Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 2 (1) (2013), 7-18

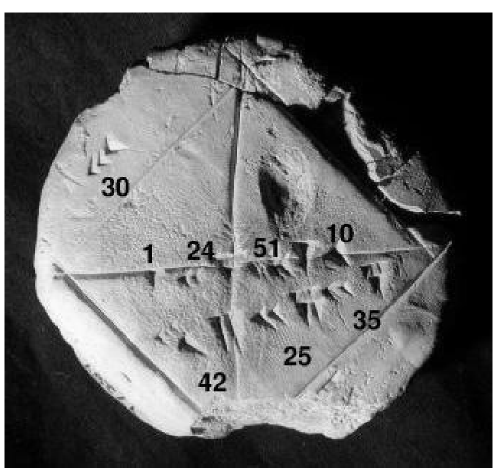
Кратка историја геометрије кроз проблем трисекције угла

Драган Стевановић
Универзитет у Нишу, Природно математички факултет
dragance106@yahoo.com

Геометрија (грчки: *γεωμετρία*, од речи *гео*=земља и *метриа*=мерити) је настала као област знања која је проучавала просторне релације. Заједно са теоријом бројева, геометрија је представљала једну од две области грчке математике. Класична геометрија је акценат стављала на конструкције помоћу лењира и шестара. Како се оне могу посматрати као композиције пет елементарних конструкција на скупу елемената, тј. као алгебра у аксиоматском систему, граница између алгебре и геометрије је временом избледела. У данашње време, геометријски концепти су уопштени на високом нивоу апстракције и комплексности, на које се примењују методе анализе и апстрактне алгебре, тако да су многе гране модерне геометрије једва препознатљиве као наследници ране геометрије.

1. Рана геометрија

Најранији сачувани трагови почетака геометрије су направили пећински људи, који су открили тупе троуглове у античкој долини Инда и Вавилону око 3000 п.н.е. Рана геометрија је била колекција емпиријски откривених принципа који су се односили на дужине, углове, површине и запремине, а чији је развој био мотивисан практичним потребама геодезије, грађевинарства, астрономије и различитих заната. Међу њима се налазе и неки изненађујуће софистицирани принципи, које би модерни математичар тешко могао да докаже без употребе анализе. На пример, и Египћани и Вавилонци су познавали верзије Питагорине теореме још 1500 година пре Питагоре; Египћани су познавали формулу за запремину зарубљене правилне четворостране пирамиде; Вавилонци су имали тригонометријске таблице и знали вредност √2 на пет децимала.



Слика 1. Вавилонска глинена таблица YBC 7289 са анотацијама. Дијагонала приказује апроксимацију √2 користећи четири сексагезималне цифре: $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$

1.1 Египатска геометрија

Стари Египћани су знали да приближно израчунају површину круга [ЈДД] као:

Површина круга = (Дијаметар x 8/9)^2.

Овај метод се користи у 50. проблему из Ахмесовог папируса за рачунање површине круга. Ова претпоставка даје приближну вредност π од $4\times(8/9)^2$ (или 3.160493...), са грешком од 0.63%. Ова вредност је мало лошија од Вавилонских прорачуна ($\pi \approx 25/8 = 3.125$, где је грешка 0.53%), али иначе није превазиђена све до Архимедове апроксимације 211875/67441 = 3.14163, чија је грешка око 0.01%. Интересантно је да је Ахмес знао за модерну 22/7 апроксимацију за π, али је и даље користио традиционалну вредност 256/81 приликом израчунавања запремине цилиндра у хекатима (стара Египатска мера за зрневље, хлеб и пиво).

С друге стране, у 48. проблему се користи квадрат странице 9, који је подељен мрежом 3×3. Помоћу дијагонала угаоних квадрата мреже конструисан је нерегуларни осмоугао површине 63, што даје другу вредност за π од 3.111. Ова два проблема заједно показују да се египатска апроксимација за π кретала између 3.11 и 3.16.

14. проблем из Московског математичког папируса даје једини познат антички пример израчунавања запремине зарубљене правилне четворостране пирамиде, дајући тачну формулу:

$$V = \frac{1}{3}h(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

1.2 Вавилонска геометрија

Вавилонци су вероватно познавали општа правила за мерење површина и запремина. Обим круга су рачунали као троструки дијаметар, а површину као дванаестину квадрата обима круга, што би било тачно ако би се узело да је π приближно једнако 3. Запремину цилиндра су рачунали као производ површине основе и висине, међутим, запремину зарубљене купе или правилне четворостране пирамиде су погрешно рачунали као производ висина и половине збира површина основа. Питагорина теорема је такође била позната Вавилонцима, док је скоро ископана таблица у којој је за π коришћена вредност 25/8.

2. Грчка геометрија

2.1 Класична грчка геометрија

За старогрчке математичаре, геометрија је била краљица њихових наука, досежући комплетност и савршеност метода као ниједна друга област њиховог знања. Они су геометрију проширили на многе нове врсте фигура, кривих, површи и тела; од метода пробе-и-грешке дошли су до логичке дедукције; препознали су да геометрија проучава „вечите форме“ или апстракције, за које су физички објекти само апроксимације. Коначно, развили су идеју аксиоматске теорије, што се више од 2000 година сматрало идеалом свих научних теорија.

2.1.1 Талес и Питагора

Талес (635-543 п.н.е.) из Милета (сада у југозападној Турској) је први математичар коме се приписује примена логичког закључивања. Он је написао емпиријске и директне доказе пет геометријских тврђења, мада ови докази нису сачувани. Могуће је да је Питагора (582-496 п.н.е), који је живео у Јонији и касније Сицилији, тадашњој грчкој колонији, био Талесов ученик. Питагора је путовао у Вавилон и Египат. Иако је тврђење из његове теореме било познато и раније, он је вероватно први који је дао његов комплетан доказ. Око себе је окупио групу ученика која је проучавала математику, музику и филозофију и заједно су открили већину од онога што се из геометрије данас учи у основној школи. Поред тога, открили су постојање несамерљивих дужина и ирационалних бројева.

2.1.2 Платон

Најцењенији филозог Грчке, Платон (427-347 п.н.е) је изнад врата своје чувене школе написао „Нека не улази онај ко не зна геометрију“. Иако он сам није био математичар, његово мишљење о математици је било врло утицајно. Математичари су стога прихватило његово убеђење да геометрија не треба да користи друга оруђа сем шестара и лењира – никада инструменте за мерење, као што су лењир са ознакама или угломер, јер су то инструменти занатлије и нису достојни научника. Ова максима је довело до дубоких истраживања конструкција могућих само са лењиром и шестаром и три класична конструктивна проблема: како помоћу лењира и шестара поделити угао на три једнака дела, конструисати коцку чија је запремина двоструко већа од дате коцке и конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга. Докази немогућности ових конструкција, иако нађени тек у 19. веку, изнедрили су важне принципе о структури система реалних бројева. Аристотел (384-322 п.н.е), Платонов највећи ученик, је написао трактат о методама закључивања у дедуктивним доказима, који није значајно унапређен све до 19. века.

2.2. Хеленистичка геометрија

2.2.1 Еуклид

Еуклид (око 325-265 п.н.е) из Александрије, вероватно ученика једног од Платонових ученика је написао трактат *Елементи геометрије* (познатије у скраћеном облику - *Елементи*) у 13 књига, у којима је геометрију засновао као идеалну аксиоматску теорију, данас познату као Еуклидска геометрија. Овај трактат није преглед свих геометријских знања хеленистичких математичара – сам Еуклид је написао још осам напреднијих књига о геометрији. Познато је из других референци да Еуклидово дело није први елементарни уџбеник геометрије, али је било толико супериорније да су остали уџбеници престали да се користе и постали изгубљени. Бојер у књизи „Еуклид из Александрије“ написао: „Еуклидови *Елементи* нису само најраније значајно дело старогрчке математике које је дошло до нас, већ и најутицајнији уџбеник свих времена... Прво штампано издање *Елемената* се појавило у Венецији и то је била једна од првих штампаних математичких књига. Процењује се да су од тада *Елементи* одштампани у преко хиљаду издања. Вероватно ниједна друга књига, сем Библије, не може имати толико много издања, и сигурно је да ниједно друго математичко дело није имало утицај који би се могао поредити са *Елементима*.“

Слика 2. Статуа Еуклида испред Музеја природне историје Универзитета у Оксфорду.

2.2.2 Архимед

Архимед (287-212 п.н.е) из Сиракузе на Сицилији, која је тада била грчки град-држава, се често сматра највећим старогрчким математичарем и понекад чак сматра једним од тројице највећих математичара уопште (заједно са Њутном и Гаусом). Чак и да није био математичар, остао би упамћен као велики физичар, инжењер и проналазач. У својој математици, развио је методе врло сличне координатном систему у аналитичкој геометрији и граничне процесе интегралног рачуна. Једини елемент који му је недостајао за заснивање ових области је била ефикасна алгебарска нотација којом би изразио своје концепте.

2.2.3 После Архимеда

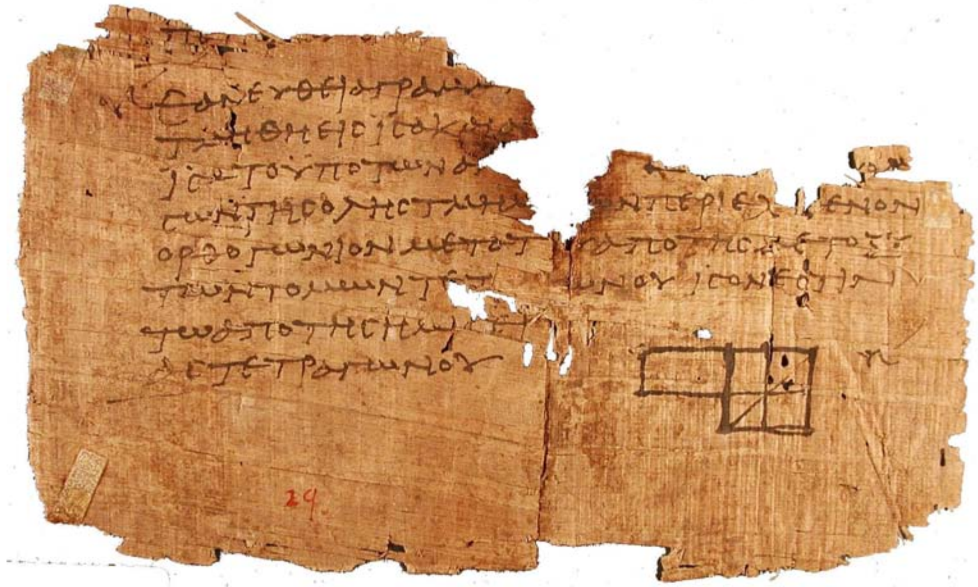
Након Архимеда, хеленистичка математика је почела да опада. Постојало је још неколико мањих математичких звезда, али је златно доба геометрије прошло. Проклу (410-485 н.е), аутор *Коментар прве књиге Еуклида*, је био један од последњих важних личности у хеленистичкој геометрији. Био је компетентан геометар, али важније, био је одличан коментатор дела која су постојала пре њега. Већина тих дела данас није сачувана и позната су нам само кроз његове коментаре. Римска република и царство које је наследило и апсорбовало грчке градове-државе је имало сјајне инжењере, али ниједног битног математичара.

Касније је спаљена и велика Александријска библиотека. Постоји све веће слагање међу историчарима да је Александријска библиотека страдала у више разорних догађаја, али да је уништење александријских паганских храмова у касном IV веку вероватно било најразорније и коначно уништење. Докази за то уништење су најсигурнији. Цезарова инвазија је можда довела до губитка 40-70 хиљада свитака у складишту поред луке (као што Лућијано Канфора тврди, то су највероватније биле копије које је направила библиотека и наменила извозу), али је мало вероватно да је утицала на Библиотеку и Музеј, узимајући у обзир обиље доказа да су обе грађевине постојале и касније.

Грађански ратови, смањене инвестиције за одржавање и набавку нових свитака и, уопште, опадајући интерес за нерелигиозне послове су вероватно допринели смањењу библиотечког фонда, нарочито у четвртом веку. Са сигурношћу је познато да је александријски Серапеум уништио александријски патријарх Теофил 391. године и могуће је да су Музеј и Библиотека страдали у истој кампањи.

3. Елементи и еуклидска геометрија

Иако су *Елементи* углавном садржали постојећа геометријска знања, Еуклид је био први који је показао како се она могу организовати у свеобухватан логички систем. Књиге I-IV и VI разматрају геометрију у равни, доказујући многе резултате о равним фигурама, на пример: *Ако троугао има два једнака угла, онда су стране налегле на те углове једнаке*. Такође је доказана и Питагорина теорема. Књиге V и VII-X се баве теоријом бројева, представљајући бројеве геометријски као дужи са различитим дужинама. Уведени су појмови простих, рационалних и ирационалних бројева, а доказано је и да постоји бесконачно много простих бројева. Књиге XI-XII се баве стереометријом. Познати резултат је 1:3 однос однос између запремина купе и цилиндра исте висине и основе.



Слика 3. Један од најстаријих фрагмената Еуклидових Елемената, нађен у Оксиринкусу, приближно око 100. п.н.е. Дијаграм илуструје Пропозицију 5 из друге књиге (извор http://en.wikipedia.org/wiki/File:Oxyrhynchus_papyrus_with_Euclid's_Elements.jpg).

Еуклид је геометрију засновао као аксиоматски систем, у коме се све *теореме* (тачна тврђења) доказују из малог броја *аксиома*. *Елементи* почињу дефиницијама појмова, основним геометријским принципима (званим и *постулати*) и општим квантитативним принципима (званим *заједничке идеје*), из којих се остатак геометрије изводи логичким закључивањем. Његових пет постулата су:

1. Било које две тачке се могу спојити правом.
2. Било која дуж се може продужити у праву.
3. За било коју дуж, може се нацртати круг са дужи као полупречником и центром у једном крају дужи.
4. Сви прави углови су међусобно једнаки.
5. Ако две праве у равни сече трећа права (звана трансверзала), и ако унутрашњи углови између две праве и трансверзале који леже са исте стране трансверзале заједно имају мање од два права угла, онда ће се са те стране трансверзале те две праве сећи, ако их продужимо довољно дуго.

Елементи такође садрже следећих пет „заједничких идеја“:

1. Ствари које су једнаке истој ствари једнаке су и међу собом.
2. Ако су једнаки делови додати једнаким деловима, онда су и целине једнаке.
3. Ако се једнаки делови одузму од једнаких делова, онда су и остаци једнаки.
4. Ствари које су подударне једна другој су једнаке једна другој.
5. Цело је веће од било ког дела.

3.1 Методи доказа

Еуклидова геометрија је конструктивна. Постулати 1, 2, 3 и 5 претпостављају постојање и јединственост одређених геометријских фигура, и ове претпоставке су конструктивне природе: није нам само речено да одређене ствари постоје, већ су такође дати и методи за њихову конструкцију користећи само (неозначени) лењир и шестар. У овом погледу, еуклидска геометрија је конкретнија од модерних аксиоматских система, као што је теорија скупова, које често тврде постојање објеката, без да их конструишу. Иако скоро сви модерни математичари сматрају неконструктивистичке, егзистенцијалне методе равноправним са конструктивистичким методама, Еуклидових конструктивни докази су често истискивали раније варљиве неконструктивистичке доказе, на пример, неке од питагорејских доказа који су се тицали ирационалних бројева и који су обично укључивали тврђење типа „Нађимо највећу заједничку меру ...”.

Слика 4. Ватикански спис Vat. gr. 190P, најстарији сачувани препис Елемената пореклом из IX века. Приказана је Пропозиција 47 из прве књиге, Питагорина теорема (извор http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/dmathematics/images/math01.jpg).

3.2 Опис структуре простора

Еуклид је веровао да су његове аксиоме очигледна тврђења о физичкој стварности. Узет као физички опис простора, други постулат (продужење дужи) тврди да простор нема рупа или крајева (тј. простор је хомоген); четврти постулат (једнакост правих углова) каже да је простор униформан у свим правцима, тако да се фигуре могу померити на било коју локацију задржавајући притом подударност; коначно, пети постулат тврди да је простор раван (тј. да нема унутрашњу закривљеност). Тек ће Ајнштајнова теорија релативитета значајније променити ова виђења.

Двосмислени карактер аксиома како их је Еуклид првобитно формулисао је омогућио неслагање различитие коментатора око неких последица по структуру простора, на пример, да ли је простор бесконачан и каква је његова топологија. Модерније, строже реформулације система углавном јасније раздвајају ова питања. Интерпретирајући Еуклидове аксиоме у духу модерног приступа, аксиоме 1-4 су конзистенте било са бесконачним, било са коначним простором (као у елиптичкој геометрији), а свих пет аксиома је конзистенто са разним топологијама (на пример, са равни, цилиндром или торусом у дводимензионалној еуклидској геометрији).

3.3 Пети постулат

Античким математичарима је пети постулат био мање очигледан од осталих. Сам Еуклид га је изгледа посматрао квалитативно другачијим од осталих, што се види из организације *Елемената*: првих 28 доказаних тврђења су она која се могу доказати без њега. Могу се формулисати многе алтернативне аксиоме, које су логички еквивалентне са петим постулатом. Један такав пример је Плејфејрова аксиома:

Кроз тачку ван дате праве, може се повући највише једна права која не сече дату праву.

Све до 19. века, многи геометри су безуспешно покушавали да докажу пети постулати из прва четири постулата. До 1763. године је објављено бар 28 различитих доказа, али су сви били погрешни [ДХ].

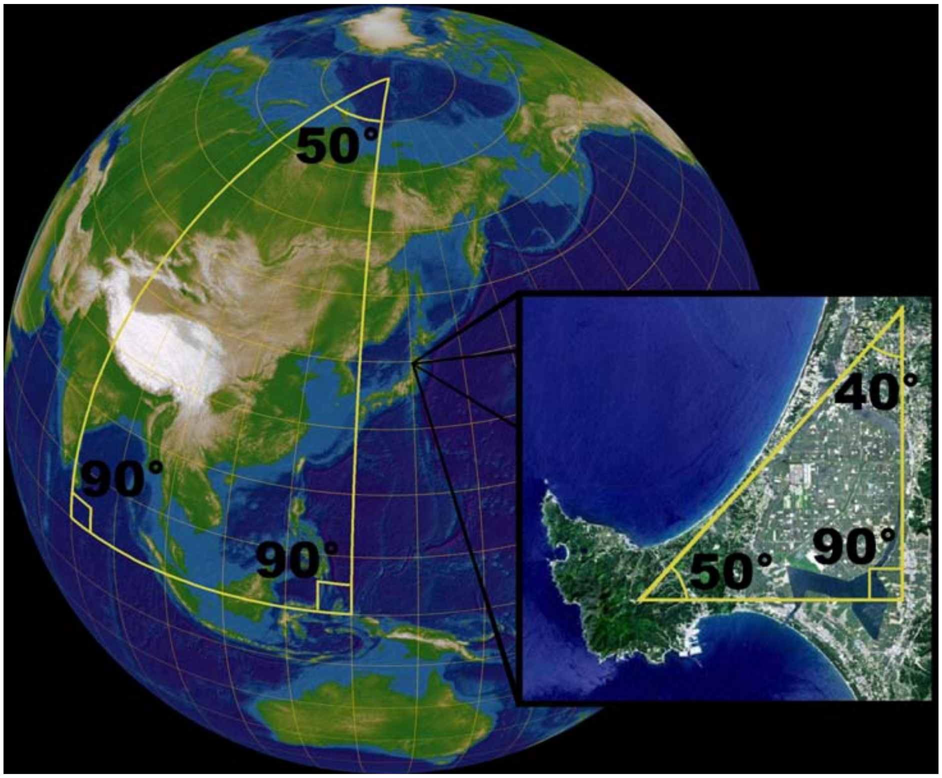
3.4 Нееуклидске геометрије

Најзначајнији догађај у геометрији 19. века се десио када су, око 1830. године, Јанош Бољаји и Николај Иванович Лобачевски независно објавили радове о нееуклидској геометрији, у којој пети постулат не важи. Пошто је показано да је нееуклидска геометрија конзистентна, то значи да се пети постулат не може доказати из преосталих постулата.

У 19. веку се такође схватило да Еуклидових десет аксиома и заједничких идеја није довољно за доказ свих теорема датих у *Елементима*. На пример, Еуклид је имплицитно претпостављао да свака права садржи бар две тачке, али се ова претпоставка не може доказати из осталих аксиома и због тога треба такође да буде аксиома. Први геометријски доказ у *Елементима* је да је свака дуж део троугла; Еуклид га конструише на уобичајен начин, цртајући кругове око оба краја дужи и узимајући пресек кружница као треће теме троугла. Међутим, његове аксиоме не гарантују да ће се кружнице заиста сећи, јер не претпостављају геометријско својство непрекидности (које је, у модерној терминологији, еквивалентно својству комплетности реалних бројева). Почев са Морицом Пашом 1882. године, предложено је више унапређених аксиоматских заснивања геометрије, од којих су најпознатији аксиоматски система Хилберта [Е], Биркхофа [Б] и Тарског [Т].

3.5 Општа теорија релативитета

Ајнштајнова општа теорија релативитета показује да је стварна геометрија простора и времена нееуклидска [МТВ]. На пример, ако је троугао конструисан помоћу три светлосна зрака, онда у општем случају збир углова у њему није једнак 180º због гравитације. Релативно слабо гравитационо поље, као Земљино или Сунчево, представљено је метриком која је приближно, али не потпуно, еуклидска. Све до 20. века није постојала технологија која би могла да детектује одступања од Еуклидске геометрије, али је Ајнштајн предвидео да гравитација може да проузрокује таква одступања. Оне су касније потврђене осматрањима. У тесту теорије релативитета 1919. године, звезде (означене кратким хоризонталним линијама) су фотографисане током помрачења Сунца. Светлосне зраке је на путу до Земље искривила Сунчева гравитација. Ово је интерпретирано као доказ Ајнштајнове претпоставке. Нееуклидска геометрија је данас саставни део програмске опреме ГПС система [КР].



Слика 5. Збир углова троугла у сферној геометрији може да буде већи од 180°.

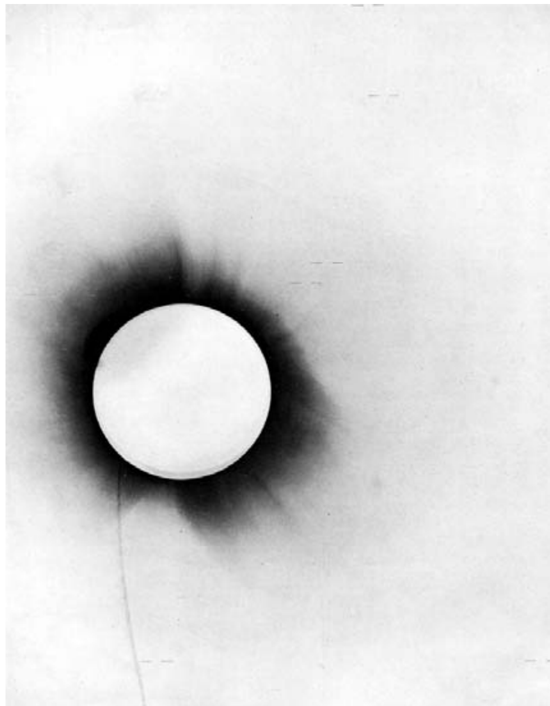
4. Конструкције помоћу лењира и шестара

Користећи само шестар и неозначени лењир, грчки математичари су пронашли начине како да поделе дуж на произвољан број једнаких делова, да цртају паралелне праве, да нађу симетралу угла, да нацртају неке од регуларних полигона и да конструишу квадрат који има површину једнаку или двоструко већу од површине датог полигона. Три проблема су им, међутим, била нерешива:

- **квадратура круга** (Конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга.)
- **дуплирање коцке** (Конструисати коцку чија је запремина једнака двострукој запремини дате коцке), и
- **трисекција угла** (Поделити произвољан угао на три једнака дела).

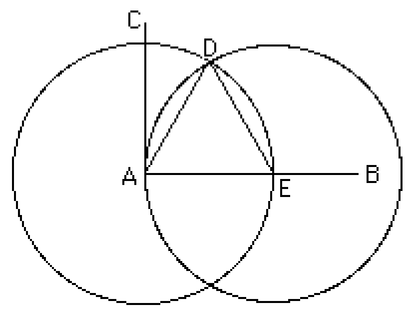
На неки начин, трисекција угла је најмање популаран од ова три проблема. У време старих Грка дуплирање коцке је било најпопуларнији проблем, док је у новије време квадратура круга постала најпопуларнији проблем, нарочито међу математичарима-аматерима.

Постоји неколико разлога зашто се проблем трисекције угла разликује од друга два проблема. Најпре, не постоји јак историјски разлог зашто је проблем уопште почео да се проучава. С обзиром да су знали како да поделе дуж на произвољан број једнаких делова и како да поделе угао на два једнака дела, старогрчки математичари су сигурно хтели да пронађу начин да поделе угао на произвољан број једнаких делова. Када би то било могуће, тада би знали да конструишу и регуларне полигоне са произвољним бројем страница, што је за тадашње геометре сигурно био интересантнији проблем.



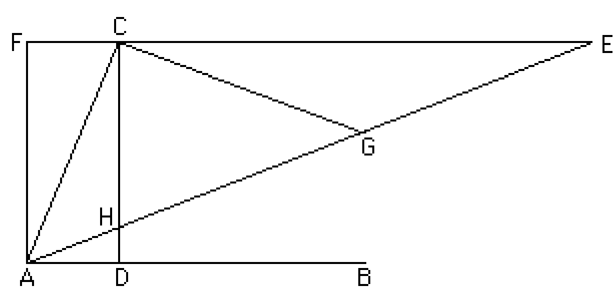
Слика 6. Негатив фотографије помрачења Сунца 1919. годинеса експедиције сер Артура Едингтона [ДЕД].

Затим, то је проблем сасвим другачијег типа: не може се квадрирати нити један круг, нити се може дуплирати било која коцка. Међутим, неки углови се могу поделити на три једнака дела. На пример, постоји релативно једноставан метод за трисекцију правог угла. За дати прави угао △CAB, конструише се кружница са центром у A која дуж AB сече у тачки E. Из тачке E као центра, конструише се друга кружница са истим полупречником која сече прву кружницу у тачки D. Тада је ΔDAE једнакостранични троугао, тако да је угао △DAE=60º и △DAC=30º. Према томе, угао △CAB је подељен на три једнака дела.



4.1 Решење помоћу шестара и лењира са означеном дужином

Иако је тешко дати тачан датум када се проблем трисекције угла први пут појавио, познато је да се Хипократ са Хиоса (око 470-410 п.н.е), који је дао први значајнији допринос решавању проблема квадратуре круга и дуплирања коцке, бавио такође и проблемом трисекције угла. Постоји прилично једноставан начин трисекције произвољног угла који је био познато Хипократу са Хиоса.



За дати угао △CAB, конструисати праву из C нормалну на праву AB, која сече AB у тачки D. Нека је F четврто теме правоугаоника CDAF. Продужити праву FC до тачке E, изабране тако да права AE сече CD у тачки H и да је HE=2AC. Тада је угао △EAB једнак трећини угла △CAB.

Доказ конструкције је једноставан. Нека је G средиште дужи HE, тако да је HG=GE=AC. Пошто је ∡ECH прави угао, то тачка C припада кружници над HE као пречником, па је CG=HG=GE. Даље је ∡EAB=∡CEA=∡ECG. Како је AC=CG, важи да је ∡CAG=∡CGA. Али ∡CGA=∡GEC+∡ECG=2∡EAB, па је ∡CGA=2∡CAB/3 и ∡EAB=∡CAB/3.

Један од разлога зашто проблем трисекције угла није био толико популаран код старогрчких математичара лежи вероватно и у томе што је горњу конструкцију могуће лако извести у пракси, без обзира што избор тачке E није могуће извести само помоћу неозначеног лењира и шестара. Механички тип решења је следећи: на лењиру поставити две ознаке на растојању 2AC, а затим померати лењир држећи једну ознаку на правој CD, а другу на продужетку праве FC, све док лењир не прође кроз тачку A. Дакле, у пракси је проблем лако решив, иако са математичке тачке гледишта стари Грци нису били задовољни механичким решењима. Као што је Платон рекао:

> *„Зар у поступању на механички начин, нисмо изгубили најбоље од геометрије...“*

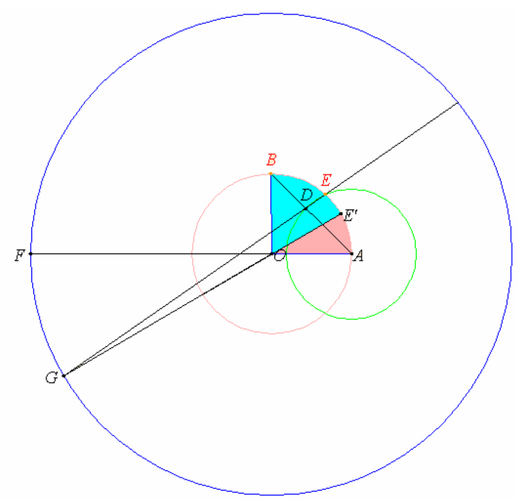
односно

> *„Душа геометрије је занемарена и уништена, јер се опет враћамо у свет осећаја, уместо да се издигнемо и прожмемо вечним и нематеријалним сликама мисли...“*

4.2 Приближне конструкције

Архимед је пронашао сличан метод који је такође користио лењир са означеном дужином, док је нешто касније Аполоније из Перге (око 262-190 п.н.е) пронашао метод који је за трисекцију угла користио особине хиперболе. Током историје је пронађено још доста таквих метода – у [PJ] је описано 15 механичких конструкција које, поред шестара и неозначеног лењира, користе и друга помоћна средства.

Само помоћу шестара и лењира је могуће дати приближне конструкције. На Интернет страни [ЛО] се налази преглед тридесетак таквих конструкција. Овде преносимо једну од њих, коју је први пут описао Марк Старк [CT], а која има невероватно велику тачност:



1. Нека је дат произвољан оштар угао са теменом у O.

2. Конструисати кружницу са центром у O која сече краке у тачкама A и B.

3. Из тачке A као центра, конструисати кружницу која сече дуж AB у тачки D и претходну кружницу у тачки E, негде између ¼ и ½ растојања између A и B.

4. Ако дуж DE пролази кроз тачку O, онда је ∡AOE=∡AOB/3.

5. Продужити дуж OA преко тачке O и означити тачку F на правој OA тако да је OF=3OA.

6. Конструисати кружницу са центром у O и полупречником OF. Означимо са G онај пресек кружнице и праве кроз DE, који је ближи тачки F.

7. Продужити праву кроз GO и наћи пресек E' са оригиналном кружницом из O. Тада је угао ∡AOE' приближно једнак трећини угла ∡AOB.

Права предност ове конструкције је што се може итерирати: ако се процес понови од корака 3 користећи AE' као полупречник, тада се у неколико корака може добити угао који од трећине угла $\triangle$AOB одступа за мање од 0.00000001º! Процена грешке ове конструкције се може наћи у [PP].

4.3 Доказ немогућности решења

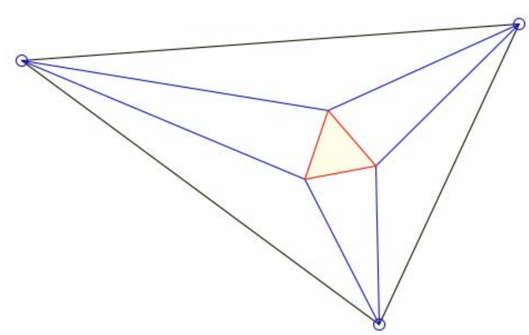
Докази да се три класична старогрчка проблема не могу решити само помоћу шестара и лењира су се појавили тек у 19. веку. Гаус је тврдио да се ови проблеми не могу решити, али је први доказ немогућности конструкције дао тек Пјер Лорен Ванцел 1837. године [ЛВ]. У случају дуплирања коцке, немогућност конструкције произилази из чињенице да се конструкције помоћу шестара и лењира могу представити једначинама првог и другог реда, док дуплирање коцке захтева налажење решења једначине трећег степена. Слична је ситуација и са проблемом трисекције угла, који ћемо илустровати на примеру немогућности трисекције угла од 60º.

Геометријски проблем трисекције угла се може повезати са алгебром – специфично, са коренима полинома трећег степена – с обзиром да је $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Нека је, као и обично, Q поље рационалних бројева. Приметимо да су бројеви који се могу у једном кораку конструисати из поља Q нуле полинома другог степена. Угао $\pi/3=60º$ је конструктибилан, али његова трећина није конструктибилна. Приметимо да је $\cos 60º=½$. Ако би се овај угао могао поделити на три једнака дела шестаром и лењиром, тада би минимални полином за $\cos 20º$ у Q био другог степена. Нека је $y=\cos 20º$. Из тригонометријског идентитета $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ имамо да је $\cos 60º = ½ = 4y^3 - 3y$. Множењем са 2 добијамо $8y^3-6y-1=0$, а смена $x=2y$ даје $x^3-3x-1=0$. Нека је $p(x)=x^3-3x-1$. Минимални полином за x (самим тим и за $\cos 20º$) је фактор полинома $p(x)$. Ако би полином $p(x)$ имао рационални корен, он би морао да буде једнак +1 или -1, јер су и најстарији и слободан члан једнаки ±1. Међутим, ниједан од ових бројева није корен полинома $p(x)$, па је он неразложив у пољу Q и минимални полином за $\cos 20º$ је степена три. Према томе, угао од 60º није могуће поделити на три једнака дела шестаром и лењиром.

У општем случају важи следећа

Теорема. Угао θ се може поделити на три једнака дела шестаром и лењиром ако и само ако је полином $p(x) = 4x^3-3x-\cos\theta$ разложив у екстензији поља $Q(\cos\theta)$.

5. Морлијеви троуглови



Након што смо закључили да је немогуће поделити угао на три једнака дела само помоћу шестара и лењира, споменимо и једну теорему која говори о односу између правих које деле углове троугла на три једнака дела.

Теорема, коју је 1899. године открио амерички математичар Френк Морли, тврди следеће: нека је дат произвољни троугао и поделимо сваки од унутрашњих углова на три једнака дела. Назовимо *триметралама* праве које углове деле на трећине. Тада тачке пресека парова триметрала суседних углова образују једнакостранични троугао.

Овај резултат је тада био толико изненађујући, да је ушао у математички фолклор под именом *Морлијево чудо*. Данас постоје разни докази ове теореме, резултат је уопштен у разним правцима, а дискусија о њима се може наћи у [КВ] и [АВ].

Литература

[ЈДД] Ray C. Jurgensen, Alfred J. Donnelly, and Mary P. Dolciani, *Modern School Mathematics: Geometry* (Student's Edition). Houghlin Mifflin Company, Boston, 1972, p. 52.

[ДХ] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, New York, 1979, p. 91.

[**КСБ**] Колекција скенираних историјских књига из математике и математичке астрономије, http://www.wilbourhall.org/index.html, приступљено јануара 2010.

[**Е**] Howard Eves, *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Dover, 1958.

[**Б**] George D. Birkhoff, *A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors)*, Annals of Mathematics 33 (1932), 329-345.

[**Т**] Alfred Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry,* Univ. of California Press, Berkeley, 1951.

[**МТВ**] Misner, Thorne and Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, 1973, p. 191.

[**КР**] Chris Rizos, *GPS Sattelite Signals – The Transmitted Signal*, http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/gps_survey/chap3/312.htm, приступљено јануара 2010.

[**ДЕД**] F.W. Dyson, A.S. Eddington, and C. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field*, *from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A (1920), 291-333, p. 332.

[**РЈ**] Robert C. Yates, *The Trisection Problem*, National Mathematics Magazine 15 (1941), 278-293.

[**ЛО**] Jim Loy, *Trisection of an Angle,* http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm, приступљено јануара 2010.

[**СТ**] Mark Stark, *An angle trisection*, http://www.math.umbc.edu/~rouben/Geometry/trisect-stark.html, приступљено јануара 2010.

[**РР**] Rouben Rostamian, *Error estimate for Mark Stark's approximate angle trisection*, http://www.math.umbc.edu/~rouben/Geometry/trisect-stark-proof.html, приступљено јануара 2010.

[**ЛВ**] M.L. Wantzel, *Recherches sur les moyens de reconnaitre si un Probleme de Geometrie peut se resoudre avec la regle et le compas*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1837), 366-372.

[**КВ**] Kevin Brown, *Morley's Trisection Theorem*, http://www.mathpages.com/home/kmath376/kmath376.htm, приступљено јануара 2010.

[**АВ**] Alexander Bogomolny, *Morley's miracle*, http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml , приступљено јануара 2010.