Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 2 (1) (2013), 19-74

PRIMENA KOMPLEKSNIH BROJEVA U PLANIMETRIJI

Mihailo Krstić,
Student Departmana za matematiku
Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, Srbija
e-mail: mihailo1994@yahoo.com

1 Uvod

Rešavanje planimetrijskih problema može zadavati puno teškoća, naročito ako je problem dosta komplikovan. Metoda koja će biti predstavljena daje jako dobru alternativu elementarnim metodama, kao moćno oružje, u rešavanju planimetrijskih problema. Metoda je dosta slična metodama Analitičke geometrije, čak se može reći da je u dosta slučajeva i bolja. Izložićemo interpretaciju svih osnovnih geometriskih pojmova preko kompleksnih koordinata, dokazaćemo neke osnovne teoreme elementarne geometrije i neke naizgled nerešive probleme rešićemo ovom metodom. Naravno, videćemo da metoda nije svemoćna, nekada je teška za upotrebu, a nekada čak i neupotrebljiva.

Najpre ćemo izložiti interpretaciju osnovnih geometrijskih pojmova preko algebarskih jednakosti. Tako se problem rešavanja nekog planimetrijskog problema svodi na rad sa jednačinama tj. rešavanje problema geometrijskog tipa se prevodi u rešavanje problema algebarskog tipa.

U trećoj glavi se ogleda najefektnija primena izložene teorije na tačke jedinične kružnice. Primenom na tačke jedinične kružnice izvedene jednakosti postaju mnogo kraće i efektnije za rad. Najčešća primena u zadacima biće upravo korišćenje svojstava jedinične kružnice.

U narednoj glavi biće obrađena svojstva sličnih trouglova.

Analogno skalarnom i vektorskom proizvodu geometrijskih vektora u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u ravni definisaćemo pojmove realnog i kompleksnog proizvoda kompleksnih brojeva, dajući mnogo veću težinu izloženoj teoriji u pristupu gemetrijskim problemima.

Osnovne klasične teoreme elementarne geometrije sa dokazima u kompleksnoj koordinatizaciji biće izložena u sledećem poglavlju.

Izložena teorija ima izuzetno dobar pristup izučavanjima svojstava pravilnih mnogouglova.

Na kraju ćemo dati dosta raznovrsnih primera koje ilustruju primenu teorije u kojima se ogleda jednostavnost, efikasnost i elegantnost ove teorije. Trudio sam se da što više primera bude sa takmičenja visokog ranga (savezna, balkanijade i olimpijade) da bi materijal bio zanimljiv i takmičarima kojima bi dao nove ideje za pristup najrazličitijim problemima. Za sve primedbe i sugestije čitaoci mi se mogu obratiti na e-mail **mihailo1994@yahoo.com**.

2 Kompleksni brojevi kao vektori kompleksne ravni

2.1 Kompleksna ravan

Između svih kompleksnih brojeva zadatih u svom **algebarskom obliku**

$$z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R},$$

i svih tačaka kompleksne ravni $T(x, y)$ postoji obostrano jednoznačno preslikavanje u vidu:

$$z = x + iy \longmapsto M(x, y).$$

Definicija 1. *Broj x se naziva **realni deo kompleksnog broja** z i označava se sa $x = Re(z)$ a broj y se naziva **imaginarni deo kompleksnog broja** z i označava se sa $y = Im(z)$.*

Definicija 2. ***Konjugovani kompleksni broj** kompleksnog broja $z = x + iy$, $x,\ y \in \mathbb{R}$ je kompleksni broj $\overline{z} = x - iy$.*

Definicija 3. *Rastojanje broja $z \in \mathbb{C}$ od koordinatnog početka naziva se **moduo kompleksnog broja** z i označava se sa $|z|$.*

Teorema 2.1. *Moduo kompleksnog broja z jednak je $|z| = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)}$.*

Dokaz. Dokaz sledi direktno primenom **Pitagorine**[1] **teoreme**. □

[1] Pitagora (oko 570 p.n.e.–495 p.n.e.), veliki starogrčki matematičar i filozof

Svaki kompleksan broj $z \neq 0$ se pored svog algebarskog oblika može prikazati i u svom **trigonometrijskom obliku**

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Teorema 2.2. *Ako je $0 \neq z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi,\, \pi]$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja z onda je*

$$\overline{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Dokaz. Dokaz je trivijalan pa ćemo ga izostaviti. □

Trigonometrijski zapis kompleksnih brojeva je naročito pogodan za izvođenje osobina geometrijskih pojmova.

2.2 Konvencija

Definicija 4. ***Afiks*** *kompleksnog broja z je odgovarajuća tačka u kompleksnoj ravni kojoj odgovara broj z.*

Od sada, ukoliko nije drugačije navedeno, afikse kompleksnih brojeva ćemo označavati malim slovima latinice $a, b, c, \ldots$.

Teorema 2.3. *(i) Tačka a pripada realnoj osi kompleksne ravni akko je $a = \overline{a}$.*
(ii) Tačka a pripada imaginarnoj osi kompleksne ravni akko je $a = -\overline{a}$.
(iii) $|z| = 1$ akko je $z\overline{z} = 1$.
(iv) Ako je $|z| = 1$ onda je $Re(z) = \frac{z^2+1}{2z}$ i $Im(z) = \frac{z^2-1}{2iz}$.

Dokaz. Dokaz je trivijalan, pa ćemo ga izostaviti. □

Svaki kompleksan broj $z \neq 0$ se može predstaviti i u svom **eksponencijalnom obliku**

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

2.3 Vektorska interpretacija kompleksnih brojeva

Svaki kompleksan broj mozemo shvatiti kao vektor čiji je vrh sam taj kompleksan broj a početak koordinatni početak tj. tačka (0,0). Odatle sledi da kompleksan broj $a+b$ u kompleksnoj ravni odgovara temenu paralelograma konstruisanog nad vektorima kompleksnih brojeva a i b. Rezonujući na isti način kompleksan broj $a-b$ možemo shvatiti kao kompleksan broj koji odgovara temenu paralelograma konstruisanog nad vektorima kompleksnih brojeva a i $-b$.

2.3.1 Dužina duži

Konstatovali smo da ako imamo dva različita kompleksna broja a i b da duž određena brojevima 0 i $a+b$ predstavlja jednu dijagonalu paralelograma a duž određenu tačkama a i b predstavlja drugu dijagonalu paralelograma konstruisanog nad vektorima odredddenim tačkama a i 0 i tačkama b i 0. Kada bi vektor određen tačkama a i b translirali u koordinatni početak on bi bio određen tačkama 0 i $b-a$. Kako translacija, kao izometrijska transformacija, čuva raspored tačaka, ona čuva i dužinu te imamo da je dužina duži određena kompleksnim brojevima a i b jednaka modulu njihove razlike. Ovime smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.4. *Dužina duži određene kompleksnim brojevima a i b je*

$$d(a,b)=|b-a|.$$

2.3.2 Translacija

Posmatrajmo translaciju kompleksne ravni za vektor $\overrightarrow{AB}$ koji tačku z preslikava u tačku z'. Tada je

$$\overrightarrow{OZ'}=\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{AB}$$

odakle sledi da je

$$z'=z+(b-a).$$

Ovime smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.5. *Tačka z se translacijom za vektor određen tačkama a i b preslikava u tačku*

$$z'=z+(b-a).$$

2.3.3 Centralna simetrija

Preslikajmo kompleksan broj z u odnosu na kompleksan broj a. Tada je

$$\overrightarrow{Z'A} = \overrightarrow{AZ}$$

odakle dobijamo da je

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OA}$$

tj.

$$z' = 2a - z.$$

Ovim smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.6. *Kompleksan broj z se centralnom simetrijom u odnosu na kompleksnan broj a preslikava u kompleksan broj*

$$z' = 2a - z.$$

2.3.4 Podela duži u datom odnosu

Neka su date dve različite tačke a i b. Tada ako tačka c pripada pravoj ab i važi

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

kažemo da tačka c deli duž ab u odnosu λ. Nađimo koordinatu tačke c u zavisnosti od koordinata tačaka a i b i realnog broja λ. Imamo da je

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Zapisano preko kompleksne notacije imamo da je

$$c - a = \lambda(b - c) \Leftrightarrow c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Ovime smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.7. *Ako tačka c deli duž ab u odnosu $\lambda \neq -1$ onda tačka c ima koordinatu*

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Središte duži

Ako u jednačini za podelu duži u datom odnosu uvrstimo da je $\lambda = 1$ dobijamo da je kompleksna koordinata sredista duži određene kompleksnim brojevima a i b jednaka

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Težište trougla

Neka je kompleksna koordinata težišta trougla abc tačka t. Da bismo dobili koordinatu tačke t prvo izrazimo koordinatu bilo kojeg središta stranica trougla abc. Uzmimo, bez umanjenja opštosti, na primer tačku $s = \frac{a+b}{2}$. Koristeći se poznatim osobinama trougla imamo da tačka t deli duž sc u odnosu $2:1$. Dakle ovde imamo da je $\lambda = 2$. Uvrstimo li ovo u jednačinu za podelu duži u datom odnosu, dobijamo da je koordinata težišta

$$t = \frac{a+b+c}{3}.$$

Veza ortocentra, težišta i temena trougla

U praktičnim primenama, posebno je značajna veza između centra opisane kružnice, ortocentra i temena trougla koju nam pruža sledeća

Teorema 2.8. *Za trougao čija su temena kompleksni brojevi a, b i c, njegov centar opisane kružnice tačka o i ortocentar tačka h važi*

$$h + 2o = a + b + c.$$

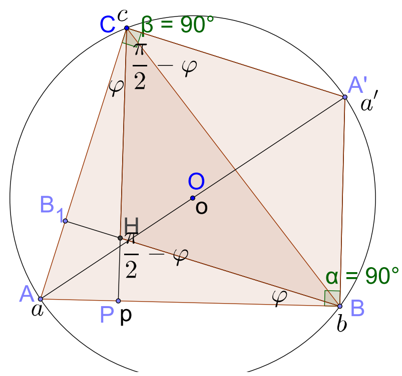
Dokaz. Preslikajmo tačku a u tačku a' u odnosu na tačku o. Koordinate tačke a' je, kooristeći se centralnom simetrijom, $a' = 2o - a$.

Kako je $\angle aba' = \frac{\pi}{2}$, kao ugao nad prečnikom kruga. Odatle sledi da su prave ch i $a'b$ paralelne. Neka je $\angle abh = \varphi$. Tada je $\angle ach = \varphi$ kao uglovi sa normalnim kracima. Kako je i $\angle aca' = \frac{\pi}{2}$ kao ugao nad prečnikom kružnice, odatle imamo da $\angle hca' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Neka je p podnožje normale iz tačke c na stranicu ab. Sa druge strane imamo da je $\angle phb = \frac{\pi}{2} - \varphi$ pa odatle imamo da važi $\angle hca' = \angle phb$ pa odatle dobijamo da su prave hb i ca' paralelne, pa je četvorougao $hca'b$ paralelogram.

Kako je četvorougao $hca'b$ paralelogram imamo da važi

$$\frac{b+c}{2} = \frac{h+a'}{2} = \frac{h+2o-a}{2}$$

a odatle imamo da je $h + 2o = a + b + c$. □



Slika 1: Ilustracija uz Teoremu 2.8

2.3.5 Rotacija tačke

Neka je u kompleksnoj ravni data tačka $z \neq 0$ u svom trigonometrijskom obliku $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Koordinate tačke z' dobijene rotacijom tačke z za ugao φ daje sledeća

Teorema 2.9. *Koordinata tačke $z \neq 0$ zarotirane za ugao φ oko koordinatnog početka je*

$$z' = ze^{i\varphi}$$

gde je

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Dokaz. Pomnožimo li kompleksan broj $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ sa $\cos\varphi + i\sin\varphi$ koristeći se **Moavrovom** [2] **formulom** [3] dobijamo da je

$$z' = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi))$$

odakle sledi tvrđenje. □

Naredna teorema predstavlja uopštenje teoreme 2.9 jer daje koordinatu tačke koja rotira oko tačke koja nije koordinatni početak.

[2] Abraham de Moivre (1667-1754), francuski matematičar

[3] Ako je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, onda za svako $n \in \mathbb{Z}$ važi $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Teorema 2.10. *Koordinata tačke $z \neq 0$ zarotirane oko tačke $\xi \neq 0$ za ugao φ je tačka*

$$z' = \xi + e^{i\varphi}(z - \xi).$$

Dokaz. Dokaz ove teoreme svodimo na teoremu 2.9. Translirajmo vektor određen koordinatnim početkom ξ i vrhom z' u koordinatni početak. Ako bi se rotacijom oko tačke ξ tačka z preslikala u z' tada se tačka $z - \xi$ preslikava u tačku $z' - \xi$. Tada po teoremi 2.9 imamo da važi $z' - \xi = e^{i\varphi}(z - \xi)$ odakle sledi da je $z' = \xi + e^{i\varphi}(z - \xi)$. □

2.3.6 Kolinearnost i paralelnost

Počnimo sledećim tvrđenjem:

Teorema 2.11. *Tačke a, b i c su kolinearne akko je broj $\frac{c-a}{b-a}$ realan.*

Dokaz. Posmatrajmo prave, u opštem slučaju određene tačkama a i c i tačkama a i b. Te tri tačke će biti kolinearne akko je ugao φ između pravih ab i ac jednak 0 rad ili π rad.

Koristeći se formulom za rotaciju tačke, izvedenom u prošlom odeljku, imamo da je uslov kolinearnosti tačaka ekvivalentan sa

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{|c-a|}{|b-a|}\, e^{i\varphi},\ \varphi \in \{0, \pi\},$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. □

Napomena 1. *U daljem tekstu, po dogovoru, svuda gde se javlja neki ugao oznaku za **radijansku**[4] **meru ugla** ćemo izostavljati i smatraćemo da je ugao dat u radijanima ako to nije drugačije naglašeno.*

2.3.7 Jednačina prave u kompleksnoj ravni

Iz teoreme 2.11 možemo izvesti jednačinu prave u kompleksnoj ravni. Kako je prava određena dvema različitim tačkama imamo da je bilo koja tačka t sa prave ab, različita od tačaka a i b, kolinearna sa a i b. Odatle po teoremi 2.11 imamo da je

$$\frac{t-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{t-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{t-a}{b-a}\right)}.$$

[4]Jedan radijan je ugao kružnog isečka jedinične kružnice, gde je poluprečnik kružnice jednak dužini odgovarajućeg luka nad tim uglom.

Dakle imamo da je jednakost

$$\frac{t-a}{b-a} = \frac{\overline{t}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

jednačina prave koja je određena tačkama a i b kompleksne ravni. Ekvivalentan oblik jednačine prave kompleksne ravni je

$$\begin{vmatrix} t & \overline{t} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Poslednje se lako može proveriti izračunavanjem vrednosti determinante.

Koristeći se teoremom 2.11 dokazaćemo sledeću teoremu o paralelnosti.

Teorema 2.12. *Prave ab i cd su paralelne akko važi*

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

Dokaz. Veličina $b-a$ predstavlja translaciju vektora određenog početkom a i vrhom b u koordinatni početak. Dakle, prave ab i cd su paralelne akko su paralelne prave određene tačkama 0 i $b-a$ i tačkama 0 i $d-c$. Na osnovu teoreme 2.11 imamo da su te dve prave paralelne akko je broj $\frac{b-a}{d-c}$ realan, što je ekvivalentno sa

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

□

2.3.8 Ortogonalnost

Na sličan način dolazimo do uslova ortogonalnosti dve prave.

Teorema 2.13. *Prave određene kompleksnim brojevima ab i cd su ortogonalne akko važi*

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}.$$

Dokaz. Koristeći se formulom za rotaciju tačke, imamo da je uslov ortogonalnosti pravih ekvivalentan sa

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{|c-a|}{|b-a|}\, e^{i\varphi},\ \varphi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. □

2.3.9 Koncikličnost

Definicija 5. *Tačke a, b, c i d su* ***konciklične*** *akko pripadaju istoj kružnici.*

Teorema 2.14. *Različite tačke a, b, c i d pripadaju istoj kružnici akko je*

$$\frac{c-b}{a-b} : \frac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Dokaz. Neka su tačke a, b, c i d zadate na kružnici u tom redosledu. Tada je

$$\angle abc + \angle adc \in \{3\pi, \pi\},$$

pa je

$$\arg\frac{c-b}{a-b} + \arg\frac{c-d}{a-d} \in \{3\pi, \pi\},$$

odnosno

$$\arg\frac{c-b}{a-b} - \arg\frac{a-d}{c-d} \in \{3\pi, \pi\},$$

pa je

$$\frac{c-b}{a-b} : \frac{a-d}{c-d} < 0.$$

Za svaki drugi raspored tačaka na kružnici dokaz je analogan.

Četiri tačke možemo rasporediti na kružnici na $(4-1)! = 6$ načina. U tri slučaja je $\frac{c-b}{a-b} : \frac{a-d}{c-d} < 0$, a u tri slučaja je $\frac{c-b}{a-b} : \frac{a-d}{c-d} > 0$. □

3 Svojstva jedinične kružnice

Najveću praktičnu primenu u konkretnim planimetrijskim problemima imaju kompleksni brojevi jediničnog modula koju su dodeljeni temenima nekog mnogougla. Tada su mnoge naizgled neizvodljive računske operacije, kako vremenski tako i tehnički, postale vrlo lagane i elegantno izvedene.

3.1 Tetiva jedinične kružnice

Teorema 3.1. *Za tačke a i b jedinične kružnice važi*

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab.$$

Dokaz. Dokaz je trivijalan i sledi, posle kraćeg računa, koristeći činjenicu da je $\overline{a} = \frac{1}{a}$ i $\overline{b} = \frac{1}{b}$. $\square$

Teorema 3.2. *Ako je tačka c na tetivi ab jedinične kružnice onda važi*

$$\overline{c} = \frac{a+b-c}{ab}.$$

Dokaz. Kako su tačke a, b i c kolinearne odatle po teoremi 2.11 imamo da za prave određene tačkama a i b i tačkama c i a važi

$$\frac{a-b}{a-c} = \overline{\left(\frac{a-b}{a-c}\right)}$$

odakle koristeći se činjenicama $\overline{a} = \frac{1}{a}$ i $\overline{b} = \frac{1}{b}$, kao i u prethodnom dokazu, posle kraćeg računa, dobijamo naše tvrđenje. $\square$

Teorema 3.3. *Podnožje proizvoljne tačke c na tetivu ab jedinične kružnice je tačka*

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c}).$$

Dokaz. Kako je p podnožje normale iz c na tetivu ab imamo da je

$$\frac{c-p}{\overline{c}-\overline{p}} = -\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}.$$

Koristeći uslov $|a| = |b| = 1$ dobijamo da je poslednja jednakost ekvivalentna sa

$$\frac{c-p}{\overline{c}-\overline{p}} = ab \Leftrightarrow \overline{p} = \frac{ab\overline{c}+p-c}{ab}.$$

Kako p pripada tetivi ab jedinične kružnice, imamo po teoremi 3.2 da je

$$\overline{p} = \frac{a+b-p}{ab}.$$

Izjednačavajući poslednje dve jednakosti dobijamo da je

$$\frac{ab\overline{c}+p-c}{ab} = \frac{a+b-p}{ab} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c}).$$

$\square$

Teorema 3.4. *Presek tetiva ab i cd jedniničné kružnice je tačka*

$$t = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Dokaz. Tačka t kao presek tetiva pripada i jednoj i drugoj tetivi. Tada na osnovu teoreme 3.2 imamo da je

$$\bar{t} = \frac{a+b-t}{ab}.$$

Simetrično imamo da je

$$\bar{t} = \frac{c+d-t}{cd}.$$

Izjednačavajući desne strane poslednje dve jednakosti i rešavajući po t, kao i u prethodnom dokazu, dobijamo posle kraćeg računa tvrđenje teoreme. □

3.2 Tangenta jedinične kružnice

Sledeća teorema nam daje koordinatu tačke koja se dobija kao presek dve tangente jedinične kružnice, ako taj presek uopšte i postoji.

Teorema 3.5. *Presek tangenti u tačkama a i b, $a \neq -b$, jedinične kružnice je tačka*

$$\frac{2ab}{a+b}.$$

Dokaz. Označimo presek tangenti sa r. Neka je bez umanjenja opštosti centar kružnice smešten u koordinatni početak. Imamo da je

$$ra \perp a0 \Leftrightarrow \frac{r-a}{\overline{r}-\overline{a}} = -a^2 \Leftrightarrow \overline{r} = \frac{2a-r}{a^2}.$$

Kako je problem simetričan po slovima a i b u odnosu na koordinatni početak i tačku r imamo da je

$$\overline{r} = \frac{2b-r}{b^2}.$$

Iz poslednje dve jednakosti izjednačavanjem i rešavanjem po r dobijamo da je

$$r = \frac{2ab}{a+b}.$$

□

3.2.1 Jednačina tangente jedinične kružnice

Neka je proizvoljna tačka t na tangenti u tački x jedinične kružnice. Tada je prava tx, sa obzirom na klasičnu geometrijsku definiciju tangente na kružnicu, normalna na poluprečnik xo. Koristeći uslov normalnosti iz teoreme 2.13, imamo da važi da je

$$\frac{t-x}{\overline{t}-\overline{x}} = -\frac{x-o}{\overline{x}-\overline{o}}.$$

Kako je $o = 0$, dobijamo da je jednačina tangente u prizvoljnoj tački x jedinične kružnice, koristeći uslov $x\overline{x} = 1$

$$t = x(2 - x\overline{t}).$$

3.3 Jedinični krug upisan u trougao

Kada se u problemima javlja upisani krug trougla, u mnogim situacijama je korisno, a u nekim situacijama i jedino moguće rešenje da se centar upisanog kruga poklapa sa koordinatnim početkom a upisani krug bude jedinični.

Teorema 3.6. *Neka je jedinični krug upisan u trougao abc i neka dodiruje stranice bc, ca i ab u tačkama p, q i r respektivno. Tada važi*

$$a = \frac{2qr}{q+r}, \quad b = \frac{2qr}{q+r}, \quad c = \frac{2pq}{p+q}.$$

Dokaz. Dokaz sledi direktno primenom teoreme 3.5. □

Teorema 3.7. *Neka je jedinični krug upisan u trougao abc, i neka dodiruje stranice bc, ca i ab u tačkama p, q i r respektivno. Tada je ortocentar određen tačkom*

$$h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Dokaz. Neka je koordinatni početak u tački centra opisane kružnice. Odatle imamo, po teoremi 2.8, da za $o = 0$ važi $h = a + b + c$, što je po teoremi 3.6

$$h = \frac{2qr}{q+r} + \frac{2rp}{r+p} + \frac{2pq}{p+q}$$

odakle se dovođenjem na zajednički imenilac, posle kraćeg računa dobija tvrđenje teoreme. □

Teorema 3.8. *Neka je jedinični krug upisan u trougao abc i neka dodiruje stranice bc, ca i ab u tačkama p, q i r respektivno. Tada za centar opisanog kruga trougla abc važi*

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Dokaz. Po teoremi 2.8 imamo da važi

$$h + 2o = a + b + c.$$

Odatle imamo da je

$$o = \frac{a+b+c-h}{2}.$$

Koristeći teoreme 3.6 i 3.7 imamo da važi

$$o = \frac{1}{2}\left(\frac{2qr}{q+r} + \frac{2qr}{q+r} + \frac{2pq}{p+q} - \frac{2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}\right)$$

odakle se dovođenjem na zajednički imenilac, uz kraći račun dobija tvrđenje teoreme. □

3.4 Trougao upisan u jediničnu kružnicu

U praktičnim problemima neretko se javlja više kružnica. U mnogim situacijama kada se javlja upisana i pripisana kružnica trougla u kombinaciji sa opisanom kružnicom trougla, korisno, a nekada i jedini mogući načnin za rešavanja problema je korišćenjem sledećih tvrđenja.

Teorema 3.9. *Za svaki trougao abc upisan u jediničnu kružnicu, postoje brojevi u, v i* ω *takvi da je* $a = u^2$, $b = v^2$ *i* $c = \omega^2$, *a središta lukova ab, bc i ca koja ne sadrže tačke c, a i b respektivno, su tačke* $-uv$, $-v\omega$ *i* $-\omega u$ *respektivno.*

Dokaz. Prvi deo tvrđenja teoreme je trivijalan. Dokazaćemo samo drugi deo tvrđenja. Naglasimo prvo da je $|a| = |b| = |c| = |u| = |v| = |\omega| = 1$. Dokažimo sada sledeće pomoćno tvrđenje:

Lema 1. *Prava iz proizvoljnog temena trougla, koja sadrži i centar upisane kružnice, polovi luk određen sa druga dva temena, koji ne prolazi kroz prvo teme.*

Dokaz leme 1. Neka je prava, bez gubljenja opštosti, konstruisana iz temena $a = u^2$. Neka je presečna tačka te prave i opisane kružnice tačka x, gde je $|x| = 1$. Kako je $\angle cox = 2\angle cax$, kao centralni i periferijski ugao nad tetivom cx. Simetrično imamo da je $\angle xob = 2\angle xab$, kao centralni i periferijski ugao nad tetivom bx. Odatle imamo da je $\angle cox = \angle xob$, zbog toga što je $\angle cax = \angle xab$. Odatle imamo da ako su jednaki centralni uglovi nad tetivama, onda su jednake i tetive pa su jednaki i lukovi nad tim tetivama, odakle imamo naše pomoćno tvrđenje. $\square$

Neka je

$$a = e^{i(2\alpha)}, \quad b = e^{i(2\beta)}, \quad c = e^{i(2\gamma)}, \quad 0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq \pi.$$

Odaberimo brojeve u, v i ω kao:

$$u = e^{i\alpha}, \quad v = e^{i(\beta+\pi)}, \quad \omega = e^{i\gamma}.$$

Odavde imamo da je redom

$$-uv = e^{i(\alpha+\beta)}, \quad -v\omega = e^{i(\beta+\gamma)}, \quad -\omega u = -e^{i(\alpha+\gamma)}.$$

Kako su uglovi koji odgovaraju središtima lukova ab, bc i ca koja ne sadrže tačke c, a i b respektivno uglovi redom $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\alpha + \gamma + \pi$ i prethodnih jednakosti imamo tvrđenje teoreme.

$\square$

Teorema 3.10. *Uz prethodno opisane uslove u teoremi* 3.9 *za centar upisane kružnice i važi*

$$i = -(uv + v\omega + \omega u).$$

Dokaz. Dokažimo prvo sledeću pomoćno tvrđenje:

Lema 2. *Neka je dat trougao sa svojstvima iz teoreme* 3.8. *Tada se ortocentar trougla dobijenog konstrusanjem duži između tačaka koja su središta lukova poklapa sa centrom upisane kružnice trougla abc.*

Dokaz leme 2. Neka su redom $-v\omega = x$, $-u\omega = y$, $-uv = z$, $\angle cax = \angle xaz = \alpha$, $\angle aby = \angle ybc = \beta$ i $\angle acz = \angle zcb = \gamma$. Tada je $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Označimo sa p presek duži ax i stranice yz trougla xyz. Kako je $\angle yxa = \beta$ i $\angle xyz = \alpha + \gamma$, odatle imamo da je $\angle ypx = \frac{\pi}{2}$. Analogno dobijamo i za ostala dva podnožja. Odatle imamo da je tačka i ortocentar trougla xyz, tj. trougla određenog tačkama $-uv$, $-v\omega$ i $-\omega u$, čime smo dokazali lemu. $\square$

Koristeći prethodnu lemu dobijamo, uz tvrđenje teoreme 2.8 i $o \equiv 0$, da je ortocentar trougla određen sa

$$h \equiv i = x + y + z = -uv - v\omega - \omega u = -(uv + v\omega + \omega u)$$

čime smo dokazali teoremu. □

Definicija 6. ***Pripisana kružnica*** *trougla je kružnica koja spolja dodiruje stranicu trougla i produžetke druge dve stranice tog trougla.*

Teorema 3.11. *Centar pripisane kružnice stranice ab trougla abc je određen izrazom*

$$j = -uv + v\omega + \omega u$$

gde su brojevi u, v i ω brojevi iz teoreme 3.9.

Dokaz. Dokaz sledi trivijalno iz ortogonalnosti pravih ib i simetrale spoljašnjeg ugla trougla abc kod temena b i pravih ia i simetrale spoljašnjeg ugla trougla abc kod temena a. □

3.5 Alternativni odabiri koordinatnih početaka

U praktičnim primenama kada je jedno teme trougla kompleksan broj 0 a ostala dva prizvoljna, operativne formule za koordinatu ortocentra i centra opisanog kruga daje sledeća

Teorema 3.12. *Ukoliko je jedno teme trougla kompleksan broj 0 a ostala dva kompleksni brojevi x i y tada ortocentar h i centar opisane kružnice o imaju koordinate*

$$h = \frac{(\overline{x}y + x\overline{y})(x - y)}{x\overline{y} - \overline{x}y} \quad \text{i} \quad o = \frac{xy(\overline{x} - \overline{y})}{\overline{x}y - x\overline{y}}.$$

Dokaz. Dokazaćemo prvo formulu za ortocentar.

Neka je prava $xt \perp 0y$. Tada imamo da za tačke t sa te prave važi

$$\frac{x - t}{\overline{x} - \overline{t}} = -\frac{y - 0}{\overline{y} - \overline{0}} = -\frac{y}{\overline{y}}.$$

Rešavajući po $\overline{t}$ dobijamo

$$\overline{t} = \frac{x\overline{y} + \overline{x}y - t\overline{y}}{y}.$$

Simetrično imamo izraz za skup tačaka t čija je prava yt normalna na $0x$. Dakle

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}y + x\overline{y} - t\overline{x}}{x}.$$

Izjednačavajući poslednja dva rezultata imamo da je

$$\frac{x\overline{y} + \overline{x}y - t\overline{y}}{y} = \frac{\overline{x}y + x\overline{y} - t\overline{x}}{x}.$$

Rešavajući po t dobijamo prvi deo tvrđenja naše teoreme.

Dokazaćemo sada na sličan način formulu za centar opisane kružnice trougla iz drugog dela teoreme. Kako se centar opisane kružnice dobija u preseku simetrala stranica, imamo da za svaku tačku t sa simetrale stranice $0x$ važi

$$\frac{t - \frac{x}{2}}{\overline{t} - \overline{(\frac{x}{2})}} = -\frac{x - 0}{\overline{x} - \overline{0}} = -\frac{x}{\overline{x}}.$$

Rešavajući po $\overline{t}$ dobijamo da je

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}(x - t)}{x}.$$

Simetrično imamo da za svaku tačku t sa simetrale stranice $0y$ važi

$$\bar{t} = \frac{\overline{y}(y - t)}{y}.$$

Iz poslednja dva rezultata izjednačavanjem imamo

$$\frac{\overline{x}(x - t)}{x} = \frac{\overline{y}(y - t)}{y}.$$

Rešavanjem po t dobijamo drugi deo tvrđenja teoreme. □

4 Sličnost trouglova

4.1 Orijentisanost trouglova i uglova

4.1.1 Orijentisanost trouglova

Definicija 7. *Za trougao se kaže da je **orijentisan** ako su njegova temena uređenja na specifičan način.*

Definicija 8. *Pozitivan matematički smer je smer kretanja od prvog, preko drugog i trećeg do četvrtog kvadranta koordinatnog sistema. U suprotnom se kaže negativan matematički smer.*

Definicija 9. *Trougao je* ***pozitivno*** *ili* ***direktno orijentisan****, ako su njegova temena, označnena u rastućem abecednom redosledu, poređana u pozitivnom matematičkom smeru.*

4.1.2 Orijentisanost uglova

Definicija 10. *Za ugao $\angle aob$ se kaže da je* ***pozitivno*** *ili* ***direktno orijentisan*** *ako su tačke a i b uređene u pozitivnom matematičkom smeru ili ako je trougao aob pozitivno orijentisan.*

4.1.3 Mera ugla

Sada ćemo dati precizno matematičko tvrđenje koje daje meru ugla koji je zadat u kompleksnoj koordinatizaciji, a do sada smo je intuitivno koristili gde su stvari bile očigledne. Naravno, kao i do sada ako to ne bude drugačije naglašeno, svi uglovi su dati u radijanskoj meri gde oznaku rad izostavljamo.

Teorema 4.1. *Mera pozitivno orijentisanog ugla $\angle aob$, gde je o koordinatni početak je* $\arg \frac{a}{b}$.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz Moavrove formule za množenje kompleksnih brojeva zadatih u trigonometrijskom obliku stim što je ovde jedan kompleksni broj broj a a drugi $\frac{1}{b}$. $\square$

Sada ćemo dati uopštenje ove teoreme kada teme ugla nije koordinatni početak nego bilo koja tačaka kompleksne ravni.

Teorema 4.2. *Ako su a, b i c tri različite tačke kompleksne ravni, onda je mera pozitivno orijentisanog ugla $\angle bac$ jednaka* $\arg \frac{c-a}{b-a}$.

Dokaz. Translacijom za vektor -$\overrightarrow{oa}$ tačke a, b i c se preslikavaju u tačke o, $b-a$ i $c-a$, pri čemu se čuva mera transliranog ugla. Po teoremi 4.1 onda imamo da je $\angle bac = \arg \frac{c-a}{b-a}$, čime smo dokazali našu teoremu. $\square$

Napomena 2. *Imajući u vidu da su pojmovi usmereni ugao i orijentisani trougao uopštenje pojma klase ekvivalencije usmerene duži, možemo smatrati da su ovi novouvedeni pojmovi uopštenja dobro poznatih geometrijskih vektora, što se direktno slaže sa interpretacijom kompleksnih brojeva kao vektora kompleksne ravni.*

4.2 Sličnost orijentisanih trouglova

Uvodeći formalno pojmove orijentisanosti uglova i trouglova možemo dati sledeće tvrđenje.

Teorema 4.3. *Trouglovi $a_1a_2a_3$ i $b_1b_2b_3$ istih orijentacija su slični akko je*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

Dokaz. Trougao $a_1a_2a_3$ je sličan sa trouglom $b_1b_2b_3$ po stavovima sličnosti, akko je

$$\frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 - a_3|} = \frac{|b_1 - b_2|}{|b_1 - b_3|} \quad \text{i} \quad \angle a_3a_1a_2 = \angle b_3b_1b_2,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 - a_3|} = \frac{|b_1 - b_2|}{|b_1 - b_3|} \quad \text{i} \quad \arg\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} = \arg\frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}.$$

Poslednje dve jednakosti su ekvivalentne sa

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$$

čime smo dokazali teoremu. □

Uslov poslednje teoreme se može iskazati i u obliku

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lako je proveriti da za trouglove određene uređenim parovima tačaka $(0, 1, 2i)$ i $(0, -i, -2)$ ovaj uslov nije zadovoljen mada su oni očigledno slični. Ovi trouglovi međutim nisu istih orijentacija.
Za trouglove suprotnih orijentacija važi sledeća

Teorema 4.4. *Trouglovi $a_1a_2a_3$ i $b_1b_2b_3$ suprotnih orijentacija su slični akko je*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b_2} - \overline{b_1}}{\overline{b_3} - \overline{b_1}}.$$

Dokaz. Preslikajmo tačke b_1, b_2 i b_3 u odnosu na realnu osu. Njihove koordinate su onda $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$ i $\overline{b_3}$ respektivno. Trouglovi $b_1b_2b_3$ i $\overline{b_1}\ \overline{b_2}\ \overline{b_3}$ su suprotnih orijentacija pa su trouglovi $a_1a_2a_3$ i $\overline{b_1}\ \overline{b_2}\ \overline{b_3}$ istih orijentacija. Primenjujući teoremu 4.3 dobijamo da važi $\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{\overline{b_2}-\overline{b_1}}{\overline{b_3}-\overline{b_1}}$ što je i trebalo dokazati. □

5 Skalarni i vektorski proizvod u kompleksnoj koordinatizaciji

Sada ćemo definisati dva analogna pojma pojmovima skalarnog i vektorskog proizvoda Analitičke geometrije u Dekartovim [5] koordinatama, izraženih preko kompleksnih koordinata.

Videćemo da će nam to mnogo pomoći oko dokazivanja raznih osobina figura u ravni, a mnoge već dokazane osobine ćemo i potvditi na ovaj način uz analizu složenosti, kako vremenske tako i računske.

5.1 Realan proizvod kompleksnih brojeva

Definicija 11. ***Realan proizvod*** *kompleksnih brojeva a i b, u oznaci $a \cdot b$, je realan broj određen kao*

$$a \cdot b := \frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b}).$$

Teorema 5.1. *Neka su a, b i c proizvoljni kompleksni brojevi. Realan proizvod dva kompleksna broja ima sledeća svojstva:*

1. $a \cdot a = |a|^2$;
2. $a \cdot b = b \cdot a$;
3. $\overline{a \cdot b} = a \cdot b$;
4. $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b) = a \cdot (\alpha b)$ *za svako* $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
6. $a \cdot b = 0$ *akko je prava oa normalna na pravu ob, gde je o koordinatni početak.*

Dokaz. Dokaz je trivijalan, sledi iz definicije realnog proizvoda, pa ćemo ga izostaviti. □

[5] Rene Descartes (1596-1650), veliki francuski matematičar i filozof

Napomena 3. *Već smo videli da realan proizvod kompleksnih brojeva a i b predstavlja skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{oa}$ i $\overrightarrow{ob}$. Međutim, realni proizvod kompleksnih brojeva ima još jedan veoma interesantan geometrijski smisao. Realan proizvod kompleksnih brojeva a i b jednak je potenciji koordinatnog početka o kompleksne ravni u odnosu na krug čiji je prečnik ab. Zaista, ako je $m = \frac{a+b}{2}$, potencija tačke o u odnosu na krug sa središtem u tački m i poluprečnikom $r = \frac{|a-b|}{2}$ jednaka je $|o-m|^2 - (\frac{|a-b|}{2})^2 = |\frac{a+b}{2}|^2 - |\frac{a-b}{2}|^2 = \frac{(a+b)(\overline{a}+\overline{b})}{4} - \frac{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})}{4} = \frac{a\overline{b}+a\overline{b}}{2} = a \cdot b$.*

Teorema 5.2. *Prave ab i cd su normalne akko je $(b-a)\cdot(c-d) = 0$.*

Dokaz. Translirajmo prave u koordinatni početak. Tada je prva prava određena tačkama 0 i $b-a$ a druga tačkama 0 i $d-c$. Primenimo sada teoremu 5.1, stavku (6), odakle dobijamo tvrđenje naše teoreme. □

Napomena 4. *Sada je jasno kako primenom realnog proizvoda na drugi način može da se izvede uslov ortogonalnosti dveju pravih iz teoreme* 2.13.

5.2 Kompleksan proizvod kompleksnih brojeva

Definicija 12. *Kompleksan broj*

$$a \times b := \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b})$$

nazivamo ***kompleksan proizvod*** *kompleksnih brojeva a i b.*

Lako je proveriti da veličina $|a \times b|$ ima isti smisao kao kod vektorskog proizvoda u Dekartovim koordinatama.

Teorema 5.3. *Neka su a, b i c kompleksni brojevi. Tada kompleksan proizvod ima sledeća svojstva:*

1. $\overline{a \times b} = -a \times b$ *;*
2. $a \times b = 0$ *akko je* $a = 0$ *ili je* $b = 0$ *ili je* $a = \lambda b$*, gde je* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *;*
3. $a \times b = -b \times a$ *;*
4. $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$ *za svako* $\alpha \in \mathbb{R}$ *;*
5. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$*.*

Dokaz. Dokaz teoreme je trivijalan i sledi iz definicije kompleksnog proizvoda. $\square$

Teorema 5.4. *Neka su a i b dve različite tačke kompleksne ravni različite od koordinatnog početka. Tada važi da je:*

$$a \times b = \begin{cases} 2iP_{oab}, & \text{ako je trougao } oab \text{ pozitivno orijentisan,} \\ -2iP_{oab}, & \text{ako je trougao } oab \text{ negativno orijentisan,} \end{cases}$$

gde je P_{xyz} površina trougla određenog tačkama x, y i z.

Dokaz. Ako je trougao aob pozitivno orijentisan, onda je

$$\begin{aligned} 2iP_{aob} &= i|o-a||o-b|\sin\angle aob = i|a||b|\sin\left(\arg\frac{b}{a}\right) = \\ &= i|a||b|Im\left(\frac{b}{a}\right)\frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2}|a|^2\left(\frac{b}{a} - \frac{\overline{b}}{\overline{a}}\right) = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) = a \times b. \end{aligned}$$

U protivnom, trougao oba je pozitivno orijentisan, pa je

$$2iP_{oab} = b \times a = -a \times b.$$

$\square$

Sledeća teorema daje geometrijski smisao kompleksnog proizvoda, i značajna je kod problema sa površinama figura u ravni zadatih u kompleksnoj koordinatizaciji.

Teorema 5.5. *Ako su a, b i c tri različite tačke u kompleksnoj ravni, tada je:*

$$P_{abc} = \begin{cases} \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{trougao } abc \text{ pozitivno orijentisan,} \\ -\frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{trougao } abc \text{ negativno orijentisan.} \end{cases}$$

Dokaz. Da bismo pokazali ovo tvrđenje, translirajmo trougao abc za vektor $-\overrightarrow{oc}$. Trougao abc se ovom translacijom preslikao u trougao određen temenima $a-c$, $b-c$, 0 respektivno. Ova dva trougla su podudarna i istih orijentacija. Ako je trougao abc pozitivno orijentisan, onda je

$$P_{abc} = P_{a'b'c'} = \frac{1}{2i}(a-c)\times(b-c) = \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a)$$

što je i trebalo dokazati. Slično se pokazuje i slučaj kada je trougao negativno orijentisan. $\square$

Teorema 5.6. *Površina pozitivno orijenisanog trougla abc izražena preko determinante je:*

$$P_{abc} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Dokaz sledi iz izračunavanja vrednosti determinante, čija se vrednost svodi na vrednost površine u teoremi 5.4. □

Teorema 5.7. *Neka su a, b i c tri različite tačke kompleksne ravni. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

1. *Tačke a, b i c su kolinearne ;*
2. $(b-a)\times(c-a)=0$ *;*
3. $a\times b+b\times c+c\times a=0$.

Dokaz. Tačke a, b i c su kolinearne akko je $P_{abc}=0$, tj. ako je $a\times b+b\times c+c\times a=0$. Poslednja jednakost je ekvivalentna sa $(b-a)\times(c-a)=0$. □

6 Klasične teoreme elementarne geometrije

U ovom poglavlju ćemo izložiti neke klasične teoreme elementarne geometrije. Analizirajući dokaze koji slede, čitalac će polako steći uvid u brzinu i eleganciju ove metode rešavanja geometrijskih problema.

Teorema 6.1. ***(Nejednakost trougla[6])*** *U svakom trouglu je zbir dužina dve stranice veći od dužine treće.*

Dokaz. Neka je jedno teme trougla smešteno, bez umanjenja opštosti, u koordinatni početak, drugo ima koordinatu a a treće $a+b$. Treba pokazati da važi $|a+b|<|a|+|b|$. Kvadriranjem poslednje nejednakosti dobijamo njoj ekvivalentnu nejednakost

$$(a+b)(\overline{a}+\overline{b})<a\overline{a}+2|a||b|+b\overline{b}\Leftrightarrow a\overline{b}+\overline{a}b<2|a||b|.$$

Kako su a, $b\neq 0$ i $a\neq b$, možemo ih zapisati u trigonometrijskom obliku kao

$$a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha),\ \alpha\in(-\pi,\pi]\quad \text{i}\quad b=|b|(\cos\beta+i\sin\beta),\ \beta\in(-\pi,\pi].$$

[6] U opštem slučaju za svako z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ važi $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Sada imamo da je

$$a\overline{b}+\overline{a}b = |a||b|(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta))+|a||b|(\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha)) =$$
$$= 2|a||b|\cos(\alpha-\beta).$$

Kako je $(\forall x \in \mathbb{R})\,|\cos x| \leq 1$, imamo da je $2|a||b|\cos(\alpha-\beta) < 2|a||b|$. Primetimo da jednakost ne može da važi jer je $\alpha \neq \beta$. $\square$

Teorema 6.2. ***(Njutn*** [7]***)*** *Za svaki tangentni četvorougao važi da su mu sredine dijagonala kolinearne sa centrom kruga oko koga je on opisan.*

Dokaz. Neka je jednačina date kužnice $z\overline{z} = 1$. Neka su temena četvorougla tačke a_0, b_0, c_0 i d_0. Neka su, dalje, tačke dodira kružnice sa stranicama a_0b_0, b_0c_0, c_0d_0 i d_0a_0 tačke a, b, c i d respektivno. Tada, po teoremi 3.6, imamo da važi

$$a_0 = \frac{2ad}{a+d},\ b_0 = \frac{2ab}{a+b},\ c_0 = \frac{2bc}{b+c},\ d_0 = \frac{2cd}{c+d}.$$

Za tačke m i n važi:

$$m = \frac{1}{2}(a_0+c_0) = \frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c}, \quad n = \frac{1}{2}(b_0+d_0) = \frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d},$$
$$\frac{m}{n} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}.$$

Kako važi $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$ i $\overline{d} = \frac{1}{d}$, dobijamo da je $\frac{m}{n} = \frac{\overline{m}}{\overline{n}}$, što je ekvivalentno sa uslovom kolinearnosti iz teoreme 2.11, čime je dokazana **Njutnova teorema**. $\square$

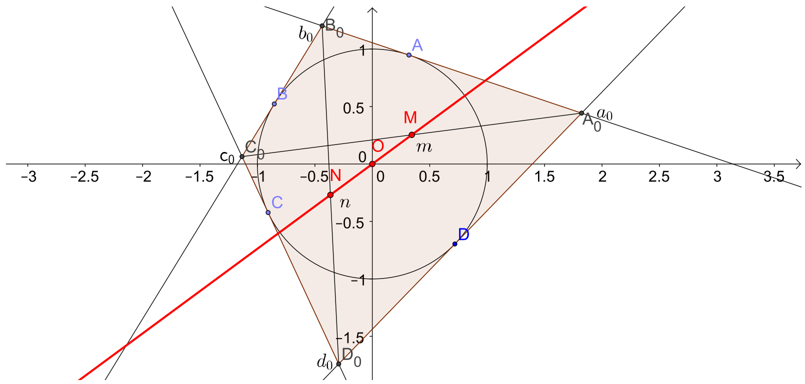
Teorema 6.3. ***(Gaus*** [8]***)*** *Ako neka prava seče prave koje sadrže stranice BC, CA i AB trougla ABC, u tačkama A_1, B_1 i C_1 respektivno, tada su središta duži AA_1, BB_1 i CC_1 kolinearne tačke.*

Dokaz. Neka tačkama A_1, B_1 i C_1 odgovaraju redom kompleksni brojevi a_1, b_1 i c_1. Uslovi kolinearnosti uređenih trojki tačaka (a, b_1, c), (c, a_1, b), (b, c_1, a) i (a_1, b_1, c_1) su

$$\begin{aligned}
a(\overline{b_1}-\overline{c})+b_1(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b_1}) &= 0,\\
c(\overline{a_1}-\overline{b})+a_1(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a_1}) &= 0,\\
b(\overline{c_1}-\overline{a})+c_1(\overline{a}-\overline{b})+a(\overline{b}-\overline{c_1}) &= 0,\\
a_1(\overline{b_1}-\overline{c_1})+b_1(\overline{c_1}-\overline{a_1})+c_1(\overline{a_1}-\overline{b_1}) &= 0.
\end{aligned}$$

[7] Isaac Newton (1643-1727), veliki engleski matematičar i fizičar

[8] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), veliki nemački matematičar



Slika 2: Njutnova teorema

Imamo da za središta m, n i p važi

$$m = \frac{1}{2}(a + a_1),\ n = \frac{1}{2}(b + b_1),\ p = \frac{1}{2}(p + p_1).$$

Traženi uslov kolinearnosti tačaka m, n i p je

$$m(\overline{n} - \overline{p}) + n(\overline{p} - \overline{m}) + p(\overline{m} - \overline{n}) = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$(a+a_1)(\overline{b}+\overline{b_1}-\overline{c}-\overline{c_1})+(b+b_1)(\overline{c}+\overline{c_1}-\overline{a}-\overline{a_1})+(c+c_1)(\overline{a}+\overline{a_1}-\overline{b}-\overline{b_1}) = 0,$$

što je, kada se izmnoži

$$\begin{aligned}
& a(\overline{b_1} - \overline{c}) + a(\overline{b} - \overline{c}) + a_1(\overline{b_1} - \overline{c_1}) + a_1(\overline{b} - \overline{c}) + b(\overline{c_1} - \overline{a}) + \\
+ \quad & b(\overline{c} - \overline{a_1}) + b_1(\overline{c_1} - \overline{a_1}) + b_1(\overline{c} - \overline{a}) + c(\overline{a_1} - \overline{b}) + c(\overline{a} - \overline{b_1}) + \\
+ \quad & c_1(\overline{a_1} - \overline{b_1}) + c_1(\overline{a} - \overline{b}) = 0.
\end{aligned}$$

Poslednja jednakost se dobija kada se saberu gore postavljena četiri uslova kolinearnosti trojki tačaka, čime je dokazana **Gausova teorema**. □

Teorema 6.4. ***(Simson*** [9]***)*** *Ako se iz ma koje tačke opisane kružnice oko trougla abc konstruišu podnožja normala na prave koje određuju stranice trougla, tada su te tri tačke kolinearne.*

[9] Robert Simson (1687-1768), škotski matematičar

Dokaz. Neka je kružnica opisana oko trougla abc jedinična kružnica. Neka su podnožja normala iz tačke m na prave bc, ca i ac respektivno tačke a_1, b_1 i c_1. Tada po teoremi 3.3 imamo da važi:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b+c+m-\frac{bc}{m}\right),\ b_1 = \frac{1}{2}\left(a+c+m-\frac{ac}{m}\right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a+b+m-\frac{ab}{m}\right).$$

Iz njih dobijamo:

$$\frac{a_1-c_1}{b_1-c_1} = \frac{c-a+\frac{ab-bc}{m}}{c-b+\frac{ab-ac}{m}} = \frac{(c-a)(m-b)}{(c-b)(m-a)} = \frac{\overline{a_1}-\overline{c_1}}{\overline{b_1}-\overline{c_1}},$$

pa su prema teoremi 2.11 tačke a_1, b_1 i c_1 kolinearne, čime je dokazana **Simsonova teorema**. □

Napomena 5. *Prava iz Simsonove teoreme je u teoriji poznata kao **Simsonova prava**.*

Teorema 6.5. ***(Ojler[10])*** *U svakom trouglu su ortocentar, težište i centar opisane kružnice kolinearne tačke i važi da je rastojanje ortocentra i težišta dva puta veće od rastojanja težišta i centra opisane kružnice.*

Dokaz. Neka je tačka h ortocentar, t težište i o centar opisane kružnice trougla abc. Dokazaćemo da važi

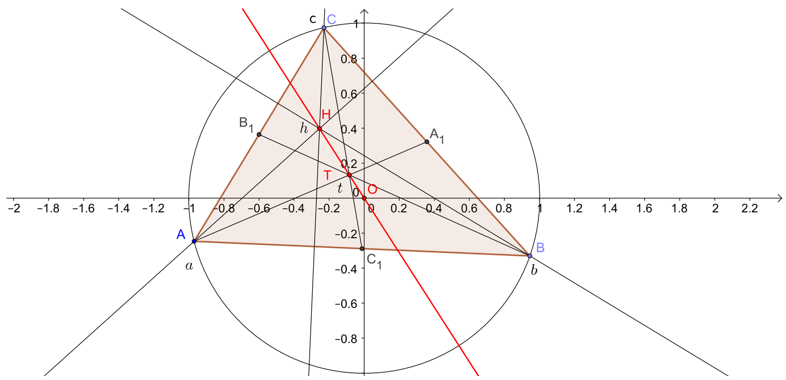
$$t = \frac{h+2o}{1+2} = \frac{h+2o}{3}.$$

Pokazujući ovu jednakost, po teoremi 2.7, biće dokazane oba dela iz tvrđenja teoreme istovremeno. Neka je bez gubljenja opštosti, $o = 0$ i opisana kružnica jedinična. Tada imamo da važi:

$$t = \frac{1}{3}(h+2o) = \frac{a+b+c}{3}$$

čime je dokazana **Ojlerova teorema**. □

[10]Leonhard Paul Euler (1707-1783), veliki švajcarski matematičar



Slika 3: Ojlerova prava

Napomena 6. *Prava iz Ojlerove teoreme poznata je u teoriji kao* ***Ojlerova prava****.*

Teorema 6.6. ***(Paskal*** [11]***)*** *Tačke preseka pravih koje sadrže naspramne stranice tetivnog šetougla su kolinearne.*

Dokaz. Bez gubljenja opštosti, neka je šestougao $abcdef$ upisan u jediničnu kružnicu čiji je centar koordinatni početak.
Na osnovu teoreme 3.4 i $|a| = |b| = |c| = |d| = |e| = |f| = 1$ imamo da važi:

$$\overline{m} = \frac{a+b-(d+e)}{ab-de}, \quad \overline{n} = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}, \quad \overline{p} = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}.$$

Odatle imamo da važi:

$$\overline{m} - \overline{n} = \frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)},$$

i analogno:

$$\overline{n} - \overline{p} = \frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)}.$$

Odavde imamo da je:

$$\frac{\overline{m}-\overline{n}}{\overline{n}-\overline{p}} = \frac{\frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)}}{\frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)}} = \frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

[11] Blaise Pascal (1623-1662), veliki francuski matematičar, fizičar i filozof

Odavde nije teško videti da je $\frac{\overline{m}-\overline{n}}{\overline{n}-\overline{p}} = \overline{(\frac{\overline{m}-\overline{n}}{\overline{n}-\overline{p}})}$, odakle po teoremi 2.11 sledi da su tačke m, n i p, kao preseci iz postavke teoreme, kolinearne tačke, čime je dokazana **Paskalova teorema**. $\square$

Teorema 6.7. ***(Brokar*** [12]***)*** *Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao. Prave AB i CD se seku u tački E, prave AD i BC se seku u tački F a prave AC i BD u tački G. Dokazati da je centar opisane kružnice oko četvorougla $ABCD$ ortocentar trougla EFG.*

Dokaz. Neka je, bez umanjenja opštosti, četvorougao $abcd$ upisan u jediničnu kružnicu. Prema teoremi 3.4 o preseku tetiva jedinične kružnice imamo da važe sledeće jednakosti:

$$e = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd},\ f = \frac{ad(b+c) - bc(a+d)}{ad - bc},$$

$$g = \frac{ac(b+d) - bd(c+a)}{ac - bd}.$$

Da bismo pokazali da je o ortocentar trougla efg, dovoljno je pokazati da je $of \perp eg$ i $og \perp ef$. Zbog simetrije, dokazaćemo samo prvu relaciju. Dakle treba pokazati da važi:

$$\frac{f-o}{\overline{f}-\overline{o}} = -\frac{e-g}{\overline{e}-\overline{g}}.$$

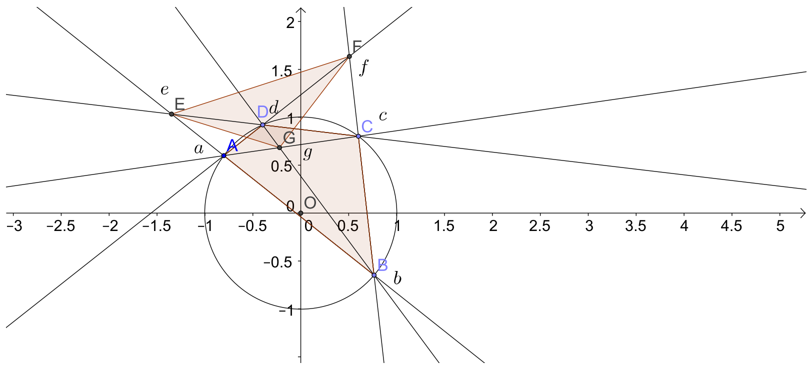
Imamo da važi:

$$\frac{f-o}{\overline{f}-\overline{o}} = \frac{f}{\overline{f}} = \frac{\frac{ad(b+c)+bc(a+d)}{ad-bc}}{\frac{(b+c)-(a+d)}{bc-ad}} = \frac{ad(b+c) - bc(a+d)}{(a+d) - (b+c)}.$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned} e - g &= \frac{(a-d)(ab^2d - ac^2d) + (b-c)(bcd^2 - a^2bc)}{(ab-cd)(ac-bd)} = \\ &= \frac{(a-d)(b-c)((b+c)ad - (a+d)bc)}{(ab-cd)(ac-bd)}. \end{aligned}$$

[12]Henri Brocard (1845-1922), francuski matematičar i meteorolog



Slika 4: Brokarova teorema

Konjugovanjem dobijamo:

$$\begin{aligned}\overline{e} - \overline{g} &= \overline{\left(\frac{(a-d)(b-c)((b+c)ad-(a+d)bc)}{(ab-cd)(ac-bd)}\right)} = \\ &= \frac{(a-d)(b-c)((b+c)-(a+d))}{(ab-cd)(ac-bd)}.\end{aligned}$$

Upoređivanjem dobijenih jednakosti dobijamo traženu jednakost, a time je dokazana **Brokarova teorema**. □

Teorema 6.8. ***(Morli*** [13]***)*** *Preseci naleglih trisektrisa trougla obrazuju jednakostraničan trougao.*

Dokaz. Neka je teme A trougla kompleksan broj 1. Neka temena B i C trougla redom imaju kompleksne koordinate b^3 i c^3, gde je $\arg b > 0$ i $\arg c < 0$ i $|b| = |c| = 1$. Trećine luka AB kome ne pripada tačka C trougla ABC redom imaju kompleksne koordinate b i b^2. Takođe, trećine luka AC kome ne pripada tačka B trougla ABC redom imaju kompleksne koordinate c i c^2. Trećine luka BC kome ne pripada tačka A trougla ABC imaju redom koordinate $b^2c\omega$ i $bc^2\omega^2$ gde je $|\omega| = 1$ i $\omega^3 = 1$. Neka je presek odgovarajućih trisektrisa iz temena 1 i b^3 tačka h. Analogno definišemo tačke g i i.

Po teoremi o preseku dveju tetiva jedinične kružnice, imamo da su koordinate tačaka h, g i i redom tačke

$$h = \frac{\omega b^3 + \omega c - b - b^3 c\omega}{\omega - b}, \quad g = b^2 + bc + c^2 - bc^3 + b^3 c$$

[13]Frank Morley (1860-1937), engleski matematičar

i

$$i = \frac{\omega^2 c^3 + \omega^2 b - c - bc^3\omega^2}{\omega^2 - c}.$$

Izraz u brojiocu tačke h možemo shvatiti kao polinom $P \in \mathbb{C}[b]$, po promenljivoj b. Dakle

$$P(b) = (\omega - c\omega)b^3 - b + \omega c,$$

gde su ω, $c \in \mathbb{C}$ konstante. Kako je $P(\omega) = 0$, imamo po **Bezuovoj** [14] **teoremi** [15] da

$$\omega - b \quad | \quad (\omega - c\omega)b^3 - b + \omega c.$$

Dakle tačka h, koristeći uslov $\omega^3 = 1$, ima koordinatu

$$h = \omega(c-1)b^2 + \omega^2(c-1)b + c.$$

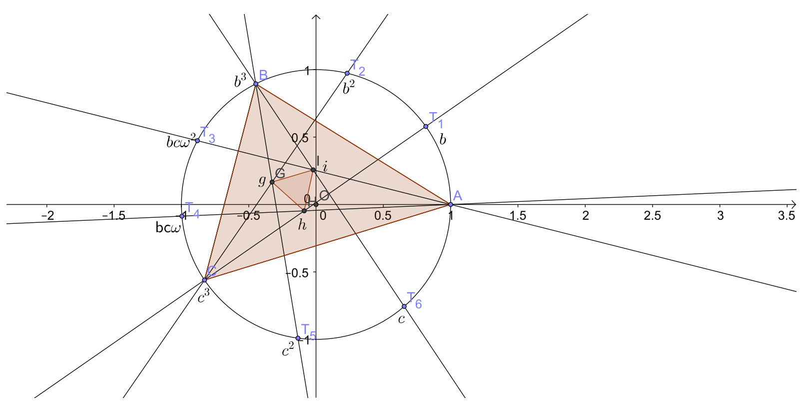
Sličnim razmatranjem dobijamo da je

$$i = \omega^2(b-1)c^2 + \omega(b-1)c + b.$$

Sada lako proveravamo uslov

$$|g - h| = |h - i| = |i - g|$$

kojim je dokazana **Morlijeva teorema**. $\square$



Slika 5: Morlijev trougao

[14] Étienne Bézout (1730-1783), francuski matematičar

[15] Bezuova teorema: $x - a \,|\, P(x) \in \mathbb{C}[x]$ akko je $P(a) = 0,\ a \in \mathbb{C}$.

Napomena 7. *Jednakostraničan trougao iz Morlijeve teoreme u teoriji je poznat kao* ***Morlijev trougao****.*

Teorema 6.9. ***(Štajner[16]-Lemus[17])*** *Trougao je jednakokraki akko su odsečci dveju simetrala unutrašnjih uglova jednaki.*

Dokaz. Neka je, bez umanjenja opštosti, oko trougla abc opisana jedinična kružnica sa centrom u koordinatnom početku i neka je $a = 1$. Neka su jednaki odseči simetrala unutrašnjih uglova iz temena b i c. Označimo sa b_1 i c_1 redom preseke simetrala unutrašnjih uglova iz temena b i c sa stranicama trougla abc. Dokazaćemo ekvivalenciju

$$|1-b| = |1-c| \Leftrightarrow |b-b_1| = |c-c_1|.$$

Koristeći $|b| = |c| = 1$ i $a \neq b$ imamo $|1-b| = |1-c| \Leftrightarrow bc = 1$. Neka je $b = y^2$ i $c = z^2$. Tada su sredine lukova $1b$ i $1c$ kojima ne pripadaju tačke c i b redom tačke $-y$ i $-z$.

Kako je tačka b_1 na tetivi $1c$ jedinične kružnice imamo da je

$$\overline{b_1} = \frac{1+c-b_1}{c} = \frac{1+z^2-b_1}{z^2} \quad \text{i} \quad \overline{b_1} = \frac{-z+y^2+b_1}{-zy^2}.$$

Izjednačavajući i rešavajući po b_1 dobijamo da je

$$b_1 = \frac{y^2z - z^2 + y^2z^2 + y^2}{y^2 - z}.$$

Simetrično imamo da je

$$c_1 = \frac{yz^2 - y^2 + y^2z^2 + z^2}{z^2 - y}.$$

Odavde lako dobijamo

$$|b-b_1| = |c-c_1| \Leftrightarrow \left|\frac{y^2z - z^2 + y^2z^2 + y^2}{y^2 - z} - y^2\right| = \left|\frac{yz^2 - y^2 + y^2z^2 + z^2}{z^2 - y} - z^2\right|$$

$$\Leftrightarrow y^2z^2 = 1 \Leftrightarrow bc = 1,$$

čime je dokazana **Štajner-Lemusova teorema**. □

[16] Jakob Steiner (1796-1863), švajcarski matematičar
[17] Daniel Christian Ludolf Lehmus (1780-1863), nemački matematičar

7 Pravilni mnogouglovi

U ovom poglavlju ćemo izvesti osnovne teoreme o pravilnim mnogouglovima koje su kasnije neophodne za praktičnu primenu u zadacima.

Teorema 7.1. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $0 \neq a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. *Tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju* $n-$*tim korenima kompleksnog broja* a *pripadaju kružnoj liniji poluprečnika* $\sqrt[n]{r}$ *sa centrom u koordinatnom početku i predstavljaju temena pravilnog* $n-$*tougla, čije jedno teme odgovara kompleksnom broju*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Dokaz. Imamo da su $n-$ti koreni kompleksnog broja a:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) = \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

gde je $k = \overline{0,\, n-1}$.

Za svako k je $|z_k| = \sqrt[n]{r}$ odakle sledi prvi deo tvrđenja. U pravilnom $n-$touglu su centralni uglovi koji odgovaraju njegovim stranicama jednaki $\frac{2\pi}{n}$. Ako su t_k i t_{k+1} dva susedna temena koja odgovaraju kompleksnim brojevima

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \\ z_{k+1} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

razlika orijentisanih uglova $\angle xoz_{k+1}$ i $\angle xoz_k$ jednaka $\frac{2\pi}{n}$. Kako to važi za svako k, $k = \overline{0, n-1}$, uz $t_n \equiv t_0$, dobijamo i drugi deo teoreme. □

U praktičnim primenama biće nam potreban specijalan slučaj teoreme 7.1 kada je $r = 1$ i $\varphi = 0$, tj. kada je $a = 1$.

Posledica 1. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju* $n-$*tim korenima broja 1 pripadaju jediničnoj kružnici sa centrom u koordinatnom početku i predstavljaju temena pravilnog* $n-$*tougla, čije je jedno teme u tački 1 kompleksne ravni.*

Teorema 7.2. *Tačke koje odgovaraju kompleksnim brojevima $z_1, z_2, ..., z_n$ u tom poretku, čine temena pravilnog $n-$tougla ako je*

$$z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + ... + z_n z_1.$$

Dokaz. Pomnožimo obe strane jednakosti sa 2. Prebacujući sve sa leve strane i grupišući, dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$(z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2) + (z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2) + ... + (z_n^2 - 2z_nz_1 + z_1^2) = 0.$$

Ova jednakost je ekvivalentna sa

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + ... + (z_{n-1} - z_n)^2 + (z_n - z_1)^2 = 0. \qquad (1)$$

Neka je na dalje $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Po teoremi 2.10 imamo sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
z_3 - z_2 &= (z_2 - z_1)\varepsilon\,;\\
z_4 - z_3 &= (z_3 - z_2)\varepsilon = (z_2 - z_1)\varepsilon^2\,;\\
z_5 - z_4 &= (z_4 - z_3)\varepsilon = (z_3 - z_2)\varepsilon^2 = (z_2 - z_1)\varepsilon^3\,;\\
&\ \ \dots\\
z_n - z_{n-1} &= (z_2 - z_1)\varepsilon^{n-2}\,;\\
z_1 - z_n &= (z_2 - z_1)\varepsilon^{n-1}.
\end{aligned}$$

Zamenjujući u izraz (1), dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&(z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2) + (z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2) + ... + (z_n^2 - 2z_nz_1 + z_1^2) =\\
=\ &(z_2 - z_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\varepsilon^2 + (z_2 - z_1)^2\varepsilon^4 + ... + (z_2 - z_1)^2\varepsilon^{2n-2} =\\
=\ &(z_2 - z_1)^2(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + ... + \varepsilon^{2n-2}) =\\
=\ &(z_2 - z_1)^2(1 + \varepsilon^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^2)^3 + ... + (\varepsilon^2)^{n-1}) =\\
=\ &(z_2 - z_1)^2\,\frac{(\varepsilon^2)^n - 1}{\varepsilon^2 - 1},\ \varepsilon^2 \neq 1.
\end{aligned}$$

Kako je, po Moavrovoj formuli, $\varepsilon^n = \cos\frac{2\pi n}{n} + i\sin\frac{2\pi n}{n} = 1$, imamo da je

$$(z_2 - z_1)^2\,\frac{(\varepsilon^2)^n - 1}{\varepsilon^2 - 1} = 0,$$

pa je i $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + ... + (z_{n-1} - z_n)^2 + (z_n - z_1)^2 = 0$, a samim tim i $z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + ... + z_nz_1$, čime smo dokazali našu teoremu. □

U praktičnim primenama najčešće će nam biti od koristi specijalni slučaj teoreme 7.2 kada je $n = 3$.

Posledica 2. *Tačke z_1, z_2 i z_3 u kompleksnoj ravni čine temena pravilnog tj. jednakostraničnog trougla akko je $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.*

Napomena 8. *Možemo primetiti da je posledica 2 tvrđenje ekvivalencijskog tipa, dok je njeno uopštenje implikacijskog tipa.*

Sledeća teorema daje uslov određenosti jednakostraničnog trougla preko determinante.

Teorema 7.3. *Trougao određen kompleksnim brojevima z_1, z_2 i z_3 u kompleksnoj ravni je jednakostraničan akko je*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Trougao $z_1z_2z_3$ je jednakostraničan akko je iste orijentacije i sličan sa trouglom $z_2z_3z_1$, odakle po teoremi 4.3 sledi tvrđenje teoreme. □

Napomena 9. *Ako pažljivije pogledamo, možemo primetiti da su posledica 2 i teorema 7.3 ekvivalentna tvrđenja, u šta se možemo uveriti sračunavanjem determinante iz teoreme 7.3 i poredeći rezultat sa jednakošću iz posledice 2.*

Teorema 7.4. *Neka su tačke z_1, $z_2, ..., z_{n-1}$ i z_n različite tačke istog modula. Kompleksni brojevi $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ i z_n čine temena (u nekom poretku) pravilnog mnogougla akko važi*

$$z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n = (-1)^{n-1} n z_1 z_2 \cdots z_n$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Odavde po Moavrovoj formuli imamo da je $\varepsilon^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Neka je $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = r > 0$. Dokazaćemo prvo implikaciju da iz uslova zadatka sledi jednakost

$$z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n = (-1)^{n-1} n z_1 z_2 \cdots z_n.$$

Kako tačke 1, ε, $\varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ čine temena pravilnog $n-$tougla tada i tačke

$$z_1,\ z_1\varepsilon,\ z_1\varepsilon^2, ...,\ z_1\varepsilon^{n-1}$$

čine temena pravilnog $n-$tougla, gde je

$$z_2 = z_1\varepsilon,\ z_3 = z_1\varepsilon^2, ..., z_n = z_1\varepsilon^{n-1}.$$

Odavde imamo da je

$$z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n = z_1^n(1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} + \varepsilon^{3n} + ... + \varepsilon^{(n-1)n}) = nz_1^n.$$

Sa druge strane imamo da je

$$(-1)^{n-1}nz_1z_2\cdots z_n = (-1)^{n-1}nz_1(z_1\varepsilon^2)\cdots(z_1\varepsilon^{n-1}) = (-1)^{n-1}nz_1^n\varepsilon^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

Po Moavrovoj formuli imamo da je

$$\varepsilon^{\frac{(n-1)n}{2}} = \cos((n-1)\pi) + i\sin((n-1)\pi) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & n \equiv_2 0, \\ -1, & n \equiv_2 1, \end{array}\right. = (-1)^{n-1}.$$

Odavde imamo da je $(-1)^{n-1}nz_1z_2\cdots z_n = (-1)^{n-1}nz_1^n(-1)^{n-1} = nz_1^n$, čime smo dokazali prvi deo teoreme.

Dokažimo sada da iz $z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n = (-1)^{n-1}nz_1z_2\cdots z_n$ i $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = r$ sledi da su tačke $z_1,\ z_2, ...,\ z_{n-1}$ i z_n temena pravilnog $n-$tougla.

Dokazali smo da je $|(-1)^{n-1}nz_1z_2\cdots z_n| = |nz_1^n| = n|z_1|^n = nr^n$. Iz **proširene nejednakosti trougla** [18] imamo da je

$$|z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n| \leq |z_1^n| + |z_2^n| + ... + |z_n^n| = nr^n.$$

Kako imamo da je

$$nr^n = |(-1)^{n-1}nz_1z_2\cdots z_n| = |z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n| \leq |z_1^n| + |z_2^n| + ... + |z_n^n| = nr^n$$

u nejednakosti važi znak jednakosti. To se može desti akko su komplesksni brojevi $z_1^n,\ z_2^n, ...,\ z_n^n$ i z_n na istoj polupravoj čiji je početak u koordinatnom početku. Odavde imamo, uz uslov da su svi istog modula, da su svi međusobno jednaki. Dakle imamo $z_1^n = z_2^n = ... = z_n^n = \omega \in \mathbb{C}$. Odavde imamo da se svi kompleksni brojevi $z_1,\ z_2, ...,\ z_{n-1}$ i z_n dobijaju kao rešenja, u skupu $\mathbb{C}$, jednačine $z^n = \omega$ tj. da su oblika

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

gde je $k = \overline{0, n-1}$. Odavde po teoremi 7.1 imamo i drugi deo tvrđenja teoreme, pa smo ovime dokazali teoremu. $\square$

[18] Za bilo koje $z_1,\ z_2, ...,\ z_n \in \mathbb{C}$ važi da je $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$.

8 Zadaci

U ovom poglavlju ćemo dati najupečatljivije zadatke koji najbolje ilustruju ovu metodu, a posledica su izvedene teorije u prošlim poglavljima. U svim zadacima će biti navedena originalna geometrijska postavka, a sva rešenja će biti data u kompleksnoj koordinatizaciji.

8.1 Rastojanje, rotacija i pravilni mnogouglovi

Zadatak 1. ***(Balkanska Matematička olimpijada, 1984.)*** *Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao i H_A, H_B, H_C i H_D ortocentri trouglova BCD, CDA, DAB i ABC respektivno. Dokazati da su četvorouglovi $ABCD$ i $H_AH_BH_CH_D$ podudarni.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, krug opisan oko $abcd$ jedinični i neka mu je centar u koordinatnom početku. Tada je po teoremi 2.8

$$h_a = b + c + d, h_b = c + d + a, h_c = d + a + b, h_d = a + b + c.$$

Da bismo pokazali tvrđenje zadataka dovoljno je pokazati da je

$$|x - y| = |h_x - h_y|$$

za svaka dva x, $y \in \{a, b, c, d\}$, što se lako proverava. $\triangle$

Zadatak 2. ***(Savezno SFRJ 1990, 3-4 razred)*** *Neka je S centar opisanog kruga a H ortocentar trougla ABC. Neka je Q takva tačka da je S središte duži HQ i neka su T_1, T_2 i T_3, težišta trouglova BCQ, CAQ i ABQ respektivno. Dokazati da je*

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3}R$$

gde je R poluprečnik opisane kružnice trougla ABC.

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, krug opisan oko trougla abc jedinični čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom, tj. $s = 0$ i

$$|a| = |b| = |c| = 1.$$

Po teoremi 2.8 je $h = a + b + c$. Dalje imamo da je $h + q = 2s = 0$, tj. $q = -(a + b + c)$. Po teoremi koja daje koordiante težišta u zavisnosti od koordinata temena trougla imamo da je

$$t_1 = \frac{1}{3}(b + c + q) = -\frac{1}{3}a.$$

Simetrično imamo da je :

$$t_2 = -\frac{1}{3}b \quad \text{i} \quad t_3 = -\frac{1}{3}c.$$

Odatle imamo da je

$$|a - t_1| = \left|a + \frac{a}{3}\right| = \left|\frac{4a}{3}\right| = \frac{4}{3}.$$

Simetrično imamo da je:

$$|b - t_2| = |c - t_3| = \frac{4}{3}$$

čime smo dokazali tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zadatak 3. ***(Napoleonov problem*** [19]***)*** *Nad stranicama trougla ABC konstruisani su jednakostranični trouglovi $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$ tako da se nalaze u spoljašnjosti trougla ABC. Dokazati da su težišta ovih trouglova temena jednakostarničnog trougla.*

Rešenje: Neka su temena trougla određena kompleksnim brojevima a, b i c i neka su tačke A', B' i C' određene kompleksnim brojevima a', b' i c' respektivno. Težišta trouglova $A'BC$, $AB'C$ i ABC' su tačke

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c), \quad b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c), \quad c'' = \frac{1}{3}(a + b + c')$$

respektivno.

Dokazaćemo da se tačka b'' dobija rotacijom oko tačke a'' u pozitivnom matematičkom smeru za ugao $\frac{\pi}{3}$ tj. da je

$$b'' - c'' = (a'' - c'')e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

[19]Napoléon Bonaparte (1769-1821), veliki francuski vojskovođa

Dalje imamo da je po teoremi 2.10

$$a' = c + (b - c)\varepsilon, \quad b = a + (c - a)\varepsilon, \quad c' = b + (a - b)\varepsilon,$$

gde je $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Odatle imamo da je

$$a'' = \frac{1}{3}((1+\varepsilon)b + (2-\varepsilon)c),$$
$$b'' = \frac{1}{3}((1+\varepsilon)c + (2-\varepsilon)a),$$
$$c'' = \frac{1}{3}((1+\varepsilon)a + (2-\varepsilon)b).$$

Odavde je jednakost $b'' - c'' = (a'' - c'')e^{i\frac{\pi}{3}}$ ekvivalentna sa

$$\frac{(1+\varepsilon)(c-a) + (2-\varepsilon)(a-b)}{3} = \frac{(1+\varepsilon)(b-a) + (2-\varepsilon)(c-b)}{3}\varepsilon,$$

odakle se sređivanjenjem uz uslov $\varepsilon = -\overline{\varepsilon}^2$ dobija tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zadatak 4. ***(Balkanska Matematička olimpijada, 1990)*** *Nad stranicama trougla konstruisani su pravilni $n-$tougaonici, tako da sa unutrašnošću nemaju zajedničkih tačaka. Odrediti sve vrednosti prirodnog broja n tako da su centri $n-$tougaonika temena jednakostaničnog trougla.*

Rešenje: Označimo sa A_0, B_0, C_0 centre $n-$tougaonika koji su konstruisani nad stranicama BC, CA i AB respektivno. Malim slovima ćemo označiti kompleksne brojeve koji određuju tačke kompleksne ravni označene velikim slovima. Neka je $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$. Kako je $\angle ac_0b = \angle ba_0c = \angle ab_0c = \frac{2\pi}{n}$, to je $a = c_0 + (b - c_0)\varepsilon$, $b = a_0 + (c - a_0)\varepsilon$, $a = b_0 + (a - b_0)\varepsilon$. Trougao je jednakostaničan akko je $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$ zamenom odgovarajućih vrednosti dobijamo

$$(b - c\varepsilon^2) + (c - a\varepsilon)^2 + (a - b\varepsilon)^2 = (b - c\varepsilon)(c - a\varepsilon) + (c - a\varepsilon)(a - b\varepsilon) + (a - b\varepsilon)(c - a\varepsilon).$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sa jednakošću

$$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = 0.$$

Odavde sledi da je $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Kako je $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = 0$, $\varepsilon \neq 1$, imamo da je $\varepsilon^3 = 1$ što je ekvivalentno sa

$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{6\pi}{n} = 1 \wedge \sin\frac{6\pi}{n} = 0.$$

Ove dve jednakosti su ekvivalentne sa $n = 3$, čime smo zaključili da je to jedina vrednost prirodnog broja n za koju tačke A_0, B_0 i C_0 čine temena jednakostraničnog trougla. $\triangle$

8.2 Mnogouglovi upisani u krug

Zadatak 5. *Dat je četvorougao $ABCD$ upisan u krug čiji je prečnik AC. Prave AB i CD se seku u tački M, a tangente konstruisane na krug u tačkama B i D se seku u tački N. Dokazati da je MN normalno na AC.*

Rešenje: Neka je krug opisan oko četvorougla $abcd$ jedinični. Kako je ac njegov prečnik imamo da je $c = -a$. Dalje po teoremi 3.4 imamo da je

$$m = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} = \frac{2bd + ad - ab}{d+b}.$$

Po teoremi 3.5 je $n = \frac{2bd}{b+d}$, pa je $m - n = \frac{a(d-b)}{b+d}$ i $\overline{m} - \overline{n} = \frac{d-b}{a(b+d)}$. Sada je

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}} = -\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}} = a^2,$$

pa je po teoremi 2.13 $mn \perp ac$ što je i trebalo dokazati. $\triangle$

Zadatak 6. *Neka je H ortocentar trougla ABC, M središte stranice BC a D proizvoljna tačka opisane kružnice trougla ABC. Ako je tačka E simetrična sa D u odnosu na M dokazati da je prava EH normalna na pravu AD.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, krug opisan oko trougla abc jedinični čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom. Kako je m središte duži bc i ed imamo da je

$$m = \frac{1}{2}(b+c), \quad n = \frac{1}{2}(d+e), \quad e = b + c - d.$$

Kako je h ortocentar trougla abc imamo da je po teoremi 2.8 $h = a + b + c$. Kako se tačke a i d nalaze na jediničnom krugu imamo da važi $\overline{d} = \frac{1}{d}$ i $\overline{a} = \frac{1}{a}$. Imamo da je

$$\frac{e-h}{\overline{e}-\overline{h}} = \frac{b+c-d-(a+b+c)}{\overline{b+c-d} - \overline{a+b+c}} = \frac{-d-a}{-\overline{d}-\overline{a}} = \frac{d+a}{\frac{1}{d}+\frac{1}{a}} = ad,$$

i

$$-\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}} = -\frac{a-d}{\frac{1}{a}-\frac{1}{d}} = ad.$$

Odavde iz prethodne dve veze imamo po teoremi 2.13 tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zadatak 7. ***(Državno takmičenje Srbije 2011, 2 razred A kategorija)*** *Neka je oštrougli $\triangle ABC$ upisan u krug sa centrom O. Neka je H ortocentar trougla ABC. Simetrala duži AH seče stranice AC i AB u tačkama D i E redom. Dokazati da je tačka A centar spolje pripisane kružnice trougla ODE.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, kružnica opisana oko trougla abc jedinična i neka je $o \equiv 0$. Odatle po teoremi 2.8 imamo da je $h = a + b + c$. Neka je s središte duži ah. Po teoremi o deljenju duži u datom odnosu imamo da je

$$s = \frac{2a + b + c}{2}.$$

Kako je $es \perp ha$ imamo da je po teoremi 2.13 o ortogonalnosti pravih

$$\frac{e - s}{\overline{e} - \overline{s}} = -\frac{h - a}{\overline{h} - \overline{a}} = -\frac{b + c}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = -bc.$$

Kako je po teoremi 3.2 o pripadnosti tačke tetivi jedinične kružnice

$$\overline{e} = \frac{a + c - e}{ac} \quad \text{i} \quad e - s = -bc\overline{e} + bc\overline{s},$$

odatle dobijamo da je

$$\frac{a + c - e}{ac} = \frac{bc\overline{s} + s - e}{bc}$$

odakle se posle sređivanaja dobija da je

$$e = \frac{a(a + c)}{a - b}$$

a samim tim i

$$\overline{e} = \frac{b(a + c)}{ac(b - a)}.$$

Poluprečnik r pripisane kružnice trougla ode je

$$r = |s - a| = \left|\frac{1}{2}(2a + b + c) - a\right| = \frac{1}{2}|b + c|.$$

Neka pripisana kružnica trougla ode dodiruje pravu oe u tački q. Kako su tačke o, q i e kolinearne tada po teoremi o kolinearnosti triju tačaka

$$\frac{q-o}{\overline{q}-\overline{o}} = \frac{q}{\overline{q}} = \frac{e}{\overline{e}}.$$

Odatle imamo da je rešavanjem po $\overline{q}$

$$\overline{q} = -\frac{qb}{a^2c}.$$

Kako su prave qa i oq ortogonalne, tada po teoremi 2.13 o ortogonalnosti dveju pravih imamo da važi:

$$\frac{q-a}{\overline{q}-\overline{a}} = -\frac{q-o}{\overline{q}-\overline{o}} = -\frac{q}{\overline{q}}.$$

Odavde se rešavanjem po $\overline{q}$ dobija da je

$$\overline{q} = \frac{q}{a(2q-a)}.$$

Izjednačavanjem prethodna dva rezultata i rešavajući po q imamo da je

$$q = \frac{a(b-c)}{2b}.$$

Neka pripisana kružnica trougla ode dodiruje pravu od u tački f. Simetrično imamo da je

$$f = \frac{a(c-b)}{2c}.$$

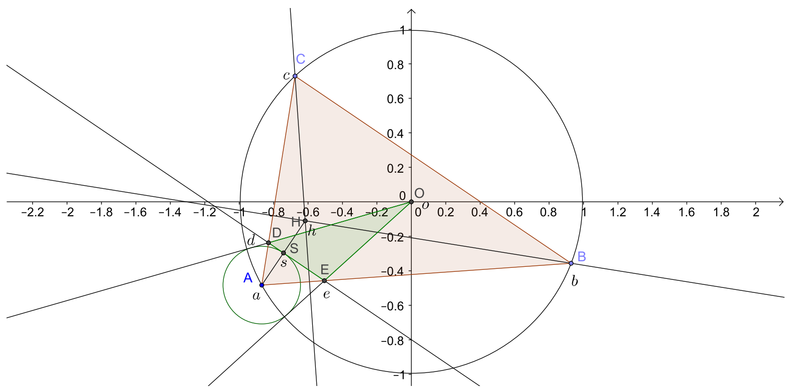
Kako je $|a| = |b| = 1$ imamo da je

$$|q-a| = \left|\frac{q}{a(2q-a)} - a\right| = \left|-\frac{a(c+b)}{2b}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{|b|}|a||c+b| = \frac{1}{2}|b+c| = r$$

i simetrično

$$|q-a| = \frac{1}{2}|b+c| = r,$$

odakle sledi tvrđenje zadatka. $\triangle$



Slika 6: Pripisana kružnica

Zadatak 8. *Neka su A, B, C i D četiri različite tačke na kružnici. Dokazati da se presek Simsonove prave kroz tačku A u odnosu na trougao BCD sa Simsonovom pravom kroz tačku B u odnosu na trougao ACD leži na pravoj koja prolazai kroz tačku C i ortocentar trougla ABD.*

Rešenje: Četvorougao $abcd$ je tetivan pa uzmimo, bez umanjenja opštosti, da je njegov opisani krug jedinični, i da mu se centar poklapa sa koordinatnim početkom. Neka su a_1, a_2 i a_3 podnožija normala iz tačke a na stranice bc, cd i db redom, b_1, b_2 i b_3 podnožija normala iz tačke b na stranice ba, bc i bd redom. Prema teoremi o podnožiju normale na tetivu jedinične kružnice imamo da je

$$a_1 = \frac{1}{2}\Big(a+b+c-\frac{bc}{a}\Big), a_2 = \frac{1}{2}\Big(a+b+d-\frac{bd}{a}\Big), a_3 = \frac{1}{2}\Big(a+c+d-\frac{cd}{a}\Big),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\Big(b+a+c-\frac{ac}{b}\Big), b_2 = \frac{1}{2}\Big(b+c+d-\frac{cd}{b}\Big), b_3 = \frac{1}{2}\Big(b+d+a-\frac{da}{b}\Big).$$

Neka je x tačka preseka ove dve Simsonove prave. Koordinatu tačke x određujemo iz dva uslova kolinearnosti. Prvo iz kolinearnosti tačaka x, a_1 i a_2 po teoremi o kolinearnosti tačaka imamo da je

$$\frac{x-a_1}{\overline{x}-\overline{a_1}} = \frac{a_1-a_2}{\overline{a_1}-\overline{a_2}} = \frac{\frac{1}{2}(c-d+\frac{bd}{a}-\frac{bc}{a})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}+\frac{a}{bd}-\frac{a}{bc})} = \frac{bcd}{a},$$

tj. posle sređivanja

$$\overline{x} = \frac{x-\frac{1}{2}(a+b+c+d-\frac{abc+acd+abd+bcd}{a^2})}{bcd}a.$$

Analogno iz kolinearnosti tačaka x, b_1 i b_2 imamo da je

$$\overline{x} = \frac{x - \frac{1}{2}(a+b+c+d - \frac{abc+acd+abd+bcd}{b^2})}{acd} b.$$

Odavde se izjednačavanjem i rešavanjem po x dobija da je

$$x = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Kako je po teoremi 2.8 $h = a+c+d$ kao ortocentar trougla acd imamo da je

$$\frac{h-c}{\overline{h}-\overline{c}} = \frac{a+b+d-c}{\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}-\overline{c}}.$$

Sa druge strane je $x - c = \frac{1}{2}(a+b+d-c)$, odakle je jednakost koja dokazuje tvrđenje zadatka očigledna. $\triangle$

Zadatak 9. ***(Interno takmičenje Matematičke gimnazije, Beograd 2004)*** *Dat je $\triangle ABC$. Tangenta u temenu A na krug opisan oko $\triangle ABC$ seče srednju liniju trougla paralelnu sa BC u tački A_1. Analogno definišemo tačke B_1 i C_1. Dokazati da tačke A_1, B_1 i C_1 leže na jednoj pravoj i da je ta prava normalna na Ojlerovu pravu $\triangle ABC$.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, opisani krug oko trougla abc jedinični čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom i neka su a', b' i c' središta stranica bc, ca i ab respektivno. Kako je $aa_1 \perp ao$ i kako su tačke a_1, b', c' kolinearne imamo da je

$$\frac{a-a_1}{\overline{a}-\overline{a_1}} = -\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}} = -a^2, \quad \frac{b'-c'}{\overline{b'}-\overline{c'}} = \frac{b'-a_1}{\overline{b'}-\overline{a_1}}.$$

Iz prve jednakosti imao da je

$$\overline{a_1} = \frac{2a-a_1}{a^2}$$

a kako je $b' = \frac{a+c}{2}$ i $c' = \frac{a+b}{2}$ to je i

$$\overline{a_1} = \frac{ab+bc+ca-aa_1}{2abc}.$$

Izjednačavanjem dobijamo da je

$$a_1 = \frac{a^2(a+b+c)-3abc}{a^2-2bc}.$$

Simetrično imamo da je

$$b_1 = \frac{b^2(a+b+c) - 3abc}{2(b^2 - ac)} \quad \text{i} \quad c_1 = \frac{c^2(a+b+c) - 3abc}{2(b^2 - ab)}.$$

Sada je

$$a_1 - b_1 = \frac{a^2(a+b+c) - 3abc}{a^2 - 2bc} - \frac{b^2(a+b+c) - 3abc}{2(b^2 - ac)} = \frac{c(a-b)^3(a+b+c)}{2(a^2 - bc)(b^2 - ac)}.$$

Uz kraći račun proveravamo uslov

$$\frac{a_1 - b_1}{\overline{a_1} - \overline{b_1}} = -\frac{h - o}{\overline{h} - \overline{o}} = -\frac{abc(a+b+c)}{ab + bc + ca}.$$

Simetrično imamo da je i $a_1c_1 \perp ho$, odakle sledi da su tačke a_1, a_2 i a_3 kolinearne. △

8.3 Mnogouglovi opisani oko kruga

Zadatak 10. *Upisani krug sa centrom u tački O trougla ABC dodiruje stranice AB, BC i CA u tačkama M, K i E respektivno. Neka je presek pravih MK i AC tačka P. Dokazati da je OP normalno na BE.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, krug upisan u trougao abc jedinični. Po teoremi 3.6 imamo da je

$$a = \frac{2em}{e+m}, \quad b = \frac{2mk}{m+k}.$$

Kako su tačke m, k, p kolinearne i mk tetiva jediničnog kruga imamo da je

$$\overline{p} = \frac{m + k - p}{mk}.$$

Dalje imamo da je $pe \perp oe$ pa je na osnovu teoreme o ortogonalnosti dveju pravih

$$\frac{e - p}{\overline{e} - \overline{p}} = -\frac{e - o}{\overline{e} - \overline{o}}$$

odakle sređivanjem dobijamo da je

$$\overline{p} = \frac{2e - p}{e^2}.$$

Izjednačavanjem dva dobijena rezultata za $\overline{p}$ i rešavanjem po p dobijamo

$$p = e\frac{(m+k)e - 2mk}{e^2 - mk}.$$

Dokažimo sada da je

$$\frac{p-o}{\overline{p}-\overline{o}} = -\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}.$$

Imamo da je je

$$e - b = \frac{e(m+k) - 2mk}{m+k}$$

i konjugovanjem

$$\overline{e} - \overline{b} = \frac{m+k-2e}{(m+k)e}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}} = \frac{\frac{e(m+k)-2mk}{m+k}}{\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}} = \frac{e^2(m+k) - 2mke}{m+k-2e}.$$

Kako je

$$\overline{p} = \frac{m+k-p}{mk} = \frac{m+k-e\frac{(m+k)e-2mk}{e^2-mk}}{mk} = \frac{m+k-2e}{mk-e^2}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{p}{\overline{p}} = \frac{e\frac{(m+k)e-2mk}{e^2-mk}}{\frac{m+k-2e}{mk-e^2}} = \frac{2mke - e^2(m+k)}{m+k-2e}.$$

Odavde je očigledno da je

$$\frac{p-o}{\overline{p}-\overline{o}} = -\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}$$

odakle sledi tvrđenje zadatka. △

Zadatak 11. *Krug sa centrom u O upisan je u četvorougo $ABCD$ i dodiruje stranice AB, BC, CD i DA redom u tačkama K, L, M i N. Prave KL i MN seku se u tački S. Dokazati da je OS normalno na BD.*

Rešenje. Neka je, bez umanjenja opštosti krug upisan u četvorougao *abcd* jedinični čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom. Tada po teoremi 3.6 imamo da je

$$a = \frac{2nk}{n+k},\ b = \frac{2kl}{k+l},\ c = \frac{2lm}{l+m},\ d = \frac{2mn}{m+n}.$$

Po teoremi o preseku tetiva jedinične kružnice imamo da je

$$s = \frac{kl(m+n) - mn(k+l)}{kl - mn}.$$

Dalje je

$$b - d = \frac{2(kl(m+n) - mn(k+l))}{(k+l)(m+n)}.$$

Konjugovanjem poslenji izaz dobijamo da je

$$\overline{b} - \overline{d} = 2\overline{\left(\frac{kl(m+n) - mn(k+l)}{(k+l)(m+n)}\right)} = 2\frac{m+n-(k+l)}{(k+l)(m+n)}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}} = \frac{\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{(k+l)(m+n)}}{\frac{m+n-(k+l)}{(k+l)(m+n)}} = \frac{kl(m+n) - mn(k+l)}{m+n-(k+l)}.$$

Lako izračunavamo da je

$$\frac{s}{\overline{s}} = -\frac{kl(m+n) - mn(k+l)}{m+n-(k+l)}.$$

Odavde je očigledno da je ispunjena jednakost

$$\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}} = -\frac{s-o}{\overline{s}-\overline{o}},$$

koja dokazuje naš zadatak. $\triangle$

Zadatak 12. ***(Balkanska Matematička olimpijada, 2005)*** *Dat je trougao ABC. Neka su Q i R tačke dodira upisanog kruga sa stranicama AC i AB respektivno. Neka je X sredina duži BC. Neka su Y i Z redom preseci simetrala uglova $\angle ABC$ i $\angle BCA$ sa pravom RQ. Dokazati da je trougao XYZ jednakostraničan akko je $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti krug upisan u trougao abc jedinični čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom i neka je njegova dodirna tačka sa stranicom bc tačka p. Odavde imamo da je

$$a = \frac{2qr}{q+r}, \quad b = \frac{pr}{p+r}, \quad c = \frac{2pq}{p+q}.$$

Kako je x središte duži bc imamo da je

$$x = \frac{b+c}{2} = \frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}.$$

Neka su α, $\beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\overrightarrow{oy} = \alpha\overrightarrow{ob}$ i $\overrightarrow{oz} = \beta\overrightarrow{oc}$.
Tada je

$$y = \alpha b = \alpha\frac{2pr}{p+r} \quad \text{i} \quad z = \beta c = \beta\frac{2pq}{p+q}.$$

Vrednosti α i β lako nalazimo iz uslova $y \in rq$ i $z \in rq$:

$$\alpha = \frac{(p+r)(q+r)}{2r(p+q)} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{(p+q)(r+q)}{2q(p+r)}.$$

Odavde dobijamo koordinate tačaka y i z preko p, q i r:

$$y = \frac{p(q+r)}{p+q} \quad \text{i} \quad z = \frac{p(r+q)}{p+r}.$$

Uslov $\angle raq = \frac{\pi}{3}$ je ekvivalentan sa $\angle qor = \frac{2\pi}{3}$ tj. sa

$$r = q\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

a drugi sa

$$z - x = (y-x)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Izračunavanjem dobijamo da je:

$$y - x = \frac{p(q+r)}{p+q} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)},$$

i

$$z - x = \frac{p(p+q)}{p+r} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)}.$$

Drugi uslov je ekvivalentan sa

$$\frac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)} = \frac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

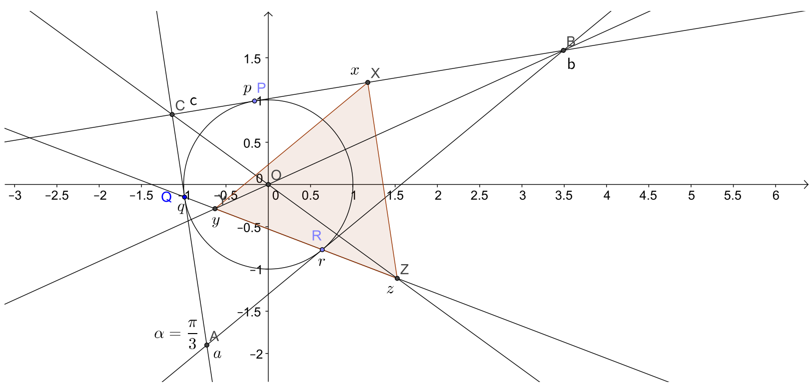
tj. sa

$$q = -r\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Kako je ekvivalencija

$$r = q\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow q = -r\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

očigledna, odakle dobijamo tvrđenje zadatka. $\triangle$



Slika 7: BMO 2005

8.4 Razni zadaci

Zadatak 13. *Neka je I centar upianog kruga trougla ABC, kod koga je $AB \neq AC$. Tačka O_1 je simetrična centru opisanog kruga trougla ABC u odnosu na pravu BC. Dokazati da su tačke A, I i O_1 kolinearne akko je $\angle A = \frac{\pi}{3}$.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti krug upisan u trougao abc jedinični i neka mu se centar poklapa sa koordinatnim početkom. Tada po teoremama 3.8 i 3.9 imamo da postoje brojevi u, v i ω takvi da je

$$a = u^2, \quad b = v^2, \quad c = \omega^2$$

i centar upisanog kruga

$$i = -(uv + v\omega + \omega u).$$

Ako je o' podnožije normale iz o na bc tada po teoremi o podnožiju normale imamo da je

$$o' = \frac{1}{2}(b+c)$$

pa je po teoremi o deljenju duži u datom odnosu

$$o_1 = 2o' = b + c = v^2 + \omega^2.$$

Imamo da su tačke a, i, o_1 su kolinearne akko je

$$\frac{o_1 - a}{\overline{o_1} - \overline{a}} = \frac{a - i}{\overline{a} - \overline{i}}.$$

Dalje imamo da je

$$\frac{o_1 - a}{\overline{o_1} - \overline{a}} = \frac{v^2 + \omega^2 - u^2}{u^2(v^2+\omega^2) - v^2\omega^2} u^2 v^2 \omega^2 \quad \text{i} \quad \frac{a - i}{\overline{a} - \overline{i}} = \frac{u(u+v+\omega) + v\omega}{v\omega + u\omega + uv + u^2} u^2 v\omega.$$

Odavde dobijamo da je

$$v^3\omega + v\omega^3 - u^2 v\omega - (u^2v^2 + u^2\omega^2 - v^2\omega^2) = (v\omega - u^2)(v^2 + \omega^2 + v\omega) = 0.$$

Sada imamo da je $v\omega = u^2$ ili $v^2 + \omega^2 + v\omega = 0$. Ako je $v\omega = u^2$ tada su po teoremi o deljenju duži u datom odnosu tačke u^2 i $-v\omega$ na istom prečniku, pa je trougao abc jendakokraki, što je suprotno uslovima zadatka. Dakle mora biti da je

$$v^2 + \omega^2 + v\omega = 0.$$

Dokažimo da je trougao sa temenima o, $-v\omega$, ω^2 jednakostraničan. Dovoljno je dokazati da je

$$1 = |\omega^2 + v\omega| = |v + \omega|.$$

Kvadriranjem dobijamo ekvivalentan uslov

$$1 = (v+\omega)(\overline{v} + \overline{\omega}) = \frac{(v+\omega)^2}{v\omega}.$$

Poslednji uslov je ekvivalentan sa $v^2 + \omega^2 + v\omega = 0$. Kako je sada $\angle boc = \frac{2\pi}{3}$ imamo da je $\angle A = \frac{\pi}{3}$, što je i trebalo dokazati. $\triangle$

Zadatak 14. *Nad stranicama trougla ABC konstruisani su slični trouglovi ADB, BEC, CFA istih orijentacija, koji sa trouglom ABC, sem stranica AB, BC, CA, nemaju zajedničkih tačaka. Dokazati da trouglovi ABC i DEF imaju isto težište.*

Rešenje: Kako su trouglovi ADB, BEC, CFA slični i imaju iste orijentacije tada po teoremi 4.3 imamo da važi

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = \lambda.$$

Stoga je

$$d = a + (b-a)\lambda,\ e = b + (c-b)\lambda,\ f = c + (a-c)\lambda$$

pa je

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

što dokazuje da trouglovi ABC i DEF imaju isto težište. $\triangle$

Zadatak 15. *Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao. Dokazati da je*

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

akko je $AC \perp BD$.

Rešenje: Na osnovu svojstava realnog proizvoda kompleksnih brojeva veza

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

je ekvivalentna sa

$$(b-a)\cdot(b-a) + (d-c)\cdot(b-c) = (c-b)\cdot(c-b) + (a-d)\cdot(a-d).$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sa $a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + d \cdot a$. Kako je poslednja jednakost ekvivalentna sa $(c-a)\cdot(d-b) = 0$, odavde po teoremi o osobinama realnog proizvoda imamo da je

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC \perp BD. \qquad \triangle$$

Zadatak 16. ***(Balkanska Matematička olimpijada, 1985)*** *Neka je O središte kruga koji je opisan oko trougla ABC, neka je D središte duži AB i neka je E težište trougla ACD. Dokazati da su duži CD i OE normalne akko je $AB = AC$.*

Rešenje: Neka je trougao ABC smešten u kompleksnu ravan čiji je koordinatni početak tačka o. Tada imamo da je

$$d = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{3a+b+2c}{6}.$$

Neka je R poluprečnik kruga koji je opisan oko trougla ABC. Duž CD je normalna na duž OE akko je realan proizvod kompleksnih brojeva e i $d-c$ jednak nuli, tj.

$$e \cdot (d-c) = 0.$$

Ova jednakost je ekvivalentna sa $(a+b-2c)\cdot(3a+b+2c) = 0$. Kako je $a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = R^2$, poslednja jednakost je ekvivalentna sa jednakošću

$$a \cdot b = a \cdot c.$$

Sa druge strane imamo da je

$$\begin{aligned}
&|b-a| = |c-a| \Leftrightarrow |b-a|^2 = |c-a|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (b-a)\cdot(b-a) = (c-a)\cdot(c-a) \Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot c.
\end{aligned}$$

Odavde imamo da je $cd \perp oe \Leftrightarrow |a-b| = |a-c|$, čime smo dokazali tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zadatak 17. *Neka je $ABCDE$ konveksan petougao, a M, N, P, Q, X, Y sredine duži BC, CD, DE, EA, MP, NQ respektivno. Dokazati da je prava XY paralena sa pravom AB.*

Rešenje. Iz uslova zadatka imamo da je

$$m = \frac{b+c}{2},\ n = \frac{c+d}{2},\ p = \frac{d+c}{2},\ q = \frac{e+a}{2}$$

i

$$x = \frac{b+c+d+e}{4}, \quad y = \frac{c+d+e+a}{4}$$

respektivno, pa je kompleksan proizvod vektora $y-x$ i $b-a$ jednak

$$\begin{aligned}
(y-x)\times(b-a) &= \left(\frac{c+d+e+a}{4} - \frac{b+c+d+e}{4}\right)\times(b-a) = \\
&= -\frac{1}{4}\,(b-a)\times(b-a) = 0,
\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zadatak 18. *Neka je tačka F fiksirana na kružnici. Odrediiti geometrijsko mesto tačaka središta tetiva FX kada se tačka X "kreće"po kružnici.*

Rešenje. Neka je kružnica smeštena u koordinatni početak i neka je bez gubljenja opštosti njen poluprečnik $r = 1$, a tačka $f = 1$. Kada tačka x "šeta" po kružnici imamo da je

$$s = \frac{1+x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

gde je tačka s središte tetive xf. Odavde je jasno da je traženo geometrijsko mesto tačaka kružnica sa centrom u tački $\frac{1}{2}$ i poluprečnikom dužine $\frac{1}{2}$. $\triangle$

Zadatak 19. ***(Tajvan, 2002)*** *Neka je su tačke A, B i C fiksirane tačke u ravni, a tačka D "pokretna"tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABC. Neka je I_A Simsonova prava tačke A u odnosu na trougao BCD. Analogno definišemo I_B, I_C i I_D. Naći geometrijsko mesto tačaka preseka pravih I_A I_B, I_C i I_D kada se tačka D "kreće"po kružnici.*

Rešenje. Presek pravih I_A, I_B, I_C i I_D je jedna tačka. To sledi iz zadatka 9 kojim je presečna tačka x pravih I_A, I_B, I_C i I_D određena simetričnim izrazom

$$x = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

po slovima a, b, c i d.

Dakle, traženo geometrijsko mesto tačaka kada se tačka d "kreće"po kružnici je definisano izrazom

$$x = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{a+b+c}{2} + \frac{d}{2}.$$

Odavde imamo, slično prethodnom zadatku, da je traženo gemetrijsko mesto tačaka kružnica sa centrom u tački $\frac{a+b+c}{2}$ i poluprečnikom dužine $\frac{1}{2}$, što je središte duži koja spaja centar datog kruga i ortocentar trougla abc. $\triangle$

Zadatak 20. *Neka se dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ seku u tački O. Neka su T_1 i T_2 težišta trouglova AOD i BOC a H_1 i H_2 ortocentri trouglova AOB i COD. Dokazati da su prave T_1T_2 i H_1H_2 normalne.*

Rešenje: Neka je tačka o koordinatni početak. Po teoremi 3.12 imamo da

$$h_1 = \frac{(a-b)(\overline{a}b + a\overline{b})}{a\overline{b} - \overline{a}b}, \quad h_2 = \frac{(c-d)(\overline{c}d + c\overline{d})}{c\overline{d} - \overline{c}d}.$$

Kako su tačke t_1 i t_2 težišta $\triangle AOD$ i $\triangle BOC$ imamo da je

$$t_1 = \frac{a+c}{3}, \quad t_2 = \frac{b+d}{3}.$$

Kako su tačke a, c i o kolinearne kao i tačke b, d i o po teoremi o kolinearnosti triju tačaka imamo da je

$$\overline{c} = \frac{c\overline{a}}{a}, \quad \overline{d} = \frac{d\overline{b}}{b}.$$

Odavde imamo da je sada

$$h_2 = \frac{(c-d)(a\overline{b} - \overline{a}b)}{a\overline{b} - \overline{a}b}.$$

Kako je

$$h_1 - h_2 = \frac{a\overline{b} + \overline{a}b}{a\overline{b} - \overline{a}b}\,(a + c - b - d)$$

i

$$\overline{h_1} - \overline{h_2} = \overline{\left(\frac{a\overline{b} + \overline{a}b}{a\overline{b} - \overline{a}b}\,(a + c - b - d)\right)} = \frac{\overline{a}b + a\overline{b}}{\overline{a}b - a\overline{b}}(\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}),$$

odavde imamo da je

$$\frac{h_1 - h_2}{\overline{h_1} - \overline{h_2}} = \frac{\frac{a\overline{b} + \overline{a}b}{a\overline{b} - \overline{a}b}\,(a + c - b - d)}{\frac{\overline{a}b + a\overline{b}}{\overline{a}b - a\overline{b}}(\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} - \overline{d})} = \frac{a + b - c - d}{\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}}.$$

Sa druge strane imamo da je

$$\frac{t_1 - t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = \frac{\frac{a+c}{3} - \frac{b+d}{3}}{\frac{\overline{a}+\overline{b}}{3} - \frac{\overline{b}+\overline{d}}{3}} = \frac{a + c - b - d}{\overline{a} + \overline{c} - \overline{b} - \overline{d}} = -\frac{a + b - c - d}{\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}}.$$

Iz poslednjnja dva rezultata imamo da je

$$\frac{t_1 - t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = -\frac{h_1 - h_2}{\overline{h_1} - \overline{h_2}}$$

odakle po teoremi o ortogonalnosti dveju pravih dobijamo tvrđenje zadatka.
$\triangle$

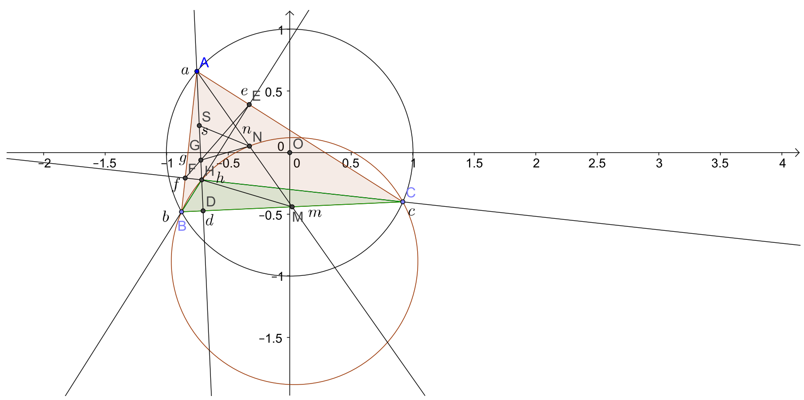
Zadatak 21. ***(Srpska Matematička olimpijada, 2010)*** *U oštrouglom $\triangle ABC$ tačka M je središte stranice BC, a tačke D, E i F su podnožija visina iz temena A, B i C, respektivno. Neka je H ortocentar $\triangle ABC$, S središte duži AH a G presek duži FE i AH. Ako je tačka N presek težišne duži AM i opisane kružnice $\triangle BCH$, dokazati da je $\angle HMA = \angle GNS$.*

Rešenje: Neka je, bez umanjenja opštosti, centar opisane kružnice $\triangle ABC$ koordinatni početak i neka je poluprečnik opisane kružnice 1. Imamo da važi:

$$|a| = |b| = |c| = 1,\ m = \frac{b+c}{2},\ h = a+b+c,\ s = a + \frac{b+c}{2},\ d = b+c,$$

$$e = \frac{a+b+c-a\overline{b}c}{2},\ f = \frac{a+b+c-ab\overline{c}}{2}.$$

Neka je t podnožije normale iz h na am. Tada je



Slika 8: SMO 2010

$$\frac{t-a}{\overline{t}-\overline{a}} = \frac{a-m}{\overline{a}-\overline{m}} = \frac{a-\frac{b+c}{2}}{\overline{\left(a-\frac{b+c}{2}\right)}} = \frac{abc(2a-b-c)}{2bc-ab-ac} = v \quad \text{i} \quad \frac{t-h}{\overline{t}-\overline{h}} = -v.$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sa $t-a = \overline{t}v - \overline{a}v$, odnosno sa

$$t-(a+b+c) = -\overline{t}v + \overline{a+b+c}\cdot v.$$

Odavde imamo da je

$$t = a + \frac{b+c}{2} + \frac{a(b+c)(2a-b-c)}{2(2bc-ab-ac)}.$$

Neka je o' centar opisane kružnice trougla bch. Kako je

$$\begin{aligned} |t-o'| &= \left|\frac{2a-b-c}{2}+\frac{a(b+c)(2a-b-c)}{2(2bc-ab-ac)}\right| = \\ &= \left|\frac{2a-b-c}{2bc-ab-ac}\cdot\frac{2bc-ab-ac+ab+ac}{2}\right| = \\ &= \left|\frac{2a-b-c}{abc\overline{(2a-b-c)}}\right|\cdot|bc| = 1. \end{aligned}$$

dobijamo da je $n \equiv t$.

Kako se tačka g dobija kao presek pravih ef i ah sledi

$$\frac{g-a}{\overline{g}-\overline{a}} = \frac{h-a}{\overline{g}-\overline{a}} = bc$$

i

$$\frac{g-e}{\overline{g}-\overline{e}} = \frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}} = \frac{a(b\overline{c}-\overline{b}c)}{a(b\overline{c}-\overline{b}c)} = -\frac{a}{\overline{a}} = -a^2.$$

Izražavajući $\overline{g}$ iz poslednje dve veze i rešavajući po g dobijamo da je

$$g = a + \frac{b+c}{2} - \frac{a(b+c)^2}{2(a^2+bc)}.$$

Sledi

$$\frac{h-m}{a-m} = \frac{2a+b+c}{2a-b-c}$$

i

$$\frac{g-n}{s-n} = \frac{\frac{a(b+c)(2a-b-c)}{2(2bc-ab-ac)}+\frac{a(b+c)^2}{2(a^2+bc)}}{\frac{a(b+c)(2a-b-c)}{2(2bc-ab-ac)}} = \frac{2a+b+c}{2a-b-c}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}.$$

Kako je

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} = \overline{\left(\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}\right)}$$

imamo tvrđenje zadatka. $\triangle$

Zahvalnost: Želim da se posebno zahvalim profesoru gimnazije „Svetozar Marković" u Nišu, specijalizovanih odeljenja za talentovane matematičare Milošu Milosavljeviću i docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu dr Nebojši Dinčiću na korisnim savetima i sugestijama.

Literatura

[1] Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, *Analiza sa algebrom 3*, "Krug", Beograd, 2003.

[2] Radoslav Dimitrijević, *Primene kompleksnih brojeva u geometriji*, Niš, 2012.

[3] Časopis "Tangenta", broj 61/1, godina 2010/11, Društvo matematičara Srbije.

[4] Sandra Ranković, *Primena kompleksnih brojeva u planimetriji*, Maturski rad, Matematička gimnazija, Beograd 2007.

[5] I. M. Yaglom, *Complex numbers in Geometry*, Academic Press, Leicester, England, 1968.

[6] Milan Mitrović, Srđan Ognjanović, Mihailo Veljković, Ljubinka Petković, Nenad Lazarević, *Geometrija* "Krug", Beograd 2003.

[7] Djordje Dugošija, Živorad Ivanović, *Trigonometrija*, "Krug", Beograd, 2006.

[8] Vladimir Stojanović, *MATHEMATISKOP 3, Zbirka rešenih zadataka*, Beograd, 2007.

[9] Liang-Shin Hahn, *Complex numbers and geometry*, Cambridge University Press, England, 1994.