alpha \times \{i\}$, $D_i = D_\alpha \times \{i\}$, za $i \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$;

$(D2)$ za $i, j \in B$, $i \succcurlyeq j$, preslikavanje $\phi_{i,j}$ iz S_i u D_j je definisano sa:

$$(a,i)\phi_{i,j} = (a\phi_{[i],[j]}, j);$$

tada je $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}, D_i]\!]$.

Dokaz. Na osnovu (11) i Teoreme 9.5. sledi da važi $(C1)$ i $(C2)$.

$(C3)$ Za svaki $\alpha \in Y$, fiksirajmo element $0_\alpha \in B_\alpha$, i uzmimo da je $T_\alpha = S_{0_\alpha}$, $D_\alpha = D_{0_\alpha}$. Za $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, definišimo preslikavanje $\phi_{\alpha,\beta}$ iz T_α u D_β sa $\phi_{\alpha,\beta} = \phi_{0_\alpha, 0_\beta}$. Jasno da je $\phi_{\alpha,\alpha}$ identičko preslikavanje polugrupe T_α, za svaki $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $a \in T_\alpha$, $b \in T_\beta$. Tada prema (3),

$$(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}) = (a\phi_{0_\alpha,0_{\alpha\beta}})(b\phi_{0_\beta,0_{\alpha\beta}}) = [(a\phi_{0_\alpha,0_\alpha 0_\beta})(b\phi_{0_\beta,0_\alpha 0_\beta})]\phi_{0_\alpha 0_\beta, 0_{\alpha\beta}},$$

Prema (2) i (10) je $(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}) \in S_{0_{\alpha\beta}} = T_{\alpha\beta}$, odakle dobijamo da je $(T_\alpha\phi_{\alpha,\alpha\beta})(T_\beta\phi_{\beta,\alpha\beta}) \subseteq T_{\alpha\beta}$. Za $\gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$, iz (3) i (11) sledi

$$\begin{aligned}
&[(a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta})]\phi_{\alpha\beta,\gamma} = [(a\phi_{0_\alpha,0_{\alpha\beta}})(b\phi_{0_\beta,0_{\alpha\beta}})]\phi_{0_{\alpha\beta},0_\gamma} \\
&\quad = [(a\phi_{0_\alpha,0_\alpha 0_\beta})(b\phi_{0_\beta,0_\alpha 0_\beta})]\phi_{0_\alpha 0_\beta,0_{\alpha\beta}}\phi_{0_{\alpha\beta},0_\gamma} \\
&\quad = [(a\phi_{0_\alpha,0_\alpha 0_\beta})(b\phi_{0_\beta,0_\alpha 0_\beta})]\phi_{0_\alpha 0_\beta,0_\gamma} = (a\phi_{0_\alpha,0_\gamma})(b\phi_{0_\beta,0_\gamma}) = (a\phi_{\alpha,\gamma})(b\phi_{\beta,\gamma}).
\end{aligned}$$

Dakle, prema Lemi 9.1, postoji polumrežno slaganje $S = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$.

Definišimo preslikavanje $\varPhi$ iz S u $T \times B$ sa:

$$a\varPhi = (a\phi_{i_\alpha,0_\alpha}, i_\alpha), \qquad (a \in S_{i_\alpha},\ i_\alpha \in B_\alpha,\ \alpha \in Y).$$

Jasno da je $S\varPhi \subseteq \cup_{\alpha\in Y} T_\alpha \times B_\alpha$. Kako je $\phi_{i_\alpha,0_\alpha}$ izomorfizam iz S_{i_α} na S_{0_α} (prema Teoremi 9.5.), to $\varPhi$ jeste injektivno preslikavanje iz S na $\cup_{\alpha\in Y} T_\alpha \times B_\alpha$.

Uzmimo $a \in S_{i_\alpha}$, $b \in S_{i_\beta}$, $i_\alpha \in B_\alpha$, $i_\beta \in B_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Tada prema (11) i (3) dobijamo

$$\begin{aligned}
&(a\varPhi)(b\varPhi) = (a\phi_{i_\alpha,0_\alpha}, i_\alpha)(b\phi_{i_\beta,0_\beta}, i_\beta) = \big((a\phi_{i_\alpha,0_\alpha}\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{i_\beta,0_\beta}\phi_{\beta,\alpha\beta}), i_\alpha i_\beta\big) \\
&= \big((a\phi_{i_\alpha,0_\alpha}\phi_{0_\alpha,0_{\alpha\beta}})(b\phi_{i_\beta,0_\beta}\phi_{0_\beta,0_{\alpha\beta}}), i_\alpha i_\beta\big) = \big((a\phi_{i_\alpha,0_{\alpha\beta}})(b\phi_{i_\beta,0_{\alpha\beta}}), i_\alpha i_\beta\big) \\
&= \big([(a\phi_{i_\alpha,i_\alpha i_\beta})(b\phi_{i_\beta,i_\alpha i_\beta})]\phi_{i_\alpha i_\beta,0_{\alpha\beta}}, i_\alpha i_\beta\big) = [(a\phi_{i_\alpha,i_\alpha i_\beta})(b\phi_{i_\beta,i_\alpha i_\beta})]\varPhi = (ab)\varPhi.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\varPhi$ je izomorfizam iz S na $\cup_{\alpha\in Y} T_\alpha \times B_\alpha$.

Obratno, neka je $T = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$, neka je S kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y, i uzmimo da su S_i, D_i i $\phi_{i,j}$ definisani sa $(D1)$ i $(D2)$. Tada prema Teoremi 9.7. dobijamo da je $S = (B; S_i, \phi_{i,j}, D_i)$. Jasno da važi (4). Uzmimo $i, j, k \in B$, $[i] = [j] \geq [k]$. Neka je $[i] = [j] = \alpha$, $[k] = \beta$, $\alpha, \beta \in Y$, i neka je $(a, i) \in S_i$. Tada je

$$(a,i)\phi_{i,j}\phi_{j,k} = (a\phi_{\alpha,\alpha}\phi_{\alpha,\beta}, k) = (a\phi_{\alpha,\beta}, k) = (a,i)\phi_{i,k}.$$

Prema tome, važi (11). Dakle, $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}, D_i]\!]$. $\square$

Teorema 9.9. *U oznakama iz Teoreme* 9.8, *važe sledeći uslovi:*

$(E1)$ $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$ *ako i samo ako je* $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$;

$(E2)$ $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$ *ako i samo ako je* $T = [Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$.

Dokaz. $(E1)$ Sledi neposredno iz Teoreme 9.8.

$(E2)$ Neka je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. Uzmimo $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Tada je

$$\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta\gamma} = \phi_{0_\alpha,0_\beta}\phi_{0_\beta,0_\gamma} = \phi_{0_\alpha,0_\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}.$$

Prema tome, $T = [Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$. Obratno, neka je $T = [Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$. Uzmimo $i, j, k \in B$, $i \succcurlyeq j \succcurlyeq k$. Neka je $[i] = \alpha$, $[j] = \beta$, $[k] = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, i neka je $(a, i) \in S_i$. Tada je

$$(a, i)\phi_{i,j}\phi_{j,k} = (a\phi_{\alpha,\beta}, j)\phi_{j,k} = (a\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma}, k) = (a\phi_{\alpha,\gamma}, k) = a\phi_{i,k}.$$

Prema tome, $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. $\square$

Zadaci.

1. Element a polugrupe S je *kvadratno-kancelativan* ako za sve $x, y \in S^1$, iz $xa^2 = ya^2$ sledi $xa = ya$ i iz $a^2x = a^2y$ sledi $ax = ay$. Dokazati da su sledeći uslovi za element a polugrupe S ekvivalentni:

(i) a je kvadratno-kancelativan;

(ii) $a\,\mathcal{H}^\dagger\, a^2$;

(iii) postoji nadpolugrupa T od S tako da je a element neke podgrupe od T;

2. Neka je S podpolugrupa polugrupe Q. Tada je Q *polugrupa levih razlomaka* polugrupe S ako važi:

(a) svaki kvadratno-kancelativan element iz S je element neke podgrupe od Q;

(b) za svaki element $q \in Q$ je $q = a^{-1}b$, gde su $a, b \in S$ i a^{-1} je inverz od a u nekoj podgrupi od Q.

Dualno se definiše i *polugrupa desnih razlomaka* od S. Ako je Q polugrupa levih (desnih) razlomaka od S, tada kažemo da je S *levi* (*desni*) *red* u Q. Polugrupa Q je *polugrupa razlomaka* od S i S je *red* u Q ako S jeste levi i desni red u Q.

Podskup T polugrupe S je *levo* (*desno*) *reverzibilan* ako za proizvoljne $a, b \in T$ postoje $u, v \in T$ tako da je $au = bv$ ($ua = vb$). Ako je T levo i desno reverzibilan, tada kažemo da je *reverzibilan*.

Dokazati da je polugrupa S levi red u grupi ako i samo ako S jeste kancelativna i desno reverzibilna. Ako je S levi red u grupama G i G', dokazati da postoji S-izomorfizam iz G na G'.

3. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je levi red u polumreži Y grupa G_α, $\alpha \in Y$;

(ii) S je polumreža Y desno reverzibilnih, kancelativnih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$;

(iii) $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, G_\alpha)$, gde za svaki $\alpha \in Y$, S_α je levi red u grupi G_α.

Dokazati da polumreža desno reverzibilnih, kancelativnih polugrupa može imati neizomorfne polugrupe levih razlomaka.

4. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S ima levo regularnu traku grupa kao polugrupu levih razlomaka;

(ii) S je levo regularna traka desno reverzibilnih, kancelativnmih polugrupa;

(iii) S je probušeni kičmeni proizvod levo regularne trake i polumreže desno reverzibilnih, kancelativnih polugrupa.

Literatura. Ćirić and Bogdanović [9], [10], Clifford and Preston [1], El-Qallali [1], [2], Gould [1], Howie [1], Kimura [2], Osondu [1], [2], Schein [4], Yamada [4], [5], [7], [8], [10], [11], [12].

9.4. Normalne trake polugrupa.

U ovoj tački najpre dajemo teoremu koja opisuje tračna slaganja u opštem slučaju. Potom taj rezultat primenujemo na slaganja u normalnu traku polugrupa.

Teorema 9.10. *Neka je traka B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$, i neka je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa. Tada polugrupa S jeste traka B polugrupa S_i, $i \in B$, ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(12) $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$;

(13) *za svaki* $\alpha \in Y$, S_α *je matrica* B_α *polugrupa* S_i, $i \in B_\alpha$;

(14) $(S_i\phi_{\alpha,\alpha\beta})(S_j\phi_{\beta,\alpha\beta}) \subseteq S_{ij}$, *za* $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$.

Dokaz. Neka je S traka B polugrupa S_i, $i \in B$. Tada prema Posledici 3.7, S je polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, pri čemu za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica B_α polugrupa S_i, $i \in B_\alpha$. Dakle, važi (13). Prema Teoremi 9.2. dobijamo da važi (12), dok prema definiciji množenja u $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$ sledi da važi (14).

Obratno, neka važe uslovi (12),(13) i (14). Tada prema (14) i prema definiciji množenja u $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}, D_\alpha)$ dobijamo da S jeste traka B polugrupa S_i, $i \in B$. $\square$

Razne karakterizacije normalne trake date su Teoremom 1.25. Ovde dajemo još jednu, koja će biti od koristi u daljem radu.

Teorema 9.11. *Traka B je normalna ako i samo ako B jeste jaka polumreža pravougaonih traka.*

Dokaz. Neka je B normalna traka. Tada B jeste polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$, i uzmimo $i \in B_\alpha$. Najpre ćemo dokazati da je $iki = ili$, za sve $k, l \in B_\beta$. Zaista, za $k, l \in B_\beta$ je

$$iki = iklki = ikkli = ikli = iklli = ilkli = ili,$$

jer je B normalna traka i B_β je pravougaona traka. Definišimo sada preslikavanje $\theta_{\alpha,\beta}$ iz B_α u B_β sa:

$$i\theta_{\alpha,\beta} = iki, \qquad (i \in B_\alpha,\ k \in B_\beta).$$

Prema prethodno dokazanom, preslikavanje $\theta_{\alpha,\beta}$ je dobro definisano. Uzmimo $i, j \in B_\beta$. Prema Teoremi 1.25,

$$(i\theta_{\alpha,\beta})(j\theta_{\alpha,\beta}) = ikijkj = ijkkij = ijkij = (ij)\theta_{\alpha,\beta}.$$

Dakle, $\theta_{\alpha,\beta}$ je homomorfizam.

Uzmimo $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, i uzmimo $i \in B_\alpha$. Tada za proizvoljne $k \in B_\beta$, $l \in B_\gamma$, je

$$i\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma} = (iki)\theta_{\beta,\gamma} = ikiliki = ikilliki = ilikkili = il(liki)li = ili = i\theta_{\alpha,\gamma},$$

jer je B normalna traka, B_γ je pravougaona traka i $l, liki \in B_\gamma$. Prema tome, $\{\theta_{\alpha,\beta}\}$ je tranzitivni sistem homomorfizama nad $\leq$.

Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$. Tada za proizvoljan $k \in B_{\alpha\beta}$ je

$$\begin{aligned}(i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta}) &= ikijkj = ikijkijkj = ijkkiijkj \\ &= ijkijkj = ijjkkij = ijkij = ij,\end{aligned}$$

jer je B normalna traka, $B_{\alpha\beta}$ je pravougaona traka i $ij, k \in B_{\alpha\beta}$. Prema tome, $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$.

Obratno, neka je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$. Uzmimo $i, j, k \in B$. Neka je $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $k \in B_\gamma$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, odakle za $\delta = \alpha\beta\gamma$ je

$$ijki = (i\theta_{\alpha,\delta})(j\theta_{\beta,\delta})(k\theta_{\gamma,\delta})(i\theta_{\alpha,\delta}) = i\theta_{\alpha,\delta} = (i\theta_{\alpha,\delta})(k\theta_{\gamma,\delta})(j\theta_{\beta,\delta})(i\theta_{\alpha,\delta}) = ikji,$$

jer je B_δ pravougaona traka. Prema tome, $ijki = ikji$, za sve $i, j, k \in B$, pa B jeste normalna traka. $\square$

U skladu sa Teoremom 9.11, nadalje će rečenica "$B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$ je normalna traka" imati značenje: traka B je jaka polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$, sa tranzitivnim sistemom homomorfizama $\{\theta_{\alpha,\beta}\}$ definisanim kao u Teoremi 9.11. U daljim razmatranjima polugrupa S koje zadovoljavaju uslove (12), (13) i (14), sa $*$ ćemo označavati množenje u S a sa $\circ$ množenja u D_α, $\alpha \in Y$.

Sledeća teorema je glavni rezultat ove tačke.

Teorema 9.12. *Neka je traka B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$, neka je $\{S_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih polugrupa i neka je S polugrupa koja zadovoljava uslove* (12), (13) *i* (14). *Tada za svaki $\alpha \in Y$, polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi:*

(15) *D_α je matrica B_α polugrupa D_i, $i \in B_\alpha$;*

(16) *$S_i \subseteq D_i$, za svaki $i \in B_\alpha$;*

ako i samo ako B *jeste normalna traka.*

Dokaz. Prema Teoremi 9.10. imamo da je S traka B polugrupa $S_i,\ i \in B$. Neka je ξ tračna kongruencija na S čije klase su polugrupe $S_i,\ i \in B$.

Pretpostavimo da se za svaki $\alpha \in Y$ polugrupa D_α može izabrati tako da važi (15) i (16). Uzmimo $a, x, y \in S,\ a \in S_\alpha,\ x \in S_\beta,\ y \in S_\gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in Y$. Neka je $\delta = \alpha\beta\gamma$ i neka $a\phi_{\alpha,\delta} \in D_i,\ x \in \phi_{\beta,\delta} \in D_j,\ y\phi_{\gamma,\delta} \in D_k,\ i, j, k \in B_\delta$. Prema (3), (4) i (15),

$$a * x * y * a = (a\phi_{\alpha,\delta})(x\phi_{\beta,\delta})(y\phi_{\gamma,\delta})(a\phi_{\alpha,\delta}) \in D_iD_jD_kD_i \subseteq D_i, \tag{17}$$

$$a * y * x * a = (a\phi_{\alpha,\delta})(y\phi_{\gamma,\delta})(x\phi_{\beta,\delta})(a\phi_{\alpha,\delta}) \in D_iD_kD_jD_i \subseteq D_i. \tag{18}$$

Dakle, prema (17) i (18) dobijamo da je $a*x*y*a, a*y*x*a \in D_i \cap S = S_i$, pa $a * x * y * a\,\xi\, a * y * x * a$. Prema tome, $B \cong S/\xi$ je normalna traka.

Obratno, neka je B normalna traka, tj. neka je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$. Uzmimo proizvoljan $\gamma \in Y$. Prema Teoremi 9.2, polugrupa D_γ može biti izabrana tako da je $D_\gamma = \{a\phi_{\alpha,\gamma} \mid \alpha \geq \gamma,\ a \in S_\alpha\}$. Neka je $a \in S_i,\ b \in S_j,\ \gamma \in Y,\ \alpha, \beta \geq \gamma$. Tada

$$a\phi_{\alpha,\gamma} = b\phi_{\beta,\gamma} \ \Rightarrow\ i\theta_{\alpha,\gamma} = j\theta_{\beta,\gamma}. \tag{19}$$

Zaista, neka je $a\phi_{\alpha,\gamma} = b\phi_{\beta,\gamma}$ i neka je $x \in S_{i\theta_{\alpha,\gamma}}$. Tada je $a * x \in S_iS_{i\theta_{\alpha,\gamma}} \subseteq S_{i(i\theta_{\alpha,\gamma})}$, $b * x \in S_jS_{i\theta_{\alpha,\gamma}} \subseteq S_{j(i\theta_{\alpha,\gamma})}$, pa iz $a * x = (a\phi_{\alpha,\gamma}) \circ x = (b\phi_{\beta,\gamma}) \circ x = b * x$ dobijamo da je $(j\theta_{\beta,\gamma})(i\theta_{\alpha,\gamma}) = j(i\theta_{\alpha,\gamma}) = i\theta_{\alpha,\gamma}$. Slično dokazujemo da je $(i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma}) = i\theta_{\alpha,\gamma}$, pa je $i\theta_{\alpha,\gamma} = j\theta_{\beta,\gamma}$. Prema tome, važi (19). Neka je

$$D_k = \{a\phi_{\alpha,\gamma} \mid \alpha \geq \gamma,\ a \in S_i,\ i\theta_{\alpha,\gamma} = k\}, \qquad \gamma \in Y,\ k \in B_\gamma.$$

Prema (19) sledi da skupovi $D_k,\ k \in B_\gamma$, jesu medjusobno disjunktni. Jasno da je $\cup_{k\in B_\gamma} D_k = D_\gamma$, $S_k \subseteq D_k$, za sve $k \in B_\gamma$, i $S_i\phi_{\alpha,\gamma} \subseteq D_{i\theta_{\alpha,\gamma}}$, za sve $\alpha \geq \gamma,\ i \in B_\alpha$.

Uzmimo $a \in S_i,\ b \in S_j,\ \alpha, \beta \geq \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in Y,\ i \in B_\alpha,\ j \in B_\beta$. Tada je $a * b \in S_{ij}$, pa prema (3) sledi

$$\begin{aligned}(a\phi_{\alpha,\gamma}) \circ (b\phi_{\beta,\gamma}) &= ((a\phi_{\alpha,\alpha\beta}) \circ (b\phi_{\beta,\alpha,\beta}))\, \phi_{\alpha\beta,\gamma} \\ &= (a * b)\phi_{\alpha\beta,\gamma} \in S_{ij}\phi_{\alpha\beta,\gamma} \subseteq D_{(ij)\theta_{\alpha\beta,\gamma}}.\end{aligned}$$

Kako je $(ij)\theta_{\alpha\beta,\gamma} = ((i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta}))\,\theta_{\alpha\beta,\gamma} = (i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma})$, to imamo $D_{i\theta_{\alpha,\gamma}}D_{j\theta_{\beta,\gamma}} \subseteq D_{(i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma})}$, pa D_γ jeste matrica B_γ polugrupa $D_k,\ k \in B_\gamma$. $\square$

Slaganja u normalnu traku polugrupa kojima odgovaraju (probušeni) kičmeni proizvodi normalnih traka i polumreža polugrupa, mogu se realizovati primenom rezultata iz Tačke 9.3. U narednim teoremama ćemo izložiti i jedan drugačiji pristup ovom problemu.

Teorema 9.13. *Neka je* $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$ *normalna traka.*

Ako je S *polugrupa koja zadovoljava uslove* (12), (13) *i* (14), *i ako za svaki* $\alpha \in Y$, *polugrupa* D_α *može biti izabrana tako da važi:*
(20) $D_\alpha = (B_\alpha; D_i, \chi_{i,j}, E_i)$;
(21) $S_i \subseteq D_i$, *za svaki* $i \in B_\alpha$;
tada
$(F1)$ *relacija* ξ *na* S *definisana sa:* $a \, \xi \, b$ *ako i samo ako je* $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$, *i za svaki* $\beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $k \in B_\beta$ *je:*

$$a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},k} = b\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},k},$$

jeste kongruencija na S *i polugrupa* $T = S/\xi$ *je polumreža* Y *polugrupa* $T_\alpha = S_\alpha \xi^\natural$, $\alpha \in Y$;
$(F2)$ S *je probušeni kičmeni proizvod polugrupa* T *i* B *u odnosu na* Y.
Obratno, ako je polugrupa S *probušeni kičmeni proizvod polugrupa* $T = (Y; T_\alpha, \omega_{\alpha,\beta}, U_\alpha)$ *i* B *u odnosu na* Y, *i ako uzmemo da je:*
$(G1)$ $S_\alpha = (T_\alpha \times B_\alpha) \cap S$, $D_\alpha = U_\alpha \times B_\alpha$, *za* $\alpha \in Y$;
$(G2)$ *za* $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, *preslikavanje* $\phi_{\alpha,\beta}$ *iz* S_α *u* D_β *je definisano sa:*

$$(a, i)\phi_{\alpha,\beta} = (a\omega_{\alpha,\beta}, i\theta_{\alpha,\beta}), \qquad ((a, i) \in S_\alpha);$$

$(G3)$ $S_i = (T_\alpha \times \{i\}) \cap S$, $D_i = U_\alpha \times \{i\}$, *za* $\alpha \in Y$, $i \in B_\alpha$;
tada S *zadovoljava uslove* (12), (13) *i* (14), *za svaki* $\alpha \in Y$, D_α *je jaka matrica* B_α *polugrupa* D_i, $i \in B_\alpha$, *i važi* (21).

Dokaz. Neka je S polugrupa koja zadovoljava (12), (13) i (14), i neka za svaki $\alpha \in Y$, polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi (20) i (21).

$(F1)$ Jasno da je ξ refleksivna i simetrična relacija. Neka je $a \, \xi \, b$ i $b \, \xi \, c$, $a, b, c \in S$. Tada je $a \in S_i$, $b \in S_j$, $c \in S_k$, $i, j, k \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$. Uzmimo $\beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$, i uzmimo $l \in B_\beta$. Tada je

$$a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},l} = b\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},l} = c\phi_{\alpha,\beta}\chi_{k\theta_{\alpha,\beta},l},$$

odakle dobijamo da je $a \, \xi \, c$. Prema tome, ξ je tranzitivna relacija.

Uzmimo $a, b \in S$ tako da je $a \, \xi \, b$, i uzmimo $x \in S$. Neka je $a \in S_i$, $b \in S_j$, $i, j \in B_\alpha$, $x \in S_k$, $k \in B_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Tada je $a * x \in S_{ik}$, $b * x \in S_{jk}$, i $ik, jk \in B_{\alpha\beta}$. Uzmimo $\gamma \in Y$ tako da je $\alpha\beta \geq \gamma$, i uzmimo $l \in B_\gamma$. Tada je

$$\begin{aligned}
(a * x)\phi_{\alpha\beta,\gamma}\chi_{(ik)\theta_{\alpha\beta,\gamma},l} &= [(a\phi_{\alpha,\alpha\beta}) \circ (x\phi_{\beta,\alpha\beta})]\phi_{\alpha\beta,\gamma}\chi_{(ik)\theta_{\alpha\beta,\gamma},l} \\
&= [(a\phi_{\alpha,\gamma}) \circ (x\phi_{\beta,\gamma})]\chi_{(ik)\theta_{\alpha\beta,\gamma},l} \\
&= [(a\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\gamma},(i\theta_{\alpha,\gamma})(k\theta_{\beta,\gamma})})(x\phi_{\beta,\gamma}\chi_{k\theta_{\beta,\gamma},(i\theta_{\alpha,\gamma})(k\theta_{\beta,\gamma})}]\chi_{(i\theta_{\alpha,\gamma})(k\theta_{\beta,\gamma}),l} \\
&= (a\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\gamma},l})(x\phi_{\beta,\gamma}\chi_{k\theta_{\beta,\gamma},l}) \\
&= (b\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{j\theta_{\alpha,\gamma},l})(x\phi_{\beta,\gamma}\chi_{k\theta_{\beta,\gamma},l}) \\
&= \cdots = (b * x)\phi_{\alpha\beta,\gamma}\chi_{(jk)\theta_{\alpha\beta,\gamma},l},
\end{aligned}$$

$((ik)\theta_{\alpha\beta,\gamma} = [(i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(k\theta_{\beta,\alpha\beta})]\theta_{\alpha\beta,\gamma} = (i\theta_{\alpha,\gamma})(k\theta_{\beta,\gamma}))$. Odavde dobijamo

$a * x \, \xi \, b * x$. Na isti način dokazujemo da je $x * a \, \xi \, x * b$. Dakle, ξ je kongruencija. Neka je η polumrežna kongruencija na S čije klase su polugrupe S_α, $\alpha \in Y$. Tada je $\xi \subseteq \eta$, pa $T = S/\xi$ jeste polumreža Y polugrupa $T_\alpha = S_\alpha \xi^\natural$.

$(F2)$ Neka je μ tračna kongruencija na S čije klase su polugrupe S_i, $i \in B$. Jasno da je $\xi \cap \mu = \epsilon$, pa prema Teoremi 1.5, S je poddirektan proizvod polugrupa T i B, pri čemu je injektivni homomorfizam Φ iz S u $T \times B$ dat sa: $a\Phi = (a\xi^\natural, a\mu^\natural)$, $a \in S$. Uzmimo $a \in S$. Neka je $a \in S_i$, $i \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$. Tada iz $a \in S_\alpha$ dobijamo da je $a\xi^\natural \in T_\alpha$, $a\mu^\natural = i \in B_\alpha$, tj. $a\Phi \in T_\alpha \times B_\alpha$. Prema tome, $S\Phi \subseteq \cup_{\alpha \in Y} T_\alpha \times B_\alpha$. Dakle, S je probušeni kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Teorema 9.14. *Neka je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$ normalna traka. Ako je S polugrupa koja zadovoljava uslove* (12), (13) *i* (14), *i ako za svaki $\alpha \in Y$, polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi:*

(22) $D_\alpha = [B_\alpha; D_i, \chi_{i,j}]$;

(23) $S_i \subseteq D_i$, *za svaki* $i \in B_\alpha$;

(24) $S_i \chi_{i,j} \subseteq S_j$, *za sve* $i, j \in B_\alpha$;

(25) $a\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta} = a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta}, j\theta_{\alpha,\beta}}$, *za* $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i, j \in B_\alpha$, $a \in S_i$; *tada važi uslov* $(F1)$ *Teoreme* 9.13. *i* S *je kičmeni proizvod polugrupa* T *i* B *u odnosu na* Y.

Obratno, ako je polugrupa S kičmeni proizvod polugrupa $T = (Y; T_\alpha, \omega_{\alpha,\beta}, U_\alpha)$ i B u odnosu na Y, tada u oznakama iz $(G1)-(G3)$ *Teoreme* 9.13., *S zadovoljava uslove* $(12)-(14)$ *i* $(22)-(25)$.

Dokaz. Neka polugrupa S zadovoljava uslove (12)-(14) i neka za svaki $\alpha \in Y$, polugrupa D_α može biti izabrana tako da važe uslovi (22)-(25). Primetimo da za $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i \in B_\alpha$, prema Teoremi 9.12, važi:

$$S_i\phi_{\alpha,\beta} \subseteq D_{i\theta_{\alpha,\beta}},$$

pa izraz na desnoj strani jednakosti u (25) ima smisla. Takodje, zadovoljeni su i uslovi (20) i (21), pa prema Teoremi 9.13. imamo da važi $(F1)$ i S je probušeni kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y.

Uzmimo proizvoljan $(u, i) \in \cup_{\alpha \in Y} T_\alpha \times B_\alpha$. Tada je $(u, i) \in T_\alpha \times B_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i $u = b\xi^\natural$, za neki $b \in S_\alpha$. Neka je $b \in S_j$, $j \in B_\alpha$. Neka je $a = b\chi_{j,i}$. Prema (24), $a \in S_i$. Uzmimo $\beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$, i uzmimo $k \in B_\beta$. Tada je

$$a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},k} = b\chi_{j,i}\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},k} = b\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},i\theta_{\alpha,\beta}}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},k} = b\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},k},$$

prema (25) i (22). Dakle, $a \, \xi \, b$, pa je $a\xi^\natural = b\xi^\natural = u$, odakle je $a\Phi = (u, i)$. Prema tome, $S\Phi = \cup_{\alpha \in Y} T_\alpha \times B_\alpha$, pa S jeste kičmeni proizvod polugrupa T i B u odnosu na Y.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Teorema 9.15. *Neka je* $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$ *normalna traka i neka je* $\{S_i \mid i \in B\}$ *familija po parovima disjunktnih polugrupa. Tada*

(*a*) $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$ *ako i samo ako je* $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, *za svaki* $\alpha \in Y$ *je* $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$ *i*

(26) $a\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta} = a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}}$, *za* $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i, j \in B_\alpha$, $a \in S_i$;

(*b*) $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$ *ako i samo ako je* $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$, *za svaki* $\alpha \in Y$ *je* $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$ *i važi* (26).

Dokaz. (*a*) Neka je $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$. Prema Teoremama 9.8. i 9.9. imamo da S jeste kičmeni proizvod polugrupa $T = (Y; T_\alpha, \omega_{\alpha,\beta})$ i B u odnosu na Y. Ne umanjijući opštost dokaza, možemo uzeti da je $S = \cup_{\alpha \in Y} T_\alpha \times B_\alpha$. Neka je $S_\alpha = T_\alpha \times B_\alpha$, $\alpha \in Y$, za $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, preslikavanje $\phi_{\alpha,\beta}$ iz S_α u S_β je definisano sa:

$$(a, i)\phi_{\alpha,\beta} = (a\omega_{\alpha,\beta}, i\theta_{\alpha,\beta}), \qquad ((a, i) \in S_\alpha),$$

$S_i = T_\alpha \times \{i\}$, $i \in B_\alpha$, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$, $i, j \in B_\alpha$, preslikavanje $\chi_{i,j}$ iz S_i u S_j je definisano sa:

$$(a, i)\chi_{i,j} = (a, j), \qquad ((a, i) \in S_i).$$

Neposredno se proverava da je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$ i $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$, za svaki $\alpha \in Y$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$, i uzmimo $i, j \in B_\alpha$, $(a, i) \in S_i$. Tada je

$$\begin{aligned}(a, i)\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}} &= (a\omega_{\alpha,\beta}, i\theta_{\alpha,\beta})\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}} = (a\omega_{\alpha,\beta}, j\theta_{\alpha,\beta})\\ &= (a, j)\phi_{\alpha,\beta} = (a, i)\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Prema tome, važi (26).

Obratno, neka je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, neka je $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$, za svaki $\alpha \in Y$, i neka važi (26). Za $i, j \in B$, $i \succcurlyeq j$, neka je $\phi_{i,j}$ preslikavanje iz S_i u S_j definisano sa:

$$a\phi_{i,j} = a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j}, \qquad (a \in S_i),$$

gde su $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $[i] = \alpha$, $[j] = \beta$. Za proizvoljan $i \in B$ dobijamo da je $a\phi_{i,i} = a\phi_{\alpha,\alpha}\chi_{i,i} = a$.

Uzmimo $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, tako da je $\alpha\beta \geq \gamma$, i $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $k \in B_\gamma$, $a \in S_i$, $b \in S_j$. Tada je

$$\begin{aligned}&[(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,k} =\\ &\quad= [(a\phi_{\alpha,\alpha\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\alpha\beta},ij})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}\chi_{j\theta_{\beta,\alpha\beta},ij})]\phi_{ij,k}\\ &\quad= [(a\phi_{\alpha,\alpha\beta}) \circ (b\phi_{\beta,\alpha\beta})]\phi_{\alpha\beta,\gamma}\chi_{(ij)\theta_{\alpha\beta,\gamma},k}\\ &\quad= [(a\phi_{\alpha,\gamma}) \circ (b\phi_{\beta,\gamma})]\chi_{(ij)\theta_{\alpha\beta,\gamma},k}\\ &\quad= [(a\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\gamma},(i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma})})(b\phi_{\beta,\gamma}\chi_{j\theta_{\beta,\gamma},(i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma})})]\chi_{(i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma}),k}\\ &\quad= (a\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\gamma},k})(b\phi_{\beta,\gamma}\chi_{j\theta_{\beta,\gamma},k})\\ &\quad= (a\phi_{i,k})(b\phi_{j,k}),\end{aligned}$$

$((ij)\theta_{\alpha\beta,\gamma} = [(i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta})]\theta_{\alpha\beta,\gamma} = (i\theta_{\alpha,\gamma})(j\theta_{\beta,\gamma}))$, i

$$\begin{aligned} a * b &= (a\phi_{\alpha,\alpha\beta}) \circ (b\phi_{\beta,\alpha\beta}) \\ &= (a\phi_{\alpha,\alpha\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\alpha\beta},ij})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}\chi_{j\theta_{\beta,\alpha\beta},ij}) = (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}). \end{aligned}$$

Prema tome, $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$.

Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$, i $i, j \in B_\alpha$, $k \in B_\beta$, $a \in S_i$. Tada je

$$\begin{aligned} a\phi_{i,j}\phi_{j,k} &= a\phi_{\alpha,\alpha}\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},k} = a\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},k} \\ &= a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}}\chi_{j\theta_{\alpha,\beta},k} = a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},k} = a\phi_{i,k}, \end{aligned}$$

zbog (26). Dakle, $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$.

(*b*) Neka je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. Uzmimo da je $S_\alpha = \cup_{i\in B_\alpha} S_i$. Jasno da je $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$, gde je $\chi_{i,j} = \phi_{i,j}$, $i, j \in B_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Za $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, definišimo preslikavanje $\phi_{\alpha,\beta}$ iz S_α u S_β sa:

$$a\phi_{\alpha,\beta} = a\phi_{i,i\theta_{\alpha,\beta}}, \qquad (a \in S_i,\ i \in B_\alpha).$$

Neposredno se proverava da je $\{\phi_{\alpha,\beta}\}$ tranzitivni sistem homomorfizama. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $a \in S_i$, $b \in S_j$. Tada je

$$\begin{aligned} (a\phi_{\alpha,\alpha\beta}) \circ (b\phi_{\beta,\alpha\beta}) &= (a\phi_{i,i\theta_{\alpha,\alpha\beta}}) \circ (b\phi_{j,j\theta_{\beta,\alpha\beta}}) \\ &= (a\phi_{i,i\theta_{\alpha,\alpha\beta}}\phi_{i\theta_{\alpha,\alpha\beta},ij})(b\phi_{j,j\theta_{\beta,\alpha\beta}}\phi_{j\theta_{\beta,\alpha\beta},ij}) \\ &= (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}) = a * b, \end{aligned}$$

$(ij = (i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta}))$. Prema tome, $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$.

Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i, j \in B_\alpha$, $a \in S_i$. Tada je

$$\begin{aligned} a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}} &= a\phi_{i,i\theta_{\alpha,\beta}}\phi_{i\theta_{\alpha,\beta},j\theta_{\alpha,\beta}} = a\phi_{i,j\theta_{\alpha,\beta}} \\ &= a\phi_{i,j}\phi_{j,j\theta_{\alpha,\beta}} = a\chi_{i,j}\phi_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Prema tome, važi (26).

Obratno, neka je $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$, $S_\alpha = [B_\alpha; S_i, \chi_{i,j}]$, za svaki $\alpha \in Y$, i neka važi (26). Prema (*a*) imamo da je $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$. Uz odgovarajuće definicije iz (*a*), uzmimo $i, j, k \in B$ tako da je $i \succcurlyeq j \succcurlyeq k$, tj. $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $k \in B_\gamma$, $\alpha, \beta\, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Neka je $a \in S_i$. Tada je

$$\begin{aligned} a\phi_{i,j}\phi_{j,k} &= a\phi_{\alpha,\beta}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta},j}\phi_{\beta,\gamma}\chi_{j\theta_{\beta,\gamma},k} = a\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma},j\theta_{\beta,\gamma}}\chi_{j\theta_{\beta,\gamma},k} \\ &= a\phi_{\alpha,\gamma}\chi_{i\theta_{\alpha,\gamma},k} = a\phi_{i,k}. \end{aligned}$$

Prema tome, $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. $\square$

Zadaci.

1. Traku koja zadovoljava identitet $axy = ayx$ ($xya = yxa$) nazivamo *levo* (*desno*) *normalna traka*. Dokazati da je traka B levo (desno) normalna ako i samo ako B jeste jaka polumreža levo (desno) nultih traka.

2. Traka B je normalna ako i samo ako B jeste kičmeni proizvod levo normalne i desno normalne trake.

3. Normalnu traku u kojoj iz $e < f$, $e < g$, $f\,\sigma\, g$ sledi da je $f = g$, nazivamo *strogo normalna traka*. Dokazati da su sledeći uslovi za traku B ekvivalentni:

(i) B je strogo normalna;

(i) B je čvrsta polumreža pravougaonih traka;

(i) B poddirektan proizvod polumreže i pravougaone trake.

Literatura. Ćirić and Bogdanović [8], [9], Petrich [4], [13], [14], [15], Schein [4], Yamada [4], [5], [4], Yamada and Kimura [1].

9.5. Trake monoida.

I ranije je bilo reči o tome da struktura komponenti tračnog slaganja ima značajan uticaj na to da li to slaganje može biti odredjeno nekim sistemom homomorfizama i kakvi će biti ti homomorfizmi. Veliki uticaj na to imaju jedinice (ako postoje) komponenti. Zbog toga ćemo ovu tačku, a i sledeću, posvetiti trakama monoida.

Najpre dokažimo opštu teoremu.

Teorema 9.16. *Neka je B traka. Svakom $i \in B$ pridružimo monoid M_i sa jedinicom e_i tako da je $M_i \cap M_j = \varnothing$, za $i \neq j$. Neka je $(p_{i,j})$ $B \times B$ matrica nad $S = \cup_{i \in B} M_i$ tako da je $p_{i,j} \in M_{ij}$, za sve $i, j \in B$, i $p_{i,i} = e_i$, za svaki $i \in B$, i neka su $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ sistemi homomorfizama nad kvazi-uredjenjima $\leq_1$ i $\leq_2$ na B, tim redom, tako da važi:*

(27) $\varphi_{i,i} = \psi_{i,i}$ *je identičko preslikavanje od M_i, za svaki $i \in B$;*

(28) $\varphi_{i,j}\varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}\lambda_{e_j\varphi_{j,k}}$, *za $i \geq_1 j \geq_1 k$;*

(29) $\psi_{i,j}\psi_{j,k} = \psi_{i,k}\varrho_{e_j\varphi_{j,k}}$, *za $i \geq_2 j \geq_2 k$;*

(30) $\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}}\psi_{jk,ijk}\lambda_{p_{i,jk}} = \psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk}\varrho_{p_{ij,k}}$, *za sve $i, j, k \in B$.*

Definišimo množenje $*$ na S sa:

(31) $$a * b = (a\varphi_{i,ij})p_{i,j}(b\psi_{j,ij}) \qquad (a \in M_i,\ b \in M_j).$$

Tada S jeste polugrupa i traka B monoida M_i, $i \in B$, u oznaci $S = (B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}, p_{i,j})$.

Obratno, svaka traka monoida može biti ovako konstruisana.

Dokaz. Uzmimo $a \in M_i$, $b \in M_j$, $c \in M_k$, $i, j, k \in B$. Kako je $b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}} \in M_{ij}))$ i $b\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}} \in M_{jk}$, to je

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= [(a\varphi_{i,ij})p_{i,j}(b\psi_{j,ij})]*c && \text{(prema (31))}\\
&= [(a\varphi_{i,ij})p_{i,j}(b\psi_{j,ij})]\varphi_{ij,ijk}p_{ij,k}(c\psi_{k,ijk}) && \text{(prema (31))}\\
&= (a\varphi_{i,ij}\varphi_{ij,ijk})(b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk})p_{ij,k}(c\psi_{k,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})(e_{ij}\varphi_{ij,ijk})(b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk})p_{ij,k}(c\psi_{k,ijk}) && \text{(prema (28))}\\
&= (a\varphi_{i,ijk})[e_{ij}(b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}})]\varphi_{ij,ijk}p_{ij,k}(c\psi_{k,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})(b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk})p_{ij,k}(c\psi_{k,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})(b\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk}\varrho_{p_{ij,k}})(c\psi_{k,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})(b\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}}\psi_{jk,ijk}\lambda_{p_{i,jk}})(c\psi_{k,ijk}) && \text{(prema (30))}\\
&= (a\varphi_{i,ijk})p_{i,jk}(b\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}}\psi_{jk,ijk})(e_{jk}\psi_{jk,ijk})(c\psi_{k,jk}\psi_{jk,ijk}) && \text{(prema (29))}\\
&= (a\varphi_{i,ijk})p_{i,jk}[(b\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}})e_{jk}]\psi_{jk,ijk}(c\psi_{k,jk}\psi_{jk,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})p_{i,jk}(b\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}}\psi_{jk,ijk})(c\psi_{k,jk}\psi_{jk,ijk})\\
&= (a\varphi_{i,ijk})p_{i,jk}[(b\varphi_{j,jk})p_{j,k}(c\psi_{k,jk})]\psi_{jk,ijk}\\
&= a*[(b\varphi_{j,jk})p_{j,k}(c\psi_{k,jk})] && \text{(prema (31))}\\
&= a*(b*c) && \text{(prema (31)).}
\end{aligned}
$$

Prema tome, S je polugrupa. Prema (31) lako dobijamo da je S traka B monoida M_i, $i \in B$.

Obratno, neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$. Za $i, j \in B$, neka je $p_{i,j} = e_i e_j$. Jasno da je $p_{i,i} = e_i$, za svaki $i \in B$, i da je $p_{i,j} \in M_{ij}$, za sve $i, j \in B$. Takodje, za $i, j \in B$, $i \geq_1 j$, neka je $\varphi_{i,j}$ preslikavanje iz M_i u M_j definisano sa

$$a\varphi_{i,j} = ae_j \qquad (a \in M_i),$$

i za $i, j \in B$, $i \geq_2 j$, neka je $\psi_{i,j}$ preslikavanje iz M_i u M_j definisano sa:

$$a\psi_{i,j} = e_j a \qquad (a \in M_i).$$

Jasno da važi (27).

Uzmimo $i, j \in B$, $i \geq_1 j$, $a, b \in M_i$. Tada je $be_j \in M_{ij} = M_j$, pa je $be_j = e_j(be_j)$, odakle je

$$(ab)\varphi_{i,j} = (ab)e_j = a(be_j) = a(e_j(be_j)) = (ae_j)(be_j) = (a\varphi_{i,j})(b\varphi_{i,j}).$$

Prema tome, preslikavanja $\varphi_{i,j}$ su homomorfizmi. Na isti način dokazujemo da preslikavanja $\psi_{i,j}$ jesu homomorfizmi.

Uzmimo $i, j, k \in B$, $i \geq_1 j \geq_1 k$, $a \in M_i$. Tada je

$$a\varphi_{i,j}\varphi_{j,k} = ae_je_k = ae_ke_je_k = (a\varphi_{i,k})(e_j\varphi_{j,k}),$$

jer je $e_je_k \in M_{jk} = M_k$. Prema tome, važi (28). Na isti način dokazujemo (29).

Uzmimo $i, j, k \in B$, $b \in M_j$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\varphi_{j,jk}\varrho_{p_{j,k}}\psi_{jk,ijk}\lambda_{p_{i,jk}} &= p_{i,jk}e_{ijk}be_{jk}p_{j,k} \\
&= p_{i,jk}bp_{j,k} && (p_{i,jk}\in M_{ijk},\ p_{j,k}\in M_{jk}) \\
&= e_ie_{jk}be_je_k \\
&= e_ie_{jk}be_k && (b\in M_j) \\
&= e_ibe_k && (be_k\in M_{jk}), \\
\psi_{j,ij}\lambda_{p_{i,j}}\varphi_{ij,ijk}\varrho_{p_{ij,k}} &= p_{i,j}e_{ij}be_{ijk}p_{ij,k} \\
&= p_{i,j}bp_{ij,k} && (p_{i,j}\in M_{ij},\ p_{ij,k}\in M_{ijk}) \\
&= e_ie_jbe_{ij}e_k \\
&= e_ibe_{ij}e_k && (b\in M_j) \\
&= e_ibe_k && (e_ib\in M_{ij}).
\end{aligned}
$$

Prema tome, važi (30).

Na kraju, uzmimo $a\in M_i,\ b\in M_j,\ i,j\in B$. Tada je

$$ab = ae_ie_jb = ae_{ij}e_ie_je_{ij}b = (a\varphi_{i,ij})p_{i,j}(b\psi_{j,ij}),$$

jer je $e_ie_j\in M_{ij}$. Prema tome, množenje na S se poklapa sa množenjem definisanim sa (31), pa je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j})$. $\square$

Neka je B traka, neka je $\{M_i \mid i\in B\}$ familija po parovima disjunktnih monoida i neka za $i\in B$, e_i jeste jedinica monoida M_i. Ako je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j})$ i ako su pri tome $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ tranzitivni sistemi homomorfizama, tada pišemo $S=[B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j}]$. Ako je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j})$ i ako je pri tome $p_{i,j}=e_{ij}$, za sve $i,j\in B$, tada pišemo $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j})$. U tom slučaju uslov (30) postaje:

$$\varphi_{i,j}\psi_{j,kj} = \psi_{i,k}\varphi_{k,kj}, \tag{32}$$

za sve $i,j,k\in B$ za koje je $i\geq_1 j,\ i\geq_2 k$. Ako je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j})$ i $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ su tranzitivni sistemi homomorfizama, tada dobijamo *jaku traku B monoida M_i, $i\in B$.*

Važan tip traka monoida, kada su komponente jednoidempotentne, opisuje se sledećom

Teorema 9.17. *Neka je B traka i neka je $\{M_i \mid i\in B\}$ familija po parovima disjunktnih jednoidempotentnih monoida. Tada je polugrupa S traka B monoida M_i, $i\in B$, ako i samo ako je $S=[B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j}]$. U tom slučaju su homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ i matrica $(p_{i,j})$ odredjeni na jedinstven način.*

Dokaz. Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i\in B$. Tada prema Teoremi 9.16. imamo da je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j})$. Kako su M_i, $i\in B$, jednoidempotentni monoidi, i kako je homomorfna slika idempotenta takodje idempotent, to je $e_i\varphi_{i,j}=e_j$, za $i,j\in B$, $i\geq_1 j$, i $e_i\psi_{i,j}=e_j$, za $i,j\in B$, $i\geq_2 j$, pa prema (28) i (29) dobijamo da $\{\varphi_{i,j}\}$ i $\{\psi_{i,j}\}$ jesu tranzitivni sistemi homomorfizama. Prema tome, $S=[B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j},p_{i,j}]$.

Obrat sledi neposredno.

Prema prethodno dokazanom, homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ su odredjeni na jedinstven način. Uzmimo $i,j\in B$. Tada je

$$e_i * e_j = (e_i\varphi_{i,ij})p_{i,j}(e_j\psi_{j,ij}) = e_{ij}p_{i,j}e_{ij} = p_{i,j}.$$

Prema tome, i matrica $(p_{i,j})$ je odredjena na jedinstven način. □

Sledećom teoremom razmatramo jedan slučaj slaganja u traku monoida gde se dva sistema homomorfizama mogu zameniti jednim.

Teorema 9.18. *Neka je B traka i neka je $\{M_i \mid i\in B\}$ familija po parovima disjunktnih monoida. Tada je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j})$ ako i samo ako je $S=(B;M_i,\phi_{i,j})$ i $\phi_{i,j}\phi_{j,kj}=\phi_{i,k}\phi_{k,kj}$, za $i\geq_1 j$, $i\geq_2 k$.*

Osim toga, ako je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j})$, odnosno $S=(B;M_i,\phi_{i,j})$, tada su homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$, odnosno $\phi_{i,j}$, odredjeni na jedinstven način.

Dokaz. Neka je $S=(B;M_i,\varphi_{i,j},\psi_{i,j})$. Za $i,j\in B$, $i\succcurlyeq j$, definišimo preslikavanje $\phi_{i,j}$ iz M_i u M_j sa: $\phi_{i,j}=\varphi_{i,ij}\psi_{ij,j}$. Primetimo da iz (32) sledi da je $\phi_{i,j}=\psi_{i,ji}\varphi_{ji,j}$. Jasno da je $\phi_{i,i}$ identičko preslikavanje na M_i, za svaki $i\in B$. Uzmimo $i,j,k\in B$ tako da je $ij\succcurlyeq k$, i uzmimo $a\in M_i$, $b\in M_j$. Tada je

$$\begin{aligned}
&[(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij})]\phi_{ij,k} = \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ij}\psi_{ij,ij})(b\psi_{j,ij}\varphi_{ij,ij})]\varphi_{ij,ijk}\psi_{ijk,k} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ij})(b\psi_{j,ij})]\varphi_{ij,ijk}\psi_{ijk,k} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ij}\varphi_{ij,ijk})(b\psi_{j,ij}\varphi_{ij,ijk})]\psi_{ijk,k} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ijk})(e_{ij}\varphi_{ij,ijk})(b\psi_{j,ij}\varphi_{ij,ijk})]\psi_{ijk,k} && \text{(prema (28))} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ijk})((e_{ij}(b\psi_{j,ij})\varphi_{ij,ijk}]\psi_{ijk,k} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ijk})(b\psi_{j,ij}\varphi_{ij,ijk})]\psi_{ijk,k} && (b\psi_{j,ij}\in M_{ij}) \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ijk})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,ijk})]\psi_{ijk,k} && \text{(prema (32))} \\
&\quad = (a\varphi_{i,ijk}\psi_{ijk,k})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,ijk}\psi_{ijk,k}) \\
&\quad = (a\varphi_{i,ijk}\psi_{ijk,k})(e_{ijk}\psi_{ijk,k})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k}) && \text{(prema (29))} \\
&\quad = [(a\varphi_{i,ijk})e_{ijk}]\psi_{ijk,k}(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k}) \\
&\quad = (a\varphi_{i,ijk}\psi_{ijk,k})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k}) && (a\varphi_{i,ijk}\in M_{ijk}) \\
&\quad = (a\psi_{i,ki}\varphi_{ki,k})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k}) && \text{(prema (32))} \\
&\quad = (a\varphi_{i,ik}\psi_{ik,k})(b\varphi_{j,jk}\psi_{jk,k}) && \text{(prema (32))} \\
&\quad = (a\phi_{i,k})(b\phi_{j,k}).
\end{aligned}$$

Takodje, za $i,j\in B$, $a\in M_i$, $b\in M_j$, imamo da je

$$(a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}) = (a\varphi_{i,ij}\psi_{ij,ij})(b\psi_{j,ij}\varphi_{ij,ij}) = (a\varphi_{i,ij})(b\psi_{j,ij}) = a*b.$$

Prema tome, $S=(B;M_i,\phi_{i,j})$. Ostatak tvrdjenja se neposredno proverava.

Obratno, neka je $S=(B;M_i,\phi_{i,j})$, i neka je $\phi_{i,j}\phi_{j,kj}=\phi_{i,k}\phi_{k,kj}$, za $i\geq_1 j$, $i\geq_2 k$. Uzmimo da je $\varphi_{i,j}=\phi_{i,j}$, za $i,j\in B$, $i\geq_1 j$, $\psi_{i,j}=\phi_{i,j}$, za $i,j\in B$, $i\geq_2 j$ i $p_{i,j}=e_{ij}$, za $i,j\in B$. Neposredno se dobija da važi

(32), pa prema definiciji matrice $(p_{i,j})$ dobijamo (30). Uzmimo $i, j, k \in B$ tako da je $i \geq_1 j \geq_1 k$, i uzmimo $a \in M_i$. Tada je

$$\begin{aligned} a\varphi_{i,j}\varphi_{j,k} &= a\phi_{i,j}\phi_{j,k} = [(a\phi_{i,j})e_j]\phi_{j,k} = [(a\phi_{i,j})(e_i\phi_{j,j})]\phi_{j,k} \\ &= (a\phi_{i,k})(e_j\phi_{j,k}) = (a\varphi_{i,k})(e\varphi_{j,k}). \end{aligned}$$

Prema tome, važi (28). Na isti način dokazujemo (29). Na kraju, uzmimo $a \in M_i$, $b \in M_j$, $i, j \in B$. Tada je

$$a * b = (a\phi_{i,ij})(b\phi_{j,ij}) = (a\varphi_{i,ij})(b\psi_{j,ij}).$$

Dakle, $S = (B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j})$.

Neka je $S = (B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j})$. Uzmimo $i, j \in B$, $i \geq_1 j$, $a \in M_i$. Tada je

$$a * e_j = (a\varphi_{i,j})(e_j\varphi_{j,j}) = (a\varphi_{i,j})e_j = a\varphi_{i,j}.$$

Slično dokazijemo da je $a\psi_{i,j} = e_j * a$, za $i, j \in B$, $i \geq_2 j$, $a \in M_i$. Prema tome, homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ su odredjeni na jedinstven način.

Neka je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$. Uzmimo $i, j \in B$, $i \succcurlyeq j$, $a \in M_i$. Tada je

$$\begin{aligned} e_j * a * e_j &= e_j * [(a\phi_{i,ij})(e_j\phi_{j,ij})] = (e_j\phi_{j,jij})[(a\phi_{i,ij})(e_j\phi_{j,ij})]\phi_{ij,jij} \\ &= (e_j\phi_{j,jij})(a\phi_{i,jij})(e_j\phi_{j,jij}) = e_j(a\phi_{i,j})e_j \\ &= a\phi_{i,j}, \end{aligned}$$

$(jij = j)$. Prema tome, homomorfizmi $\phi_{i,j}$ su odredjeni na jedinstven način. $\square$

Koristeći jedinstvenost homomorfizama $\phi_{i,j}$ dokazanu u prethiodnoj teoremi i koristeći Teoremu 9.1. dobijamo

Posledica 9.3. *Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$, neka za $i \in B$, e_i jeste jedinica monoida M_i, i neka za $k \in B$, $F_k = \cup_{i \succcurlyeq k} M_i$. Tada je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$ ako i samo ako za svaki $k \in B$, preslikavanje $\phi_k : F_k \to M_k$ definisano sa: $a\phi_k = e_k a e_k$, $a \in F_k$, jeste homomorfizam.* $\square$

Posledica 9.4. *Neka je Y polumreža i neka je $\{M_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ familija po parovima disjunktnih monoida. Tada S jeste polumreža Y monoida M_α, $\alpha \in Y$, ako i samo ako je $S = (Y; M_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$.*

Dokaz. Neka je S polumreža Y monoida M_α, $\alpha \in Y$. Za $\alpha \in Y$, neka je e_α jedinica monoida M_α. Tada za svaki $\gamma \in Y$, F_γ jeste idealska ekstenzija monoida M_γ, pa prema Teoremi 1.18, preslikavanje ϕ_γ iz F_γ na M_γ, definisano sa $a\phi_\gamma = ae_\gamma (= e_\gamma a e_\gamma)$, je retrakcija, pa prema Posledici 9.3, $S = (Y; M_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Homomorfizam monoida M u monoid M' je *monoidski* ako on preslikava jedinicu monoida M u jedinicu monoida M'.

Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$, i za $i \in B$, sa e_i označimo jedinicu monoida M_i. Ako je skup $\{e_i \mid i \in B\}$ podpolugrupa od S, tada kažemo da je S *prava traka* B *monoida* M_i, $i \in B$. Prave trake monoida opisujemo sledećom teoremom:

Teorema 9.19. *Neka je B traka i neka je $\{M_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih monoida. Tada polugrupa S jeste prava traka B monoida M_i, $i \in B$, ako i samo ako je $S = [B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$ i svi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ su monoidski homomorfizmi.*

Dokaz. Neka S jeste prava traka B monoida M_i, $i \in B$. Prema Teoremi 9.16, $S = (B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}, p_{i,j})$, pri čemu su homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ i matrica $(p_{i,j})$ definisani kao u dokazu Teoreme 9.16. Tada za sve $i, j \in B$ dobijamo da je $p_{i,j} = e_i e_j = e_{ij}$, jer je S prava traka monoida M_i, $i \in B$. Takodje, za $i, j \in B$, $i \geq_1 j$, je $e_i \varphi_{i,j} = e_i e_i = e_{ij}$, odakle $\varphi_{i,j}$ jeste monoidski homomorfizam, dok prema (28) dobijamo da $\{\varphi_{i,j}\}$ jeste tranzitivni sistem homomorfizama. Na isti način dokazujemo da je $\{\psi_{i,j}\}$ tranzitivni sistem monoidskih homomorfizama. Odavde dobijamo da je $S = [B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$.

Obratno, neka je $S = [B; M_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$ i $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ su monoidski homomorfizmi. Uzmimo $i, j \in B$. Tada je

$$e_i * e_j = (e_i \varphi_{i,ij})(e_j \psi_{j,ij}) = e_{ij} e_{ij} = e_{ij},$$

pa S jeste prava traka B monoida M_i, $i \in B$. $\square$

Prema Teoremama 9.17. i 9.19, neposredno dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 9.5. *Neka je B traka i neka je $\{M_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih jednoidempotentnih monoida. Tada polugrupa S jeste prava traka B monoida M_i, $i \in B$, ako i samo ako S jeste jaka traka B monoida M_i, $i \in B$.* $\square$

Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$, neka za $i \in B$, e_i jeste jedinica monoida M_i, i neka je B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$. Ako za svaki $\alpha \in Y$, $\{e_i \mid i \in B_\alpha\}$ jeste podpolugrupa od S, tada S jeste *poluprava traka* B *monoida* M_i, $i \in B$.

Lema 9.2. *Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$. Tada S jeste poluprava traka B monoida M_i, $i \in B$, ako i samo ako je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$ i $\phi_j \phi_k = \phi_k$, za sve $j, k \in B$ za koje je $[j] = [k]$.*

Dokaz. Neka je B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$.

Neka je S poluprava traka monoida M_i, $i \in B$. Uzmimo $k \in B$, $a, b \in F_k$. Tada je $a \in M_i$, $b \in B_j$, $i, j \in B$, $i, j \succcurlyeq k$. Tada je $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $k \in B_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha, \beta \geq \gamma$. Tada je $e_k a \in M_{ki}$, $b e_k \in M_{jk}$ i

$ki, jk \in B_\gamma$, pa kako je $\{e_l \mid l \in B_\gamma\}$ podpolugrupa od S, i kako je $(ki)(jk) = k(kij)k = k$, to je $e_{ki}e_{jk} = e_k$. Prema tome

$$(ab)\phi_k = e_k abe_k = e_k ee_{ki}e_{jk}be_k = e_k ae_k be_k = (a\phi_k)(b\phi_k).$$

Prema tome, ϕ_k je homomorfizam, pa prema Posledici 9.3. dobijamo da je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$. Dalje, uzmimo $j, k \in B$ tako da je $[j] = [k]$, i $a \in F_j = F_k$, tj. $a \in M_i$, $i \in B$, $i \succcurlyeq j, k$. Neka je $i \in B_\alpha$, $j, k \in B_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$. Tada kao u prethodnim razmatranjima dobijamo da je $e_k e_j e_{ijk} = e_k$ i $e_{ki}e_j e_k = e_k$, pa kako je $ae_j e_k \in M_{ijk}$, $e_k a \in M_{ki}$, to dobijamo da je

$$a\phi_j\phi_k = e_k e_j ae_j e_k = e_k e_j e_{ijk} ae_j e_k = e_k ae_j e_k = e_k ae_{ki}e_j e_k = e_k ae_k = a\phi_k.$$

Prema tome, $\phi_j\phi_k = \phi_k$.

Obratno, neka je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$ i neka je $\phi_j\phi_k = \phi_k$, za $j, k \in B$, $[j] = [k]$. Uzmimo $\alpha \in Y$, $i, j \in B_\alpha$. Tada iz $\phi_i\phi_{ij} = \phi_{ij}$ dobijamo da je $e_{ij}\phi_i\phi_{ij} = e_{ij}\phi_{ij}$, tj. $e_{ij}e_i e_{ij}e_i e_{ij} = e_{ij}$. Sa druge strane, kako je ϕ_{ij} homomorfizam, to je

$$e_{ij} = e_{ij}e_i e_{ij}e_i e_{ij} = (e_i\phi_{ij})(e_i\phi_{ij}) = e_i\phi_{ij}.$$

Na isti način dokazujemo da je $e_{ij} = e_j\phi_{ij}$. Prema tome,

$$e_i e_j = ((e_i\phi_{i,ij})(e_j\phi_{j,ij}) = (e_i\phi_{ij})(e_j\phi_{ij}) = e_{ij}.$$

Dakle, S je poluprava traka B monoida M_i, $i \in B$. $\square$

U daljem radu, kada budemo govorili o kičmenom proizvodu trake i polumreže polugrupa, smatraćemo da je to kičmeni proizvod u odnosu na tu datu polumrežu, koja je istovremeno i najveća polumrežna homomorfna slika date trake.

Teorema 9.20. *Polugrupa S je kičmeni proizvod trake i polumreže monoida ako i samo ako S jeste poluprava traka monoida i $\phi_j\phi_k = \phi_k$, za sve $j, k \in B$ za koje je $j \succcurlyeq k$.*

Dokaz. Neka je polugrupa T polumreža Y monoida T_α, $\alpha \in Y$, neka je B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$, i neka je $S \subseteq T \times B$ kičmeni proizvod od T i B u odnosu na Y. Prema Posledici 9.4, $T = (Y; T_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, pa u oznakama iz $(D1)$ i $(D2)$ Teoreme 9.8, prema Teoremi 9.9, dobijamo da je $S = [\![B; S_i, \phi_{i,j}]\!]$. Jasno da je S_i monoid, za svaki $i \in B$, pa prema Lemi 9.2, S je poluprava traka B monoida S_i, $i \in B$, dok su homomorfizmi $\phi_{i,j}$ odredjeni na način prikazan u dokazu Teoreme 9.18. Kako je $\phi_{i,j}\phi_{j,k} = \phi_{i,k}$, za $i, j, k \in B$ za koje je $[i] = [j] \geq [k]$, to neposredno dobijamo da je $\phi_j\phi_k = \phi_k$, za sve $j, k \in B$ za koje je $j \succcurlyeq k$.

Obratno, neka je S poluprava traka B monoida M_i, $i \in B$, i neka je $\phi_j\phi_k = \phi_k$, za sve $j, k \in B$ za koje je $j \succcurlyeq k$. Tada prema Lemi 9.2.

dobijamo da je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$, pri čemu su homomorfizmi $\phi_{i,j}$ odredjeni na način opisan u dokazu Teoreme 9.18, pa iz pretpostavke da je $\phi_j\phi_k = \phi_k$, za sve $j, k \in B$ za koje je $j \succcurlyeq k$, to dobijamo da je $S = [\![B; M_i, \phi_{i,j}]\!]$. Dakle, prema Teoremama 9.8. i 9.9, dobijamo da S jeste kičmeni proizvod trake i polumreže monoida. $\square$

Koristeći Teoreme 9.8. i 9.9. i Posledicu 9.5. dobijamo

Posledica 9.6. *Polugrupa S je jaka (prava) traka monoida ako i samo ako S jeste kičmeni proizvod trake i jake (prave) polumreže monoida.* $\square$

Posledica 9.7. *Neka je B traka i neka je $\{M_i \mid i \in B\}$ familija po parovima disjunktnih jednoidempotentnih monoida. Tada je $S = (B; M_i, \phi_{i,j})$ ako i samo ako S jeste kičmeni proizvod trake i polumreže jednoidempotentnih monoida.* $\square$

Primenom rezultata iz Tačke 9.4. dobija se jedna zanimljiva konstrukcija normalne trake monoida.

Teorema 9.21. *Polugrupa S je normalna traka monoida ako i samo ako je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, i za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica monoida.*

Ako je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, i za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica monoida, tada su homomorfizmi $\phi_{\alpha,\beta}$ odredjeni na jedinstven način.

Dokaz. Neka je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$, normalna traka i neka je polugrupa S normalna traka B monoida M_i, $i \in B$. Za $i \in B_\alpha$, neka e_i jeste jedinica monoida M_i.

Prema Teoremi 9.10, S zadovoljava uslove (12)-(14) (gde su u uslovima (13) i (14) polugrupe S_i zamenjene sa M_i), pri čemu, prema Teoremi 9.2, za svaki $\alpha \in Y$, polugrupa D_α može biti izabrana tako da važi (5) i (6), dok prema Teoremi 9.12, polugrupe D_α mogu biti izabrane tako da pored uslova (5) i (6) zadovoljavaju i (15) i (16).

Uzmimo $\alpha \in Y$. Definišimo relaciju η na D_α sa

$$a \,\eta\, b \;\Leftrightarrow\; a, b \in D_i,\; i \in B_\alpha, \;\text{ i }\; ae_i = be_i.$$

Jasno da je η relacija ekvivalencije. Neka $a \;\eta\; b$, $a, b \in D_i$, $i \in B_\alpha$ i $x \in D_j$, $j \in B_\alpha$. Primetimo najpre da je $ue_i = e_i(ue_i) = (e_iu)e_i = e_iu$, za sve $u \in D_i$, jer je $e_iu, ue_i \in M_i$. Sada iz $ax, bx \in D_{ij}$, dobijamo da je

$$(ax)e_{ij} = e_{ij}(ax) = (e_{ij}a)e_ix = e_{ij}(ae_i)x = e_{ij}(be_i)x = (bx)e_{ij}.$$

pa η jeste desna kongruencija. Slično dokazujemo da je η leva kongruencija. Prema tome, η je kongruencija.

Neka $a, b \in S_\alpha$ i neka je $a \,\eta\, b$. Tada $a, b \in M_i$, za neki $i \in B_\alpha$, odakle je $a = ae_i = be_i = b$. Prema tome, η je S_α-kongruencija. Kako prema (6), D_α jeste gusta ekstenzija od S_α, to η jeste identička relacija na

D_α. Uzmimo $a \in D_i$, $i \in B_\alpha$. Tada iz $a\,\eta\, ae_i$ sledi da je $a = ae_i \in M_i$. Prema tome, $D_\alpha = S_\alpha$, pa je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$..

Obratno, neka je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, i neka za svaki $\alpha \in Y$, S_α jeste matrica B_α monoida M_i, $i \in B_\alpha$. Uzmimo $\alpha, \beta \in Y$ tako da je $\alpha \geq \beta$. Dokazaćemo da važi:

$$(\forall i \in B_\alpha)(\exists_1 j \in B_\beta)\ M_i\phi_{\alpha,\beta} \subseteq M_j. \tag{33}$$

Uzmimo $i \in B_\alpha$ i uzmimo da je e jedinica monoida M_i. Neka je $j \in B_\beta$ tako da je $e\phi_{\alpha,\beta} \in M_j$. Tada za svaki $a \in M_i$ dobijamo da je

$$a\phi_{\alpha,\beta} = (eae)\phi_{\alpha,\beta} = (e\phi_{\alpha,\beta})(a\phi_{\alpha,\beta})(e\phi_{\alpha,\beta}) \in M_j M_\beta M_j \subseteq M_j.$$

Dakle, $M_i\phi_{\alpha,\beta} \subseteq M_j$, i kako su M_k po parovima disjunktni, to važi (33). Prema tome, preslikavanje $\theta_{\alpha,\beta}$ iz B_α u B_β dato sa:

$$i\theta_{\alpha,\beta} = j \quad \Leftrightarrow \quad M_i\phi_{\alpha,\beta} \subseteq M_j,$$

je dobro definisano. Nije teško proveriti da je $\{\theta_{\alpha,\beta} \mid \alpha \geq \beta, \alpha, \beta \in Y\}$ tranzitivni sistem homomorfizama. Ako je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$, tada B jeste normalna traka i za $a \in M_i$, $b \in M_j$, imamo da je

$$\begin{aligned} ab = (a\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b\phi_{\beta,\alpha\beta}) \in (M_i\phi_{\alpha,\alpha\beta})(M_j\phi_{\beta,\alpha\beta}) \subseteq M_{i\theta_{\alpha,\alpha\beta}} M_{j\theta_{\beta,\alpha\beta}} \\ \subseteq M_{(i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta})} = M_{ij}, \end{aligned}$$

pa S jeste traka B monoida M_i, $(\alpha \in Y,\ i \in B_\alpha)$.

Osim toga, prema (33) i definiciji preslikavanja $\theta_{\alpha,\beta}$ dobijamo da je

$$M_i\phi_{\alpha,\beta} \subseteq M_{i\theta_{\alpha,\beta}}, \qquad \text{za } \alpha, \beta \in Y,\ \alpha \geq \beta,\ i \in B_\alpha. \tag{34}$$

Odavde lako dobijamo da je $a\phi_{\alpha,\beta} = ae_{i\theta_{\alpha,\beta}}$ $(= e_{i\theta_{\alpha,\beta}}a)$. Prema tome, homomorfizmi $\phi_{\alpha,\beta}$ su odredjeni na jedinstven način. $\square$

Polumrežno slaganje iz Teoreme 9.21. ne mora biti jako. Na primer, neka je $Y = \{0, 1, 2\}$, $0 > 1 > 2$ polumreža i neka su $S_\alpha = \{e_\alpha, a_\alpha\}$ monoidi sa množenjima koja su data sa: $e_\alpha^2 = e_\alpha$, $e_\alpha a_\alpha = a_\alpha e_\alpha = a_\alpha^2 = a_\alpha$, $\alpha \in Y$. Definišimo homomorfizme $\phi_{\alpha,\beta}$, $\alpha > \beta$, sa:

$$\phi_{0,1} = \begin{pmatrix} e_0 & a_0 \\ a_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \phi_{0,2} = \begin{pmatrix} e_0 & a_0 \\ e_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1,2} = \begin{pmatrix} e_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

$\phi_{\alpha,\alpha}$, $\alpha \in Y$, zadovoljava (1). Tada je $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$ polumreža monoida S_α, $\alpha \in Y$, i S nije jaka polumreža monoida S_α, $\alpha \in Y$, jer $(e_0\phi_{0,1})\phi_{1,2} \neq e_0\phi_{0,2}$.

Neka je polugrupa S traka B monoida M_i, $i \in B$, i neka za $i \in B$, e_i jeste jedinica monoida M_i. Tada je S *slabo sistematična traka monoida* M_i, $i \in B$, ako za $i, j, k \in B$,

$$i \geq j \geq k \ \Rightarrow\ e_i e_j e_k = e_i e_k.$$

Sledećom teoremom opisujemo jake polumreže matrica monoida.

Teorema 9.22. *Polugrupa S je jaka polumreža matrica monoida ako i samo ako S jeste slabo sistematična traka monoida.*

Dokaz. Neka je $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$, pri čemu za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica B_α monoida M_i, $i \in B_\alpha$. Prema Teoremi 9.21, postoji normalna traka $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$, tako da je S normalna traka B monoida M_i, $i \in B$. Takodje, homomorfizmi $\phi_{\alpha,\beta}$ su odredjeni na način prikazan u dokazu Teoreme 9.21. Uzmimo $i, j, k \in B$ tako da je $i \geq j \geq k$. Tada $i \in B_\alpha, j \in B_\beta, k \in B_\gamma, \alpha \geq \beta \geq \gamma$ i $j = i\theta_{\alpha,\beta}$, $k = i\theta_{\alpha,\gamma}$, odakle je

$$\begin{aligned} e_i e_j e_k &= e_i e_{i\theta_{\alpha,\beta}} e_{i\theta_{\alpha,\gamma}} = e_i e_{i\theta_{\alpha,\beta}} e_{i\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}} \\ &= e_i \phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma} = e_i \phi_{\alpha,\gamma} = e_i e_{i\theta_{\alpha,\gamma}} = e_i e_k. \end{aligned}$$

Obratno, neka je S slabo sistematična normalna traka B monoida M_i, $i \in B$. Uzmimo da je $B = [Y; B_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$, B_α, $\alpha \in Y$, su pravougaone trake. Tada prema Teoremi 9.21, $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, za svaki $\alpha \in Y$, S_α je matrica B_α monoida M_i, $i \in B_\alpha$, i homomorfizmi $\phi_{i,j}$ su odredjeni na način prikazan u dokazu Teoreme 9.21. Ako $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ i $a \in S_i$, $i \in B_\alpha$, tada je

$$a\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma} = ae_{i\theta_{\alpha,\beta}} e_{i\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}} = ae_i e_{i\theta_{\alpha,\beta}} e_{i\theta_{\alpha,\gamma}} = ae_i e_{i\theta_{\alpha,\gamma}} = a\phi_{\alpha,\gamma}. \quad \square$$

Posledica 9.8. *Polugrupa S je normalna traka jednoidempotentnih monoida ako i samo ako S jeste jaka polumreža matrica jednoidempotentnih monoida.* $\square$

Zadaci.

1. Traka B je *regularna traka* ako zadovoljava identitet $axya = axaya$. Dokazati da je polugrupa S regularna traka B monoida S_i, $i \in B$, ako i samo ako je $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$.

2. Polugrupa S je *kvazi-pravoverna* ako je $E(S)$ podpolugrupa od S i za svaki $a \in S$ $(b \in S)$ postoji $e \in E(S)$ $(f \in E(S))$ tako da za $x, y \in S^1$ je $ax = ay$ $(xb = yb)$ ako i samo ako je $ex = ey$ $(xf = yf)$.

Dokazati da je polugrupa S kvazi-pravoverna i S je traka kancelativnih monoida ako i samo ako S jeste kičmeni proizvod trake i jake polumreže kancelativnih monoida.

3. Ako je S jaka polumreža monoida čija su prirodna uredjenja desno saglasna, tada je i prirodno uredjenje na S desno saglasno. (H.Mitsch - nije objavljeno).

4. Ako je S jaka polumreža trivijalno uredjenih monoida, tada je prirodno uredjenje na S saglasno. (H.Mitsch - nije objavljeno).

5. Poddirektan proizvod P polugrupe S i grupe G sa jedinicom G je *pun* ako je $(e, 1) \in P$, za svaki $e \in E(S)$.

Dokazati da su sledeći uslovi za polugrupu S ekvivalentni:

(*i*) S je pun poddirektan proizvod polumreže i grupe;
(*ii*) S je E-inverzivna čvrsta polumreža kancelativnih monoida;
(*iii*) S je E-inverzivna čvrsta polumreža slabo kancelativnih monoida;

(iv) S je E-inverzivna čvrsta polumreža jednoidempotentnih monoida.

Literatura. Bogdanović and Ćirić [1], Ćirić and Bogdanović [4], [8], [9], [10], Dorofeeva [1], Dorofeeva, Mannepalli and Satyanarayana [1], El-Qallali [2], El-Qallai and Fountain [1], [2], Fountain [1], Hinkle [1], Hogan [1], Kilp [1], Mitsch [2], Pastijn [1], Schein [4], [8], Warne [7], Yamada [14].

9.6. Trake grupa.

Na kraju, Teoriju tračnih slaganja, koja je razvijana tokom ove glave, primenjujemo na trake grupa.

Teorema 9.23. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*
(i) *S je traka grupa;*
(ii) $S = [B; G_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}, p_{i,j}]$;
(iii) *S je regularna i $ab \in a^2bS \cap Sab^2$, za sve $a, b \in S$;*
(iv) *S je potpuno regularna i $ab\ \mathcal{H}\ a^2b\ \mathcal{H}\ ab^2$, za sve $a, b \in S$.*

Dokaz. $(iii) \Rightarrow (iv)$. Prema Teoremi 6.9, S je traka π-grupa, pa prema Teoremi 6.1, $S = Reg(S) = Gr(S)$, pa S jeste potpuno regularna. Kako se na potpuno regularnoj polugrupi relacije $\mathcal{H}$ i $\mathfrak{T}$ poklapaju, to prema Teoremi 6.9. dobijamo da je $ab\ \mathcal{H}\ a^2b\ \mathcal{H}\ ab^2$, za sve $a, b \in S$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Sledi neposredno.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Prema Teoremi 6.9, S je traka B π-grupa S_i, $i \in B$, dok prema Propoziciji 2.2. imamo da za svaki $i \in B$, S_i jeste potpuno regularna polugrupa, pa je S_i grupa. Prema tome, važi (iii)..

$(i) \Rightarrow (iv)$. Neka je S traka grupa. Jasno da je S potpuno regularna. Takodje, $\mathcal{H}$ je tračna kongruencija na S, pa za $a, b \in S$, iz $a\,\mathcal{H}\,a^2$, $b\,\mathcal{H}\,b^2$, dobijamo da je $ab\ \mathcal{H}\ a^2b$ i $ab\ \mathcal{H}\ ab^2$. Prema tome, važi (ii).

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 9.7.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sledi neposredno. $\square$

Polugrupa S je *slabo kancelativna* ako za sve $a, b \in S$, iz $ax = bx$ i $xa = xb$, za neki $x \in S$, sledi da je $a = b$. Jasno da levo kancelativne, desno kancelativne i kancelativne polugrupe jesu slabo kancelativne.

Lema 9.3. *Neka je S traka i neka je $S = (B; S_i, \phi_{i,j})$. Ako su S_i, $i \in B$, slabo kancelativne polugrupe, tada je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$.*

Dokaz. Uzmimo $i, j, k \in B$, $i \succcurlyeq j \succcurlyeq k$, i $a \in S_i$. Tada za $b \in S_j$, prema (3), imamo da je

$$(a\phi_{i,j}\phi_{j,k})(b\phi_{j,k}) = [(a\phi_{i,j})b]\phi_{j,k} = (a\phi_{i,k})(b\phi_{j,k}),$$

i slično dobijamo da je $(b\phi_{j,k})(a\phi_{i,j}\phi_{j,k}) = (b\phi_{j,k})(a\phi_{i,k})$, pa zbog slabe kancelativnosti dobijamo da je $a\phi_{i,j}\phi_{j,k} = a\phi_{i,k}$. Prema tome $\{\phi_{i,j}\}$ je tranzitivni sistem homomorfizama, pa je $S = [B; S_i, \phi_{i,j}]$. □

Neka je polugrupa S poddirektan proizvod polugrupa S_i, $i \in I$. Ako je pri tome S regularna (potpuno regularna) polugrupa, tada kažemo da je S *regularan* (*potpuno regularan*) *poddirektan proizvod polugrupa* S_i, $i \in I$.

Teorema 9.24. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(*i*) S *je polumreža grupa;*

(*ii*) S *je jaka polumreža grupa;*

(*iii*) S *je regularan poddirektan proizvod grupe i 0-grupa;*

(*iv*) S *je regularna i svi idempotenti iz* S *su centralni.*

Dokaz. (*i*) ⇒ (*ii*). Neka je S polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$. Prema Posledici 9.4, $S = (Y; G_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, pa prema Lemi 9.2. dobijamo da je $S = [Y; G_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$.

(*ii*) ⇒ (*iii*). Neka je S jaka polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$. Jasno da je S regularna. Ako polumreža Y ima nulu α_0, tada prema Teoremi 9.3. dobijamo da S jeste poddirektan proizvod grupe G_{α_0} i 0-grupa G_α^0, $\alpha \in Y - \{\alpha_0\}$. Ako polumreža Y nema nulu, tada prema teoremi 9.3. imamo da S jeste poddirektan proizvod 0-grupa G_α^0, $\alpha \in Y$, pa ako je G jednoelementna grupa, tada je S izomorfna direktnom proizvodu od S i G, pa prema tome, S je poddirektan proizvod grupe i 0-grupa.

(*iii*) ⇒ (*iv*). Neposredno se proverava da svi idempotenti u poddirektnom proizvodu grupe i 0-grupa jesu centralni.

(*iv*) ⇒ (*i*). Neka je S regularna i neka su idempotenti iz S centralni. Uzmimo $a, b \in S$, $x \in V(a)$, $y \in V(b)$. Tada je

$$ab = axabyb = aaxbyb = a^2xbyb = a^2byxb \in a^2bS.$$

Na isti način dokazujemo da je $ab \in Sab^2$. Dakle, prema Teoremi 9.23. imamo da je S traka B grupa G_i, $i \in B$. Kako su idempotenti iz S centralni, to $E(S)$ jeste polumreža, i lako se dokazuje da je traka B izomorfna sa $E(S)$, pa S jeste polumreža grupa. □

Zanimljivo je da kičmeni proizvod trake i polumreže grupa jeste jedini njihov poddirektan proizvod koji je regularna polugrupa. Taj rezultat je deo sledeće teoreme kojom se na razne načine opisuju jake trake grupa.

Teorema 9.25. *Sledeći uslovi za polugrupu* S *su ekvivalentni:*

(*i*) S *je traka grupa i* $E(S)$ *je podpolugrupa od* S*;*

(*ii*) S *je jaka traka grupa;*

(*iii*) S *je kičmeni proizvod trake i polumreže grupa;*

(*iv*) S *je probušeni kičmeni proizvod trake i polumreže grupa;*

(*v*) S *je regularan poddirektan proizvod trake i polumreže grupa;*
(*vi*) S *je regularan poddirektan proizvod trake, grupe i 0-grupa.*

Dokaz. $(v) \Leftrightarrow (vi)$. Sledi na osnovu Teoreme 9.24. i na osnovu Posledice 1.2.

$(v) \Rightarrow (i)$. Neka je $S \subseteq T \times B$ poddirektan proizvod polugrupe T i trake B, i neka je T polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$. Za $\alpha \in Y$, $i \in B$, neka je $T_{\alpha,i} = S \cap (G_\alpha \times \{i\})$. Uzmimo $\alpha \in Y$, $i \in B$, i uzmimo da je $T_{\alpha,i} \neq \emptyset$, tj neka je $(a,i) \in T_{\alpha,i}$, $a \in G_\alpha$. Ako uzmemo $(b,j) \in V((a,i))$, tada dobijamo da je $a = aba$, $b = bab$, $i = iji$, $j = jij$, odakle lako dokazujemo da je $b \in G_\alpha$ i b je inverz elementa a u grupi G_α. Ako sa e označimo jedinicu grupe G_α, tada dobijamo da je

$$(e,i) = (a,i)(b,j)^2(a,i) \in S, \quad (b,i) = (e,i)(b,j)(e,i) \in S,$$

odnosno $(e,i), (b,i) \in T_{\alpha,i}$, pri čemu je (e,i) jedinica u $T_{\alpha,i}$, dok je (b,i) inverz od (a,i) u $T_{\alpha,i}$. Prema tome, ukoliko je $T_{\alpha,i} \neq \emptyset$, tada je $T_{\alpha,i}$ podgrupa od S. Jasno da je $S = \cup\{T_{\alpha,i} \mid \alpha \in Y,\ i \in B\}$, pa S jeste potpuno regularna (unija grupa).

Uzmimo $u, v \in S$, $u = (a,i)$, $v = (b,j)$, $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$, $i, j \in B$. Tada je $uv = (ab, ij)$, $u^2v = (a^2b, ij)$ i $uv^2 = (ab^2, ij)$, pa je $uv, u^2v, uv^2 \in T_{\alpha\beta,ij}$, odakle je $uv\ \mathcal{H}\ u^2v\ \mathcal{H}\ uv^2$. Dakle, prema Teoremi 9.23, S je traka grupa. Kako je $E(T)$ podpolugrupa od S (prema dokazu Teoreme 9.24.), i kako je skup $E(S)$ jednak Dekartovom proizvodu $E(T) \times B$, to $E(S)$ jeste podpolugrupa od S. Dakle, važi (iii).

$(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sledi prema Teoremi 9.19.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Sledi prema Posledici 9.16.

$(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v)$. Sledi neposredno. □

Neprazan podskup A polugrupe S je *levo* (*desno*) *unitaran podskup od* S ako za $x \in S$, $a \in A$, $ax \in A \Rightarrow x \in A$ ($xa \in A \Rightarrow x \in A$). Podskup A je *unitaran podskup od* S ako A jeste levo i desno unitaran podskup od S.

Lema 9.4. *Neka je* S *regularna polugrupa. Tada je* $E(S)$ *unitaran podskup od* S *ako i samo ako* $E(S)$ *jeste levo unitaran podskup od* S.

Takodje, ako je $E(S)$ *unitaran podskup od* S, *onda* $E(S)$ *jeste podpolugrupa od* S.

Dokaz. Neka je $E(S)$ levo unitaran podskup od S. Najpre ćemo dokazati da je $E(S)$ podpolugrupa od S. Uzmimo $e, f \in E(S)$ i $x \in V(ef)$. Tada iz $e, efx \in E(S)$ sledi da je $fx \in E(S)$, pa iz $f, fx \in E(S)$ dobijamo da je $x \in E(S)$. sada iz $x, xef \in E(S)$ dobijamo da je $ef \in E(S)$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S.

Uzmimo $e \in E(S)$, $a \in S$, tako da je $ae \in E(S)$. Kako je $E(S)$ podpolugrupa od S, to je $eae \in E(S)$. Uzmimo $x \in V(eae)$. Iz $eae, eaex \in E(S)$ sledi da je $x \in E(S)$, odakle je $exe \in E(S)$, pa kako je $(exea)^2 = exea$, to iz $exe, exea \in E(S)$ dobijamo da je $a \in E(S)$. Prema tome, $E(S)$ je i desno unitaran podskup od S, pa $E(S)$ jeste unitaran podskup od S.

Obrat sledi neposredno. $\square$

Jedan poseban slučaj polugrupa iz Teoreme 9.25. opisuje sledća

Teorema 9.26. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je čvrsta traka grupa;*

(ii) *S je traka grupa i $E(S)$ je unitaran podskup od S;*

(iii) *S je regularan poddirektan proizvod trake i grupe;*

(iv) *$S = [G, \eta, B]$, gde je G grupa i η slika B u skup podgrupa grupe G.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iv)$. Neka je $S = \langle B; G_i, \phi_{i,j}\rangle$, gde je B traka i G_i, $i \in B$, su grupe. Za $i \in B$, neka je e_i jedinica grupe G_i. Prema Teoremi 9.6, u oznakama iz te teoreme, postoji izomorfizam $\varPhi$ polugrupe S na polugrupu S', pri čemu je $S' = [S/\xi, \eta, B]$. Kako je S regularna i S/ξ je homomorfna slika od S, to je i S/ξ regularna. Prema Posledici 2.3, $E(S/\xi) \subseteq \{e\xi^\natural \mid e \in E(S)\} = \{e_i\xi^\natural \mid i \in B\}$. Sa druge strane, za proizvoljne $i, j \in B$ je $e_i\phi_{i,ij} = e_{ij} = e_j\phi_{j,ij}$, odakle je $e_i \,\xi\, e_j$, za sve $i, j \in B$. Prema tome, S/ξ je regularna polugrupa sa tačno jednim idempotentom, pa S/ξ jeste grupa. Uzmimo $i \in B$. Tada je

$$\begin{aligned} u \in i\eta \ &\Leftrightarrow\ (u,i) \in S' \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in S)\ (u,i) = a\varPhi \ \Leftrightarrow\ (\exists a \in S)\ u = a\xi^\natural \ \wedge\ i = a\mu^\natural \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in S)\ u = a\xi^\natural \ \wedge\ a \in G_i \ \Leftrightarrow\ u \in G_i\xi^\natural. \end{aligned}$$

Prema tome, $i\eta = G_i\xi^\natural$, pa je $i\eta$ podgrupa od S/ξ, za svaki $i \in B$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Neka je $S = [G, \eta, B]$, gde je G grupa i η slika B u skup svih podgrupa grupe G. Prema Teoremi 9.6, S je poddirektan proizvod grupe G i trake B. Uzmimo $(a, i) \in S$. Tada je $a \in i\eta$, pa kako je $i\eta$ podgrupa grupe G, to $e, a^{-1} \in i\eta$, gde je e jedinica grupe G i a^{-1} je inverz elementa a u grupi G. Prema tome, $(e, i), (a^{-1}, i) \in S$, pri čemu je $(a^{-1}, i) \in V((a, i))$. Dakle, S je regularna polugruypa.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Neka je $S \subseteq G \times B$ regularan poddirektan proizvod grupe G i trake B. Prema Teoremi 9.25, S je traka grupa. Kako je $E(S) = (\{e\} \times B) \cap S$, gde je e jedinica grupe G, to se neposredno proverava da $E(S)$ jeste levo unitaran podskup od S, pa prema Lemi 9.4, $E(S)$ je unitaran podskup od S.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Neka je S traka B grupa G_i, $i \in B$, i neka je $E(S)$ unitaran podskup od S. Prema Lemi 9.4, $E(S)$ je podpolugrupa od S, pa prema Teoremi 9.19. dobijamo da je $S = [B; G_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}]$, pri čemu su homomorfizmi $\varphi_{i,j}$ i $\psi_{i,j}$ definisani kao u dokazu Teoreme 9.19.

Uzmimo $i, j \in B$ za koje je $i \geq_1 j$, i uzmimo $a, b \in G_i$ tako da je $a\varphi_{i,j} = b\varphi_{i,j}$, tj. da je $ae_j = be_j$. Neka je b^{-1} inverzni element elementa b u grupi G_i. tada je $b^{-1}ae_j = ube_j = e_ie_j = e_{ij}$, pa iz $b^{-1}ae_j, e_j \in E(S)$ dobijamo da je $b^1a \in E(S)$, jer je $E(S)$ unitaran podskup od S. Kako je $b^{-1}a \in G_i$, to je $b^{-1}a = e_i$, odakle je $a = b$. Prema tome, homomorfizam $\varphi_{i,j}$ je injektivan. Na isti način dokazujemo da su i homomorfizmi $\psi_{i,j}$ injektivni. Prema tome, $S = \langle B; G_i, \varphi_{i,j}, \psi_{i,j}\rangle$, odnosno, prema Posledici 9.2, $S = \langle B; G_i, \phi_{i,j}\rangle$. $\square$

Lema 9.5. *Svaka potpuno prosta polugrupa je slabo kancelativna.*

Dokaz. Neka je S potpuno prosta polugrupa. Prema Teoremi 3.8, S je pravougaona traka $I \times \Lambda$ grupa $G_{i\lambda}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Uzmimo $a, b \in S$ tako da je $ax = bx$ i $xa = xb$, za neki $x \in S$. Uzmimo da je $a \in G_{i\lambda}$, $b \in G_{j\mu}$, $x \in G_{k\nu}$, za neke $i, j, k \in I$, $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$. Tada iz $ax = bx$ i $xa = xb$ dobijamo da je $(i, \nu) = (j, \nu)$ i $(k, \lambda) = (k, \mu)$, tj. $i = j$ i $\lambda = \mu$, odakle $a, b \in G_{i\lambda}$. Ako je e jedinica grupe $G_{i\lambda}$, tada je $exe \in G_{i\lambda}$, pa iz

$$a(exe) = aexe = axe = bxe = bexe = b(exe),$$

na osnovu kancelativnosti u grupi $G_{i\lambda}$, dobijamo da je $a = b$. Prema tome, S je slabo kancelativna. $\square$

U ovoj knjizi često je korišćena karakterizacija unija grupa, dokazana Teoremom 2.5, kao polumreže potpuno prostih polugrupa. Odgovor na pitanje kada je ta polumreža jaka daje nam sledeća

Teorema 9.27. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(*i*) *S je normalna traka grupa;*
(*ii*) *S je jaka polumreža potpuno prostih polugrupa;*
(*iii*) *S je potpuno regularan poddirektan proizvod potpuno proste polugrupe i nultih proširenja potpuno prostih polugrupa;*
(*iv*) *S je regularna i $abc \in acS \cap Sca$, za sve $a, b, c \in S$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je S normalna traka B grupa G_i, $i \in B$, i neka je B polumreža Y pravougaonih traka B_α, $\alpha \in Y$. Prema Teoremi 9.21, $S = (Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta})$, pri čemu S_α, $\alpha \in Y$, jesu matrice grupa, tj. potpuno proste polugrupe, pa prema Lemama 9.3. i 9.5, $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Dokazuje se na sličan način kao $(i) \Rightarrow (iii)$. Teoreme 9.24.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je $\{T_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ familija polugrupa takva da postoji element $\alpha_0 \in Y$ tako da je T_{α_0} potpuno prosta polugrupa, i za svaki $\alpha \in Y - \{\alpha_0\}$, je $T_\alpha = S_\alpha \cup 0_\alpha$, gde je S_α potpuno prosta polugrupa i 0_α je nula dodata toj polugrupi, i neka je $S \subseteq \Pi_{\alpha\in Y} T_\alpha$ potpuno regularan poddirektan proizvod te familije. Označimo sa S_{α_0} polugrupu T_{α_0}. Primetimo da za svaki $\alpha \in Y$, T_α jeste unija grupa, pa ćemo za $\alpha \in Y$, sa a_α^{-1} označavati inverz elementa $a_\alpha \in T_\alpha$ u podgrupi od T_α. Pri tome, jasno da je $0_\alpha^{-1} = 0_\alpha$.

Uzmimo $(u_\alpha) \in S$. Kako je S potpuno regularna, tj. unija grupa, to postoji $(x_\alpha) \in S$ tako da je (x_α) inverz od (u_α) u nekoj podgrupi od S, odakle je $(u_\alpha)(x_\alpha) = (x_\alpha)(u_\alpha)$ i $(x_\alpha) \in V((u_\alpha))$. Lako se proverava da je $u_\alpha x_\alpha = x_\alpha u_\alpha$ i $x_\alpha \in V(u_\alpha)$ u T_α, odakle je $x_\alpha = u_\alpha^{-1}$, za svaki $\alpha \in Y$. Prema tome, $(u_\alpha)^{-1} = (u_\alpha^{-1})$.

Uzmimo sada $(a_\alpha), (b_\alpha), (c_\alpha) \in S$. Neka je $\alpha \in Y$. Ako je $\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\} \nsubseteq S_\alpha$, tada je $\alpha \neq \alpha_0$ i

$$a_\alpha b_\alpha c_\alpha = 0_\alpha = a_\alpha c_\alpha b_\alpha c_\alpha (a_\alpha c_\alpha b_\alpha c_\alpha)^{-1}(a_\alpha b_\alpha c_\alpha).$$

Neka je $\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\} \subseteq S_\alpha$, neka je S_α matrica B_α grupa G_i, $i \in B_\alpha$. Tada je jasno da elementi $a_\alpha b_\alpha c_\alpha$ i $a_\alpha c_\alpha b_\alpha c_\alpha$ leže u istoj podgrupi G_i, $i \in B_\alpha$, polugrupe S_α, odakle je

$$a_\alpha b_\alpha c_\alpha = a_\alpha c_\alpha b_\alpha c_\alpha (a_\alpha c_\alpha b_\alpha c_\alpha)^{-1}(a_\alpha b_\alpha c_\alpha).$$

Prema tome,

$$(a_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha) = (a_\alpha)(c_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha)[(a_\alpha)(c_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha)]^{-1}[(a_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha)],$$

pa je $(a_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha) \in (a_\alpha)(c_\alpha)S$. Slično dokazujemo da je $(a_\alpha)(b_\alpha)(c_\alpha) \in S(a_\alpha)(c_\alpha)$. Prema tome, važi (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka važi (iv). Uzmimo $a, b \in S$, $x \in V(a)$, $y \in V(b)$. Tada je $ab = axab \in a^2bS$, $ab = abyb \in Sab^2$, pa prema Teoremi 9.23, S je traka B grupa G_i, $i \in B$. Kako je B homomorfna slika od S, to je $ijk \in ikB \cap Bik$, za sve $i, j, k \in B$, odakle dobijamo da B zadovoljava identitete $yxa = yayxa$ i $axy = axyay$, tj. B je levo polunormalna i desno polunormalna traka, pa prema Teoremi 1.25, B je normalna traka. Prema tome, važi (i). □

Iz prethodne teoreme dobijamo i razne karakterizacije za pravoverne normalne trake grupa.

Teorema 9.28. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je normalna traka grupa i $E(S)$ je podpolugrupa od S;*

(ii) *S je jaka normalna traka grupa;*

(iii) *S je jaka polumreža pravougaonih grupa;*

(iv) *S je kičmeni proizvod normalne trake i polumreže grupa;*

(v) *S je potpuno regularan poddirektan proizvod pravougaone grupe i pravougaonih grupa sa dodatom nulom.*

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iv)$. Sledi prema Teoremi 9.25.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Neka važi (i). Tada prema Teoremi 9.27, S je jaka polumreža Y potpuno prostih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Prema (i), $E(S)$ je podpolugrupa od S_α, za svaki $\alpha \in Y$, pa prema Teoremi 3.6, S je pravougaona grupa.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Neka je $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$, pri čemu je Y polumreža i S_α, $\alpha \in Y$, su pravougaone grupe. Prema Teoremi 9.27, S je normalna traka B grupa G_i, $i \in B$, pri čemu je $B = [Y; B_\alpha, \theta_{\alpha,\beta}]$, i B_α, $\alpha \in Y$, su pravougaone trake. Za $i \in B$, sa e_i označimo jedinicu grupe G_i. Jasno da je $E(S) = \{e_i \mid i \in B\}$. Uzmimo $i, j \in B$, $i \in B_\alpha$, $j \in B_\beta$, $\alpha, \beta \in Y$. Prema Teoremama 9.17. i 9.21. dobijamo da je

$$e_i e_j = (e_i \phi_{\alpha,\alpha\beta})(e_j \phi_{\beta,\alpha\beta}) = e_{i\theta_{\alpha,\alpha\beta}} e_{j\theta_{\beta,\alpha\beta}} = e_{(i\theta_{\alpha,\alpha\beta})(j\theta_{\beta,\alpha\beta})} \in E(S),$$

jer je $E(S_{\alpha\beta}) = \{e_k \mid k \in B_{\alpha\beta}\}$ podpolugrupa od $S_{\alpha\beta}$, prema Teoremi 3.6. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S.

$(iii) \Rightarrow (v)$. Dokazuje se na sličan način kao $(ii) \Rightarrow (iii)$ Teoreme 9.24.

$(v) \Rightarrow (i)$. Ako važi (v), onda prema Teoremi 9.27. dobijamo da S jeste normalna traka grupa. Bez teškoća se dokazuje da $E(S)$ jeste podpolugrupa od S. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $\mathcal{V}$ neki varijetet traka, tj. varijetet koji je odredjen skupom identiteta koji sadrži identitet $x^2 = x$. Tada su sledeći uslovi za regularnu polugrupu S ekvivalentni:

(i) S je poddirektan proizvod trake iz $\mathcal{V}$ i grupe;

(ii) S je poddirektan proizvod traka iz $\mathcal{V}$ i grupa;

(iii) S je traka grupa takva da je odgovarajuća tračna homomorfna slika iz $\mathcal{V}$, i $E(S)$ je unitaran podskup od S.

2. Polugrupa S je polumreža grupa ako i samo ako S jeste unija grupa i svaki levi (desni) ideal od S je ideal.

3. Polugrupa S je polumreža komutativnih grupa ako i samo ako S jeste komutativna regularna polugrupa.

4. Ako je polugrupa S traka grupa i $E(S)$ je podpolugrupa od S, tada se kongruencija ξ definisana u Teoremi 9.7. može izraziti sa:

$$a \,\xi\, b \;\Leftrightarrow\; a = ebe, b = fef,$$

gde su $e, f \in E(S)$ tako da $a \in G_e$, $b \in G_f$.

5. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je regularan poddirektan proizvod pravougaone trake i polumreže grupa;

(ii) S je unija grupa i $E(S)$ je strogo normalna traka;

(iii) S je regularan poddirektan proizvod levo nultih traka, desno nultih traka, grupe i 0-grupa.

6. Neka je L levo nulta traka, R je desno nulta traka i T je polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$. Neka su $\xi : Y \to \mathfrak{S}(L)$ i $\eta : Y \to \mathfrak{S}(R)$ puna antitona preslikavanja i

$$S = \{(l, r, a) \in L \times R \times T \mid a \in G_\alpha,\ \alpha \in Y,\ l \in \alpha\xi,\ r \in \alpha\eta\}.$$

Tada je S regularan poddirektan proizvod od L, R i T.

Obratno, svaki poddirektan proizvod od L, R i T se može ovako konstruisati.

7. Neka je L levo nulta traka, R je desno nulta traka, Y je polumreža i G je grupa. Neka su $\xi : Y \to \mathfrak{S}(L)$, $\eta : Y\mathfrak{S}(R)$ i $\mu : Y \to (G)$ puna antitona preslikavanja i

$$S = \{(l, r, \alpha, a) \in L \times R \times Y \times G \mid l \in \alpha\xi,\ r \in \alpha\eta,\ a \in \alpha\mu\}.$$

Tada je S regularan poddirektan proizvod od L, R, Y i G.

Obratno, svaki poddirektan proizvod od L, R, Y i G se može ovako konstruisati.

8. Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:

(i) S je potpuno prosta;

(ii) S je regularna i slabo kancelativna;

(iii) S je potpuno Arhimedova i slabo kancelativna.

Literatura. Ćirić and Bogdanović [3], Clifford [1], Petrich [13], [15], [18], Schein [4], [8], Yamada [7], [8], [10], [11], [12].

Literatura

J.Ahsan and R.J.Warne

[1] Fully idempotent semirings and semisimple semigroups, *The Int. Conf. on Semigroups and Algebras of computer languages, Qingdao, China*, 1993 (Abstracts).

B.Alimpić

[1] Some congruences on generalized inverse semigroups, *Proc. of the Conf. Algebra and Logic, Zagreb*, 1984.

B.P.Alimpić and D.N.Krgović

[1] Some congruences on regular semigroups, *Proc. Conf. Oberwolfach* 1986, *Lect. Not. Math.* 1320, *Spinger-Verlag*, 1-9.

[2] Completely regular and orthodox congruences on regular semigroups, *Zb. rad. Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 6 (1992), 123-128.

D.Allen

[1] A generalization of the Rees theorem to a class of regular semigroups, *Semigroup Forum*, 2 (1971), 321-331.

А.Я.Айзенштат

[1] О перестановочньх тождествах, *Совр. Алгебра*, Л., Т3, 1975, 3-12.

O.Anderson

[1] Ein Bericht uber Structur abstrakter Halbgruppen, *Thesis, Hamburg*, 1952.

L.W.Andersen, R.P.Hunter and R.J.Coch

[1] Some results on stability in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 (1965), 521-529.

M.I.Arbib (editor)

[1] *Algebraic theory of machines, languages and semigroups*, Academic Press, New York, 1968.

B.D.Arendt and C.J.Stuth

[1] On the structure of commutative periodic semigroups, *Pacific J. Math.*, 35 (1970), 1-6.

[2] On partial homomorphisms of semigroups, *Pacific J. Math.*, 35 (1970), 7-9.

R.Arens and I.Kaplansky

[1] Topological representation of algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948), 457-481.

J.E.Ault
[1] Semigroups with midunits, *Semigroup Forum*, 6 (1973), 346-351.
[2] Semigroups with midunits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190 (1974), 375-384.

G.Azumaya
[1] Strongly π-regular rings, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 13 (1954), 34-39.

I.Babcsányi
[1] On (m,n)-commutative semigroups, *PU.M.A. Ser. A, Vol.* 2, *№* 3-4 (1991), 175-180.

I.Babcsányi and A.Nagy
[1] On a problem of $n_{(2)}$-permutable semigroups, *Semigroup Forum*, (to appear).

G.L.Bailes
[1] Right inverse semigroups, *J. Algebra*, 26 (1973), 492-507.

V.A.Baranskii and A.N.Trachtman
[1] Halfisomorphisms of matrix bands of cancellative semigroups, *Mat. Zap. Ural. Gos. Univ.*, 6 (1968), 1-12 (in Russian).
[2] Lattice isomorphisms of matrix bands of periodic commutative cancellative semigroups, *Mat. Zap. Ural. Gos. Univ.*, 7 (1969), 3-22 (in Russian).

Y. Bingjun
[1] *The idempotent method in the algebraic theory of semigroups*, Thesis, Lanzhou Univ., China, 1988.
[2] An extension of a theorem for regular semigroups to quasiregular semigroups, *Acta. Math. Sinica* 33 (1990), *№* 6, 764-768 (in Chinese).

G. Birkhoff
[1] *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. *№* 25, Providence, 1967, (3rd. edition).

А.П.Бирюков
[7] Минимальные некомутативные многообразия полугрупп, *Сибир. Мат. Журн.* 1976, Т 17, *№* 3, 677-681.

B.Biró, E.W.Kiss and P.P.Pálfy
[1] On the congruence extension property, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* 29 (1982), 129-151.

S.Bogdanović
[1] A note on strongly reversible semiprimary semigroups, *Publ. Inst. Math.* 28 (42) (1980), 19-23.
[2] r-semigrupe, *Zbornik radova PMF Novi Sad*, 10 (1980), 149-152.
[3] Q_r-semigrops, *Publ. Inst. Math.* 29 (43) (1981), 15-21.
[4] Bands of power joined semigroups, *Acta Sci. Math.* 44 (1982), 3-4.
[5] Some characterizations of bands of power joined semigroups, *Algebraic conference* 1981, *Novi Sad*, 121-125.
[6] O slabo komutativnoj polugrupi, *Mat. Vesnik* 5 (18) (33) (1981), 145-148.
[7] Semigroups in which some bi-ideal is a group, *Zb. rad. PMF Novi Sad*, 11 (1981), 261-266.

[8] On a problem of J.D.Kečkić concerning semigroup functional equations, *Proc. of the Symp. n-ary structures*, Skopje (1982), 17-19.
[9] Semigroups in which every proper left ideal is a left group, *Notes of semigroups* VIII, 1982-4, 8-11, Budapest.
[10] Bands of periodic power joined semigroups, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 10 (1982), 667-670.
[11] Power regular semigroups, *Zb. rad. PMF Novi Sad*, 12 (1982), 418-428.
[12] Semigroups whose proper ideals are Archimedean semigroups, *Zb. rad. PMF Novi Sad*, 13 (1983), 289-296.
[13] Semigroups of Galbiati-Veronesi, *Algebra and Logic, Zagreb*, 1984, 9-20.
[14] Inflation of a union of groups, *Mat. Vesnik*, 37 (1985), 351-355.
[15] Right π-inverse semigroups, *Zbornik radova PMF Novi Sad*, 14 (2) (1984), 187-195.
[16] σ-inverse semigroups, *Zbornik radova PMF Novi Sad*, 14 (2) (1984), 197-200.
[17] *Semigroups with a system of subsemigroups*, Inst. of Math. Novi Sad, 1985.
[18] Semigroups of Galbiati-Veronesi II, *Facta Univ. Niš, Ser. Math. Inform.* 2 (1987), 61-66.
[19] Generalized $\mathcal{U}$-semigroups, *Zbornik radova Fil. fak. Niš*, 2 (1988), 3-5.
[20] Nil-extensions of a completely regular semigroup, *Algebra and Logic, Sarajevo*, 1987, *Univ. N.Sad* 1989, 7-15.

S.Bogdanović and M.Ćirić

[1] Bands of monoids, *Matem. bilten* 9-10 (XXXV-XXXVI), (1985-1986), Skopje, 57-61, (1989).
[2] Semigroups of Galbiati-Veronesi III (Semilattice of nil-extensions of left and right groups), *Facta Univ. Niš, Ser. Math. Inform.* 4 (1989), 1-14.
[3] $\mathcal{U}_{n+1}$-semigroups, *Contributions MANU* XI 1-2, 1990, Skopje 1991, 9-23.
[4] Tight semigroups, *Publ. Inst. Math.* 50 (64), 1991, 71-84.
[5] A nil-extension of a regular semigroup, *Glasnik matematički*, 25 (2), 1991, 3-23.
[6] Semigroups in which the radical of every ideal is a subsemigroup, *Zbornik radova Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 6 (1992), 129-135.
[7] Right π-inverse semigroups and rings, *Zbornik radova Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 6 (1992), 137-140.
[8] Retractive nil-extensions of regular semigroups I, *Proc. Japan Acad.*, 68 (5), Ser. A (1992), 115-117.
[9] Retractive nil-extensions of regular semigroups II, *Proc. Japan Acad.*, 68 (6), Ser. A (1992), 126-130.
[10] Primitive π-regular semigroups, *Proc. Japan. Acad.* 68, Ser A, 10 (1992), 334-337.
[11] Semilattices of Archimedean semigroups and (completely) π-regular semigroups I (A survey), *Zb. rad. Fil. fak. (Niš), Ser. Mat.* 7 (1993), 1-40.
[12] Semigroups of Galbiati-Veronesi IV (Bands of nil-extensions of groups), *Facta Univ. (Niš), Ser. Math. Inform.* (u štampi).
[13] Chains of Archimedean semigroups (Semiprimary semigroups), (u štampi).
[14] Retractive nil-extensions of bands of groups, (u štampi).

[15] Orthogonal sums of semigroups, (u štampi).
[16] Semilattices of nil-extensions of rectangular groups, (u štampi).
[17] Decompositions of semigroups with zero, (u štampi).

S.Bogdanović and S.Gilezan
[1] Semigroups with completely simple kernel, *Zb. rad. PMF Novi Sad*, 12 (1982), 429-445.

S.Bogdanović, P.Kržovski, P.Protić and B.Trpenovski
[1] Bi- and quasi-ideal semigroups with n-property, *Third algebraic conference, Beograd*, 3-4, 1982, 45-50.

S.Bogdanović and S.Malinović
[1] (m, n)-two-sided pure semigroups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 35, 2 (1986), 219-225.
[2] Semigroups whose proper subsemigroups are (right) t-Archimedean, *Algebra and Logic, Cetinje*, 1986, Novi Sad, 1988, 1-14.

S.Bogdanović and S.Milić
[1] (m, n)-ideal semigroups, *Proc. of the Third. Algebraic conf. Beograd*, 1982, 35-39.
[2] A nil-extension of a completely simple semigroup, *Publ. Inst. Math.* 36 (50), 1984, 45-50.
[3] Inflations of semigroups, *Publ. Inst. Math.* 41 (55), 1987, 63-73.

S.Bogdanović and B.Stamenković
[1] Semigroups in which S^{n+1} is a semilattice of right groups (Inflations of a semilattice of right groups), *Note di matematica* 8 (1988), 155-172.

M.Božinović and P.Protić
[1] Some congruences on π-regular semigroups II, *Proc. of the conf. Algebra and Logic, Maribor*, 1989, 21-28.

J.Bosák
[1] On subsemigroups of semigroups, *Mat. Fyz. Časopis*, 14 (1964), 289-296.

I.E.Burmistrovič
[1] Commutative bands of cancellative semigroups, *Sibir. Mat. Ž.*, 6 (1965), 284-299, (in Russian).

R.H.Bruck
[1] *A survey of binary systems*, Springer, Berlin, 1958.

S.Burris and H.P.Sankappanavar
[1] *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York Inc., 1981.

K.S.Carman
[1] *Semigroup ideals*, Thesis, Univ. of Tennessee, 1949.

F.Catino
[1] On bi-ideals in eventually regular semigroups, *Riv. Mat. Pura Appl.*, 4 (1989), 89-92.

M.Chacron and G.Thierrin
[1] σ-reflexive semigroups and rings, *Canad. Math. Bull.*, 15 (2) (1972), 185-188.

J.L.Chrislock

[1] *The structure of Archimedean semigroups*, Thesis, Univ. of California, Davis, 1966.

[2] Semigroups whose regular representatin is a right group, *Amer. Math. Monthly*, 74 (1967), 1097-1100.

[3] On medial semigroups, *Journal of Algebra*, 12 (1969), 1-9.

[4] A certain class of identities on semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 21 (1969), 189-190.

J.L.Chrislock and T.Tamura

[1] Notes on subdirect products of semigroups and rectangular bands, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969), 511-514.

P.Chu, Y.Guo and X.Ren

[1] The semilattice (matrix)-matrix (semilattice) decomposition of the quasi-completely orthodox semigroups, *Chinese, J. of Contemporary Math.* v. 10, *N*º 4 (1989), 425-438.

P.Chu and G.Yang

[1] P π-congruences on P π-regular semigroups, (to appear).

[2] P π-regular semigroups, (to appear).

M.Ćirić

[1] $C-(m,n)$-ideal semigroups, *Proc. of the conference "Algebra and Logic", Cetinje* 1986, *Univ. Novi Sad* 1987, 23-32.

M.Ćirić and S.Bogdanović

[1] Rédei's band of periodic π-groups, *Zbornik radova Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 3 (1989), 31-42.

[2] Rings whose multiplicative semigroups are nil-extensions of a union of groups, *PU.M.A. Ser. A*, Vol. 1 (1990), *N*º 3-4, 217-234.

[3] Sturdy bands of semigroups, *Collect. Math. Barcelona*, 41 (3) (1990), 189-195.

[4] Inflations of a band of monoids, *Zb. rad. Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 6 (1992), 141-149.

[5] A note on π-regular rings, *PU.M.A. Ser. A*, Vol. 3 (1992), *N*º 1-2, 39-42.

[6] Decompositions of semigroups induced by identities, *Semigroup Forum* (u štampi).

[7] Nil-extensions of unions of groups induced by identities, *Semigroup Forum* (u štampi).

[8] Normal band compositions of semigroups, *Proc Japan Acad.*, (u štampi).

[9] Normal band compositions of semigroups II, *Proc Japan Acad.*, (u štampi).

[10] Spined products of some semigroups, *Proc Japan Acad.*, (u štampi).

[11] Semilattice decompositions of semigroups, (u štampi).

[12] Identities over the twoelement alphabet, (u štampi).

[13] Direct sums of nil-rings and of rings with Clifford's multiplicative semigroups, (u štampi).

G.T.Clarke

[1] On completely regular semigroups varieties and the amalgamation property, *Semigroups, New York* 1980, 159-165.

[2] Commutative semigroup varieties with amalgamation property, *J. Australian Math. Soc.* 1981, V. A 30, 278-283.

[3] Semigroup varieties of inflations of union of groups, *Semigroup Forum* 23 (1981), $N^{\underline{o}}$ 4, 311-319.

[4] Semigroup varieties with the amalgamation property, *J. Algebra* 30 (1983), $N^{\underline{o}}$ 1, 60-72.

A.H.Clifford

[1] Semigroups admitting relative inverses, *Annals of Math.* (2) 42 (1941), 1037-1049.

[2] Matrix representations of completely simple semigroups, *Amer. J. Math.* 64 (1942), 327-342.

[3] Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.* 70 (1948), 521-526.

[4] Semigroups without nilpotent ideals, *Amer. J. Math.* 71 (1949), 833-844.

[5] Extensions of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 165-173.

[6] Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 499-504.

[7] Review of M.Yamada, *Math. Reviews*, 17 (1956), 584.

A.H.Clifford and D.D.Miller

[1] Semigroups having zeroid elements, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 117-125.

A.H.Clifford and G.B.Preston

[1] *The algebraic theory of semigroups* I, Amer. Math. Soc. 1961.

[2] *The algebraic theory of semigroups* II, Amer. Math. Soc. 1967.

P.M.Cohn

[1] *Universal algebra*, Reidel, 1965.

R.Croisot

[1] Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), 70 (1953), 361-379.

G.Čupona

[1] Reducible semigroups, *God. Zb. Fil. fak. Skopje*, 11 (1958), $N^{\underline{o}}$ 2, 19-27, (in Macedonian).

[2] On some compatible collections of semigroups, *God. Zb. Fil. fak. Skopje*, 14 (1963), 5-10.

[3] On completely simple semigroups, *Glasnik Mat. Fiz. Astr.*, 18 (1963), 159-164.

[4] On semigroups S in which each proper subset Sx is a group, *Glasnik Mat. Fiz. Astr.*, 18 (1963), 165-168.

[5] Semigroups in which some left ideal is a group, *God. Zb. PMF Skopje*, 14 (1963), 15-17.

Г. Чупона и Б. Трпеновски

[1] *Предавања по алгебра* II, Скопје, 1973.

D.M.Davenport

[1] On power commutative semigroups, *Semigroup Forum*, 44 (1992), 9-20.

J.Dieudonné

[1] Sur le socle d'un anneaux et les anneaux simple infinis, *Bull. Soc. Math. France*, 70 (1942), 46-75.

R.Dickinson

[1] On right zero union of commutative semigroups, *Pacific J. Math.*, 42 (1972), 355-364.

M.P.Dorofeeva

[1] Hereditary and semi-hereditary monoids, *Semigroup Forum*, 4 (1972), 301-311.

M.P.Dorofeeva, V.L.Mannepalli and M.Satyanarayana

[1] Prüfer and Dedekind monoids, *Semigroup Forum*, 9 (1975), 294-309.

M.P.Drazin

[1] Pseudoinverses in associative rings and semigroups, *Amer. Math. Mon.*, 65 (1958), 506-514.

[2] A partial order in completely regular semigroups, *J. Algebra*, 98 (1986), 362-374.

P.Dubreil

[1] Contibution a la theorie des demi-groupes, *Mem. Acad. Sci. Instr. France.*, (2) 63, *N*º 3 (1941), 1-52.

M.L.Dubreil-Jacotin, L.Lesieur et R.Croisot

[1] *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébraiques ordonnées et des treillis géometriques*, Gauthier-Villars, 1953.

D.Easdown

[1] A new proof that regular biordered sets form regular semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* A 96 (1984),

[2] Biordered sets of eventually regular semigroups, *Proc. London. Math. Soc.* (3) 49 (1984), 483-506.

D.Easdown and T.E.Hall

[1] Reconstructing some idempotent-generated semigroups from their biordered sets, *Semigroup Forum*

А.И.Евсеев

[1] Полугруппы с некоторыми степенными тождественными включенями, *Алг. системй с одним действием и отношением, ЛГПИ*, 1985, 21-32.

P.Edwards

[1] Eventually regular semigroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* 28 (1983), 23-28.

[2] Fundamental semigroups,it Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 99 (1985), 313-317.

[3] On the lattice of congruences on an eventually regular semigroups, *J. Austral. Math. Soc.* A 38 (1985), 281-286.

[4] Eventyally regular semigroups that are group-bound, *Bull. Austral. Math. Soc.* 34 (1986), 127-132.

[5] Congruences and Green's relations on eventually regular semigroups, *J. Austral. Math. Soc.* A 43 (1987), 64-69.

[6] Maximing a congruence with respect to its pertition of idempotents, *Semigroup Forum* 39 (1989), 257-262.

S.Eilenberg

[1] *Automata, languages and Machines*, Vol. A,B, Academic Press, New York, 1976.

A.El-Qallali

[1] $\mathcal{L}^*$-unipotent semigroups, *J. Pure Appl. Algebra* 62 (1989), 19-33.

[2] Left regular bands of groups of left quotients, *Glasgow Math. J.* 33 (1991), 29-40.

A.El-Qallali and J.B.Fountain

[1] Idempotent-connected abundant semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* sect. A, (1981), 79-90.

[2] Quasi-adequate semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* sect. A, (1981), 91-99.

E.H.Feller

[1] On a class of right hereditary semigroups, *Canad. Math. Bull.* 17 (1975), 667-670.

V.A.Fortunatov

[1] Perfect semigroups decomposable in a semilattice of rectangular groups, *Studies in Algebra, Saratov Univ. Press*, 2 (1970), 67-78 (in Russian).

[2] Perfect semigroups, *Izv. Vuzov. Mat.* 3 (1972), 80-90 (in Russian).

G.Freiman and B.M.Schein

[1] Group and semigroup theoretic considerations inspired by inverse problems in the additive number theory, *Proc. Oberwolfach conf.Lectures Notes in Math.* Vol. 1320, 121-140.

J.Fountain

[1] Right PP monoids with central idempotents, *Semigroup Forum* 13 (1977), 229-237.

[2] Adequate semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 22 (1979), 113-125.

[3] Abundant semigroups, *Proc. London Math. Soc.* (3) 44 (1982), 103-129.

J.L.Galbiati e M.L.Veronesi

[1] Sui semigruppi che sono un band di t-semigruppi, *Istituto Lombardo* (*Rend. Sc.*) (A) 114 (1980), 217-234.

[2] Sui semigruppi quasi regolari, *Istituto Lombardo* (*Rend. Sc.*) (A) 116 (1982), 1-11.

[3] Semigruppi quasi regolari, *Atti del convegno: Teoria dei semigruppi, Siena* 1982, 91-95, (Ed. F.Migliorini).

[4] Sui semigruppi quasi completamente inversi.

[5] On quasi completely regular semigroups, *Semigroup Forum*, 29 (1984), 271-275.

J.I.Garcia

[1] The congruence extension property for algebraic semigroups, *Semigroup Forum* 43 (1991), 1-18.

J.Gerhard

[1] Semigroups with idempotent power II, *Semigroup Forum* 14 (1977), *N*º 4, 375-388.

L.M.Gluskin

[1] On separative semigroups, *Izv. Vuzov. Mat.* 9 (112) (1971), 30-39, (in Russian).

L.M.Gluskin and O.Steinfeld

[1] Rings (semigroups) containing minimal (0-minimal) right and left ideals, *Publ. Mat. Debrecen.* 1978.

S.M.Goberstein

[1] Perfect semisimple inverse semigroups, *Semigroup Forum* 45 (1992), 395-397.

Э.А.Голубов и М.В.Сапир

[1] Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 11 (1982), 21-29.

R.A.Good and D.R.Hughes

[1] Associated groups for a semigroup, *Bull. Amer. Math. Soc.* 58 (1952), 624-625.

V.Gould

[1] Clifford semigroups of left quotients, *Glasgow Math. J.* 28 (1986), 181-191.

G.Grätzer

[1] *Universal algebra*, D. van Nostrand Comp. 1968.

J.A.Green

[1] On the structure of semigroups, *Ann. of Math.* 54 (1951), 163-172.

H.B.Grimble

[1] *Prime ideals in semigroups*, Thesis, Univ. of Tennessee, 1950.

Y.Guo, X.M.Ren and K.P.Shum

[1] A new structure on left C-semigroups, *Advance in Math.* 2 (1993).

[2] The structure of left C-*rpp* semigroups, *Semigroup Forum* (to appear).

[3] C-quasiregular semigroups (private communication).

T.E.Hall

[1] Primitive homomorphic images of semigroups. *J. Austral. Math. Soc.* 8 (1968), 350-354.

[2] On the natural order of $\mathcal{J}$-class and of idempotents in a regular semigroup, *Glasgow Math. J.* 11 (1970), 167-168.

[3] Congruences and Green's relations on regular semigroups, *Glasgow Math. J.* 13 (1972), 167-175.

[4] On regular semigroups, *J. Algebra* 24 (1973), 1-24.

[5] Identities for existence varieties of regular semigroups, Bull. Austral. Math. Soc. 40 (1989), 59-77.

T.E.Hall and W.D.Munn

[1] Semigroups satisfying minimal conditions II, *Glasgow Math. J.* 20 (1979), 133-140.

S.Hanumantha Rao and P.Lakshmi

[1] Group congruences on eventyally regular semigroup, *J. Austral. Math. Soc.* 45 (1988), 320-325.

D.W.Hardy and Y.Tirasupa

[1] Semilattice of proper inverse semigroups, *Semigroup Forum* 13 (1976), 29-36.

K.S.Harinath

[1] On a generalization of inverse semigroups, *Indian J. pure appl. Math.* 8 (1977), 166-178.

[2] Some results on K-regular semigroups, *Indian J. pure appl. Math.* 10 (11) (1979), 1422-1431.

H.Hashimoto

[1] On a generalization of groups, *Proc. Japan Acad.* 30 (1954), 548-549.

[2] On the structure of semigroup containing its kernel, *Mem. Fac. Lib. Arts. Ed. Yamanashi Univ.* 9 (1958), 120-125.

E.Hewit and H.S.Zuckerman

[1] The l_1-algebra of a commutative semigroup, *Trans. Amer. Math. Soc.* 83 (1956), 70-97.

J.B.Hickey

[1] Semigroups under a sandwich operation, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 26 (1983), 371-382.

P.M.Higgins

[1] *Techniques of semigroup theory*, Oxford Univ. Press. 1992.

C.V.Hinkle, Jr.

[1] Generalized semigroups of quotients, *Trans. Amer. Math. Soc.* 183 (1973), 87-117.

J.W.Hogan

[1] Bisimple semigroups with idempotents well-ordered, *Semigroup Forum* 6 (1973), 298-316.

J.M.Howie

[1] *An introduction to semigroup theory*, Acad. Press, New York, 1976.

[2] Translation semigroups, *Proc. of the SEAMS Conf. on Ordered structures and Algebra of comp. languages, Hong Kong* 1991, 40-49.

J.M.Howie and G.Lallement

[1] Certain fundamental congruences on a regular semigroup, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 7 (1966), 145-149.

R.Hrmova

[1] Polugrupy v ktorÿh každÿ lÿvÿ vlastnÿ ideăl je grupu, *Mat. Fiz. Časopis*, 11 (1961), 75-80.

K.Iséki

[1] Contibution to the theory of semigroups, I, *Proc. Japan Acad.*, 32 (1956), 174-175.

[2] A characterization of regular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, 32 (1956), 676-677.

[3] Contibution to the theory of semigroups, IV, *Proc. Japan Acad.*, 32 (1956), 430-435.

J.Ivan

[1] On the direct product of semigroups, *Mat. Fiz. Časopis Slovensk. Akad. Vied.*, 3 (1953), 57-66.

[2] On the decomposition of simple semigroups into a direct product, *Mat. Fiz. Časopis Slovensk. Akad. Vied.*, 4 (1954), 181-202.

P.R.Jones

[1] On congruence lattices of regular semigroups, *J. Algebra* 82 (1983), 18-39.

[2] On the congruence extension property for semigroups, (Preprint).

C.S.Johnson, Jr. and F.R.McMorris

[1] Retractions and S-endomorphisms, *Semigroup Forum* 9 (1974), 84-87.

H.Jürgensen, F.Migliorini and J.Szép

[1] *Semigroups*, Akad. Kiadó, Budapest, 1991.

I.Kaplansky

[1] Topological representation of algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 62-75.

K.M.Kapp

[1] Green's relations and quasi-ideals, *Czeck. Math. J.*, 19 (94) (1969), 80-85.

K.Kapp and H.Schneider

[1] *Completely 0-simple semigroups*, Benjamin, New York, 1969.

A.M.Kaufman

[1] Successively-annihilating sums of associative systems, *Uč. Zap. Leningrad. Gos. Ped. Inst.*, 86 (1949), 145-165 (in Russian).

N.Kehayopulu

[1] On weakly commutative poe-semigroups, *Semigroup Forum*, 34 (1987), 367-370.

M.Kilp

[1] Commutative monoids all of whose principal ideals are projective, *Semigroup Forum*, 6 (1973), 334-339.

N.Kimura

[1] Maximal subgroups of a semigroup, *Kodai Math. Sem. Rep.* 3 (1954), 85-88.

[2] The structure of idempotent semigroups I, *Pacific. J. Math.* 8 (1958), 257-275.

N.Kimura, T.Tamura and R.Merkel

[1] Semigroups in which all subsemigroups are left ideals, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 52-62.

N.Kimura and Yen-Shung Tsai

[1] On power cancellative Archimedean semigroups, *Proc. Japan. Acad.* 48 (1972), 553-554.

E.W.Kiss, L.Márki,P.Pröhle and W.Tholen

[1] Categorical algebraic properties. A compendium of amalgamation, congruence extension, epimorphisms, resudual smallness, and injectivity, *Studia Sci. Math. Hungar.* 18 (1983), 79-141.

J.Kist

[1] Minimal prime ideals in commutative semigroups, *Proc. London Math. Soc.* (3) 13 (1963), 31-50.

A.Krapež

[1] Some nonaxiomatizable classes of semigroups, *Algebraic conf. Novi Sad,* 1981, 101-105.

D.N.Krgović

[1] On 0-minimal bi-ideals of semigroups, *Publ. Inst. Math.* 27 (41) (1980), 135-137.

[2] On bi-ideals in semigroups, *Algebraic conf. Skopje,* 1980, 63-69.

[3] On 0-minimal $(0,2)$-bi-ideals of semigroups, *Publ. Inst. Math.* 31 (45) (1982), 103-107.

В.М.Кривенко

[1] Полугруппы, в которых каждое подмножество является трансверсалом, *Бцецоюзн. алг. симп. Гомель*, 1975, 221-222.

[2] Полугруппы, в которых каждая 2-порожденная подполугруппа является трансверсалом, *Изв. Вузов. Мат.*, 10 (197) (1978), 102-104.

O.B.Kozhevnikov

[1] On union of Brandt semigroups, *Semigroup studies of mappings, Interuniv. Collect. Sci. Works, Leningrad*, 1989, 30-33 (in Russian).

K.Khrohn, J.Rhodes and B.Tilson

[1] *Lectures on finite semigroups* I,II, Univ. of California, Berkeley, 1967.

W.Krull

[1] Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Ann.* 101 (1929), 729-744.

P.Kržovski

[1] On a class of normal semigroups, *Algebraic conf. Skopje,* 1980, 121-124.

Dj.Kurepa

[1] *Viša algebra* I, II, 3. izdanje, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1979.

N.Kuroki

[1] T^*-pure Archimedean semigroups, *Comm. Math. Univ. St. Pauli* 31 (1982), 115-128.

[2] On B^*-pure semigroups, *Acta Math. Hung.* 43 (3-4) (1984), 295-298.

S.Lajos

[1] Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Matrh.*, 22 (1961), 217-222.

[2] Theorems on $(1,1)$-ideals in semigroups, *Dept. of Math. K.Marx Univ. Econ. Budapest*, 1972, 1-19.

[3] Theorems on $(1,1)$-ideals in semigroups II, *Dept. of Math. K.Marx Univ. Econ. Budapest*, 1974, 1-17.

[4] Fibonacci characterizations and (m,n)-commutativity in semigroup theory, *PU.M.A. Ser. A, Vol.* 1. 59-65.
[5] Notes on externally commutative semigroups, *PU.M.A. Ser. A,* 2 (1991), № 1-2, 67-72.
[6] Some remarks on $(2,3)$-commutative semigroups, *Mat. Japonica* 37, № 2 (1992), 201-204.
[7] Notes on $(1,3)$-commutative semigroups, *Soochow J. of Math.* Vol. 19, № 1 (1993), 43-51.

H.Lal
[1] Quasi-commutative primary semigroups, *Mat. vesnik* 12 (27), 1975, 271-278.

G.Lallement
[1] Congruences et équivalences de Green sur un demi-groupe régulier, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A, 262 (1966), 613-616.
[2] Demi-groupes réguliers, *Ann. Mat. Pure Appl.* (4) 77 (1967), 47-129.
[3] *Semigroups and combinatorial applications*, J.Wiley & Sons, New York, 1979.
[4] On ideal extensions of completely simple semigroups, *Semigroup Forum* 24 (1982), 223-230.

G.Lallement and M.Petrich
[1] Some results concerning completely 0-simple semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), 777-778.
[2] Décomposition I-matricielles d'une demi-groupe, *J. Math. Pures Appl.* 45 (1966), 67-117.
[3] A generalization of the Rees theorem in semigroups, *Acta Sci. Math.* 30 (1969), 113-132.
[4] Extensions of a Brandt semigroups by another, *Canad. J. Math.* 22 (1970), 974-983.

J.G.LaTore
[1] A characterization of uniquely divisible commutative semigroups, *Pacific J. Math.* 18 (1966), 57-60.

Lee Sin-Min
[1] Rings and semigroups which satisfy the identity $(xy)^n = xy = x^n y^n$, *Nanta Math.* 6 (1) (1973), 21-28.

R.Levin
[1] On commutative nonpotent Archimedean semigroups, *Pacific J. Math.* 27 (1963), 365-371.

R.Levin and T.Tamura
[1] Notes on commutative power joined semigroups, *Pacific J. Math.* 35 (1970), 673-679.

Е.С.Ляпин
[1] Нормальные комплексы ассоциативных систем, *Изв. АН СССР*, 14 (1950), 179-192.
[2] Полупростые коммутативные ассоциативные системы, *Изв. АН СССР*, 14 (1950), 367-380.

[3] *Полугруппы*, Физматгиз, Москва, 1960.

[4] Тождества последовалельхо аннулирующих связок полугрупп, *Изв. Вузов.*, 1 (200) (1979), 38-45.

[5] Semigroups, all subset of which are ternary closed, *Algebraic operations and orderings, Interuniv. Collect. Sci. Works, Leningrad*, 1988, 82-83 (in Russian).

Е.С.Ляпин и А.Е.Евсеев

[1] Полугруппы, ы которых все подполугруппы единично идеальнные, *Изв. Вузов. Мат.*, 10 (101) (1970), 44-48.

J.Luh

[1] On the concept of radical of semigroup having kernel, *Portugaliae Math.* 19 (1960), 189-198.

A.Lopez, Jr.

[1] The maximal right quotient semigroup of a strong semilattice of semigroups, *Pacific J. Math.* 71 (2) (1977), 477-485.

R.Sz.Madarász i S.Crvenković

[1] *Relacione algebre*, Mat. Inst. Beograd, 1992.

B.L.Madison, T.K.Mukherjee and M.K.Sen

[1] Periodic properties of groupbound semigroups, *Semigroup Forum* 22 (1981), 225-234.

[2] Periodic properties of groupbound semigroups II, *Semigroup Forum* 26 (1983), 229-236.

T.Malinović

[1] Semigroups whose subsemigroups are partially simple, *Proc. of the Conf. Algebra and Logic, Zagreb*, 1894, 95-103.

[2] Polugrupe u kojima je svaki pravi desni ideal regularan, *Mat. vesnik* 36 (1984), 21-34.

А.И.Мальцев

[1] Об умножении классов алгебраических систем, *Сиб. Матем. Журн., Т.* 8, 2, 1967, 346-365.

[2] *Алгебраические системы*, "Наука", Москва, 1970.

V.L.Mannepalli and C.S.H.Nagore

[1] Generalized commutative semigroups, *Semigroup Forum* 17 (1979), 65-73.

L.Márki and O.Steinfeld

[1] A generalization of Green's relations in semigroups, *Semigroup Forum* 7 (1974), 74-85.

Г.И.Машевицкий

[1] Тождества в полугруппах Брандта, *Полугруппов. многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л.* 1979, 126-137.

D.G.Mead and T.Tamura

[1] Semigroups satisfying $xy^m = yx^m = (xy^m)^n$, *Proc. Japan Acad.* 44 (1968), 779-781.

I.L.Mel'nichuk

[1] Semigroups with n-closed subsets, *Semigroup Forum* 39 (1989), 105-108.

I.I.Melnik

[1] A certain family of varieties of semigroups, *Izv. Vuzov.* 12 (115) (1971), 103-108 (in Russian).

D.B.McAlister

[1] Characters on commutative semigroups, *Quaterly J. Math. Oxford, Ser.* 2, 19 (1968), 141-157.

D.B.McAlister and L.O'Carroll

[1] Finitely generated commutative semigroups, *Glasgow Math. J.* 11 (1970), 134-151.

S.Milić

[1] *Elementi algebre*, Inst. Mat. Novi Sad, 1984.

[2] *Elementi matematičke logike i teorije skupova*, Beograd, 1991.

S.Milić and S.Crvenković

[1] Proper subsemigroups of a semigroup, *Algebraic conf. Novi Sad*, 1981, 149-152.

S.Milić and V.Pavlović

[1] Semigroups in which some ideal is a completely simple semigroup, *Publ. Inst. Math.* 30 (44) (1982), 123-130.

D.W.Miller

[1] Some aspects of Green's relations on a periodic semigroups, *Czech. Math. J.* 33 (108), 1983, 537-544.

D.D.Miller and A.H.Clifford

[1] Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 82 (1956), 270-280.

H.Mitsch

[1] A natural partial order for semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 97 (1986), 384-388.

[2] Subdirect products of E-inversive semigroups, *J. Austral. Math. Soc. Ser A* 48 (1990), 66-78.

W.D.Munn

[1] *Semigroups and their algebra*, Thesis, Cambridge Univ., 1955.

[2] Matrix representations of semigroups, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 53 (1957), 5-12.

[3] Pseudoinverses in semigroups, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 57 (1961), 247-250.

N.P.Mukherjee

[1] Quasicommutative semigroups I, *Czech. Math. J.* 22 (97) (1972), 449-453.

C.S.H.Nagore

[1] Quasicommutative Q-semigroups, *Semigroup Forum* 15 (1978), 189-193.

A.Nagy

[1] The least separative congruence on a weakly commutative semigroup, *Czech. Math. J.* 32 (107) (1982), 630-632.

[2] Semigroups whose proper twosided ideals are power joined, *Semigroup Forum* 25 (1982), 325-329.

[3] Weakly exponential semigroups, *Semigroup Forum* 28 (1984), 291-302.

[4] Band decompositions of weakly exponential semigroups, *Semigroup Forum* 28 (1984), 303-312.

[5] WE-m-semigroups, *Semigroup Forum* 32 (1985), 241-250.

[6] On the structure of (m, n)-commutative semigroups, *Semigroup Forum* 45 (1992), 183-190.

[7] Semilattice decomposition of $n_{(2)}$-permutable semigroups, *Semigroup Forum* (to appear).

K.S.S.Nambooripad

[1] *Structure of regular semigroups* I, Mem. Amer. Math. Soc., *N*º 224, 1979.

J.von Neumann

[1] On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 22 (1936), 707-713.

T.Nordahl

[1] Commutative semigroups whose proper subsemigroups are power joined, *Semigroup Forum* 6 (1973), 35-41.

[2] Semigroup satisfying $(xy)^m = x^m y^m$, *Semigroup Forum* 8 (1974), 332-346.

[3] Bands of power joined semigroups, *Semigroup Forum* 12 (1976), 299-311.

K.Numakura

[1] Note on the structure of commutative semigroups, *Proc. Japan. Acad.* 30 (1954), 263-265.

L.O'Carroll

[1] Counterexamples in stable semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 146 (1969), 337-386.

L.O'Carroll and B.M.Schein

[1] On exclusive semigroups, *Semigroup Forum* 3 (1972), 338-348.

K.Osondu

[1] Semilattices of left reversible semigroups, *Semigroup Forum* 17 (1979), 139-152.

[2] Universal groups on semilattices of reversible semigroups, *PU.M.A., Ser A, Vol.* 2 *N*º 1-2 (1991), 127-133.

F.Pastijn

[1] On Schein's structure theorem on proper bands of monoids, *Teor. Polugrupp. Prilozh.* 5 (1985), 82-86 (in Russian).

J.Pelikan

[1] On semigroups in which products are equal to one of the factors, *Period. Math. Hung.* 4 (2-3) (1973), 103-106.

[2] On semigroups having regular globals, *Colloq. Math. Soc. J.Bolyai, Szeged,* 4 (2-3) (1973), 103-106.

M.Petrich

[1] The maximal semilattice decomposition of a semigroup, *Math. Zeitschr.* 85 (1964), 68-82.
[2] On the structure of a class of commutative semigroups, *Czech. Math. J.* 14 (1964), 147-153.
[3] The maximal matrix decomposition of a semigroup, *Portugaliae Math.* 25 (1966), 15-33.
[4] Homomorphisms of semigroups onto normal bands, *Acta Sci. Math. Szeged.* 27 (1966), 185-196.
[5] Semigroups certain of whose subsemigroups have identities, *Czech. Math. J.* 16 (1966), 186-198.
[6] On extensions of semigroups determined by partial homomorphisms, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 28 (1966), 49-51.
[7] Sur certain classes de demi-groupes III, *Bull. Cl. Acad. Roy. Belgium* 53 (1967), 60-73.
[8] Inflations of a completely 0-simple semigroup, *Bull. Soc. Math. Belg.* 19 (1967), 42-54.
[9] *Topics in semigroups*, Pennsylvania State Univ., 1967.
[10] *Semigroups and rings of linear transformations*, Pennsylvania State Univ., 1969.
[11] Structure des demi-groupes et anneaux distributifs, *C.R.Acad. Sci. Paris, Ser. A,* 268 (1969), 849-852.
[12] A simple construction of semigroups all of whose subsemigroups are left ideals, *Semigroup Forum* 4 (1972), 262-266.
[13] Regular semigroups satisfying certain conditions on idempotents and ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* 170, 245-267, (1972).
[14] Normal bands of commutative cancellative semigroups, *Duke Math. J.* 40 (1973), 17-32.
[15] Regular semigroups which are subdirect products of a band and a semilattice of groups, *Glasgow Math. J.* 14 (1973), 27-49.
[16] *Introduction to semigroups*, Merill, Ohio, 1973.
[17] *Rings and semigroups*, Lecture Notes in Math., $N^{\underline{o}}$ 380, Springer, Berlin, 1974.
[18] The structure of completely regular semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 189, 211-236, (1974).
[19] *Lectures in semigroups*, Akad. Verlag, Berlin, 1977.
[20] *Structure of regular semigroups*, Cahiers Math. Montpellier, 1977.
[21] *Inverse semigroups*, J. Wiley & Sons, New York, 1984.

M.Petrich and P.A.Grillet

[1] Extensions of an arbitrary semigroup, *J. Reine Angew. Math.* 244 (1970), 97-107.

J.Płonka

[1] On a method of constructions of abstract algebras, *Fundamenta Math.* 61 (1967), 183-189.

[2] Some remarks on summs of direct systems of algebras, *Fundamenta Math.* 62 (1968), 301-308.

G.Pollák

[1] On the consequences of permutation identities, *Acta Sci. Math. Szeged* 34 (1973), 323-333.

G.Pollák and M.V.Volkov

[1] On almost simple semigroup identities, *Semigroups, structure and universal algebraic problems, Amsterdam,* 1985, 287-323.

G.Pollák und L.Rédei

[1] Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), 125-131.

B.Pondeliček

[1] On weakly commutative semigroups, *Czech. Math. J.* 25 (100) (1975), 20-23.

[2] On semigroups having regular globals, *Colloq. Math. Soc. J.Bolyai, Szeged,* 20 (1976), 453-460.

[3] Uniform semigroups whose proper quasi-ideals are power joined, *Semigroup Forum* 22 (1981), 331-337.

[4] Note on quasi-hamiltonian semigroups, *Časopis pěst. mat.* 110 (1985), 356-358.

[5] Note on band decompositions of weakly exponential semigroups, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 29 (1986), 139-141.

G.B.Preston

[1] Matrix representations of inverse semigroups, *J. Australian Math. Soc.* 9 (1969), 29-61.

P.Protić

[1] The lattice of r-semiprime idempotent-separating congruence on r-semigroup, *Proc. of the conf. Algebra and Logic, Cetinje* 1986, 157-165.

[2] Some congruences on a π-regular semigroup, *Facta. Univ. Niš, Ser. Math. Inform.* 5 (1990), 19-24.

[3] The band and the semilattice decompositions of some semigroups, *PU.M.A. Ser. A, Vol.* 2, *N*º 1-2, 1991, 141-146.

[4] A new proof of Putcha's theorem, *PU.M.A. Ser. A. Vol.* 2 (1991), *N*º 3-4, 281-284.

P.Protić and S.Bogdanović

[1] On a class of semigroups, *Algebraic conf. Novi Sad* 1981, 113-119.

[2] A structural theorem for (m, n)-ideal semigroups, *Proc. symp. n-ary structures, Skopje* 1982, 135-139.

[3] Some congruence on a strongly π-inverse r-semigroup, *Zb. rad. PMF Novi Sad* 15 (1985), 79-89.

[4] Some idempotent-separating congruences on a π-regular semigroup, *Note di Matematica* VI (1986), 253-272.

M.S. Putcha

[1] Semilattice decomposition of semigroups, *Semigroup Forum* 6 (1973), 12-34.

[2] Bands of t-archimedean semigroups, *Semigroup Forum* 6 (1973), 232-239.
[3] Positive quasi-orders on semigroups, *Duke Math. J.* 40 (1973), 857-869.
[4] Semigroups in which a power of each element lies in a subgroup, *Semigroup Forum* 5 (1973), 354-361.
[5] Minimal sequences in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 189 (1974), 93-106.
[6] Positive functions from $\mathcal{S}$-indecomposable semigroups into partially ordered sets, *Czech. Math. J.* 26 (101) (1976), 161-170.
[7] The Archimedean graph of a positive function on a semigroup, *Semigroup Forum* 12 (1976), 221-232.
[8] On the maximal semilattice decomposition of the power semigroup of a semigroup, *Semigroup Forum* 15 (1978), 263-267.
[9] Rings which are semilattices of Archimedean semigroups, *Semigroup Forum* 23 (1981), 1-5.
[10] Linear algebraic semigroups, *Semigroup Forum* 22 (1981), 287-309.
[11] *Linear algebraic monoids*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 133, Cambridge Univ. Press, 1988.

M.S.Putcha and A.Yakub
[1] Semigroups satisfying permutation identities, *Semigroup Forum* 3 (1971), 68-73.

M.S.Putcha and J.Weissglass
[1] A semilattice decomposition into semigroups with at most one idempotent, *Pacific J. Math.* 39 (1971), 225-228.
[2] Semigroups satisfying variable identities, *Semigroup Forum* 3 (1971), 64-67.
[3] Band decompositions of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 33 (1972), 1-7.
[4] Semigroups satisfying variable identities II, *Trans. Amer. Math. Soc.* 168 (1972), 113-119.
[5] Applications of semigroup algebras to ideal extensions of semigroups, *Semigroup Forum* 6 (1973), 283-294.

K.V.Raju and J.Hanumanthachari
[1] A note on generalized commutative semigroups, *Semigroup Forum* 22 (1981), 311-323.
[2] On weakly commutative semigroups, *Mat. Seminar Notes* 10 (1982), 753-765.

V.Rakočević
[1] *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1993.

V.V.Rasin
[1] On the varieties of cliffordian semigroups, *Semigroup Forum* 23 (1981), 201-220.

L.Rédei
[1] *The theory of finitely generated commutative semigroups*, London, 1965.
[2] *Algebra* I, Pergamon Press, Oxford, 1967.

L.Rédei und A.N.Trachtman

[1] Die einstufigmichtkommutativen Halbgruppen mit Ausnahme von uendlichen Gruppen, *Per. Math. Hung.* 1 (1971), 15-23.

D.Rees

[1] On semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 36 (1940), 387-400.

X.Ren and Y.Guo

[1] E-ideal qiasi-regular semigroups, *Sci. China, Ser.* A 32, *№* 12 (1989), 1437-1446.

X.Ren, Y.Guo and K.P.Shum

[1] On the structure of left C-quasiregular semigroups, (to appear).

A.Restivo and Reutenauer

[1] On the Burnside problem for semigroups, *J. Algebra* 89 (1984), 102-104.

J.Rhodes

[1] Some results on finite semigroups, *J. Algebra* 4 (1966), 471-504.

R.P.Rich

[1] Completely simple ideals of a semigroup, *Amer. J. Math.* 71 (1949), 883-885.

T.Saito and S.Hori

[1] On semigroups with minimal left ideals and without minimal right ideals, *J. Math. Soc. Japan* 10 (1958), 64-70.

В.Н.Салий

[1] Еквационально нормальные многобразия полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 5 (1969), 61-68.

[2] Теорема о гомоморфизмах жестких коммутативних связок полугрупп, *Теория полугрупп и ее приложения, Саратов*, 1971, Вып. 2, 69-74.

М.В.Сапир и Е.В.Суханов

[1] О многообразиях периодических полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 12, 1985, 71-74.

M.Satyanarayana

[1] Principal right ideal semigroups, *J. London Math. Soc.* (2) 3 (1971), 549-553.

[2] Commutative semigroups in which primary ideals are prime, *Math. Nachr.* 48 (1971), 107-111.

[3] Commutative primary semigroups, *Czech. Math. J.* 22 (97) (1972), 509-516.

Š.Schwarz

[1] On the structure of simple semigroups without zero, *Czech. Math. J.* 1 (76) (1951),41-53.

[2] О полугруппах имеющих ядро, *Czech. Math. J.* 1 (76) (1951), 259-301.

[3] Contribution to the theory of periodic semigroups, *Czech. Math. J.* 3 (1953), 7-21 (in Russian).

[4] On maximal ideals in the theory of semigroups I,II, *Czech. Math. J.* 3 (1953), 139-153, 365-383 (in Russian).

[5] О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп, *Czech. Math. J.* 4 (1954), 296-313.

[6] Semigroups in which every proper subideal is a group, *Acta Sci. Math. Szeged* 21 (1960), 125-134.
[7] Dual semigroups, *Czech. Math. J.* 10 (1960), 201-230.
[8] Right compositions of semigroups, *Math. Slovaca* 36 (1) (1986), 3-14.
[9] Semigroups with a universaly minimal left ideal, *Acta Sci. Math. Szeged* 52 (1988), 21-28.

M.Schutzenberger
[1] Sur le produit de concatenation non ambigu, *Semigroup Forum* 13 (1976), 47-75.

J.T.Sedlock
[1] Green's relations on a periodic semigroup, *Czech. Math. J.* 19 (94) (1969), 318-323.

B.M.Schein
[1] On the theory of restrictive semigroups, *Izv. Vuzov. Mat.* 2 (33) (1963), 152-154 (in Russian).
[2] Restrictive bisemigroups, *Izv. Vuzov. Mat.* 1 (44) (1965), 168-179 (in Russian).
[3] On a class of commutative semigroups, *Publ. Math. Debrecen* 12 (1965), 87-88 (in Russian).
[4] Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups, *Pacific J. Math.* 17 (1966), 529-547.
[5] *Lectures in transformation semigroups*, Izdat. Saratov. Univ., 1970 (in Russian).
[6] Restrictive bisemigroups of mappings, *Izv. Vuzov. Mat.* 1 (56) (1972), 308-316 (in Russian).
[7] Semigroups for which every transitive representation by functions is a representation reversible functions, *Izv. Vuzov. Mat.* 7 (1973), 112-121 (in Russian).
[8] Bands of monoids, *Acta Sci. Math. Szeged* 36 (1974), 145-154.

H.J.Shyr
[1] *Free monoids and languages*, Taichung, Taiwan R.O.C., 1991.

Л.Н.Шеврин
[1] Полугруппи са некоторыми типами структур подполугрупп, *ДАН СССР, Т* 938, 4 (1961), 796-798.
[2] О полугруппах все подполугруппы которых нилпотентны, *Сиб. Мат. Ж., Т* II, 6 (1961), 936-942.
[3] К общей теории полугрупп, *Мат. Сб.* 53 (1961), № 3, 367-386.
[4] Сильные связки полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 6 (49) (1965), 156-165.
[5] О разложении квазипериодической полугруппы в связку Архимедовых полугрупп, XIV *Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Новосибирск*, 1977, Ч1, 104-105.
[6] Квазипериодические полугруппы обладающие разбиением на унипотентные полугруппы, XVI *Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Л.*, 1981, Ч1, 177-178.

[7] Квазипериодические полугруппы, разложимые в связку Архимедовых полугрупп, XVI *Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Л.*, 1981, Ч1, с.188.

[8] О разложении квазипериодических полугрупп в связки, XVII *Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл., Минск*, 1983, Ч1, с. 267.

[9] Epigroups as unary semigroups, *International conf. on semigroups, Abstracts, Luino*, 22/27th june 1992, 35-41.

Л.Н.Шеврин и М.В.Волков

[1] Тождества полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 11 (1985), 3-47.

Л.Н.Шеврин и А.Я.Овсяников

[1] *Полугруппы и их подполугрупповые решетки* I,II, Урал. Унив. Свердловск, 1990.

[2] Semigroups and their subsemigroup lattices, *Semigroup Forum* 27 (1983), 1, 1-154.

Л.Н.Шеврин и Е.В.Суханов

[1] Структурные аспекты теории многообразий полугрупп, *Изв. Вузов. Мат.* 6 (1989), 3-39.

A.Spoletini Cherubini and A.Varisco

[1] Sui semigruppi fortemente reversibili Archimedei, *Ist. Lombardo* (*Rend. Sc.*) A 110 (1976), 313-321.

[2] Sui semigruppi fortemente reversibili separativi, *Ist. Lombardo* (*Rend. Sc.*) A 111 (1977), 31-43.

[3] Sui semigruppi i cui sottosemigruppi propri sono t-Archimedei, *Ist. Lombardo* (*Rend. Sc.*) A 112 (1978), 91-98.

[4] Some properties of E-m-semigroups, *Semigroup Forum*, 17 (1979), 153-161.

[5] On Putcha's Q-semigroups, *Semigroup Forum* 18 (1979), 313-317.

[6] Semigruppi σ-riflessivi separativi, *Ist. Lombardo* (*Rend. Sc.*) A 113 (1979).

[7] Power cancellative semigroups, *Semigroup Forum* 18 (1979), 381-384.

[8] Quasi commutative semigroups and σ-reflexive semigroups, *Semigroup Forum* 19 (1980), 313-322.

[9] On conditionally commutative semigroups, *Semigroup Forum* 23 (1981), 5-24.

[10] Semigroups whose proper subsemigroups are quasicommutative, *Semigroup Forum* 23 (1981), 35-48.

[11] Quasi hamiltinian semigroups, *Czech. J. Math.* 33 (1983), 131-140.

[12] Semigroups and rings whose proper one-sided ideals are power joined, *Czech. J. Math.* 34 (1984), 121-125.

[13] On E_k-semigroups, *Semigroup Forum* 34 (1987), 305-319.

B.Stamenković

[1] $\mathcal{L}_n$-semigroups, *Zb. rad. Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 6 (1992), 181-184.

[2] More on $\mathcal{L}_n$-semigroups, *Facta Univ. Niš, Ser. Math. Inform.* (to appear).

B.Stamenković and P.V.Protić

[1] The natural partial order on an r-cancellative semigroup, *Mat. vesnik* 39 (1987), 455-462.

[2] On the compatibility of the natural partial order on an r-cancellative r-semigroup, *Zb. rad. Fil. fak. Niš, Ser. Mat.* 1 (11) (1987), 79-87.

S.K.Stein

[1] Semigroups satisfying $xy = yg(x, y)x$, *Semigroup Forum* 36 (1987), 249-251.

O.Steinfeld

[1] On semigroups which are unions of completely 0-simple semigroups, *Czech. Math. J.* 16 (1966), 63-69.

[2] On a generalization of completely 0-simple semigroup, *Acta Sci. Math. Szeged* 28 (1967), 135-145.

[3] *Quasi-ideals ind rings and semigroups*, Akad. Kiadó, Budapest, 1978.

R.Strecker

[1] On a class of t-Archimedean semigroups, *Semigroup Forum* 39 (1989), 371-375.

J.J.Streilein

[1] An embeeding theorem for matrices of commutative cancellative semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 208 (1975), 127-140.

Е.В.Суханов

[1] Многобразия и связки полугрупп, *Сибир. Мат. Ж.* 18 (2) (1977), 419-428.

[2] О замакнутости полугрупповых многобразия относительно некоторьих конструкций, *Иследования по соврем. алгебре, Свердловск*, 1978, 182-189.

[3] О замакнутости полугрупповых многобразия относительно коммутативных связок, *Иследования по соврем. алгебре, Свердловск*, 1979, 180-188.

[4] О многобразиях полугрупп финитно аппроксимируемьх относительно предикатов, *Третий всесоюзн. симп. по теории полугрупп, Тезисы докл Свердловск*, 1988, 90.

[5] The grupoid varieties of idempotent semigroups, *Semigroup Forum* 14 (2) (1977), 143-159.

А.К.Сушкевич

[1] Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz des einden figen umkehrborkeit, *Math. Ann.* 99 (1928), 30-50.

[2] *Теория обобщенных групп*, Харьков-Киев ГНТИ, 1937.

Е.Г.Шутов

[1] Полугруппы с идеальными подполугруппами, *Мат. Сб.*, 57 (99): 2 (1962), 179-186.

R.Šulka

[1] The maximal semilattice decomposition of a semigroup, radicals and nipotency, *Mat. časopis* 20 (1970), 172-180.

G.Szász

[1] *Théorie des treillis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, et Dunod, Paris, 1971.

Xiling Tang

[1] *Semigroups with the congruence extension property*, Thesis, Univ. Lanzhou, China, 1993.

T.Tamura

[1] On a monoid whose submonoids form a chain, *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 5 (1954), 8-16.

[2] The theory of construction of finite semigroups I, *Osaka Math. J.* 8 (1956), 243-261.

[3] The theory of construction of finite semigroups II, *Osaka Math. J.* 9 (1957), 1-42.

[4] Commutative nonpotent Archimedean semigroup with cancellative law, *J. Gakugei Tokushima Univ.* 8 (1957), 5-11.

[5] Notes on translations of a semigroup, *Kodai Math. Sem. Rep.* 10 (1958), 9-26.

[6] Another proof of a theorem concerning the greatest semilattice decomposition of a semigroup, *Proc. Japan Acad.* 40 (1964), 777-780.

[7] Notes on commutative Archimedean semigroups I, II, *Proc. Japan Acad.* 42 (1966), 35-40.

[8] Construction of trees and commutative Archimedean semigroup, *Math. Nachr.* 36 (1968), 225-287.

[9] Notes on medial Archimedean semigroups without idempotent, *Proc. Japan Acad.* 44 (1968), 776-778.

[10] Maximal or greatest homomorphic image of given type, *Canad. J. Math.* 20 (1968), 264-271.

[11] Semigroups satisfying identity $xy = f(x, y)$, *Pacific J.Math.* 31 (1969), 513-521.

[12] The study of closets and free contents related to semilattice decomposition of semigroups, *Semigroups, Acad. Press, New York*, 1969 (Ed. K.W.Folley), 221-259.

[13] Finite union of commutative power joined semigroups, *Semigroup Forum* 1 (1970), 75-83.

[14] On commutative exclusive semigroups, *Semigroup Forum* 2 (1971), 181-187.

[15] On Putcha's theorem concerning semilattice of Archimedean semigroups, *Semigroup Forum* 4 (1972), 83-86.

[16] Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups, *Semigroup Forum* 4 (1972), 255-261.

[17] Notes on $\mathcal{N}$-semigroups, Abstract 698-A8, *Notes Amer. Math. Soc.* 19 (1972), A-773.

[18] Semilattice congruences viewed from quasi-orders, *Proc. Amer. Math. Soc.* 41 (1973), 75-79.

[19] Remark on the smallest semilattice congruence, *Semigroup Forum* 5 (1973), 277-282.

[20] Quasi-orders, generalized Archimedeaness, semilattice decompositions, *Math. Nachr.* 68 (1975), 201-220.

[21] Semilattice indecomposable semigroups with a unique idempotent, *Semigroup Forum* 24 (1982), 77-82.

T.Tamura and N.Graham

[1] Certain embedding problems for semigroups, *Proc. Japan. Acad.* 40 (1964), 8-13.

T.Tamura and N.Kimura

[1] On decompositions of a commutative semigroup, *Kodai Math. Sem. Rep.* 4 (1954), 109-112.

[2] Existence of greatest decomposition of a semigroup, *Kodai Math. Sem. Rep.* 7 (1955), 83-84.

T.Tamura and T.Nordahl

[1] On exponential semigroups II, *Proc. Japan Acad.* 48 (1972), 474-478.

T.Tamura, R.B.Merkel and J.F.Latimer

[1] The direct product of right singular semigroups and certain grupoids, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 118-123.

[2] Note on the direct product of certain grupoids, *Proc. Japan Acad.* 37 (1961), 482-484.

T.Tamura and J.Shafer

[1] On exponential semigroups I, *Proc. Japan Acad.* 48 (1972), 77-80.

M.R.Tasković

[1] *Osnove teorije fiksne tačke*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986.

[2] *Nelinearna funkcionalna analiza, Prvi deo, Teorijske osnove*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1993.

G.Thierrin

[1] Sur une condition nécessaire et sufficiante pour qu'un semigroupe soit un groupe, *C.R. Acad. Sci. Paris* 232 (1951), 376-378.

[2] Sur les éléments inversifs et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif, *C.R. Acad. Sci. Paris* 234 (1952), 33-34.

[3] Sur une classe de demi-groupes inversifs, *C.R. Acad. Sci. Paris* 234 (1952), 177-179.

[4] Quelques propriétiés des sous-groupoides consistants d'un demi-groupe abélien, *C.R. Acad. Sci. Paris* 236 (1953), 1837-1839.

[5] Sur quelques propriétiés de certaines classes de demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris* 239 (1954), 1335-1337.

[6] Demi-groupes inversés et rectangulaires, *Acad. Sci. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) 41 (1955), 83-92.

[7] Sur une propriété caractéristique des demi-groupes inversés et rectangulaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* 241 (1955), 1192-1194.

[8] Contribution à le theorie des équivalences dans les demi-groupes, *Bull. Sec. Math. France* 83 (1955), 103-159.

[9] Sur quelques décompositions des groupoides, *C.R. Acad. Sci. Paris* 242 (1956), 596-598.

[10] Sur le théorie de demi-groupes, *Comment. Math. Helv.* 30 (1956), 211-223.
[11] Sur les automorphismes d'un demi-groupe réductif, *Comment. Math. Helv.* 31 (1956), 145-151.
[12] Sur la structure des demi-groupes, *Alger. Math.* 3 (1956), 161-171.
[13] Contribution àla théorie des anneaux et des demi-groupes, *Comment. Math. Helv.* 32 (1957), 93-112.

G.Thierrin and G.Thomas
[1] η-simple refelective semigroups, *Semigroup Forum* 14 (1977), 283-294.

А.В.Тищенко
[1] Замечание о полугрупповых многообразиях конечного индекса, *Изв. Вузов. Мат.* (1991), 79-83.

K.Todorov
[1] On the linear orderability of two classes of finite semigroups, *Semigroup Forum* 45 (1992), 71-76.

B.Trpenovski
[1] Bi-ideal semigroups, *Algebraic conference, Skopje*, 1980, 109-114.
[2] Semigroups with n-properties, *Algebraic conference, Novi Sad*, 1981, 7-12.

B.Trpenovski and N.Celakoski
[1] Semigroups in which every n-subsemigroup is a subsemigroup, *MANU Prilozi* VI-3, Skopje, 1974, 35-41.

E.J.Tully
[1] Semigroups in which each ideal is a retract, *J. Austral. Math. Soc.* 9 (1969), 239-245.

V.V.Vagner
[1] Algebraic topics of the general theory of partial connections in fiber bundles, *Izv. Vuzov. Mat.* 11 (1968), 26-32 (in Russian).

A.Varisco
[1] Some remarks on E-m-semigroups, *Semigroup Forum* 11 (1975/76), 370-372.
[2] On E_k-m-semigroups which are bands of t-Archimedean semigroups, *Semigroup Forum* 20 (1980), 145-149.

S.Varriccio
[1] A finiteness condition for finitely generated semigroups, *Semigroup Forum* 38 (1989), 331-335.

P.S.Venkatesan
[1] On a class of inverse semigroups, *Amer. J. Math.* 84 (1962), 578-582.
[2] On decomposition of semigroups with zero, *Math. Zeitsch.* 92 (1966), 164-174.
[3] Right (left) inverse semigroups, *J. Algebra* 31 (1974), 209-217.

M.L.Veronesi
[1] Sui semigruppi quasi fortemente regolari, *Riv. Mat. Univ. Parma* (4) 10 (1984), 319-329.

М.В.Волков и А.В.Келарев

[1] О многобразиях полугрупп замакнутых относительно коммутативных связок, XIX *Бсесоюзн. Алг. Конф. Тезисы докл. Львов*, 1987, Ч2, 56.

Н.Н.Воробьев

[1] Ассоциативные системы, всакая подсистема которых имеет единицу, *ДАН СССР* 3 (1953), 393-396.

A.D.Wallace

[1] Retractions in semigroups, *Pacific J. Math.* 7 (1957), 1513-1517.
[2] Relative ideals in semigroups I, *Colloq. Math.* 9 (1962), 55-61.
[3] Relative ideals in semigroups II, *Acta Math. Sci. Hung.* 4 (1963), 137-148.

R.J.Warne

[1] Extensions of Brandt semigroups and applications, *Ilinois J. Math.* 10 (1966), 652-660.
[2] Extensions of completely 0-simple semigroups by completely 0-simple semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), 524-526.
[3] Extensions of I-bisimple semigroups, *Canad. J. Math.* 19 (1967), 419-426. Errata 20 (1968), 511-512.
[4] The direct product of right zero semigroups and certain groupoids, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 160-164.
[5] Direct decomposition of regular semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 19 (1968), 1155-1158.
[6] Extensions of ω^n I-bisimple semigroups, *Math. Japon.* 13 (1968), 105-121.
[7] TC-semigroups and related semigroups, *Workshop in semigroups, formal languages and combinatorics on words* (August 29-31,1992), Abstracts, 130-132.
[8] On certain classes of TC-semigroups, *Int. conf. on Semigroups and Algebras of computer languages*, Qingdao, China, 25-31 May, 1993, Abstracts, 1-2.
[9] Semigroups obeying the term condition, *Algebra Universalis*, 1993 (to appear).
[10] On the structure of TC semigroups, *Proc. of the Int. conf. of semigroups: Algebraic theory and applications to formal languages and codes, Luino, Italy*, 1992 (to appear).
[11] TC semigroups and related semigroups, *Rep.* № 138 (1993), *Dept. of Math. King Fahd Univ. Dhahran, Saudi Arabia.*

R.J.Weinert

[1] Some remarks on certain partially ordered semigroups, *Semigroup Forum* 34 (1986), 235-242.

M.Yamada

[1] On the greatest semilattice decomposition of a semigroup, *Kodai Mat. Sem. Rep.* 7 (1955), 59-62.
[2] A note on middle unitary semigroups, *Kodai Math. Sem. Rep.* 7 (1955), 371-392.
[3] Compositions of semigroups, *Kodai Mat. Sem. Rep.* 8 (1956), 107-111.
[4] Note on idempotent semigroups II, *Proc. Japan Acad.* 34 (1958), 110-112.
[5] Note on idempotent semigroups III, *Proc. Japan Acad.* 34 (1958), 113-114.
[6] A remark on periodic semigroups, *Sci. Rep. Shimane Univ.* 9 (1959), 1-5.

[7] Inversive semigroups, I, *Proc. Japan Acad.* 39 (1963), 100-103.
[8] Inversive semigroups, II, *Proc. Japan Acad.* 39 (1963), 104-106.
[9] Construction of finite commutative z-semigroups, *Proc. Japan Acad.* 40 (1964), 94-98.
[10] Strictly inversive semigroups, *Bull. Shimane Univ.* 13 (1964), 128-138.
[11] Inversive semigroups, III, *Proc. Japan Acad.* 41 (1965), 221-224.
[12] Regular semigroups whose idempotents satisfy permutation identities, *Pacific J. Math.* 21 (1967), 371-392.
[13] Note on exclusive semigroups, *Semigroup Forum* 3 (1972), 160-167.
[14] Some remarks on strong semilattices of certain special semigroups, *Math. Japonica* 33 (5) (1988), 813-820.
[15] External commutativity and commutativity in semigroups, *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.* 26 (1992), 39-42.

M.Yamada and N.Kimura

[1] Note on idempotent semigroups II, *Proc. Japan Acad.* 34 (1958), 110-112.

M.Yamada and T.Tamura

[1] Note on finite commutative nil-semigroups, *Portugaliae Math.* 28, (1969), 189-203.

R.Yoshida

[1] l-compositions of semigroups I, *Mem. Res. Inst. Sci. Eng., Ritumeikan. Univ.* 14 (1965), 1-12.
[2] l-compositions of semigroups II, *Mem. Res. Inst. Sci. Eng., Ritumeikan. Univ.* 15 (1966), 1-5.

R.Yoshida and M.Yamada

[1] On commutativity of a semigroup which is a semilattice of commutative semigroups, *J. Algebra* 11 (1969), 278-297.

P.Y.Zhu

[1] On the structure of periodic $\mathcal{J}$-trivial semigroups, *Pure and Applied Math.* 6 (1990), $N^{\underline{o}}$ 1, 36-38.
[2] On the classification of the finite left-duo P- (Δ-)semigroups, *Acta Math. Sinica*, 32 (1989), $N^{\underline{o}}$ 2, 234-239.

P.Y.Zhu, G.Yuqi and K.P.Shum

[1] Characterization and structure of left C-semigroups, *Science in China*, Ser A 6 (1991), 582-590.

SEMIGROUPS

Stojan M. Bogdanović and Miroslav D. Ćirić
University of Niš

Preface

This book was designed as an advanced course in the Theory of semigroups. It is intended for the specialists in this field and to those who pretend to become ones. Of course, it could be useful to all the specialists in other branches who intend to use the results of this theory.

The main part of the text was presented in the lectures the authors gave in the Seminar for the theory of semigroups in Niš, organized by Mathematical Institute SANU. Part of the subject was also presented in the numerous international conferences.

Theory of semigroups is a modern field of mathematics. The beginning results became as a generalization of some other mathematical theories like Group theory, Theory of rings, ... On the other hand, this theory has developed its own methods and is growing mostly as an algebraic abstraction of the composition of relations (mappings) and the word concatenation. The results of this theory are being used in Topology, Functional analysis, Differential geometry, Differential equations and so on. It is of special importance for the Algebras of computer languages and Algebraic theory of automata.

The beginning of the investigation of semigroups is a paper of A.K.Suškevič from 1928. This theory extensively develops through the last few decades. It is being witnessed by the number of monographs covering various topics of this field who, each in its own way, directed and initiated new investigations. Let us mention some authors: E.S.Lyapin (1960), A.H.Clifford and G.B.Preston (1961, 1967), M.Petrich (1973, 1977, 1984), J.M.Howie (1976), G.Lallement (1979), and others. The big influence on the development of this theory has a specialized journal *Semigroup Forum*.

The topics covered in this book are part of the General theory of semigroups. The main question of General theory of semigroups is to study the structures of the semigroups. Among the methods used to solve this problem the best known are decompositions and compositions. The method of decompositions is based on the partition of the semigroup, describing of the structure of each components and establishing the connections among them. The method of compositions is the opposite one, and it is performed by the construction of a semigroup with given properties from the given components. The most frequently used types of decompositions and compositions are band decompositions and compositions and ideal extensions. In the case of compositions, one of the most efficient tools are homomorphisms.

The central role in this book has the Theory of semilattice decompositions. Special contribution to the development of this theory gave T.Tamura, following by M.Petrich, M.Putcha, L.N.Schevrin and the authors. One part of the Theory of semilattice decompositions was presented in the monograph of M.Petrich from 1973. Taking in account the results that appeared in the meanwhile, we present this theory in a more complete way, including new methods that join all the previous results in this area.

The second important question treated in this book are decompositions of semigroups with zero. Having special structure, semigroups with zero demand new types of decompositions. The theory of decompositions of semigroups with zero, presented in this book, is based on the decompositions in the right sum of semigroups and also on the orthogonal decompositions.

As a third important question of this book we consider band compositions of semigroups. Important contribution to the development of this theory gave A.H.Clifford, M.Petrich, M.Yamada, B.M.Schein and the authors.

In Chapter 1. we present the main notions and results of the Theory of semigroups used throughout this book. In Chapter 2. are given, mainly general, properties of π-regular and completely π-regular semigroups. Various decompositions of these semigroups will be systematically treated through this book. The subject of Chapter 3. is the structure of (0-)Archimedean semigroups. Chapter 4. is devoted to the semigroups with completely simple kernel. In Chapter 5. we present the Theory of semilattice decompositions. Actually, we consider the greatest semilattice decomposition and its various types. Chapter 6. is natural continuation of the preceding chapter. Here we present the Theory of semilattice decompositions of (completely) π-regular semigroups into completely Archimedean components. Chapter 7. contains the results on nil-extensions of unions of groups, especially retractive ones. In Chapter 8. we consider the greatest decompositions of semigroups with zero into the right sum and orthogonal sum. The results obtained here are used on various special cases, and on the lattices of ideals of semigroups with zero also. Chapter 9. treats band compositions of semigroups. We perform the constructions that use systems of homomorphisms and that give their connections with subdirect products, especially the spined products.

We use the opportunity to thank our teacher, professor Svetozar Milić, for the advises that are incorporated in this text. We thank all the participants of the Seminar of theory of semigroups in Niš, whose discussions, questions and comments contributed to the quality of this book. Special thanks, for the great patience and permanent support, to the ladies Gordana Bogdanović and Vesna Randjelović-Ćirić. The authors are indebted to their great friend Božidar Marković, whose understanding for the publishing struggles of scientists did not lack neither this time. Without his efforts this manuscript would not see the light of the day.

Authors

August 1993, University of Niš

Contents

Lista simbola

Indeks

H

I

J

K

L

R