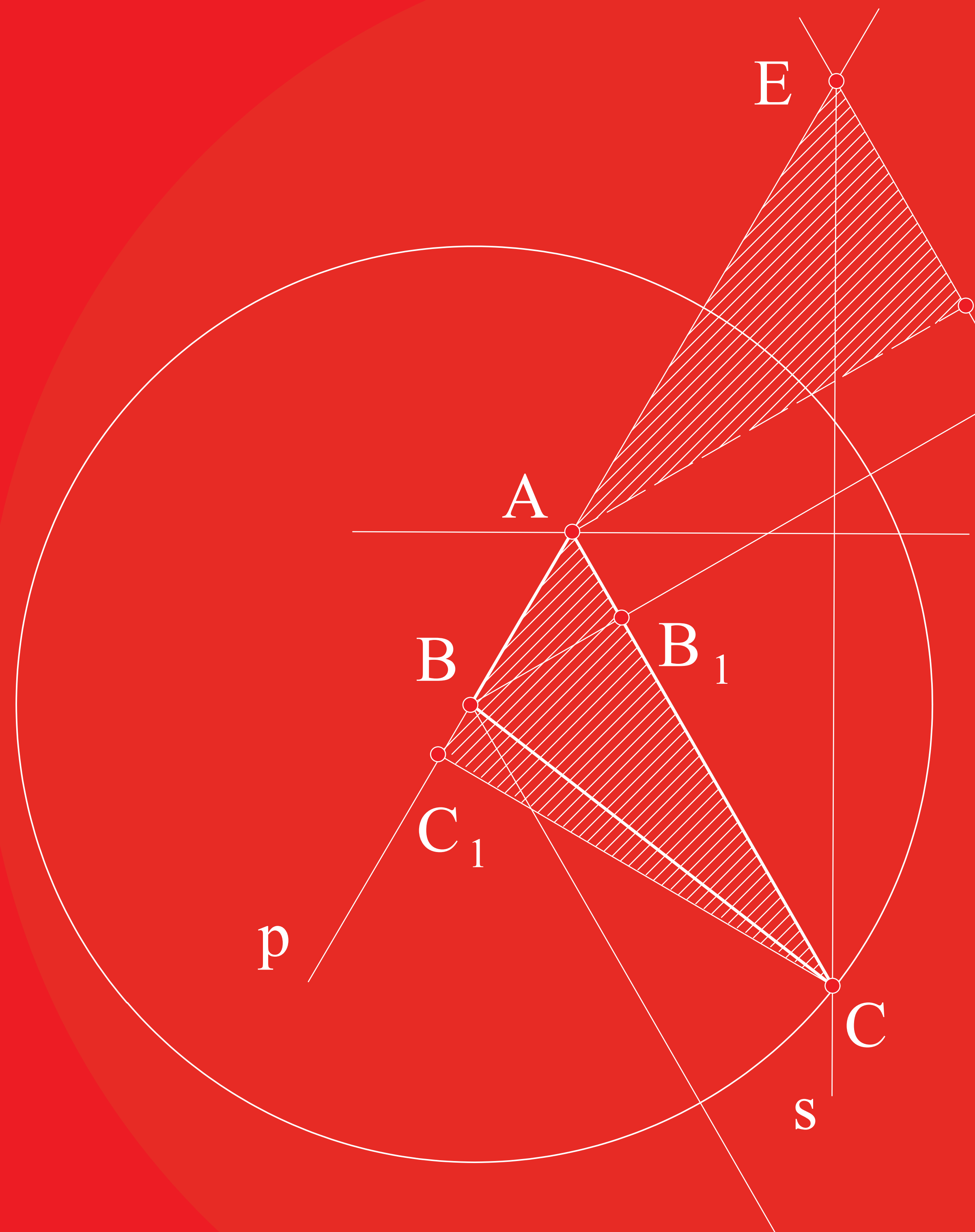


ISBN 978-86-6275-040-2

Мића Станковић КОНСТРУКЦИЈЕ У ЕУКЛИДСКОЈ РАВНИ

Мића Станковић

КОНСТРУКЦИЈЕ У ЕУКЛИДСКОЈ РАВНИ

-збирка задатака-

Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Ниш, 2015.

Мића Станковић

КОНСТРУКЦИЈЕ У ЕУКЛИДСКОЈ РАВНИ

-збирка задатака-

Прво издање

Серија:
помоћни уџбеници

Издавач:
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет

Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Ниш, 2015.

Издавач:
Природно математички факултет, Ниш

Рецензенти:
Др Љубица Велимировић, ред. проф. ПМФ-а у Нишу,
Др Милан Златановић, доцент ПМФ-а у Нишу,
Др Марија Најдановић, проф. стр. студ. ВСШВ у Крушевцу.

Серија:
помоћни уџбеници

Обрада рачунаром и дизајн:
др Мића Станковић

Штампа: Atlantis, Ниш
Тираж: 300

Одлуком Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Нишу, број 1059/1-01 од 15.10.2014. године одобрено је штампање рукописа као помоћног универзитетског уџбеника-збирке задатака.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд
514.12(075.8)
СТАНКОВИЋ, Мића, 1965-
Конструкције у еуклидској равни : збирка задатака / Мића Станковић. - 1. изд. - Ниш: Природно математички факултет, 2015 (Ниш: Atlantis). - 223 стр. : граф. прикази ; 25 цм. - (Серија Помоћни уџбеници/ Природно - математички факултет, Ниш)

На насл. стр.: Универзитет у Нишу. - Тираж 300. - Библиографија: стр. 221-223.

ISBN 978-86-6275-040-2

а) Геометрија, еуклидова
COBISS.SR-ID 216466700

ПРЕДГОВОР

Збирка задатака *Конструкције у еуклидској равни* настала је из вежби које су више година уназад држане на Природно математичком факултету у Нишу на Департману за математику из предмета *Геометрија* и *Основи геометрије*. Значи ова збирка је намењена пре свега студентима математике Природно-математичког факултета у Нишу. С обзиром на избор задатака, ова збрка може бити интересантна и за студенте математике других универзитета а такође и за професоре средњих школа за припреме такмичења из математике и за ученике Математичке гимназије.

Приликом израде збирке руководио сам се потребом да, поред збирки из геометрије са великим бројем конструкцијских задатака у којима су дати задаци без решења или само са идејама за њихово решавање, треба да постоји и збирка са детаљно решеним конструкцијским задацима. Наравно то је и разлог смањења броја задатака. У писању решења трудио сам се да се што већи број задатака потпуно прецизно и детаљно образложи. На тај начин, ниво прецизности неких од решења превазилази ниво који се очекује од студената на писменом испиту.

Задаци су груписани по областима и, колико је то било могуће, подобластима, а у оквиру њих од лакших ка тежим. Захваљујући томе, збирка може да се користи и као методичка збирка, тј. не служи само за проверу знања.

Део задатака из ове збирке је оригиналан. Остатак задатака је преузет из више извора. Поред задатака са вежби највише је коришћена *Збирка задатака из геометрије* Драгомира Лопандића [17], књига *Еуклидска геометрија* Миће Станковића [30], а делом и збирка задатака из геометрије Предрага Јаничића [12].

Збирка је посвећена пре свега разматрању проблематике конструкција разних равних фигура када су задати одговарајући полазни елементи. Целокупна материја подељена је у два дела.

У првом делу, обрађене су примене подударности и сличности троуглова и хармонијске четворке тачака. Изложени су, као решења задатака, докази великог броја најзначајнијих теорема геометрије везаних за троугао, четвороугао, круг и њихове узајамне односе. Оне ће имати примену у другом делу збирке приликом решавања конкретних конструкцијских задатака

Други део посвећен је решавању разних конструкцијских задатака. Подељен је на седам секција. У првој секцији дате су уводне напомене везане за конструкцијске задатке. Друга секција описује ток решавања конструкцијског задатка у општем случају. У трећој секцији решавани су неки простији примери. Четврта и пета секција посвећене су задацима везаним за круг а такође и нека интересантна геометријска места тачака. Највећи део збирке обухвата шести део који обрађује конструкције троуглова. Ту су нашли примену скоро сви задаци из претходних делова збирке. На крају, у седмом делу, решавани су конструкцијски задаци везани за четвороуглове.

Рецензентима, др Љубици Велимировић, др Милану Златановићу и др Марији Најдановић се овом приликом најсрдачније захваљујем за помоћ коју су ми пружили, својим примедбама и сугестијама, у припреми ове збирке. Они су на тај начин допринели да поједини делови ове збирке буду тачније и прецизније изложени. Захваљујем се и свима онима који су на било који начин допринели да ова збирка угледа светлост дана у овом облику. Наравно бићу захвалан и свима онима који ће својим сугестијама, предлозима и примедбама допринети побољшању ове збирке задатака.

Ниш, 20.01.2015. Аутор

САДРЖАЈ

Део 1

Важније теореме

1.1 Примене подударности и сличности троуглова

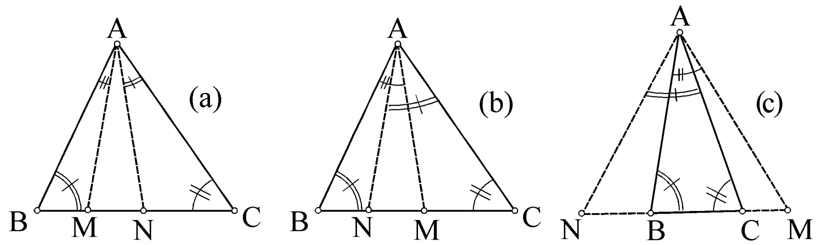
Задатак 1. *Ако је $\measuredangle A$ троугла ΔABC различит од правог угла и ако су M и N тачке полуправих BC и CBтакве да је $\measuredangle BAM = \measuredangle C$ и $\measuredangle CAN = \measuredangle B$ доказати да је троугао ΔAMN једнакокраки.*

Решење: За тачке M и N могу наступити следећи случајеви:

(i) Важи распоред тачака $B-M-N-C$. Тада је (Слика 1.1 (a))
$\measuredangle AMN = \measuredangle BAM + \measuredangle ABM = \measuredangle C + \measuredangle B$ и
$\measuredangle ANM = \measuredangle CAN + \measuredangle ACN = \measuredangle C + \measuredangle B$.

Дакле, у овом случају је $\measuredangle AMN = \measuredangle ANM$, тј. троугао ΔAMN је једнакокраки.

(ii) Важи распоред тачака $B-N-M-C$. Тада је (Слика 1.1 (b))
$\measuredangle AMN = \measuredangle C + \measuredangle CAM = \measuredangle C + (\measuredangle A - \measuredangle BAM) = \measuredangle C + \measuredangle A - \measuredangle C = \measuredangle A$ и



Слика 1.1.

$$\measuredangle ANM = \measuredangle B + \measuredangle BAN = \measuredangle B + (\measuredangle A - \measuredangle CAN) = \measuredangle B - \measuredangle A - \measuredangle B = \measuredangle A.$$

Дакле, и у овом случају је $\measuredangle AMN = \measuredangle ANM$, тј. троугао ΔAMN је једнакокраки.

(iii) Важи распоред тачака $N-B-C-M$. Тада је (Слика 1.1 (c))
$\measuredangle AMN = \measuredangle C - \measuredangle CAM = \measuredangle BAM - \measuredangle CAM = \measuredangle A$ и
$\measuredangle ANM = \measuredangle B - \measuredangle BAN = \measuredangle CAN - \measuredangle BAN = \measuredangle A$,
па је и у овом случају $\measuredangle AMN = \measuredangle ANM$, тј. троугао ΔAMN је једнакокраки.

(iv) Важи распоред тачака $N - B - M - C$. Тада је
$\measuredangle AMN = \measuredangle C + \measuredangle CAM = \measuredangle BAM + \measuredangle CAM = \measuredangle A$ и
$\measuredangle ANM = \measuredangle B - \measuredangle BAN = \measuredangle CAN - \measuredangle BAN = \measuredangle A$,
па је и у овом случају $\measuredangle AMN = \measuredangle ANM$, тј. троугао ΔAMN је једнакокраки.

(v) Важи распоред тачака $B-N-C-M$. Овај случај се разматра аналогно као претходни.

(vi) Тачке M и N се поклапају, тј. $M \equiv N$. Тада је $\measuredangle A = \measuredangle B + \measuredangle C$, тј. $\measuredangle A = R$, а та могућност је искључена претпоставком задатка. □

Задатак 2. *Средња линија троугла паралелна је основици и једнака половини основице. Доказати.*

Задатак 3. *Доказати да средишта дијагонала и средишта кракова било ког трапеза припадају једној правој*

Упутство: Користити задатак 2. □

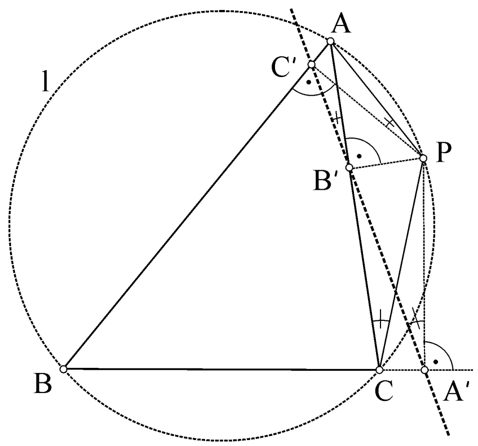
Задатак 4. *Доказати да је средња линија конвексног трапеза једнака полполузбиру а дуж одређена средиштима дијагонала једнака полуразлици паралелних страница.*

Упутство: Користити задатак 2. □

Задатак 5. *Доказати да је средња линија сложеног трапеза једнака полполуразлици веће и мање основице.*

Упутство: Користити задатак 2. □

Задатак 6. (Симпсонова теорема) *Подножја нормала кроз било коју тачку круга описаног око неког троугла на правама које су одређене страницама тог троугла припадају једној правој. Доказати.*



Слика 1.2.

Решење: Нека је P произвољна тачка круга l. Ако се P поклапа са неким од темена троугла доказ је тривијалан.

Претпоставимо да се тачка P не поклапа ни са једним од темена A, B, C троугла ΔABC. Тада тачка P припада неком од лукова $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ или $\overset{\frown}{CA}$ круга l. Нека тачка P припада луку $\overset{\frown}{AC}$ коме не припада тачка B (Слика 1.2). Конструишимо нормале из тачке P редом на праве одређене страницама BC, CA и AB и означимо са A', B' и C' њихова подножја.

Тачке P, A, B и C припадају кругу l па је четороугао $PABC$ тетиван, одакле следи да је $\measuredangle B + \measuredangle APC = 2R$.

Четвороугао $PC'BA'$ је такође тетиван јер је

$$\measuredangle PC'B = \measuredangle BA'P \ = \ R$$

па тачке A' и C' припадају кругу чији је пречник BP. Одавде следи $\measuredangle B + \measuredangle A'PC' = 2R$. Дакле

$$\measuredangle APC = \measuredangle A'PC', \tag{1.1}$$

као допуне истог угла $\measuredangle B$ до $2R$. Одавде следи

$$\measuredangle C'PA = \measuredangle CPA' \tag{1.2}$$

као допуне угла $\measuredangle CPC'$ до једнаких углова из (1.1).

Четвороугао $PB'AC'$ је тетиван јер се дуж AP види из тачака B' и C' под правим углом. Значи тачке B' и C' припадају кругу над пречником AP. Сада је

$$\measuredangle C'PA = \measuredangle C'B'A \tag{1.3}$$

као периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{C'A}$.

Четвороугао $PB'CA'$ је такође тетиван јер се дуж PC види под правим углом из тачака A' и B'. Сада је

$$\measuredangle C'PA' = \measuredangle CB'A' \tag{1.4}$$

као периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{CA'}$.

Из једнакости $(1.2), (1.3), (1.4)$ следи

$$\measuredangle C'B'A = \measuredangle CB'A'.$$

Како су због положаја тачке P ова два угла једнака и истосмерна, краци $B'A$ и $B'C$ припадају истој правој AC, то ће и краци $B'C'$ и $B'A'$ припадати истој правој, а то значи да ће тачке A', B' и C' бити колинеарне. □

Задатак 7. *Ако је H ортоцентар троугла ΔABC, доказати да су полупречници кругова описаних око троуглова ΔHBC, ΔHAB, ΔHCA и ΔABC међусобно једнаки.*

Решење: Означимо са A'' још једну пресечну тачку круга l и праве AH, а са A', B' и C' подножја висина редом из тачака A, B и C (Слика 1.3). Сада је

$$\measuredangle A'A''C \equiv \measuredangle AA''C = \measuredangle ABC,$$

као периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{AC}$. Такође важи

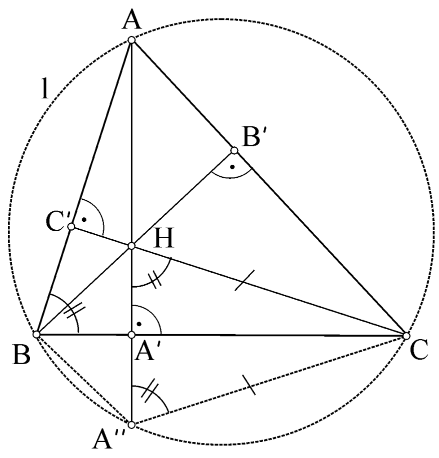
$$\measuredangle A'HC = \measuredangle ABC,$$

као углови са нормалним крацима, па је

$$\measuredangle A'A''C = \measuredangle A'HC. \tag{1.5}$$

Сада су троуглови $\Delta HCA'$ и $\Delta A''CA'$ подударни према другом ставу јер је $\measuredangle HA'C = \measuredangle A''A'C$, $A'C \equiv A'C$, па према (1.5) имамо $\measuredangle A'A''C = \measuredangle A'HC$. Из њихове подударности следи

$$HA' = A'A'', \quad HC = A''C. \tag{1.6}$$



Слика 1.3.

Посматрајмо троуглове $\Delta HA'B$ и $\Delta A''A'B$. Они су подударни према првом ставу јер је $A'B \equiv A'B$, $\measuredangle HA'B = \measuredangle A''A'B = R$ и $HA' = A''A'$ - из (1.6). Из њихове подударности следи

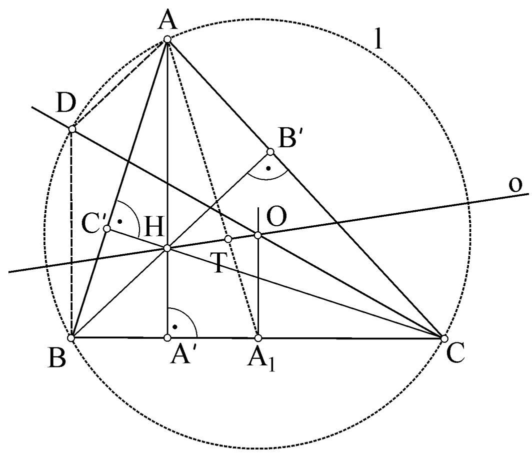
$$HB = A''B. \tag{1.7}$$

Сада су троуглови ΔHBC и $\Delta A''BC$ подударни према трећем ставу, јер је $BC \equiv BC$, $HB = A''B$ - из (1.7) и $HC = A''C$ - из (1.6). Из подударности троуглова ΔHBC и $\Delta A''BC$ следи подударност свих њихових елемената елемената, па и полупречника описаних кругова. С друге стране, темена троуглова $\Delta A''BC$ и ΔABC припадају истом кругу l па је он описан око њих. Одавде следи да су полупречници описаних кругова око троуглова ΔABC и ΔHBC једнаки међу собом. Доказ се изводи аналогно и за парове троуглова ΔABC, ΔHAB и ΔABC, ΔHCA. Дакле, полупречници описаних кругова око троуглова ΔABC, ΔHBC, ΔHAB и ΔHCA су међусобно једнаки. □

Задатак 8. (Ојлерова теорема) *Ако је H ортоцентар, T тежиште, O центар круга l описаног око троугла ΔABC и A_1 средиште странице BC доказати да је:*

а) *дуж OA_1 паралелна и истосмерна дужи AH и $OA_1 = AH/2$,*

б) *тачке O, T и H припадају једној правој при чему је $HT = 2 \cdot TO$.*



Слика 1.4.

Решење: а) Означимо са D још једну заједничку тачку праве OC и круга l (Слика 1.4). Угао $\measuredangle CBD$ је прав, као угао над пречником CD. Сада је $DB \perp BC$ и $AH \perp BC$, одакле следи

$$BD \parallel AH. \tag{1.8}$$

Тачке O и A_1 су средишта редом дужи CD и BC, одакле следи да је дуж OA_1 средња линија троугла ΔDBC па важи

$$OA_1 \parallel BD \quad \text{и} \quad OA_1 = \frac{1}{2}BD. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следи $OA_1 \parallel AH$.

На исти начин је $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$ одкле је $DA \parallel BH$. Сада, за четвороугао $BDAH$ важи $DA \parallel BH$ и $AH \parallel BD$ па је он паралелограм па су му наспрамне странице једнаке, тј. $AH = BD$. Следи

$$OA_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH.$$

б) Тачка T је тежиште троугла ΔABC па је $AT = 2 \cdot TA_1$.

Из $AH \parallel OA_1$ и $AT \equiv TA_1$ следи

$$\measuredangle HAT = \measuredangle OA_1T,$$

као углови са паралелним крацима. Сада из $AH = 2 \cdot OA_1$ и $AT = 2 \cdot TA_1$ на основу *Талесове теореме* следи $HT = 2 \cdot TO$ и $HT \parallel TO$.

Праве HT и TO су паралелне и имају заједничку тачку T одакле следи $HT \equiv TO$, тј. тачке O, T и H су колинеарне. □

Дефиниција 1.1.1. Права одређена тачкама O, T и H назива се *Ојлерова права.*

Задатак 9. *Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на средишта страница троугла припадају кругу који је описан око тог троугла.*

Решење: Нека је дат троугао ΔABC. Нека су (Слика 1.5):

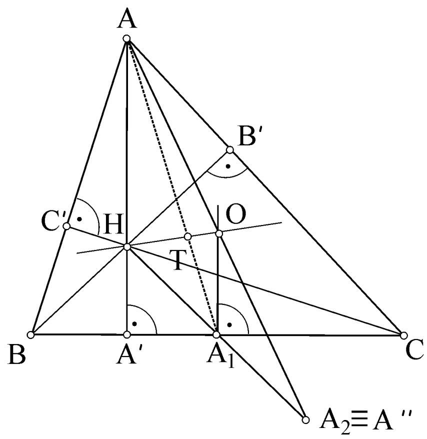
O - центар описаног круга око троугла, H - ортоцентар,

A_1, B_1, C_1 - средиште страница BC, CA и AB редом,

A', B', C' - подножја нормала из A, B, C на BC, CA и AB,

A'', B'', C'' - тачке симетричне тачки H у односу на A_1, B_1 и C_1.

По конструкцији је



Слика 1.5.

$$HA_1 = A_1A'' \quad \text{тј.} \quad HA'' = 2 \cdot A_1A''.$$

Из задатка 8. имамо

$$AH \parallel OA_1 \quad \text{и} \quad AH = 2 \cdot OA_1. \tag{1.10}$$

Означимо са A_2 пресечну тачку правих AO и HA_1. Тада за троуглове ΔAA_2H и ΔA_1A_2O имамо на основу (1.10) и Талесове теореме

$$A_2H = 2 \cdot A_2A_1 \quad \text{и} \quad AA_2 = 2 \cdot OA_2.$$

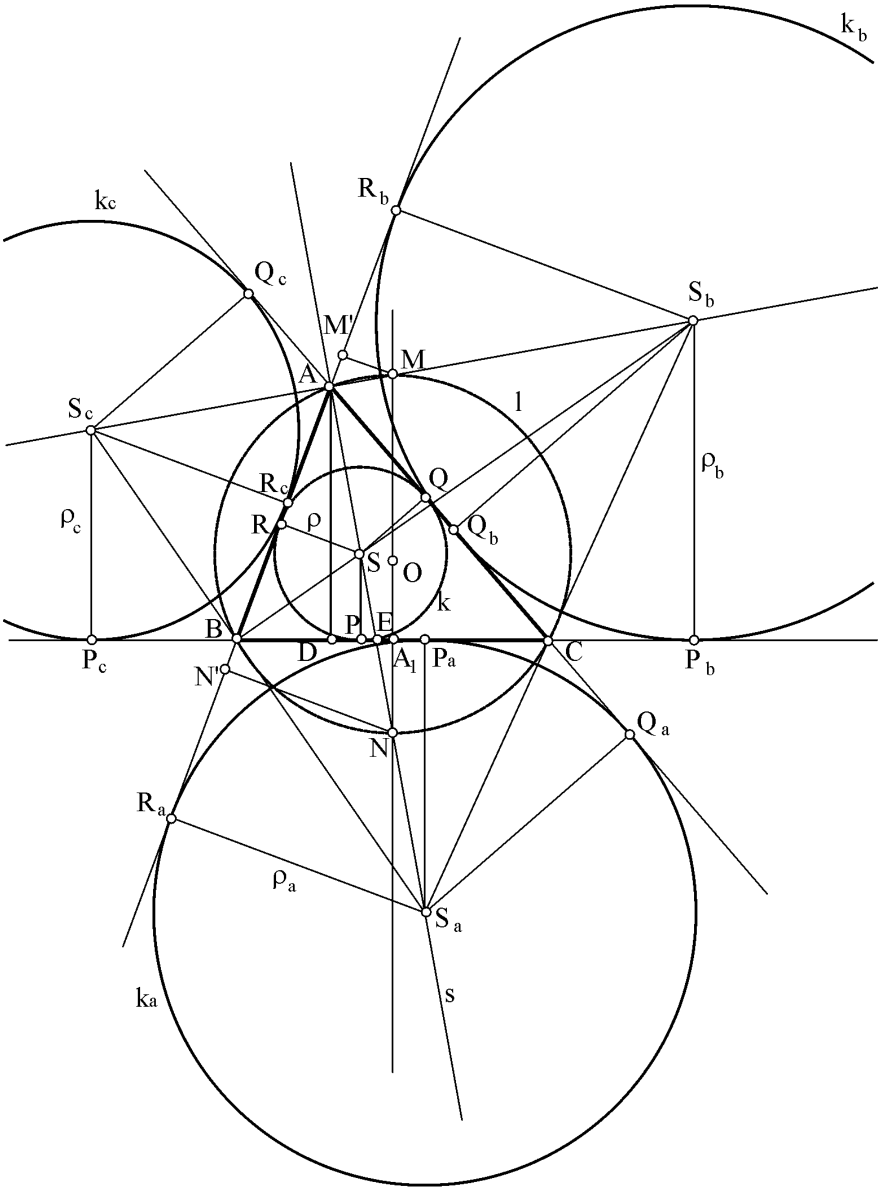
То значи да је A_2 тачка симетрична тачки H у односу на A_1, тј. $A_2 \equiv A''$. Сада из $AA_2 = 2 \cdot OA_2$ следи $AA'' = 2 \cdot OA'' = 2 \cdot OA$, па је AA'' пречник круга l описаног око троугла ΔABC, одакле је $A'' \in l$.

Аналогно се доказује да $B'' \in l$ и $C'' \in l$. □

Задатак 10. *Ако су A_1, B_1 и C_1 средишта страница $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ троугла ΔABC $(AC > AB)$, p-његов полуобим, O-центар и r-полупречник круга ℓ описаног око троугла ΔABC; S, S_a, S_b и S_c центри а ρ, ρ_a, ρ_b и ρ_c полупречници уписаних кругова k, k_a, k_b и k_c, при чему круг k додирује странице BC, CA и AB у тачкама P, Q и R респективно; круг k_a додирује страницу BC и продужетке страница AC и AB респективно у тачкама P_a, Q_a и R_a; круг k_b додирује страницу CA и продужетке страница AB и BC респективно у тачкама Q_b, R_b и P_b; круг k_c додирује страницу AB и продужетке страница BC и CA респективно у тачкама R_c, P_c и Q_c и ако су M и N тачке у којима симетрала странице BC сече круг ℓ, при чему је тачка M на луку $\overset{\frown}{BAC}$, затим M', N' нормалне пројекције тачака M и N на праву AB, доказати да је:*

а) $AQ_a = AR_a = p$, $(BP_b = BR_b = p$, $CP_c = CQ_c = p)$;
б) $QQ_a = RR_a = BC = a$, $(PP_b = RR_b = b$, $PP_c = QQ_c = c)$;
в) $Q_bQ_c = R_bR_c = BC = a$, $(P_aP_c = R_aR_c = b$, $P_aP_b = Q_aQ_b = c)$;
г) $AQ = AR = p - a$, $BR_c = BP_c = p - a$, $CP_b = CQ_b = p - a$, $(CQ = CP = p - c$, $BP = BR = p - b)$;
д) $PP_a = b - c, P_bP_c = b + c$;
ђ) $P_aA_1 = A_1P, P_bA_1 = A_1P_c$;
е) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;
ж) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $NN' = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho)$;
з) $AM' = \frac{1}{2}(b - c)$, $AN' = \frac{1}{2}(b + c)$, $M'N' = b$;
и) $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$.

Решење: Лукови $\overset{\frown}{BN}$ и $\overset{\frown}{CN}$ круга l су једнаки (Слика 1.6), одакле следи да су и углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle CAN$ једнаки као периферијски углови над једнаким луковима, па тачка N припада симетрали s унутрашњег угла код темена A. С обзиром на то да је MN пречник круга l то је $\measuredangle NAM$ прав, па тачка M припада симетрали s' спољашњег угла код темена A троугла ΔABC.



Слика 1.6. "Велики" задатак

а) Дужи AQ_a и AR_a су једнаке као тангенте дужи из тачке A на круг k_a. Важи распоред тачака $A-B-R_a$ и $A-C-Q_a$, одакле добијамо $AR_a = AB + BR_a$, $AQ_a = AC + CQ_a$. Из последње две једнакости следи да је:

$$\begin{aligned} AR_a + AQ_a &= AB + BR_a + AC + CQ_a \\ &= AB + BP_a + AC + CP_a = AB + AC + BC = 2p, \end{aligned}$$

па је $AR_a = AQ_a = p$.

б) Из распореда тачака $A-Q-C-Q_a$ и $A-R-B-R_a-$ биће:

$$QQ_a = AQ_a - AQ \quad \text{и} \quad RR_a = AR_a - AR.$$

Дужи AQ_a и AR_a једнаке су као тангентне дужи из тачке A на круг k_a. Како су јоши дужи AQ и AR једнаке као тангентне дужи из тачке A на круг k, добијамо да је $QQ_a = RR_a$.

С друге стране имамо

$$\begin{aligned} QQ_a + RR_a &= QC + CQ_a + RB + BR_a \\ &= PC + CP_a + PB + BP_a = BC + BC = 2BC = 2a. \end{aligned}$$

Према томе важи $QQ_a = RR_a = a = BC$. Остатак показујемо аналогно.

в) Из распореда тачака $C-Q_b-Q_c$ следи $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$ док из а) имамо $CQ_c = p$, $CQ_b = CP_b$, $BP_b = p$ па је

$$Q_bQ_c = p - CQ_b = BP_b - CP_b = BC,$$

јер важи распоред тачака $B-C-P_b$.

Из распореда тачака R_b-A-R_c-B је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = BP_b - BP_c = CP_c - BP_c = BC,$$

тј. $BP_b = CP_c = p$ и $Q_bQ_c = R_bR_c = BC = a$. (Остало се аналогно показује).

г) Као тангенте дужи из тачке A на круг k дужи AQ и AR су једнаке па из

$$AQ = AQ_a - QQ_a = p - a \quad \text{следи} \quad AQ = AR = p - a.$$

Дужи BR_c и BP_c су једнаке као тангенте дужи из тачке B на круг k_c па из

$$BR_c = BR_b - R_cR_b = p - a \quad \text{следи} \quad BR_c = BP_c = p - a.$$

Аналогно, тангенте дужи из тачке C на круг k_c су једнаке, тј. $CP_b = CQ_b$. Користећи једнакост $CP_b = BP_b - BC = p - a$ (из дела задатка под а)) добијамо $CP_b = CQ_b = p - a$.

д) Ако за тачке P и P_a важи $P \equiv P_a$ следи да су дужи AB и AC једнаке, па заиста важи: $PP_a = b - c$. Ако је $P \neq P_a$ тада важи распоред тачака $B - P - P_a - C$ или $B - P_a - P - C$. Претпоставимо да је $B - P - P_a - C$. Тада је

$$\begin{aligned} PP_a &= CP - CP_a = (p - c) - CQ_a \\ &= (p - c) - (AQ_a - AC) = p - c - p + b = b - c, \\ P_bP_c &= BP_b + BP_c = p + p - a = 2p - a = a + b + c - a = b + c. \end{aligned}$$

ђ) Из резултата под д) следи да је $BP = p - b$. С друге стране је

$$CP_a = CQ_a = AQ_a - AC = p - b, \quad \text{тј.} \quad BP = CP_a.$$

Из $CA_1 = BA_1$ и $BP = CP_a$ је $A_1P = BA_1 - BP = CA_1 - CP_a = P_aA_1$ а одавде је $A_1P = P_aA_1$. Сада, с обзиром на $BP_c = p - a$ и $CP_c = p - a$ важиће: $BP_c = CP_c$, $P_bA_1 = CP_b + CA_1 = BP_c + BA_1 = A_1P_c$ па је $P_bA_1 = A_1P_c$.

е) Центри спола уписаних кругова k_b и k_c налазе се на симетрали спољашњег угла код темена A. То значи да су тачке A, M, S_b и S_c колинеарне. Посматрајмо трапез $S_cP_cP_bS_b$. То је прост трапез и важи: A_1 је средиште странице P_cP_b, $A_1M \perp P_cP_b$, одакле закључујемо да је A_1M средња линија тог трапеза, па важи:

$$A_1M = \frac{1}{2}(S_cP_c + P_bS_b), \quad \text{тј.} \quad A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$$

и *M је средиште дужи S_bS_c.*

Посматрајмо сада сложени трапез SS_aP_aP. За њега је задовољено $A_1P = P_aA_1$ па је A_1 средиште дужи PP_a. Даље, тачка N припада дужи SS_a и

$$A_1N, SP, S_aP_a \perp PP_a,$$

одакле закључујемо да је A_1N *средња линија посматраног сложеног трапеза*, па важи (задатак 5.):

$$A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP), \quad \text{тј.} \quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$$

и N *је средиште дужи* SS_a.

ж) Посматрајмо сложени трапез $S_bS_cR_cR_b$. Код њега је M средиште крака S_bS_c. Даље

$$S_bR_b, S_cR_c, MM' \perp R_bR_c$$

па је MM' средња линија тог сложеног трапеза. Биће:

$$MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c), \quad \text{тј.} \quad MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$$

и M' *је средиште дужи* R_cR_b.

Аналогно је и NN' средња линија трапеза R_aS_aSR па је

$$NN' = \frac{1}{2}(R_aS_a + RS), \quad \text{тј.} \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho)$$

и N' *је средиште дужи* RR_a.

з) Важи распоред тачака $B - R_c - A - M' - R_b$ јер је $AC > AB$ и како је још $AR_b = BR_b - AB = p - c$ и M' средиште дужи R_bR_c имамо да је:

$$\begin{aligned} AM' &= AR_b - M'R_b \\ &= p - c - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a+b+c) - c - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b-c). \end{aligned}$$

Аналогно, из распореда тачака $A - N' - R_a$ имамо:

$$AN' = AR_a - R_aN' = p - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b+c).$$

Како важи распоред тачака $M' - A - N'$ имамо

$$M'N' = AM' + AN' = \frac{1}{2}(b-c) + \frac{1}{2}(b+c) = b.$$

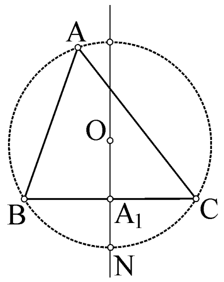
и) Како важи распоред тачака $M - A_1 - N$, имамо

$$2r = MN = MA_1 + NA_1 = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c) + \frac{1}{2}(\rho_a - \rho) = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho),$$

а одавде следи $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$. □

Задатак 11. *Ако су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB оштроуглог троугла ΔABC, O центар и r полупречник описаног а ρ полупречник уписаног круга, доказати да је*

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + \rho.$$



Слика 1.7.

Решење: Из задатка 10. имамо $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$ (Слика 1.7). Такође важи $ON = r$ (Слика 1.7) па је

$$OA_1 = ON - A_1N = r - \frac{1}{2}(\rho_a - \rho).$$

Аналогно је

$$OB_1 = r - \frac{1}{2}(\rho_b - \rho), \quad OC_1 = r - \frac{1}{2}(\rho_c - \rho).$$

Сада је

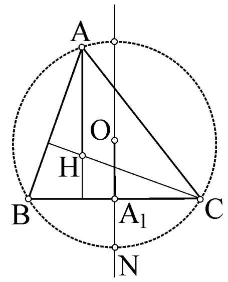
$$\begin{aligned} OA_1 + OB_1 + OC_1 &= 3r - \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - 3\rho) \\ &= 3r - \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho - 2\rho) = 3r - \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho) + \rho \\ &= 3r - \frac{1}{2}4 + \rho = 3r - 2r + \rho = r + \rho. \end{aligned}$$

□

Задатак 12. *Ако је H ортоцентар оштроуглог троугла ΔABC, r полупречник описаног круга, ρ полупречник уписаног круга, ρ_a полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC, доказати да је:*

а) $AH = 2r + \rho - \rho_a$,

б) $AH + BH + CH = 2(r + \rho)$.



Слика 1.8.

Решење: а) Важи распоред тачака $O - A_1 - N$ па је

$$OA_1 = ON - A_1N = r - \frac{1}{2}(\rho_a - \rho).$$

Из задатка 8. имамо $AH \parallel OA_1$ и $OA_1 = AH/2$ тј. $AH = 2 \cdot OA_1$ па је $AH = 2r + \rho - \rho_a$. Аналогно добијамо $BH = 2r + \rho - \rho_b$ и $CH = 2r + \rho - \rho_c$.

б) Сабирањем последње три једнакости добијамо

$$\begin{aligned} AH + BH + CH &= (2r + \rho - \rho_a) + (2r + \rho - \rho_b) + (2r + \rho - \rho_c) \\ &= 6r + 3\rho - (\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho) - \rho \\ &= 6r + 2\rho - 4r = 2r + 2\rho = 2(r + \rho). \end{aligned}$$

□

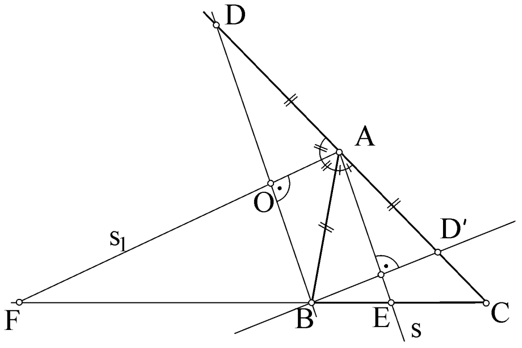
Задатак 13. *Нека су E и F тачке у којима симетрале унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle A$ у троуглу ΔABC секу праву одређену тачкама B и C. Доказати да је:*

а) $BE : CE = AB : AC,$

б) $BF : CF = AB : AC,$

в) $BE : CE = BF : CF.$

Решење: а) Ознчимо са s и s_1 редом симетрале унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle A$ а са D тачку праве AC такву да је $C, D \div A$ и $AB = AD$ (Слика 1.9). Троугао ΔABD је једнакокраки па му се висина и симетрала унутрашњег угла, које одговарају основици, поклапају. Означимо са O пресечну тачку правих $AF \equiv s_1$ и BD. То значи да је $BD \perp AO \equiv AF$. Како је још угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код истог темена прав, то је $s \perp$



Слика 1.9.

s_1. Дакле, следи $s \parallel BD$, тј $AE \parallel BD$. Дакле, за угао $\measuredangle ACB$ и паралелне праве AE и BD на основу Талесове теореме важи

$$BE : CE = DA : AC = AB : AC.$$

б) Озничимо са D' тачку праве AC такву да је $C, D' \div A$ и $AB = AD'$. Троугао $\Delta ABD'$ је једнакокраки па му се висина и симетрала унутрашњег угла, које одговарају основици, поклапају. То значи да је симетрала $s \equiv AE$ угла $\measuredangle BAC$ ортогонална на основицу BD' троугла $\Delta ABD'$. Како је још AE ортогонална на AF закључујемо да су праве AF и BD' паралелне. Сада, за угао $\measuredangle ACB$ и паралелне праве AF и BD' на основу Талесове теореме важи

$$BF : CF = D'A : AC = AB : AC.$$

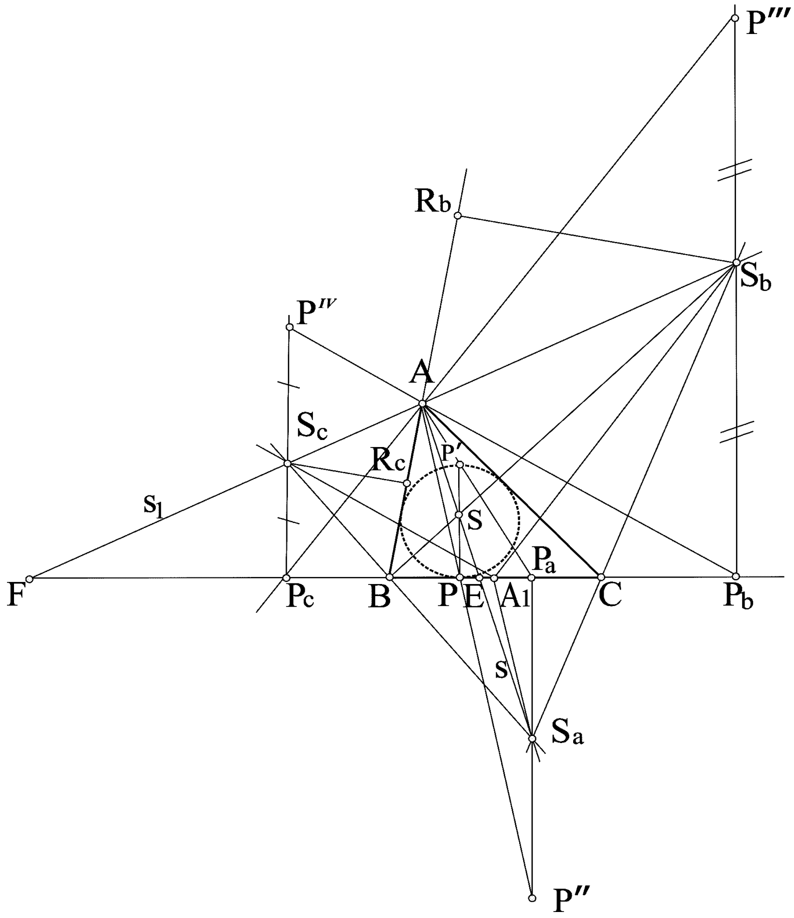
в) Следи директно из делова а) и б). □

Задатак 14. *Ако су S, S_a, S_b, S_c центри уписаних кругова троугла ΔABC, затим P, P_a, P_b, P_c тачке у којима ти кругови додирују праву BC и A_1 средиште странице BC, доказати да је:*

а) $SA_1 \parallel AP_a$, б) $S_aA_1 \parallel AP$, в) $S_bA_1 \parallel AP_c$, г) $S_cA_1 \parallel AP_b$.

Решење: а) Означимо са P' пресечну тачку правих SP и AP_a (Слика 1.10). Праве SP и S_aP_a су ортогоналне на BC па су паралелне међусобом. Следи $SP' \parallel S_aP_a$. Сада, за угао $\measuredangle SAP_a$ на основу Талесове теореме следи

$$AS : AS_a = SP' : S_aP_a. \tag{1.11}$$



Слика 1.10.

Означимо са E пресечну тачку правих AS и BC. Углови $\measuredangle SEP$ и $\measuredangle S_aEP_a$ су унакрсни а праве SP и S_aP_a паралелне, одакле на основу Талесове теореме следи

$$ES : ES_a = SP : S_aP_a. \tag{1.12}$$

За троугао ΔABE важи: Тачке S и S_a су пресечне тачке редом симетрала унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle ABE$ са правом коју одређује трећа страница AE тог троугла. На основу Задатка 13. имамо $AS : ES = AS_a : S_aE$, тј.

$$AS : AS_a = SE : S_aE. \tag{1.13}$$

Упоређивањем једнакости (1.11), (1.12) и (1.13) добијамо

$$SP' : S_aP_a = SP : S_aP_a,$$

одакле закључујемо да је $SP' = SP$. Како је још по конструкцији $P - S - P'$, следи да је тачка S средиште дужи PP'.

Уочимо сада троугао $\Delta PP'P_a$. Тачка A_1 је средиште дужи PP_a на основу задатка 10. ђ), па је дуж SA_1 средња линија троугла $\Delta PP'P_a$ која одговара страници P_aP'. Следи $SA_1 \parallel P_aP'$, а одавде због колинеарности тачака A, P' и P_a добијамо $SA_1 \parallel AP_a$.

б) Означимо са P'' пресечну тачку правих S_aP_a и AP (Слика 1.10). Тада је S_a средиште дужи P_aP''. Докажимо то. Применом Талесове теореме на угао $\measuredangle P_aAS_a$ и паралелне праве SP' и S_aP_a следи

$$SP' : S_aP_a = AS : AS_a. \tag{1.14}$$

На исти начин применом Талесове теореме на угао $\measuredangle PAS$ и паралелне праве SP и S_aP''

$$AS : AS_a = SP : S_aP''. \tag{1.15}$$

Сада из (1.14) и (1.15) с обзиром на то да је $SP = SP'$ закључујемо да је $S_aP_a = S_aP''$. За троугао $\Delta PP_aP''$ имамо да је A_1 средиште странице PP_a, S_a средиште странице P_aP'', па је A_1S_a средња линија тог троугла. Према томе праве A_1S_a и PP'' су паралелне. Због колинеарности тачака A, P и P'' следи паралелност правих A_1S_a и AP, а то је и требало доказати.

в) Означимо са P''' пресечну тачку правих S_bP_b и AP_c (Слика 1.10). Тада, из сличности троуглова ΔAS_cP_c и $\Delta AS_bP'''$ следи

$$S_cP_c : S_bP''' = AS_c : AS_b. \tag{1.16}$$

Означимо још са R_b и R_c подножја нормала редом из тачака S_b и S_c на праву AB. Тада из сличности троуглова ΔAS_cR_c и ΔAS_bR_b следи

$$S_cR_c : S_bR_b = AS_c : AS_b. \tag{1.17}$$

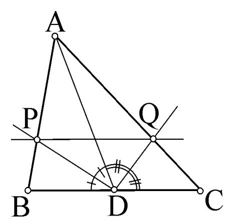
Из (1.16) и (1.17) следи

$$S_cP_c : S_bP''' = S_cP_c : S_bP_b.$$

а одавде је $S_bP''' = S_bP_b$, тј. S_b је средиште дужи P_bP'''. Из "Великог" задатка, тачка A_1 је средиште дужи P_bP_c. Дакле, S_bA_1 је средња линија троугла $\Delta P_bP_cP'''$ па је права S_bA_1 паралелна правој P_cP''', тј. правој AP_c.

г) Означимо са P^{IV} пресечну тачку правих S_cP_c и AP_b (Слика 1.10). Тада је, као и у делу задатка под в), тачка S_c средиште дужи P_cP^{IV}. У троуглу $\Delta P_cP_bP^{IV}$ дуж A_1S_c је средња линија. Према томе праве A_1S_c и P_bP^{IV} су паралелне. Због колинеарности тачака A, P_b и P^{IV} следи паралелност правих A_1S_c и AP_b, а то је и требало доказати. $\square$

Задатак 15. *Ако је D средиште странице BC троугла ΔABC, P тачка у којој симетрала угла $\measuredangle ADB$ сече страницу AB а Q тачка у којој симетрала угла $\measuredangle ADC$ сече страницу AC, доказати да су праве PQ и BC паралелне.*



Слика 1.11.

Решење: Из троугла ΔABD (Слика 1.11) на основу задатка 13. а) имамо

$$AP : BP = DA : DB.$$

На исти начин за троугао ΔACD важи

$$AQ : CQ = DA : DC.$$

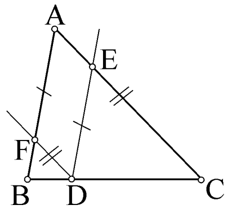
Како је још $DB = DC$ добијамо да за угао $\measuredangle BAC$ важи

$$AP : BP = AQ : CQ$$

што на основу Талесове теореме значи да је $PQ \parallel BC$. $\square$

Задатак 16. *Ако је D произвољна тачка странице BC троугла ΔABC, а E и F тачке страница AC и AB такве да је $AB \parallel DE$ и $AC \parallel DF$ доказати да је*

$$\frac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AB}} + \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{AC}} = 1.$$



Слика 1.12.

Решење: За угао $\measuredangle C$ и паралелне праве DE и AB (Слика 1.12) на основу Талесове теореме имамо $\dfrac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{BC}}$. На исти начин за угао $\measuredangle B$ и паралелне праве DF и AC на основу Талесове теореме имамо $\dfrac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}$. Сабирањем последњих двеју релација добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AB}} + \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{BC}} + \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}} = 1.$$

□

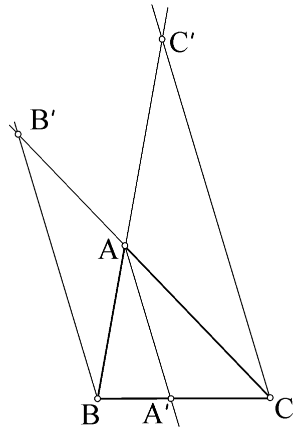
Задатак 17. *Ако су A', B', C' тачке у којима паралелне праве кроз темена A, B, C троугла ΔABC секу праве BC, CA и AB доказати да је*

$$\frac{1}{\overrightarrow{AA'}} + \frac{1}{\overrightarrow{BB'}} + \frac{1}{\overrightarrow{CC'}} = 0.$$

Решење: За угао $\measuredangle C$ троугла ΔABC (Слика 1.13) и паралелне праве AA' и BB' на основу Талесове теореме имамо $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BB'}} = \dfrac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{CB}}$. Аналогно, за угао $\measuredangle B$ троугла ΔABC и паралелне праве AA' и CC' на основу Талесове теореме имамо $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{CC'}} = \dfrac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{CB}}$. Сабирањем последњих двеју једнакости добијамо

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BB'}} + \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{CC'}} = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{CB}} + \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CB}} = -1,$$

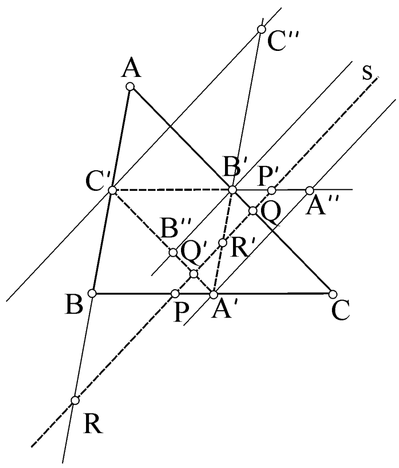
тј. $\overrightarrow{AA'} \cdot \left(\dfrac{1}{\overrightarrow{BB'}} + \dfrac{1}{\overrightarrow{CC'}} \right) = -1$, а одавде $\dfrac{1}{\overrightarrow{AA'}} + \dfrac{1}{\overrightarrow{BB'}} + \dfrac{1}{\overrightarrow{CC'}} = 0.$ □



Слика 1.13.

Задатак 18. *Ако су A', B', C' средишта страница BC, CA и AB троугла ΔABC, затим P, Q, R тачке у којима произвољна права s сече праве BC, CA и AB и P', Q', R' тачке у којима та иста права сече праве $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$, доказати да је*

$$\frac{1}{\overrightarrow{PP'}} + \frac{1}{\overrightarrow{QQ'}} + \frac{1}{\overrightarrow{RR'}} = 0.$$



Слика 1.14.

Решење: Конструишимо праве a', b', c' редом кроз тачке A', B', C' паралелне правој s. Означимо са A'', B'', C'' пресечне тачке правих a', b', c' редом са $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ (Слика 1.14). Применимо задатак 17. на троугао $\Delta A'B'C'$ и паралелне праве a', b', c'. Тада је

$$\frac{1}{\overrightarrow{A'A''}}+\frac{1}{\overrightarrow{B'B''}}+\frac{1}{\overrightarrow{C'C''}}=0.$$

По конструкцији четвороуглови $PA'A''P'$, $QB'B''Q'$ и $RC'C''R'$ су паралелограми па је $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{A'A''}$, $\overrightarrow{QQ'}=\overrightarrow{B'B''}$ и $\overrightarrow{RR'}=\overrightarrow{C'C''}$.

Задатак 19. (Аполонијева теорема) *Ако је X тачка странице BC троугла ΔABC таква да су дужи BX и XC сразмерне двема датим дужима m и n, тј. $BX : XC = m : n$, тада је*

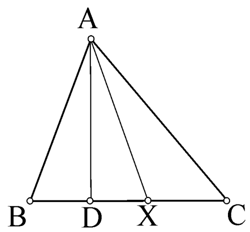
$$(m+n)AX^2 = n(AB^2 - BX^2) + m(AC^2 - CX^2). \tag{1.18}$$

Решење: Означимо са D подножје нормале из тачке A на праву BC. Тада могу наступити следећи случајеви: (i) $D \equiv X$, (ii) $D \neq X$.

(i) Ако је $D \equiv X$ онда су троуглови ΔABX и ΔACX правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо

$$AX^2 = AB^2 - BX^2 \quad \text{и} \quad AX^2 = AC^2 - CX^2.$$

Множењем прве једнкости са n а друге са m и сабирањем добијамо (1.18).



Слика 1.15.

(ii) Нека је сада $D \neq X$ и претпоставимо да важи $B - D - X - C$ (Слика 1.15). Сада, применом Питагорине теореме на правоугле троуглове ΔABD и ΔAXD имамо:

$AB^2 - BD^2 = AX^2 - DX^2$, тј. $AB^2 - (BX - DX)^2 = AX^2 - DX^2$ одакле је $AB^2 - BX^2 + 2BX \cdot DX - DX^2 = AX^2 - DX^2$, тј.

$$AX^2 = AB^2 - BX^2 + 2BX \cdot DX. \tag{1.19}$$

На исти начин применом Питагорине теореме на троуглове ΔACD и ΔAXD добијамо

$$AX^2 = AC^2 - CX^2 - 2CX \cdot DX. \tag{1.20}$$

Множењем једнакости (1.19) са n а (1.20) са m и сабирањем добијамо

$$(m+n)AX^2 = n(AB^2 - BX^2) + m(AC^2 - CX^2) + 2nBX \cdot DX - 2mCX \cdot DX,$$

и како је још $BX : XC = m : n$, тј. $n\,BX = m\,CX$ на крају добијамо (1.18). □

Напомена: Израз из Аполонијеве теореме се може трансформисати у облик погоднији за памћење и примену, тј.

$$n\,AB^2 + m\,AC^2 = (m+n)\,AX^2 + n\,BX^2 + m\,CX^2.$$

Задатак 20. (Стјуартова теорема) *Ако је X тачка странице BC троугла ΔABC тада је*

$$BC \cdot AX^2 = XC \cdot AB^2 + BX \cdot AC^2 - BX \cdot XC \cdot BC.$$

Решење: Директна последица Аполонијеве теореме. □

Задатак 21. (Лајбницова теорема) *Ако је T тежиште троугла ΔABC и P произвољна тачка доказати да је*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot PT^2. \tag{1.21}$$

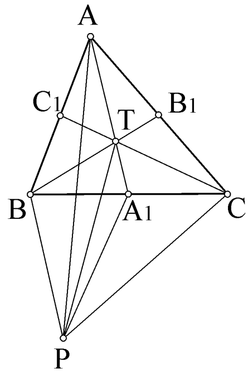
Решење: У троуглу ΔABC тежиште дели тежишну дуж AA_1 у односу $AT : TA_1 = 2 : 1$. Применом Аполонијеве теореме редом на троуглове ΔPAA_1, ΔPBC и ΔTBC добијамо (Слика 1.16)

$$PA^2 + 2 \cdot PA_1^2 = 3 \cdot PT^2 + 1 \cdot AT^2 + 2 \cdot TA_1^2, \tag{1.22}$$

$$PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA_1^2 + 1 \cdot BA_1^2 + 1 \cdot CA_1^2, \tag{1.23}$$

$$TB^2 + TC^2 = 2 \cdot TA_1^2 + 1 \cdot BA_1^2 + 1 \cdot CA_1^2. \tag{1.24}$$

Сабирањем једнакости (1.22) и (1.23) уз коришћење услова (1.24) добијамо (1.21). □



Слика 1.16.

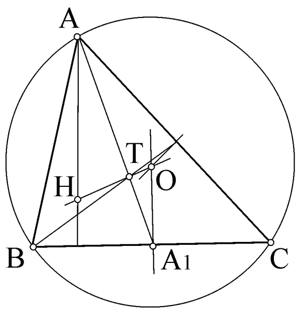
Задатак 22. *Ако су a, b, c странице троугла ΔABC, O и r центар и полупречник описаног круга а T и H тежиште и ортоцентар, доказати да је*

а) $OT^2 = r^2 - \dfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2), \qquad TA^2+TB^2+TC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

б) $OH^2 = 9r^2 - (a^2+b^2+c^2)$,

в) $TH^2 = 4r^2 - \dfrac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$,

г) $AH^2+BH^2+CH^2 = 12r^2 - (a^2+b^2+c^2)$.



Слика 1.17.

Решење: а) Применимо Лајбницову теорему на ΔABC и тачку O (Слика 1.17). Тада је $OA^2+OB^2+OC^2 = TA^2+TB^2+TC^2+3\cdot OT^2$, тј. $3r^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot OT^2$, одакле је

$$OT^2 = r^2 - \frac{1}{3}(TA^2 + TB^2 + TC^2). \tag{1.25}$$

Сада применимо Аполонијеву теорему на троугао ΔABC и средиште A_1 странице BC. Биће $AB^2 + AC^2 = 2 \cdot AA_1^2 + BA_1^2 + CA_1^2$, тј. $2 \cdot AA_1^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$, одакле је $AA_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2})$. Из особине тежишне дужи имамо $AT : AA_1 = 2 : 3$, тј. $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot TA$ а одавде $\frac{9}{4}TA^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2})$. Према томе, важи

$$TA^2 = \frac{2}{9}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}).$$

Аналогно добијамо

$$TB^2 = \frac{2}{9}(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}) \quad \text{и} \quad TC^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}).$$

Заменом последње три једнакости у (1.25) добијамо

$$OT^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Одавде се може добити и

$$TA^2 + TB^2 + TC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

б) Из Ојлерове теореме (Задатак 8.) је $OH = 3 \cdot OT$, па из дела задатка под а) следи

$$OH^2 = 9 \cdot OT^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

в) Из Ојлерове теореме (Задатак 8.) је $TH = 2 \cdot OT$, па из дела задатка под а) следи

$$TH^2 = 4 \cdot OT^2 = 4r^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

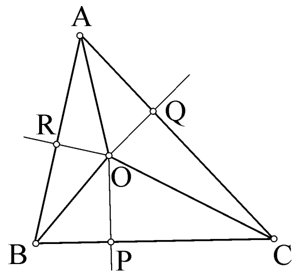
г) Применом Лајбницове теореме на троугао ΔABC и тачку H добијамо

$$\begin{aligned} AH^2 + BH^2 + CH^2 &= TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot TH^2 \\ &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3(4r^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)) \\ &= 12r^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

□

Задатак 23. (Карноова теорема) *Ако је* ΔABC *произвољан троугао а* P, Q *и* R *тачке правих* BC, CA *и* AB, *доказати да је потребан и довољан услов да се нормале у тачкама* P, Q *и* R *на праве* BC, CA *и* AB *редом секу у једној тачки изражен релацијом*

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0. \tag{1.26}$$



Слика 1.18.

Решење: Нека се нормале у тачкама P, Q и R на странице BC, CA и AB троугла ΔABC секу у тачки O (Слика 1.18). Применом Питагорине теореме добијамо

$$OB^2 - BP^2 = OC^2 - PC^2 \Longrightarrow BP^2 - PC^2 = OB^2 - OC^2,$$

$$OC^2 - CQ^2 = OA^2 - QA^2 \Longrightarrow CQ^2 - QA^2 = OC^2 - OA^2,$$

$$OA^2 - AR^2 = OB^2 - RB^2 \Longrightarrow AR^2 - RB^2 = OA^2 - OB^2.$$

Сабирањем последњих трију једнакости добијамо једнакост (1.26).

Обратно, претпоставимо да важи једнакост (1.26) и докажимо да се нормале у тачкама P, Q и R на странице BC, CA и AB секу у тачки O. Нека је O пресечна тачка нормала у тачкама P и Q редом на странице BC и AC. Означимо са R' подножје нормале из тачке O на праву AB. Сада се тачка O налази у пресеку нормала P, Q и R' из тачке O на странице BC, CA и AB, одакле према доказаном делу задатка имамо

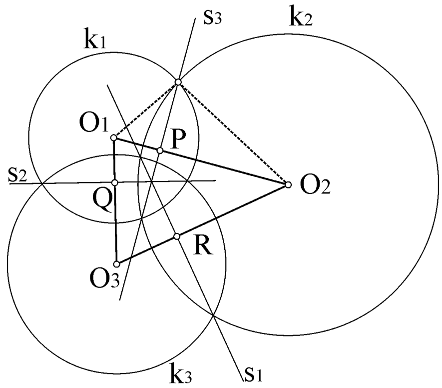
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR'^2 - R'B^2 = 0. \tag{1.27}$$

Из (1.26) и (1.27) следи $\overrightarrow{AR}^2 - \overrightarrow{RB}^2 = \overrightarrow{AR'}^2 - \overrightarrow{R'B}^2$ а одавде $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR'} - \overrightarrow{R'B}$, тј. $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{R'R}$, а то је могуће само ако је $R \equiv R'$. $\square$

Задатак 24. *Доказати да се праве одређене висинама троугла секу у једној тачки.*

Упутство: Доказ се изводи директном применом Карноове теореме. □

Задатак 25. *Од три круга којима средишта нису на једној правој свака два се секу. Доказати да се праве одређене заједничким тетивама секу у једној тачки.*



Слика 1.19.

Решење: Нека су $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$ три круга од којих се свака два секу. Нека су s_1, s_2 и s_3 заједничке тетиве редом кругова k_2 и k_3, k_1 и k_3, k_1 и k_2. Тада су праве s_1, s_2 и s_3 нормалне на праве O_2O_3, O_1O_3, O_1O_2 редом у тачкама R, Q и P. Нека је A једна од заједничких тачака кругова k_1 и k_2. Сада, применом Питагорине теореме на троуглове ΔAPO_1 и ΔAPO_2 добијамо $AP^2 = AO_1^2 - O_1P^2 = r_1^2 - O_1P^2$ и $AP^2 = AO_2^2 - O_2P^2 = r_2^2 - O_2P^2$. Одавде је $r_1^2 - O_1P^2 = r_2^2 - O_2P^2$, тј.

$$O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2. \tag{1.28}$$

Аналогним поступком добијамо

$$O_2R^2 - O_3R^2 = r_2^2 - r_3^2, \tag{1.29}$$

$$O_3Q^2 - O_1Q^2 = r_3^2 - r_1^2. \tag{1.30}$$

Сабирањем једнакости (1.28), (1.29) и (1.30) добијамо

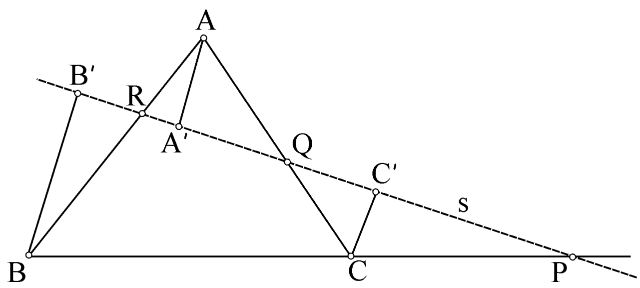
$$O_1P^2 - O_2P^2 + O_2R^2 - O_3R^2 + O_3Q - O_1Q^2 = 0,$$

што на основу Карноове теореме значи да се праве s_1, s_2 и s_3 секу у једној тачки. □

Задатак 26. (Менелајева[1] теорема) *Нека је у равни E^2 дат троугао ΔABC. Тачке P, Q и R правих BC, CA и AB различите од темена A, B и C троугла ΔABC су колинеарне ако и само ако је*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \tag{1.31}$$

Доказати.



Слика 1.20.

Решење: Нека су тачке P, Q и R колинеарне. Означимо са s праву одређену тачкама P, Q и R. Како права s не садржи ни једно теме троугла ΔABC, тачке P, Q и R су или све три на продужецима страница троугла ΔABC или се две налазе на страницама а трећа на продужетку. То значи да су све три размере на левој страни релације (1.31) негативне или да је једна негативна а две позитивне. У сваком случају знак леве стране релације (1.31) је негативан. Означимо са A', B' и C' подножја нормала редом из тачака A, B и C на праву s. Тада је $\Delta AA'R \sim \Delta BB'R$, $\Delta AA'Q \sim \Delta CC'Q$ и $\Delta BB'P \sim \Delta CC'P$, одакле је

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{CC'}{AA'} \text{ и } \frac{AR}{RB} = \frac{AA'}{BB'},$$

[1] Menelaj (I vek nove ere)

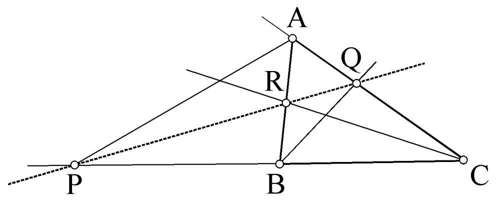
одакле директно следи релација (1.31).

Обратно, Нека важи релација (1.31) и нека права PQ сече праву AB у тачки R'. Тада према доказаном делу теореме следи

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1. \tag{1.32}$$

Из (1.31) и (1.32) следи $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR'} : \overrightarrow{R'B}$, што значи да се тачке R и R' поклапају. $\square$

Задатак 27. *Доказати да тачке P, Q и R у којима симетрале спољашњег угла код темена A и унутрашњих углова код темена B и C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ΔABC припадају једној правој.*



Слика 1.21.

Решење: Из задатка 13. водећи рачуна о смеру (Слика 1.21) следи

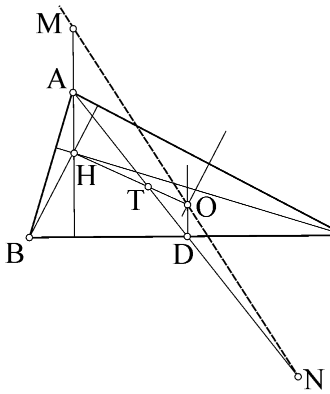
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{AB}{AC}, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{CA}{CB}.$$

Множењем одговарајућих страна последње три једнакости добијамо

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1,$$

што према Менелајевој теореми значи да су тачке P, Q и R колинеарне. $\square$

Задатак 28. *Ако је O центар описаног круга око троугла ΔABC, M тачка симетрична са ортоцентром H у односу на теме A и N тачка симетрична са тачком A у односу на средиште D странице BC, доказати да су тачке O, M и N колинеарне.*



Слика 1.22.

По претпоставци задатка је $M \in AH$, $H - A - M$, $AH = AM$, затим $N \in AD$, $A - D - N$ и $AD = DN$. Према Ојлеровој теореми (Задатак 8.), тачке O, T и H су колинеарне и важи $HT : TO = 2 : 1$, при чему су O, T и H центар описаног круга, ортоцентар и тежиште троугла ΔABC.

Посматрајмо троугао ΔAHT. Важи $O \in p(H, T)$, $M \in p(A, H)$, $N \in (T, A)$. Није тешко закључити да још важи

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MH}} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\overrightarrow{HO}}{\overrightarrow{OT}} = -\frac{3}{1}, \quad \frac{\overrightarrow{TN}}{\overrightarrow{NA}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

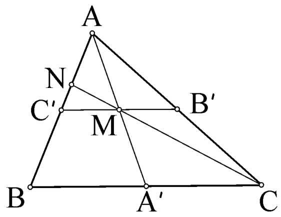
Множењем одговарајућих страна последње три једнакости добијамо

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MH}} \cdot \frac{\overrightarrow{HO}}{\overrightarrow{OT}} \cdot \frac{\overrightarrow{TN}}{\overrightarrow{NA}} = -1,$$

што на основу Менелајеве теореме (Задатак 26.) значи да су тачке M, O и N колинеарне. □

Задатак 29. *Ако су A', B', C' средишта страница BC, CA и AB троугла ΔABC, M пресечна тачка правих AA' и $B'C'$ а N пресечна тачка правих AB и CM, доказати да је $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AN}$.*

Решење: Тачке M, N и C су колинеарне. Применимо Менелајеву



Слика 1.23.

теорему на троугао $\Delta AB'C'$ и праву MN. Тада је

$$\frac{\overrightarrow{C'M}}{\overrightarrow{MB'}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{CA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC'}} = -1. \tag{1.33}$$

Из сличности троуглова $\Delta ABA'$ и $\Delta AC'M$ следи (Слика 1.23)

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{C'M}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC'}} \quad \text{тј.} \quad \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{C'M}} = \frac{2}{1}. \tag{1.34}$$

Аналогно, из сличности троуглова $\Delta ACA'$ и $\Delta AB'M$ следи

$$\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{MB'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB'}} \quad \text{тј.} \quad \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{MB'}} = \frac{2}{1}. \tag{1.35}$$

Сада, из (1.34) и (1.35) следи

$$\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{MB'}} = \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{C'M}} \quad \text{тј.} \quad \frac{\overrightarrow{C'M}}{\overrightarrow{MB'}} = \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}},$$

а одавде

$$\frac{\overrightarrow{C'M}}{\overrightarrow{MB'}} = 1. \tag{1.36}$$

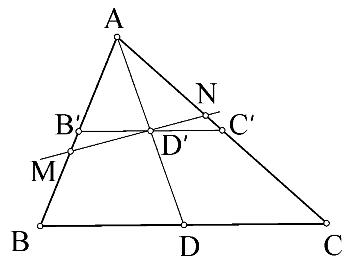
Такође важи

$$\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{CA}} = -\frac{1}{2}. \tag{1.37}$$

Заменом (1.36) и (1.37) у (1.33) добијамо
$1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC'}} = -1$, тј. $\overrightarrow{AN} = 2 \cdot \overrightarrow{NC'}$ а одавде је $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC'}$.
Дакле, добили смо $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, тј. $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AN}$. □

Задатак 30. *Ако су M и N тачке на страницама AB и AC троугла ΔABCтакве да је $AM = AN$ а D' тачка у којој тежишна линија AD сече дуж MN, доказати да је*

$$MD' : D'N = AC : AB.$$



Слика 1.24.

Решење: Конструишимо кроз D' праву паралелну са BC и означимо са B', C' пресечне тачке те праве редом са страницама AB и AC (Слика 1.24). Сада је $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{D'C'}{DC}$, тј. $\dfrac{B'D'}{D'C'} = \dfrac{BD}{DC} = 1$. Применимо Менелајеву теорему на троугао $\Delta AB'C'$ и праву MN. Тада је

$$\frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'N}{NA} \cdot \frac{AM}{MB'} = 1.$$

Како још важи $\dfrac{B'D'}{D'C'} = 1$ и $AM = AN$ имамо

$$\frac{C'N}{MB'} = 1 \quad \text{тј.} \quad C'N = MB'. \tag{1.38}$$

Сада, применом Менелајеве теореме на троугао ΔAMN и праву $B'C'$ добијамо

$$\frac{MD'}{D'N} \cdot \frac{NC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'M} = 1,$$

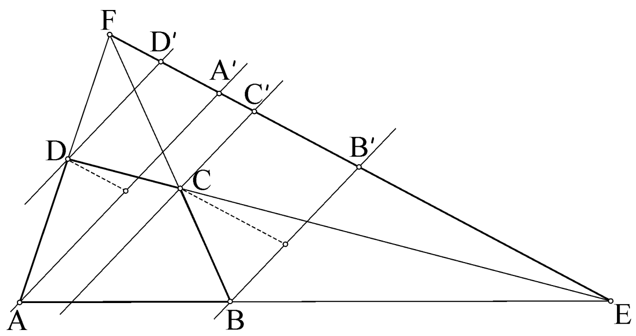
одакле због (1.38) следи $\dfrac{MD'}{D'N} = \dfrac{C'A}{AB'}$, а како још важи $\dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{AC}{AB}$ имамо $\dfrac{MD'}{D'N} = \dfrac{AC}{AB}$, тј.

$$MD' : D'N = AC : AB.$$

а то је и требало доказати. □

Задатак 31. *Ако је $ABCD$ раван четвороугао, E пресечна тачка правих AB и CD, F пресечна тачка правих BC и AD а A', B', C' и D' тачке у којима четири паралелне праве кроз темена A, B, C и D секу праву EF, доказати да је :*

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{BB'} + \frac{1}{DD'}.$$



Слика 1.25.

Решење: Применом Менелајеве теореме на троугао ΔABF и праву CD добијамо:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1.$$

Како још важи

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AA'}{BB'}, \quad \frac{BC}{CF} = \frac{BB' - CC'}{CC'}, \quad \frac{FD}{DA} = \frac{DD'}{AA' - DD'},$$

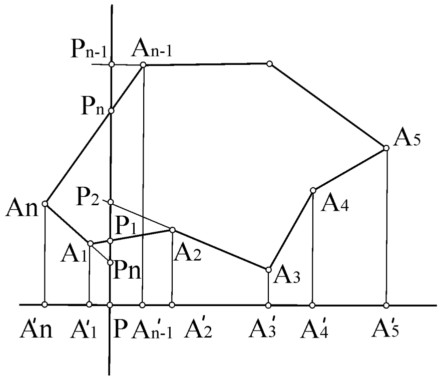
добијамо

$$\frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB' - CC'}{CC'} \cdot \frac{DD'}{AA' - DD'} = 1,$$

одакле је $AA' \cdot BB' \cdot DD' - AA' \cdot CC' \cdot DD' = AA' \cdot BB' \cdot CC' - BB' \cdot CC' \cdot DD'$. Дељењем последње једнакости са $AA' \cdot BB' \cdot CC' \cdot DD'$ добијамо $\dfrac{1}{CC'} - \dfrac{1}{BB'} = \dfrac{1}{DD'} - \dfrac{1}{AA'}$, тј. $\dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{CC'} = \dfrac{1}{BB'} + \dfrac{1}{DD'}$. □

Задатак 32. (Менелајева теорема за многоуглове) *Ако су P_1, P_2, $\ldots$, P_n тачке у којима нека права p сече праве одређене страницама A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 n-тоугла $A_1A_2 \ldots A_n$, дaказати да је*

$$\frac{\overrightarrow{A_1P_1}}{\overrightarrow{P_1A_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_2P_2}}{\overrightarrow{P_2A_3}} \cdot \cdots \cdot \frac{\overrightarrow{A_nP_n}}{\overrightarrow{P_nA_1}} = (-1)^n.$$



Слика 1.26.

Решење: Означимо са A'_1, A'_2,…,A'_n паралелне пројекције тачака A_1, A_2,…,A_n, где се пројектовање врши паралелно датој правој p на произвољну праву s. Пројекцију праве p означимо са P (Слика 1.26). Тада је

$$\frac{\overrightarrow{A_1P_1}}{\overrightarrow{P_1A_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_2P_2}}{\overrightarrow{P_2A_3}}\cdot\dots\cdot\frac{\overrightarrow{A_nP_n}}{\overrightarrow{P_nA_1}}=\frac{\overrightarrow{A'_1P}}{\overrightarrow{PA'_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{A'_2P}}{\overrightarrow{PA'_3}}\cdot\dots\cdot\frac{\overrightarrow{A'_nP}}{\overrightarrow{PA'_1}}=(-1)^n.$$

Задатак 33. (Чевина[2] теорема) *Нека је у равни E^2 дат троугао ΔABC и нека су тачке P, Q и R правих BC, CA и AB различите од темена A, B и C троугла ΔABC. Праве AP, BQ и CR припадају једном прамену правих ако и само ако је*

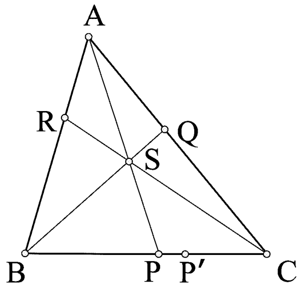
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1. \tag{1.39}$$

Доказати.

Решење: Нека се праве AP, BQ и CR секу у тачки S (Слика 1.27). Применом Менелајеве теореме на троугао ΔABP и праву RC добијамо

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}}\cdot\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1. \tag{1.40}$$

[2] Djovani Čeva (1648-1734) доказао је ово тврђење 1678. г.



Слика 1.27.

Сада, применимо Менелајеву теорему на троугао ΔPCA и праву BQ. Добија се

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SP}} = -1. \tag{1.41}$$

Множењем одговарајућих страна једнакости (1.40) и (1.41) добијамо једнакост (1.39).

Обратно, нека важи једнакост (1.39). Означимо са S пресечну тачку правих BQ и CR, а са P' пресечну тачку правих AS и BC. Праве, AP', BQ и CR припадају истом прамену правих, одакле на основу доказаног дела теореме следи

$$\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1. \tag{1.42}$$

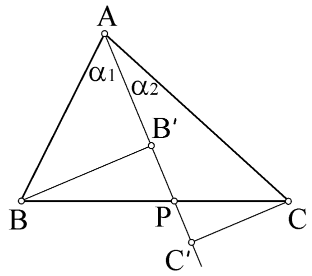
Из једнакости (1.39) и (1.42) следи $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP'} : \overrightarrow{P'C}$, одакле следи да се тачке P и P' поклапају. $\square$

Задатак 34. *Ако је P тачка странице BC троугла ΔABC, $\alpha_1 = \measuredangle(AB, AP)$, $\alpha_2 = \measuredangle(AC, AP)$ тада је*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c \sin \alpha_1}{b \sin \alpha_2}, \tag{1.43}$$

где је $AB = c$ $AC = b$.

Решење: Означимо са B' и C' подножја нормала редом из тачака B и C на праву AP. Тада из троугла $\Delta ABB'$ следи $BB' = c \sin \alpha_1$ а из троугла $\Delta ACC'$ следи $CC' = b \sin \alpha_2$.



Слика 1.28.

Сада из сличности троуглова $\Delta BPB'$ и $\Delta CPC'$ следи

$$BP : PC = BB' : CC'$$

одакле закључујемо да важи једнакост (1.43). □

Задатак 35. *Применом Чевине теореме доказати:*

а) *Тежишне линије троугла секу се у једној тачки,*

б) *Праве одређене висинама троугла секу се у једној тачки,*

в) *Симетрале унутрашњих углова троугла секу се у једној тачки,*

г) *Симетрале једног унутрашнег и два спољашња угла троугла секу се у једној тачки.*

Задатак 36. *Ако су AA', BB', CC' симетрале унутрашњих углова троугла ΔABC а тачке P, P'; Q, Q' и R, R' тачке правих BC, CA и AB такве да су праве AP', BQ' и CR' симетричне правама AP, BQ и CR у односу на праве AA', BB' и CC' редом, показати да важи:*

а) *Ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки S, тада се праве AP', BQ' и CR' такође секу у једној тачки S'.*

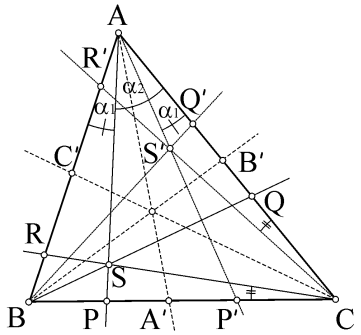
б) *Нормалне пројекције тачака S и S' на праве BC, CA и AB припадају једном кругу.*

Решење: Означимо са

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \measuredangle(AP, AB), & \alpha_2 &= \measuredangle(AP, AC) \\ \beta_1 &= \measuredangle(BQ, BC), & \beta_2 &= \measuredangle(BQ, BA), \\ \gamma_1 &= \measuredangle(CR, CB), & \gamma_2 &= \measuredangle(CR, CA), \end{aligned}$$

као на слици (Слика 1.29).

а) На основу задатка 34. имамо



Слика 1.29.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c \sin\alpha_1}{b\sin\alpha_2}, \quad \frac{BP'}{P'C} = \frac{c\sin\alpha_2}{b\sin\alpha_1}.$$

Аналогно важи

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{a\sin\beta_1}{c\sin\beta_2}, \quad \frac{CQ'}{Q'A} = \frac{a\sin\beta_2}{c\sin\beta_1}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{b\sin\gamma_2}{a\sin\gamma_1}, \quad \frac{AR'}{R'B} = \frac{b\sin\gamma_1}{a\sin\gamma_2}.$$

Одвде је

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}\cdot\frac{AR'}{R'B}$$
$$= \frac{c\sin\alpha_1}{b\sin\alpha_2}\cdot\frac{a\sin\beta_1}{c\sin\beta_2}\cdot\frac{b\sin\gamma_2}{a\sin\gamma_1}\cdot\frac{c\sin\alpha_2}{b\sin\alpha_1}\cdot\frac{a\sin\beta_2}{c\sin\beta_1}\cdot\frac{b\sin\gamma_1}{a\sin\gamma_2} = 1.$$

Ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки S, тада према Чевиној теореми важи

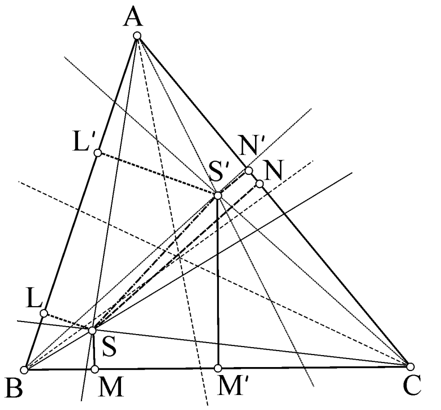
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = 1,$$

на основу чега из претходне релације закључујемо да је

$$\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ'}{Q'A}\cdot\frac{AR'}{R'B} = 1,$$

а то на основу Чевине теореме значи да се праве AP', BQ' и CR' секу у једној тачки S'.

б) Означимо са M, M'; N, N' и L, L' подножја нормала из тачака S, S' редом на праве BC, CA и AB.



Слика 1.30.

Посматрајмо троуглове ΔASN и $\Delta AS'L'$. Углови код темена N и L' су им прави, а $\measuredangle SAN = \measuredangle S'AL'(=\alpha_2)$ па су они слични, одакле следи

$$\frac{AN}{AL'} = \frac{AS}{AS'} \tag{1.44}$$

На исти начин су слични и троуглови ΔASL и $\Delta AS'N'$ па је

$$\frac{AL}{AN'} = \frac{AS}{AS'}. \tag{1.45}$$

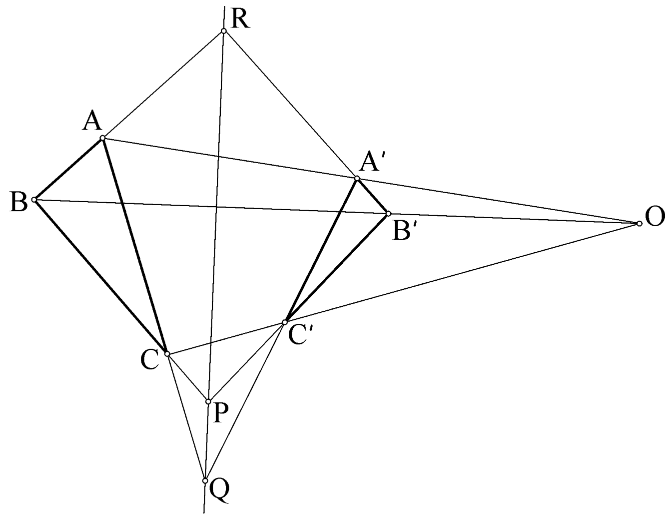
Из (1.44) и (1.45) следи $\dfrac{AN}{AL'} = \dfrac{AL}{AN'}$, тј.

$$AN \cdot AN' = AL \cdot AL',$$

што на основу Задатка 40. значи да тачке N, N', L и L' припадају једном кругу k. Четвороугао $SLL'S'$ је правоугли трапез, па симетрала крака LL' (средња линија трапеза) полови други крак SS'. Означимо са O пресечну тачку праве SS' и симетрале $s_{LL'}$ дужи LL'. На исти начин четвороугао $SNN'S'$ је правоугли трапез па симетрала $s_{NN'}$ крака NN' пролази кроз средиште O другог крака SS'. Значи симетрале $s_{LL'}$ и $s_{NN'}$ секу се у средишту O дужи SS', па тачке N, N', L и L' припадају кругу са центром у тачки O, тј. кругу $k(O, ON)$.

На потпуно исти начин се показује да је тачка O центар круга коме припадају тачке N, N', M и M', па следи да и тачке M и M' припадају кругу $k(O, ON)$. $\square$

Задатак 37. (Дезаргова теорема) *Два троугла* ΔABC *и* $\Delta A'B'C'$ *припадају истој равни. Нека су* P, Q, R *пресечне тачке редом правих* BC *и* $B'C'$, CA *и* $C'A'$, AB *и* $A'B'$. *Доказати да се праве* AA', BB' *и* CC' *секу у једној тачки ако и само ако тачке* P, Q *и* R *припадају једној правој.*



Слика 1.31.

Решење: Нека се праве AA', BB' и CC' секу у тачки O (Слика 1.31). Применем Менелајеве теореме на троугао:

ΔOBC и праву $B'C'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1, \quad (1.46)$$

ΔOAC и праву $A'C'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1, \quad (1.47)$$

ΔOAB и праву $A'B'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \quad (1.48)$$

Множењем одговарајућих страна једнакости (1.46), (1.47) и (1.48) добијамо

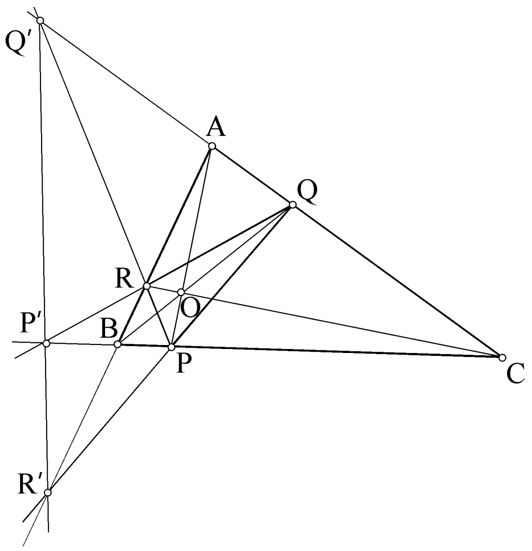
$$(-1)^6 \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1, \quad \text{тј.} \quad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1,$$

а то значи да су тачке P, Q и R колинеарне.

Обратно, нека су тачке P, Q и R колинеарне. Означимо са O пресечну тачку правих BB' и CC' и докажимо да тачка O припада и правој AA'.

Уочимо троуглове $\Delta RBB'$ и $\Delta QCC'$. Праве RQ, BC и $B'C'$ секу се у једној тачки P, па су посматрани троуглови перспективни из тачке P, одакле према доказаном делу Дезаргове теореме закључујемо да су тачке $A = RB \times QC$, $O = BB' \times CC'$ и $A' = RB' \times QC'$ колинеарне, тј. тачка O припада правој AA'. □

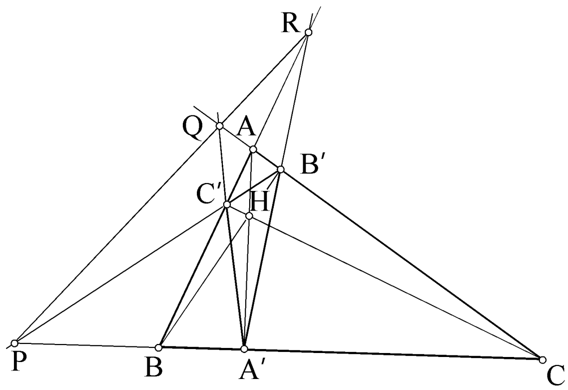
Задатак 38. *Ако су тачке P, Q и R на правама које су одређене страницама BC, CA и AB троугла ΔABC такве да се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки O, доказати да пресечне тачке P', Q' и R' редом правих BC и QR, CA и PR, AB и PQ припадају једној правој.*



Слика 1.32.

Решење: Уочимо троуглове ΔABC и ΔPQR (Слика 1.32). Праве AP, BQ и CR секу се у једној тачки O, па су посматрани троуглови перспективни. Применом Дезаргове теореме закључујемо да тачке $R' = AB \times PQ$, $P' = BC \times QR$ и $Q' = CA \times RP$ припадају једној правој.

Задатак 39. *Ако су AA', BB' CC' висине троугла ΔABC, доказати да тачке P, Q и R у којима се секу праве BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ редом, припадају једној правој.*



Слика 1.33.

Решење: Праве AA', BB' и CC' секу се у ортоцентру H па су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ перспективни (Слика 1.33). Применом Дезаргове теореме закључујемо да тачке $P = BC \times B'C'$, $Q = CA \times C'A'$ и $R = AB \times A'B'$ припадају једној правој. □

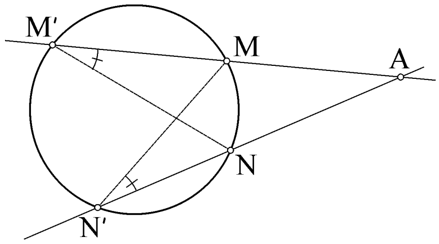
Задатак 40. *Тачке M, M', N и N' припадају истом кругу ако и само ако важи релација*

$$AM \cdot AM' = AN \cdot AN', \tag{1.49}$$

где је A пресечна тачка правих MM' и NN'.

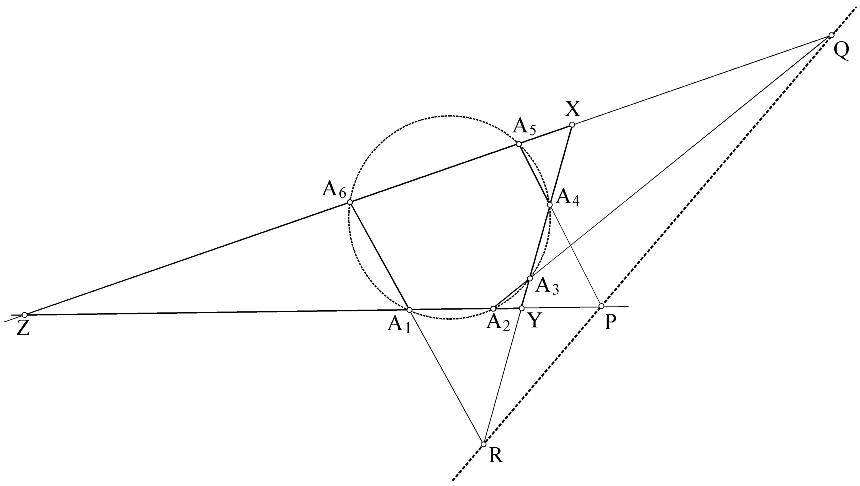
Решење: Нека тачке M, N, M' и N' припадају истом кругу (Слика 1.34). Тада су троуглови $\Delta AM'N$ и $\Delta AN'N$ слични па је $AN' : AM' = AM : AN$, тј. $AM \cdot AM' = AN \cdot AN'$.

Обратно, нека важи једнакост (1.49) и означимо са k круг одређен тачкама M, N и N'. Докажимо да тада и тачка M' припада кругу k. Из (1.49) следи $AM : AN = AN' : AM'$ па су троуглови $\Delta AM'N$ и $\Delta AMN'$ слични. Одавде следи да је $\measuredangle AM'N = \measuredangle AN'M$. Тачке M' и N' су са исте стране праве MN, одакле закључујемо да и тачка M' припада кругу k одређеном тачкама M, N и N'. □



Слика 1.34.

Задатак 41. (Паскалова теорема) *Ако је $A_1A_2\ldots A_6$ тетиван шестоугао коме наспрамне странице нису паралелне, доказати да тачке P, Q и R у којима се секу праве одређене наспрамним страницама A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 припадају једној правој.*



Слика 1.35.

Решење: Означимо са X, Y и Z пресечне тачке редом правих A_3A_4 и A_5A_6, A_1A_2 и A_3A_4, A_1A_2 и A_5A_6 (Слика 1.35). Применом Менелајеве теореме на троугао ΔXYZ и редом праве A_4A_5, A_2A_3 и A_1A_6 добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_4}}{\overrightarrow{A_4X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_5}}{\overrightarrow{A_5Z}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{ZA_2}}{\overrightarrow{A_2Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_3}}{\overrightarrow{A_3X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_6}}{\overrightarrow{A_6Z}}=-1.$$

Множењем одговарајућих страна последње три једнакости добијамо добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_4}}{\overrightarrow{A_4X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_5}}{\overrightarrow{A_5Z}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZA_2}}{\overrightarrow{A_2Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_3}}{\overrightarrow{A_3X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_6}}{\overrightarrow{A_6Z}}=-1. \quad (1.50)$$

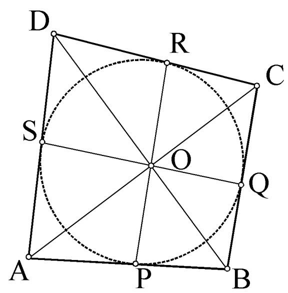
Тачке A_1, A_2, ... , A_6 припадају истом кругу па према задатку 40. имамо $\overrightarrow{XA_5}\cdot\overrightarrow{XA_6}=\overrightarrow{XA_3}\cdot\overrightarrow{XA_4}$, $\overrightarrow{YA_1}\cdot\overrightarrow{YA_2}=\overrightarrow{YA_3}\cdot\overrightarrow{YA_4}$, $\overrightarrow{ZA_1}\cdot\overrightarrow{ZA_2}=\overrightarrow{ZA_5}\cdot\overrightarrow{ZA_6}$. Заменом последње три једнакости у (1.50) добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}=-1,$$

одакле према Менелајевој теореми следи да су тачке P, Q и R колинеарне. □

Задатак 42. (Бријаншонова теорема) *Праве одређене наспрамним теменима тангентног шестоугла секу се у једној тачки. Доказати.*

Задатак 43. *Ако су P, Q, R и S тачке у којима праве одређене страницама AB, BC, CD и DA тангентног четвороугла $ABCD$ додирују уписани круг k, доказати да се праве AC, BD, PR и QS секу у једној тачки.*

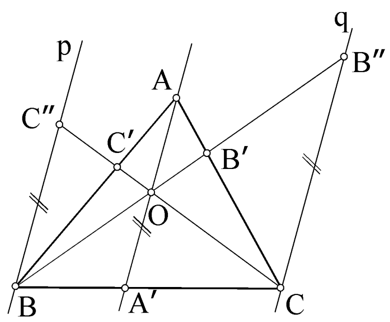


Слика 1.36.

Решење: Уочимо дегенерисани тангентни шестоугао $APBCRD$ (Слика 1.36). Према Бријаншоновој теореми важи да се праве AC, BD и PR секу у једној тачки O. Аналогно, за дегенерисани шестоугао $ABQCDS$ према Бријаншоновој теореми праве AC, BD и SQ секу се у једној тачки O'. Тачке O и O' налазе се у пресеку различитих правих AC и BD па се поклапају, тј. $O\equiv O'$. Према томе, праве AC, BD, PR и SQ секу се у једној тачки O. □

Задатак 44. (Ван-Обелова теорема) *Ако су* A', B', C' *тачке правих* BC, CA, AB *троугла* ΔABC *такве да се праве* AA', BB' *и* CC' *секу у једној тачки* O, *доказати да је*

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$



Слика 1.37.

Решење: Конструишимо праве $CB'' \equiv q$ и $BC'' \equiv p$ такве да је $CB'' \parallel BC'' \parallel AA'$, $C'' \in CC'$, $B'' \in BB'$ (Слика 1.37). Доказ даље изводимо коришћењем сличности. Из

$$\Delta AOC' \sim \Delta BC''C \quad \text{следи} \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{C''B}. \tag{1.51}$$

Аналогно

$$\Delta AOB' \sim \Delta CB''B \quad \text{па је} \quad \frac{AB'}{B'C} = \frac{AO}{B''C}. \tag{1.52}$$

Сабирањем једнакости (1.51) и (1.52) добијамо

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = AO \cdot \left(\frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C}\right). \tag{1.53}$$

Сада из

$$\Delta BCC'' \sim \Delta A'CO \quad \text{следи} \quad \frac{OA'}{C''B} = \frac{CA'}{CB}. \tag{1.54}$$

Аналогно

$$\Delta BA'O \sim \Delta BCB'' \quad \text{па је} \quad \frac{OA'}{B''C} = \frac{A'B}{CB}. \tag{1.55}$$

Сабирањем једнакости (1.54) и (1.55) добијамо

$$\frac{OA'}{C''B} + \frac{OA'}{B''C} = \frac{CA'}{CB} + \frac{A'B}{CB} = \frac{CA' + A'B}{CB} = \frac{CB}{CB} = 1.$$

Сада је

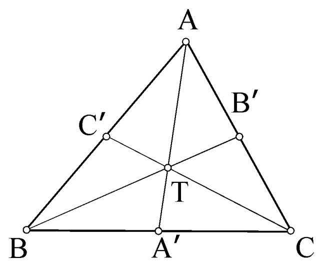
$$OA' \cdot \left(\frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C} \right) = 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C} = \frac{1}{OA'}. \tag{1.56}$$

Заменом (1.56) у (1.53) добијамо

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C},$$

а то је и требало доказати. □

Задатак 45. *Ако је T пресек тежишних дужи AA', BB' и CC' троугла ΔABC, доказати да је $AT : TA' = 2 : 1$.*



Слика 1.38.

Решење: За троугао ΔABC важи

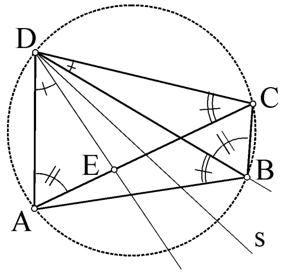
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

па према Чевиној теореми следи да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачми T. Сада, с обзиром на то да су задовољени сви услови Ван-Обелове теореме, следи

$$\frac{AT}{TA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = 2, \quad \text{тј.} \quad AT : TA' = 2 : 1.$$

□

Задатак 46. (Птоломејева теорема) *Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да је производ његових дијагонала једнак збиру производа његових наспрамних страница.*



Слика 1.39.

Решење: Четвороугао $ABCD$ је конвексан па му се дијагонале секу, тј. дијагонала BD сече дијагоналу AC у тачки која је на дијагонали AC, па ће полуправа симетрична дијагонали BD у односу на симетралу s угла $\measuredangle CDA$ сећи дијагоналу AC у унутрашњој тачки, обележимо је са E. Дакле важи $\measuredangle ADE = \measuredangle CDB$ и $\measuredangle CDE = \measuredangle ADB$.

Уочимо троуглове ΔADE и ΔBDC. Они су слични јер је

$$\measuredangle ADE = \measuredangle CDB \quad \text{и} \quad \measuredangle DAE \equiv \measuredangle DAC = \measuredangle DBC.$$

Из њихове сличности следи

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{па је} \quad AD \cdot BC = AE \cdot BD. \tag{1.57}$$

Аналогно, троуглови ΔCDE и ΔADB су слични јер је

$$\measuredangle CDE = \measuredangle ADB \quad \text{и} \quad \measuredangle DCE \equiv \measuredangle DCA = \measuredangle DBA.$$

Из њихове сличности следи

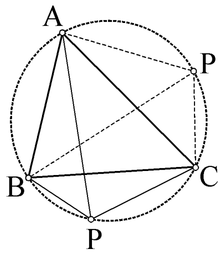
$$\frac{BD}{CE} = \frac{BD}{AB}, \quad \text{па је} \quad AB \cdot DC = CE \cdot BD. \tag{1.58}$$

Сабирањем једнакости (1.57) и (1.58) добијамо

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = (AE + CE) \cdot BD = AC \cdot BD,$$

тј. $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$, а то је и требало доказати $\square$

Задатак 47. *Ако је ΔABC једнакостраничан троугао и P тачка круга k описаног око тог троугла, доказати да је дуж AP једнака збиру или разлици дужи BP и CP према томе да ли тачка P припада луку $\overset{\frown}{BC}$ круга k на коме није тачка A или је на кружном луку $\overset{\frown}{BAC}$.*



Слика 1.40.

Решење: Нека најпре тачка P припада луку $\overset{\frown}{BC}$ коме не припада тачка A. Четвороугао $ABPC$ је тетиван и конвексан па се на њега може применити Птоломејева теорема. Значи биће

$$AP \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot BP\,,$$

тј. с обзиром на то да је $AB = BC = CA$ имамо $AP = BP + CP$. Нека сада тачка P припада луку $\overset{\frown}{BAC}$ круга k, као на Слици 1.40. Применимо Птоломејеву теорему на четвороугао $ABCP$. Тада је

$$AC \cdot BP = AB \cdot CP + AC \cdot BP,$$

тј. $BP = CP + AP$, а одавде $AP = BP - CP$. □

Задатак 48. *Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и тетиван а E тачка у којој права кроз тачку C паралелна са правом BD сече описани круг, доказати да је*

$$AE \cdot BD = AB \cdot BC + AD \cdot DC.$$

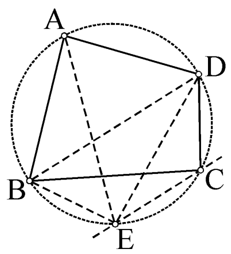
Решење: Применимо Птоломејеву теорему на четвороугао $ABED$. Биће

$$AE \cdot BD = AB \cdot ED + BE \cdot DA. \tag{1.59}$$

Четвороугао $BECD$ је једнакокраки трапез (Слика 1.41), па важи $BE = CD$ и $ED = BC$, на основу чега (1.59) постаје

$$AE \cdot BD = AB \cdot BC + CD \cdot DA,$$

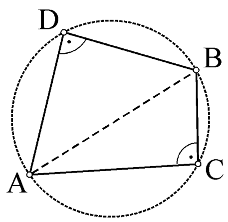
а то је и требало доказати. □



Слика 1.41.

Задатак 49. *Ако је* AB *пречник и* r *полупречник круга* k, *а* C *и* D *тачке на разним луковима* $\overset{\frown}{AB}$ *тог круга, доказати да је*

$$CD = \frac{1}{2r}(AC \cdot \sqrt{4r^2 - AD^2} + AD \cdot \sqrt{4r^2 - AC^2})$$



Слика 1.42.

Решење: Применимо Птоломејеву теорему на четвороугао $ACBD$ (Слика 1.42). Тада је

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + AD \cdot BC,$$

одакле, применом Питагорине теореме добијамо

$$CD = \frac{1}{2r}(AC \cdot \sqrt{4r^2 - AD^2} + AD \cdot \sqrt{4r^2 - AC^2}).$$

□

Задатак 50. *Ако је* AB *пречник и* r *полупречник круга* k, *а* C *и* D *тачке на истом луку* $\overset{\frown}{AB}$ *тог круга, такве да је четвороугао* $ABCD$ *конвексан, доказати да је*

$$CD = \frac{1}{2r}(AC \cdot \sqrt{4r^2 - AD^2} - AD \cdot \sqrt{4r^2 - AC^2})$$

Задатак 51. (Ојлерова теорема) *Ако су P и Q средишта дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$, тада је*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot PQ^2.$$

Задатак 52. *Доказати да је збир квадрата страница паралелограма једнак збиру квадрата његових дијагонала.*

Решење: Директно из Ојлерове теореме. □

Задатак 53. *Ако су код четвороугла $ABCD$ дијагонале AC и BD међусобно нормалне, доказати да су збирови квадрата наспрамних страница тог четвороугла међусобно једнаки.*

1.2 Хармонијске четворке тачака

Дефиниција 1.2.1. За четири колинеарне тачке A, B, C и D кажемо да чине *хармонијску четворку тачака* ако је задовољено:

(i) једна од тачака C и D је између тачака A и B а друга није,

(ii) $AC : CB = AD : DB$.

То се симболички означава са $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, а чита се "пар тачака C, D је хармонијски спрегнут са паром тачака A, B".

Напомена: Услови (i) и (ii) из претходне дефиниције могу се заменити једним условом $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB}$.

Дефиниција 1.2.2. За четири конкурентне или паралелне праве a, b, c и d кажемо да су хармонијски спрегнуте ако их произвољна права сече по хармонијски спрегнутим тачкама.

Задатак 54. *Ако је пар тачака C, D хармонијски спрегнут са паром тачака A, B, доказати да је тада и пар тачака A, B хармонијски спрегнут са паром тачака C, D.*

Решење: Нека је пар тачака C, D хармонијски спрегнут са паром тачака A, B. Тада је

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A, B; C, D) &\Rightarrow \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} : \overrightarrow{DB} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{CA} : \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB} : \overrightarrow{BD} \\
&\Rightarrow \mathcal{H}(C, D; A, B),
\end{aligned}$$

тј. пар тачака A, B је хармонијски спрегнут са паром тачака C, D. □

Задатак 55. *Ако је пар тачака C, D хармонијски спрегнут са паром тачака A, B и O средиште дужи AB доказати да је*

$$OB^2 = OC \cdot OD.$$

Важи и обрат.

Решење: Нека важи распоред тачака $A{-}C{-}B{-}D$. Тада је $A{-}O{-}C$. Према томе

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A,B;C,D) &\Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}\\
&\Rightarrow \frac{AO+OC}{OB-OC} = \frac{AO+OD}{OD-OB}\\
&\Rightarrow \frac{AO+OC}{OB-OC} + \frac{OB-OC}{OB-OC} = \frac{AO+OD}{OD-OB} + \frac{OD-OB}{OD-OB}\\
&\Rightarrow \frac{AO+OB}{OB-OC} = \frac{AO-OB+2\cdot OD}{OD-OB}\\
&\Rightarrow \frac{2\cdot OB}{OB-OC} = \frac{2\cdot OD}{OD-OB}\\
&\Rightarrow OB\cdot(OD-OB) = OD\cdot(OB-OC)\\
&\Rightarrow OB\cdot OD - OB^2 = OD\cdot OD\cdot OB - OD\cdot OC\\
&\Rightarrow OB^2 = OC\cdot OD,
\end{aligned}$$

а то је и требало доказати.

Обрат се доказује обрнутим поступком. □

Задатак 56. *Ако је пар тачака C, D хармонијски спрегнут са паром тачака A, B, доказати да је дуж AB хармонијска средина дужи AC и BD, тј.*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

Решење:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A,B;C,D) &\Rightarrow \frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}\\ &\Rightarrow \frac{CB}{AC}=\frac{BD}{AD}\\ &\Rightarrow \frac{AB-AC}{AC}=\frac{AD-AB}{AD}\\ &\Rightarrow \frac{AB}{AC}-1=1-\frac{AB}{AD}\\ &\Rightarrow \frac{AB}{AC}+\frac{AB}{AD}=2\\ &\Rightarrow \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.\end{aligned}$$

Задатак 57. *Ако су A, B, C и D четири тачке једне праве такве да је дуж AB хармонијска средина дужи AC и BD, тј.*

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

доказати да је пар тачака C, D хармонијски спрегнут са паром тачака A, B, тј. да је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

Задатак 58. *Ако је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, доказати да је*

$$\frac{1}{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{BC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AD}}+\frac{1}{\overrightarrow{BD}}=0.$$

Решење: Нека важи распоред тачака $A-C-B-D$. Тада имамо

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \Rightarrow \frac{1}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}&=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}\\ &=\frac{1}{\overrightarrow{BD}}+\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AC}}\\ &\Rightarrow \frac{1}{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{BC}}+\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AC}}=0.\end{aligned}$$

С обзиром на то да је

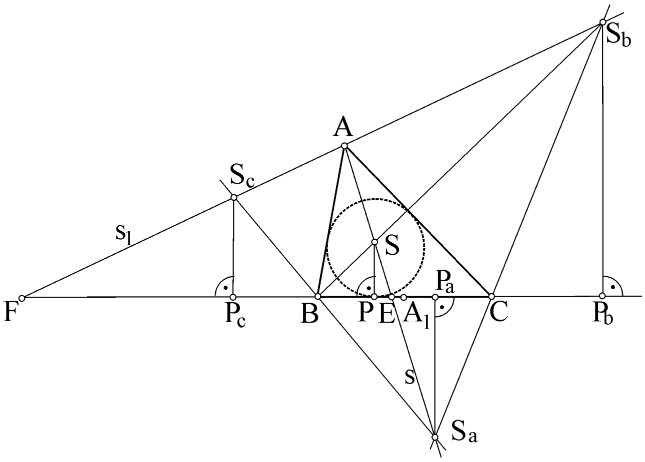
$$\frac{1}{\overrightarrow{AD}}=\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}},$$

следи

$$\frac{1}{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{BC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AD}}+\frac{1}{\overrightarrow{BD}}=0.$$

□

Задатак 59. *Ако су E и F тачке у којима симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла ΔABC секу праву BC а S, S_a, S_b, S_c средишта уписаних кругова тог троугла доказати да је:*
а) $\mathcal{H}(B, C; E, F)$, б) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, в) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.



Слика 1.43.

Решење: а) На основу задатка 13. в) имамо: $BE : EC = BF : FC$. Како је још тачка E између тачака B и C, а тачка F није, (Слика 1.43) то важи $\mathcal{H}(B, C; E, F)$.
б) Аналогно, за троугао ABE на основу задатка 13. в) важи:

$$AS : SE = AS_a : S_aE.$$

Како још важи распоред тачака $A - S - E - S_a$ то је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$.
в) За троугао ABF на основу задатка 13. в) важи

$$AS_b : S_bF = AS_c : S_cF.$$

Како још важи распоред тачака $F - S_c - A - S_b$ то је $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$. $\square$

Задатак 60. *Ако је A_1 средиште странице BC, D подножје висине из темена A, а E и F тачке у којима симетрала унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла ΔABC секу праву BC, затим $AC = b$, $AB = c$, показати да је:*
а) $4A_1D \cdot A_1E = (b - c)^2$, б) $4A_1D \cdot A_1F = (b + c)^2$, в) $A_1D \cdot EF = bc$.

Решење: Означимо са P, P_a, P_b, P_c подножја нормала редом из тачака S, S_a, S_b и S_c на праву BC (Слика 1.43), при чему је S центар уписаног круга а S_a, S_b и S_c центри споља уписаних кругова.

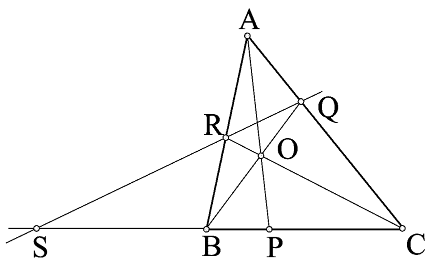
а) Из задатка 59. б) важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$. Тада важи $\mathcal{H}(D, E; P, P_a)$, јер су D, E, P, P_a нормалне пројекције хармонијске четворке тачака A, E, S, S_a. Тачка A_1 је средиште дужи PP_a (види задатак 10.), па на основу задатка 55. следи да је $A_1P^2 = A_1D \cdot A_1E$. Даље важи (задатак 10.) $PP_a = b - c$, па је $A_1P = (b - c)/2$, а одавде је

$$A_1D \cdot A_1E = A_1P^2 = \frac{1}{4}(b-c)^2, \quad \text{тј.} \quad 4A_1D \cdot A_1E = (b-c)^2.$$

б) Као у делу задатка под а) закључујемо да је $\mathcal{H}(D, F; P_b, P_c)$, као нормалне пројекције хармонијски спрегнутих тачака A, F, S_b, S_c (задатак 59.). Тачка A_1 је средиште дужи P_bP_c, па према задатку 1.43. имамо $A_1P_c^2 = A_1D \cdot A_1F$. Како је још$P_bP_c = b + c$, тј. $A_1P_c = (b + c)/2$ следи $4A_1D \cdot A_1F = 4A_1P_c^2 = (b + c)^2$.

в) Одузимањем релације а) од б) дбијамо $4A_1D \cdot (A_1F - A_1E) = 4bc$, тј. $A_1D \cdot EF = bc$. □

Задатак 61. *Ако су P, Q, R тачке у којима конкурентне праве AO, BO, CO секу праве BC, CA, AB троугла ΔABC, S пресечна тачка правих BC и RQ, доказати да је $\mathcal{H}(B, C; P, S)$.*



Слика 1.44.

Решење: На троугао ΔABC и праве AP, BQ и CR применимо Чевину теорему (Слика 1.44). Тада је

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1. \tag{1.60}$$

Сада, на троугао ΔABC и праву QR применимо Менелајеву теорему. Добија се

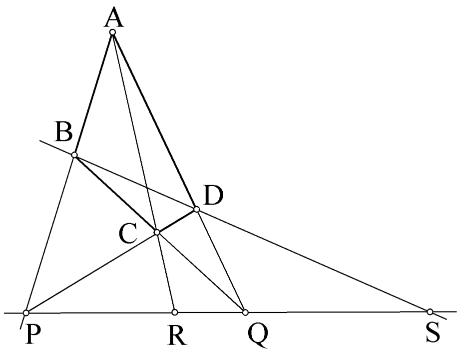
$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1. \tag{1.61}$$

Упоређивањем релација (1.60) и (1.61) закључујемо да је

$$BP : PC = BS : SC$$

и како још важи да је тачка P између тачака B и C а тачка S није, следи да је $\mathcal{H}(B, C; P, S)$. □

Задатак 62. *Ако је $ABCD$ произвољан четвороугао, P пресечна тачка правих AB и CD, Q пресечна тачка правих BC и AD, R пресечна тачка правих AC и PQ, а S пресечна тачка правих BD и PQ, доказати да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$*



Слика 1.45.

Решење: Тачке P, Q, R и S су колинеарне, при чему је тачка R између тачака P и Q а S није (Слика 1.45), па је први услов из дефиниције хармонијских четворки тачака задовољен.

Према Чевиној теореми примењеној на троугао ΔAPQ и тачку C важи

$$\frac{PR}{RQ} \cdot \frac{QD}{DA} \cdot \frac{AB}{BP} = 1. \tag{1.62}$$

Сада на троугао ΔAPQ и праву BD применимо Менелајеву теорему. Добија се

$$\frac{PS}{SQ} \cdot \frac{QD}{DA} \cdot \frac{AB}{BP} = 1. \tag{1.63}$$

Упоређивањем релација (1.62) и (1.63) добијамо

$$PR : RQ = PS : SQ,$$

што значи да је

$$\mathcal{H}(P, Q; R, S).$$

□

Део 2

Конструкцијски задаци

2.1 Уводне напомене

Шта су конструкцијски задаци? У геометрији постоји посебна врста задатака која захтева одређену форму решавања, нарочиту прецизност. То су конструкцијски задаци. Конструкција представља низ корака. Сваки корак је нека основна конструкција а не цртање. У задатку захтевамо образложење о начину на који можемо извести конструкцију, доказујемо тачност решења, дискутујемо број добијених решења. Уколико је указано на начин конструкције фигуре и доказано да је резултат назначене конструкције управо фигура, која задовољава све задате услове - решили смо задатак. Користећи неке основне конструкције (применом лењира и шестара) у задатку, конструишемо одређене геометријске фигуре. Те геометријске фигуре, као што су тачка, права, круг, троугао, четвороугао итд., треба да задовоље постављене захтеве. На пример, да неки угао буде подударан углу, или да нека дуж буде подударна другој задатој дужи, или да тражена фигура буде у неком карактеристичном положају према осталим задатим фигурама. Захтеви могу бити разнолики.

Постоје две групе основних конструкција:

1. основне конструкције, које се могу реализовати лењиром,

2. основне конструкције, које се могу реализовати шестаром.

Ове основне групе конструкција имају појединачне поделе:

1. основне конструкције, које се могу реализовати лењиром делимо на:

(i) конструкцију праве, која садржи две тачке;

(ii) конструкцију полуправе са датом почетном и још једном својом тачком;

(iii) констукцију дужи, чије су крајње тачке две дате тачке.

Само првом групом основних конструкција не можемо извршити све конструкције. Као пример можемо навести конструкцију средишта дате дужи, коју не можемо извести само помоћу лењира. То чинимо применом обе групе, зато наведимо и ову поделу:

2. основне конструкције, које се могу реализовати шестаром су:

(i) конструкција круга, чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж;

(ii) констукција кружног лука коме су познате четири дате тачке: центар, две крајње тачке и једна тачка на луку.

И једна и друга група основних конструкција не могу довести до решења у неким конструкцијским задацима. Најпознатији проблеми те врсте су: *проблем трисекције угла, проблем удвостручења коцке и проблем квадратуре круга.* Ни један од наведених проблема није могуће решити применом шестара и лењира.

Проблем трисекције угла: конструисати две полуправе, које дати угао деле на три подударна угла.

Проблем удвостручења коцке: конструисати ивицу коцке чија је запремина два пута већа од коцке дате ивице.

Проблем квадратуре круга: конструисати квадрат једнаке површине као дати круг.

Постоји још много проблема аналогних овим, за које је такође доказано да се не могу решити само уз помоћ шестара и лењира.

Елементарне конструкције су најједноставније конструкције изведене из основних. У току решавања задатка, у већини случајева, сматраћемо познатим ове конструкције. Нећемо их увек објашњавати и доказивати. Дакле, приликом рада користићемо једноставне конструкције, као и оне из њих изведене. У елементарне конструкције убрајамо:

– конструкцију медијатрисе дужи;
– конструкцију бисектрисе угла;
– конструкцију паралелних правих (полуправих, дужи);
– конструкцију нормалних правих (полуправих, дужи);
– конструкцију дужи подударне датој дужи;
– конструкција угла подударног датом углу;
– конструкцију средишта дужи;
– конструкцију тангенте датог круга из дате тачке;
– конструкцију заједничке тангенте два дата круга;

– конструкцију троугла чије су ивице подударне трима датим дужима;

– конструкцију троугла коме су одговарајућа ивица и два угла подударни датој дужи и дати угловима;

– конструкцију троугла коме су две ивице и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углу;

– конструкцију троугла коме су две ивице и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углу, при чему је познато да је угао наспрам друге ивице оштар, прав или туп;

– конструкцију геометријског места тачака из којих се дата дуж види под датим углом.

2.2 Решавање конструкцијских задатака

Конструкција фигуре F која задовољава дате услове A састоји се од четири етапе:

(i) **АНАЛИЗА** је разматрање могућности да се дође до решења. Полазимо од претпоставке да је задатак решен, односно фигура F задовољава дате услове A. Надаље разматрамо односе, који постоје између датих и тражених елемената. Долазимо до услова B, које фигура F задовољава а помоћу којих се може лакше конструисати.

(ii) **ОПИС КОНСТРУКЦИЈЕ**. Решење конструкцијског задатка треба да садржи опис конструкције. Тај текст треба прецизно, корак по корак да прикаже како се фигура са траженим особинама конструише. Слика је обавезна, али у принципу служи само као илустрација. Опис конструкције треба да садржи све податке, тако да онај ко га чита може сам да конструише слику. Дакле, конструкција применом коначног броја основних и елементарних конструкција, полазећи од задатих елемената долази до тражене фигуре F али тако да задовољава услове B. Сваки од корака, који чинимо током конструкције обавезно морамо и описати.

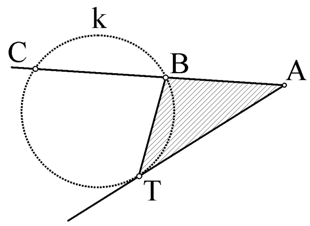
(iii) **ДОКАЗ** је етапа у којој доказујемо да фигура F конструисана на овај начин задовољава постављене услове задатка A.

(iv) **ДИСКУСИЈА БРОЈА РЕШЕЊА**: Комплетно урађен задатак мора да садржи и разматрање о томе колико задатак има решења тј. колико различитих фигура, које задовољавају задате услове се може конструисати. Број решења зависи од односа међу подацима и фигурама, које учествују у задатим условима. Те односе и зависност броја решења од њих треба уочити и записати, као и њихову егзистенцију и све то у односу на дате услове.

Конструкције изводимо применом подударности, изометрије, хомотетије, сличности, као и применом других метода. На примерима ћемо показати цео ток решавања конструкцијских задатака.

2.3 Простији примери

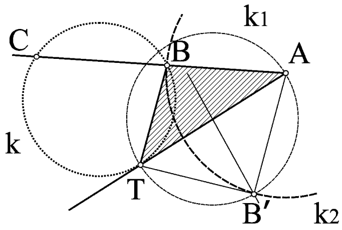
Задатак 63. *Дат је круг k и ван њега тачка A. Конструисати праву, која пролази кроз тачку A и сече круг k у тачкама B и C таквим да је $AB = BC$.*



Слика 2.1.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да права l садржи тачку A, а са кругом k има заједничке тачке B и C такве да је $AB = BC$. Конструишемо тангенту t на круг k из тачке A (Слика 2.1) и додирну тачку тангенте и круга означимо са T. Тада важи $AT^2 = AB \cdot AC$. Сада је $AT^2 = AB(AB+BC)$, тј. $AT^2 = AB(AB+AB)$ а одавде $AT^2 = 2AB^2$. Закључујемо да је AT хипотенуза једнокраког правоуглог троугла (Питагорина теорема), чија је катета једнака дужи AB.

Конструкција. Конструишемо круг k и тачку A ван тог круга. Затим из тачке A конструишемо тангенту t на круг k и додирну тачку означимо са T (Слика 2.2). Над пречником AT конструишемо круг k_1. На кругу k_1 одредимо тачку B' тако да је $AB' = B'T$. Затим конструишемо круг k_2 са центром у тачки A и полупречником AB'. Тада кругови k и k_2 могу да имају две, једну или ниједну заједничку тачку. Претпоставимо да имају заједничких тачака и једну од њих означимо са B. Пресек праве AB и круга k означимо са C. Важи распоред тачака $A - B - C$, јер је $AB < AT$.

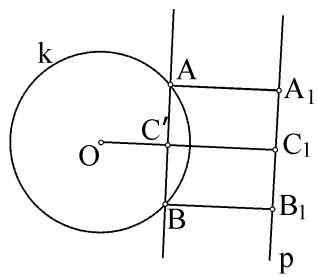


Слика 2.2.

Доказ. Докажимо да су овако конструисане тачке B и C управо тражене тачке. Како је AB сечица а AT тангента круга k то је $AT^2 = AB \cdot AC$, $AC = AB + BC$. Како још важи распоред тачака $A - B - C$, то је по конструкцији $AT^2 = 2AB^2$. Значи $2AB^2 = AB \cdot AC$, тј. $2AB = AC$ а одавде следи $2AB = AB + BC$, тј. $AB = BC$, чиме је доказ завршен.

Дискусија. Задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли кругови k и k_2 имају две, једну или немају заједничких тачака. □

Задатак 64. *Дат је круг k и у његовој равни права p. Конструисати праву паралелну правој p, која сече круг k у тачкама A и B тако да је дуж AB једнака датој дужи l.*



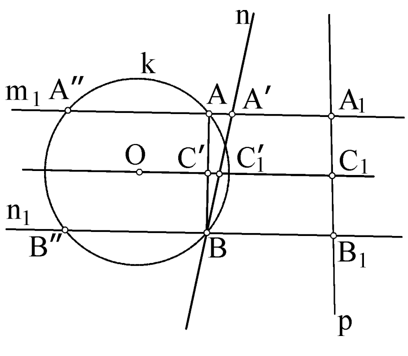
Слика 2.3.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да су услови задатка задовољени тј. да је тетива AB дужине l паралелна правој p. Конструишимо нормалне пројекције тачака A и B на праву p и означимо их редом са A_1 и B_1 (Слика 2.3). Означимо са C_1 подножје нормале из средишта O на праву p а са C' подножје нормале из средишта O на AB. Четвороугао ABB_1A_1 је правоугаоник, јер су дужи AA_1 и BB_1 нормалне на праву p а дужи AB и A_1B_1 паралелне. Следи $AB = A_1B_1$, и како је још $AB = l$ то је $A_1B_1 = l$. Права OC_1 је симетрала тетиве AB, одакле следи да је она симетрала и дужи A_1B_1. Дакле, $A_1C_1 = C_1B_1 = l/2$.

Конструкција. Нека је дат круг k и права p. Конструишимо нормалу из тачке O на праву p и подножје означимо са C_1 (Слика 2.4). Са разних страна тачке C_1 на правој p одредимо тачке A_1 и B_1 такве да је $A_1C_1 = C_1B_1 = l/2$. У тачкама A_1, B_1 конструишимо редом нормале m_1 и n_1 на правој p. Праве m_1, n_1 су симетричне у односу на праву OC_1. Ако права n_1 и круг k имају заједничких тачака имаће их и права n_1 и круг k и обрнуто.

Нека права m_1 има заједничких тачака са кругом k. Означимо их са A и A'' и нека је тачка A ближа правој p. Означимо са B, B'' заједничке тачке круга k и праве n_1, при чему је B ближа правој p. Овако конструисана дуж AB је управо тражена дуж.

Доказ. Докажимо да је овако добијена дуж AB дужине l и да је паралелна правој p. Да би смо то доказали, довољно је да докажемо да је четвороугао ABB_1A_1 правоугаоник. По конструкцији је $\measuredangle A_1 = \measuredangle B_1 = R$, где R означава прав угао. Довољно је показати да је $\measuredangle ABB_1 = R$.



Слика 2.4.

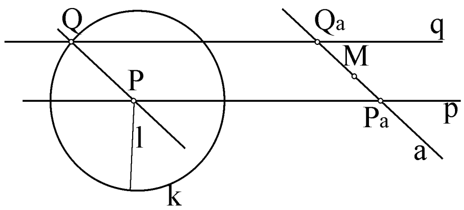
Претпоставимо да то не важи, тј. да права BB_1 није нормална на AB. Означимо са n праву која пролази кроз тачку B и $n \perp BB_1$. Тада је $n \neq AB$ и $A \neq A'$, где смо са A' означили пресек правих n и m_1. Сада је, по конструкцији четвороугао $A'BB_1A_1$ правоугаоник па одатле следи да је $OC_1 \perp A'B$ у некој тачки C_1', јер је OC_1 симетрала дужи A_1B_1. Значи, тачке B и A' су симетричне у односу на праву OC_1.

Како је B на кругу k а OC_1 пролази кроз центар круга, то због симетричности тачака A', B у односу на OC_1 следи да и тачка A' припада кругу k. Дакле, важи да је A пресечна тачка праве m_1 и круга k, A' пресечна тачка правих m_1 и n и A' припада кругу k. Одавде следи да је A' пресечна тачка круга k и праве m_1.

Дакле, тачке A и A' се поклапају па је четвороугао ABB_1A_1 правоугаоник, а одатле закључујемо да је $AB \parallel A_1B_1$ и $AB = A_1B_1$.

Дискусија. Задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли праве m_1, n_1 имају по две, једну или ниједну заједничку тачку са кругом k, тј. да ли је $l < 2r$, $l = 2r$ или $l > 2r$, где је r полупречник круга k. □

Задатак 65. *Нека је l дата дуж, p и q паралелне праве и M тачка ван њих. Конструисати праву, која садржи тачку M тако да она сече праве p и q у тачкама које одређују дуж подударну дужи l.*



Слика 2.5.

Решење: *Анализа.* Нека су P и Q редом тачке правих p и q такве да је $PQ = l$. Тада је тражена права a кроз тачку M паралелна правој PQ (Слика 2.5).

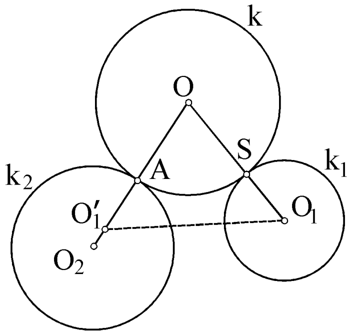
Конструкција. Нека је P произвољна тачка праве p. Конструишимо круг $k(P, l)$. Нека је Q једна од пресечних тачака тог круга са правом q. Конструишимо, затим праву a кроз тачку M паралелну правој PQ. Права a је тражена права.

Доказ. Докажимо да је a тражена права. Како су праве p и q паралелне по конструкцији и праве a и PQ паралелне такође, четвороугао одређен правама p, q, a и PQ је паралелограм па је одсечак праве a између правих p и q подударан дужи l.

Дискусија. Број решења једнак је броју пресечних тачака круга k и праве q. Нека d означава одстојање паралелних правих p и q. Ако је $d < l$, задатак има два решења, ако је $d = l$ задатак има једно решење а ако је $d > l$ задатак нема решења. $\square$

2.4 Конструкција кругова

Задатак 66. *Конструисати круг k, који додирује дати круг k_1 а дати круг k_2 додирује у датој тачки A.*



Слика 2.6.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да су услови задатка задовољени, тј. да круг k додирује дати круг k_1 а дати круг k_2 додирује у датој тачки A. Са S означимо додирну тачку кругова k и k_1. Тачке A и S припадају кругу k, одакле закључујемо да је $OS = OA$. Тачка A припада кругу k_2 и важи распоред тачака $O-A-O_2$ (Слика 2.6), одакле следи да је:

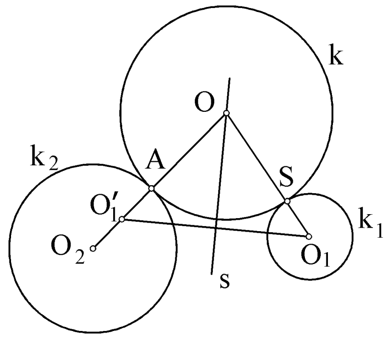
$$OO_2 = OA + AO_2 = r + r_2, \quad OO_1 = OS + SO_1 = r + r_1 \tag{2.1}$$

На полуправој OO_2 одредимо тачку O_1' такву да је са оне стране тачке A са које је и тачка O_2. Нека још важи и $AO_1' = r_1 = SO_1$ и како је $O - A - O_1'$, биће:

$$OO_1' = OA + AO_1' = r + r_1 \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) добијамо $OO_1 = OO_1'$, тј. троугао $\Delta OO_1'O_1$ је једнакокраки па му је врх на симетрали O_1O_1' основице. Значи O је пресечна тачка правих O_2A и $s_{O_1O_1'}$.

Конструкција. Конструишемо кругове $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ (Слика 2.7). Нека је на кругу k_2 дата тачка A. Конструишимо праву AO_2 и на њој одредимо тачку O_1' са оне стране са које је тачка O_2, тако да је $AO_1' = r_1$. У пресеку симетрале дужи O_1O_1' и праве AO_2 налази се тачка O. Круг $k(O, OA)$ је тражени круг.



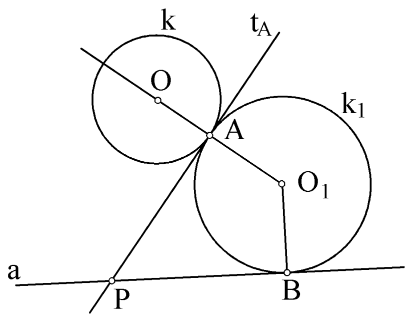
Слика 2.7.

Доказ. Кругови k и k_2 се додирују у тачки A по конструкцији. Из једнакости $OO_1' = OO_1$ и распореда тачака $O - A - O_1'$ видимо да постоји тачка S, која припада OO_1 тако да важи распоред тачака $O - S - O_1$ и $OS = OA$. Тада је $AO_1' = OO_1' - OA = OO_1 - OS = SO_1$ и $AO_1' = r_1$, па важи $SO_1 = r_1$. Закључујемо да тачка S припада кругу k_1. Даље, из $S \in k_1$ и $OS = OA$ следи $S \in k_1 \times k$. Дакле, конструисани круг k додирује круг k_1 у тачки S а круг k_2 у тачки A.

Дискусија. Задатак може имати два решења. Друго решење постоји јер постоји могућност да тачку O_1'' одредимо тако да важи распоред $O_1'' - A - O_2$. Тада користимо симетралу дужи O_1O_1''. Пресечна тачка те симетрале и праве AO_2 биће центар траженог круга. Означимо ту тачку са O'. Тај круг додирује кругове k_1 и k_2 у тачкама S' и A, редом. У општем случају задатак има два решења ако постоје тачке O и O'. Ако је једна од правих $O_1''O_1$ или $O_1'O_1$ нормална на AO_2 задатак ће имати једно решење. □

Задатак 67. *Дата је права a, круг k и на њему нека тачка A. Конструисати круг, који додирује праву a и дати круг k у тачки A.*

Решење: *Анализа.* Нека је дат круг k, тачка A на кругу k и права a (Слика 2.8). Нека је k_1 тражени круг. Означимо са B додирну



Слика 2.8.

тачку круга k_1 и праве a. Пресек тангенте t_A круга k у тачки A са правом a означимо са P. Како је $O_1A = O_1B = r_1$ и $PA = PB$, као тангентне дужи на круг k из исте тачке P, то се тачка O_1 налази на симетрали угла $\measuredangle APB = \measuredangle(t_A, a)$.

Конструкција. Конструишемо праву a и круг $k(O, r)$. У датој тачки $A \in k$ конструишемо тангенту t_A на круг k и означимо са P пресечну тачку правих a и t_A. Конструишемо затим симетралу s угла $\measuredangle(t_A, a)$ и означимо са O_1 пресечну тачку правих s и OA. Круг $k_1(O_1, O_1A)$ је тражени круг.

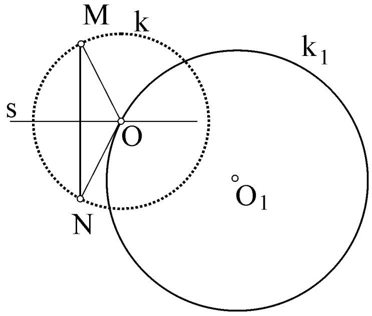
Доказ. Круг $k_1(O_1, O_1A)$ по конструкцији додирује круг k у тачки A и праву a у некој тачки B, јер му је центар на симетрали угла $\measuredangle(t_A, a)$.

Дискусија. Како можемо конструисати и симетралу s_1 угла, суплементног углу $\measuredangle(t_A, a)$, задатак може имати два решења у општем случају. Ако је тангента t_A паралелна са правом a задатак ће имати једно решење. Ако права a додирује круг k баш у тачки A задатак ће имати бесконачно много решења. $\square$

Задатак 68. *Конструисати круг k, који садржи две тачке M и N и чији центар припада датом кругу $k_1(O_1, r_1)$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да су задовољени сви услови задатка. Нека је $k(O, r)$ тражени круг (Слика 2.9) који садржи дате тачке M и N а центар O му припада кругу k_1. Тада се тачка O налази у пресеку симетрале дужи MN и круга $k_1(O_1, r_1)$.

Конструкција. Конструишимо круг $k_1(O_1, r_1)$. Нека су M и N две произвољне тачке у равни круга k_1. Конструишемо симетралу дужи



Слика 2.9.

MN и означимо је са s. Права s и круг $k_1(O_1, r_1)$ могу имати две, једну или ниједну заједничку тачку. Претпоставићемо да имају бар једну заједничку тачку и означићемо је са O. Круг са центром у тачки O и полупречником $OM = ON$ јесте тражени круг.

Доказ. Тачка M припада кругу $k(O, OM)$ по конструкцији. Из $OM = ON$ следи да и тачка N припада кругу $k(O, OM)$. Тачка O припада пресеку праве s и круга $k_1(O_1, r_1)$ па долазимо до закључка да тачка O припада и кругу $k_1(O_1, r_1)$. Дакле, $k(O, OM)$ је тражени круг.

Дискусија. Задатак може имати два, једно или ни једно решење у зависности од тога да ли круг $k(O, OM)$ и права s имају две, једну или немају заједничких тачака. □

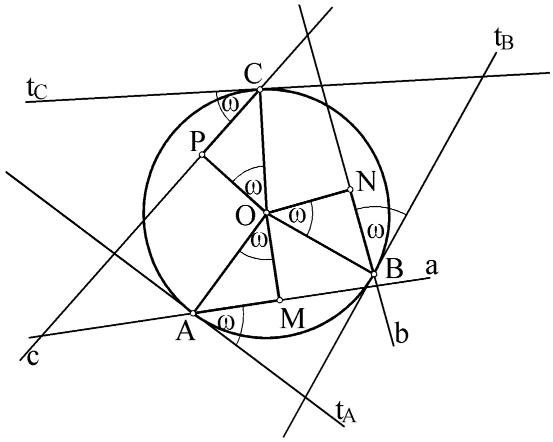
Задатак 69. *Конструисати круг, који сече три дате праве a, b и c под угловима једнаким датом углу ω.*

Решење: *Анализа.* Нека је угао $\omega < R$ и нека су дате три праве a, b и c и неки круг k, који их сече под угловима једнаким датом углу ω (Слика 2.10). Тада важи:

$$\measuredangle(a, k) = \measuredangle(a, t_A) = \omega, \quad \measuredangle(b, k) = \measuredangle(b, t_B) = \omega, \quad \measuredangle(c, k) = \measuredangle(c, t_C) = \omega,$$

где су t_A, t_B и t_C тангенте на круг k, редом у пресечним тачкама правих a, b и c са кругом k. Са O означимо центар круга k а са M, N и P нормалне пројекције тачке O на праве a, b и c, редом. Посматрајмо троуглове

$$\Delta OAM, \quad \Delta OBN \quad \text{и} \quad \Delta OCP.$$



Слика 2.10.

То су подударни троуглови јер за њих важи:

$$\measuredangle AMO = \measuredangle BNO = \measuredangle CPO (= R), OA = OB = OC (= r),$$
$$\measuredangle AOM = \measuredangle BON = \measuredangle COP.$$

Из подударности ових троуглова следи једнакост осталих елемената, па је $OM = ON = OP$. Значи, растојања тачке O (средишта траженог круга) до правих a, b и c су једнака, па тачка O лежи у пресеку симетрала углова између правих a, b и c.

Конструкција. Нека су дате праве a, b и c и нека се оне секу у трима тачкама. Конструишимо симетрале углова троугла одређеног тим трима тачкама. Пресечну тачку тих симетрала означимо са O. Конструишимо из тачке O нормалу на праву a и подножје те нормале означимо са M. Конструишимо полуправу p са почетком у тачки O такву да је $\measuredangle(p, OM) = \omega$. Како је $\omega < R$ то полуправа p сече праву a у некој тачки A. Конструишимо круг $k(O, OA)$. Како је растојање тачке O до правих a, b и c једнако и круг k сече праву a, круг k ће сећи и остале две праве b и c.

Доказ. Са B означимо једну од пресечних тачака круга k и праве b. Обележимо са N подножје нормале из тачке O на праву b. У тачкама A и B конструишимо тангенте t_A и t_B. Тада је, по конструкцији:

$$\measuredangle(a, k) = \measuredangle(a, t_A) = \measuredangle AOM = \measuredangle(p, OM) = \omega.$$

Посматрајмо троуглове ΔOAM и ΔOBN. Они су подударни према првом ставу о подударности троуглова јер важи $\measuredangle OMA = \measuredangle ONB\,(= R)$, $OM = ON$, $OA = OB$. Из њихове подударности следи $\measuredangle AOM = \measuredangle BON$. Даље имамо

$$\measuredangle(b,k) = \measuredangle(b,t_B) = \measuredangle BON = \measuredangle AOM = \measuredangle(p,OM) = \omega.$$

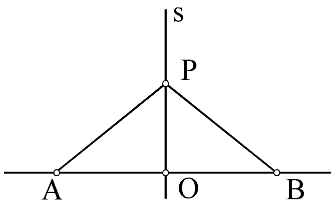
Аналогно се показује да је $\measuredangle(c,k) = \omega$.

Дискусија. Задатак има једно решење ако је $\omega \neq R$ и праве a, b и c се секу у трима тачкама. Ако је $\omega = R$ и a, b, c се секу у трима разним тачкама задатак ће имати једно решење. Ако је $\omega = R$ и a, b и c се секу у једној тачки задатак ће имати бесконачно много решења. Задатак неће имати решења у осталим случајевима. □

2.5 Нека геометријска места тачака

Задатак 70. *Конструисати геометријско место тачака једнако удаљених од двеју датих тачака A и B.*

Решење: Означимо са O средиште дужи AB, а са P, $P \neq O$, произвољну тачку која припада траженом геометријском месту тачака, тј. за коју је $PA = PB$. Тада, тачка P не припада правој AB јер би се у супротном тачке P и O поклапале. Према трећем ставу о подударности троуглова следи да су троуглови ΔAOP и ΔBOP подударни (Слика 2.11) а из њихове подударности следи једнакост напоредних углова $\measuredangle AOP$ и $\measuredangle BOP$. Дакле, $PO \perp AB$, тј. тачка P припада симетрали s дужи AB.



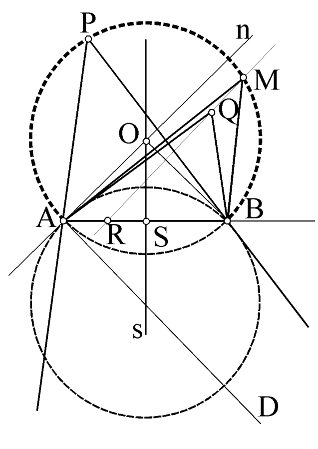
Слика 2.11.

Обратно, нека је $P \neq O$ произвољна тачка симетрале s дужи AB. Тада су троуглови ΔAOP и ΔBOP подударни према првом ставу о подударности троуглова. Из њихове подударности следи

$PA = PB$. Према томе тражено геометријско место тачака представља симетралу дужи AB. $\square$

Задатак 71. *Конструисати геометријско место темена свих углова једнаких датом углу α којима краци пролазе кроз две дате тачке A и B.*

Решење: Нека је дат угао α и нека су дате тачке A и B. Конструишимо дуж AB и полуправу AD тако да је $\measuredangle(AB, AD) = \alpha$ (Слика 2.12). Конструишимо праву n кроз тачку A управну на полуправу AD и конструишимо симетралу s дужи AB. Са O ћемо означити пресек правих s и n. Конструишимо круг $k(O, OA)$. Како је O на симетрали дужи AB то је $OA = OB$ па тачка B припада кругу $k(O, OA)$. С друге стране, OA је један од полупречника круга k и како је $OA \perp AD$ то је AD тангента круга k. Геометријско место тачака, које су темена углова чији краци пролазе кроз тачке A и B и који су једнаки датом углу α је лук $\overset{\frown}{AB}$, који се налази са оне стране дужи AB са које није полуправа AD. Траженом геометријском месту тачака припадају и тачке лука, који је симетричан у односу на праву AB. Докажимо да произвољна тачка са поменутих



Слика 2.12.

лукова има ту особину. Нека је тачка P на луку $\overset{\frown}{AB}$ са оне стране са које није полуправа AD. Конструишимо дужи AP и BP и означимо пресек правих AB и s са S. Тада су углови $\measuredangle(AD, AB) = \alpha$

и $\measuredangle AOS$ једнаки као углови са нормалним крацима. Следи

$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \measuredangle AOS = \measuredangle(AD, AB) = \alpha.$$

Докажимо да не постоји тачка ван поменутих лукова са траженом особином. Претпоставимо да је Q тачка, која не припада поменутим луковима а има особину да је $\measuredangle AQB = \alpha$. Уочимо произвољну тачку R на дужи AB. Права RQ сећи ће лук $\overset{\frown}{AB}$ круга k, који није са исте стране као и полуправа AD у некој тачки M. Овај пресек постоји јер права QR пролази кроз унутрашњу тачку R круга k. Спојимо тачку M са тачкама A и B и посматрајмо троуглове AQM и BQM. Тада је: $\measuredangle AQR > \measuredangle AMQ$ (као спољашњи несуседни угао) и $\measuredangle RQB > \measuredangle QMB$ (као спољашњи несуседни угао).

Како је по конструкцији полуправа QR унутар угла $\measuredangle AQB$ а полуправа MQ унутар угла AMB, то ће важити:

$$\alpha = \measuredangle AQB = \measuredangle AQR + \measuredangle RQB > \measuredangle AMQ + \measuredangle QMB = \measuredangle AMB = \alpha,$$

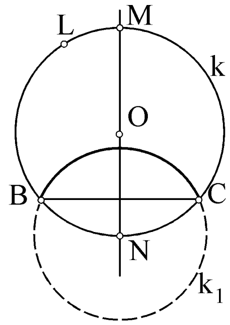
тј. $\alpha > \alpha$ што је немогуће. Случај када је тачка Q ван круга k разматра се аналогно. Дакле, не постоји тачка ван датих лукова са траженом особином. □

Задатак 72. *Дат је кружни лук* $\overset{\frown}{BLC}$*:*
а) *конструисати скуп средишта кругова уписаних у троуглове, којима су два темена тачке* B *и* C *а треће теме променљива тачка лука* $\overset{\frown}{BLC}$*;*
б) *конструисати скуп средишта споља уписаних кругова горе наведених троуглова, који додирују страницу* BC*;*
в) *конструисати скуп средишта споља уписаних кругова поменутих троуглова, који додирују страницу* CA*;*
г) *конструисати скуп средишта споља уписаних кругова горе наведених троуглова, који додирују страницу* AB*.*

Решење: Нека је дата дуж BC и круг $k(O, r)$, коме припада кружни лук $\overset{\frown}{BLC}$. Конструишимо најпре симетралу s дужи BC. Пресек симетрале s и лука $\overset{\frown}{BLC}$ означимо са M а пресек симетрале s и лука $\overset{\frown}{BC}$ (на коме није тачка L) означимо са N.

а) Скуп средишта кругова уписаних у троуглове, којима су два темена тачке B и C а треће теме на луку $\overset{\frown}{BLC}$, је кружни лук

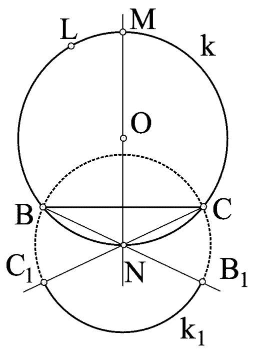
$\overset{\frown}{BC}$ круга k_1 (Слика 2.13) са центром у тачки N и полупречником $NB = NC$, који лежи у кругу k (види задатак 10. е)).



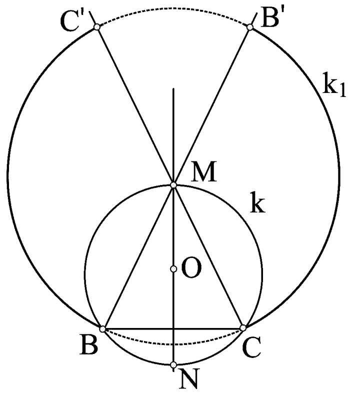
Слика 2.13.

б) Скуп средишта кругова, који додирују страницу BC (Слика 2.14) и продужетке страница AB и AC поменутих троуглова је кружни лук $\overset{\frown}{B_1C_1}$ круга k_1, који је изван круга k где $B_1 = k_1 \times BN$ и $C_1 = k \times CN$ (види задатак 10. е)).

в) Конструишемо симетралу s дужи BC и одредимо тачке M и N у пресеку круга k и праве s. Као и под a) конструишемо круг $k_1(M, BM = CM)$ (Слика 2.15). Тада је скуп свих средишта кругова, који додирују страницу AC и продужетке страница AB и BC кружни лук круга k_1, који лежи у углу CBM, тј. лук $\overset{\frown}{B'C}$ (види задатак 10. е)).



Слика 2.14.



Слика 2.15.

г) Геометријско место тачака, које су центри кругова, који додирују страницу AB и продужетке страница BC и CA је кружни лук круга $k_1(M, BM = CM)$ (Слика 2.15) који лежи у углу $\measuredangle BCM$ тј. то је лук $\overset{\frown}{C'B}$ (види задатак 10. е)). $\square$

2.6 Конструкције троуглова

Задатак 73. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

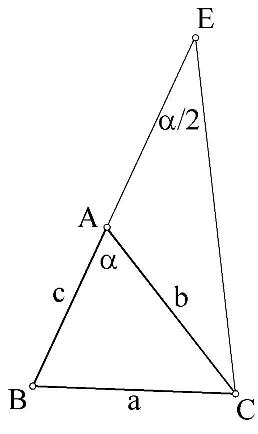
$$\measuredangle A = \alpha, \quad BC = a, \quad b \pm c = d.$$

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC са наведеним особинама, тј. $\measuredangle A = \alpha$, $BC = a$ и $b + c = d$. На продужетку странице BA одредимо тачку E тако да важи распоред тачака $B - A - E$ и $AC = AE$ (Слика 2.16). Тада је $BE = BA + AE = BA + AC = b + c = d$. Како је $AE = AC$ то је троугао ΔACE једнакокраки, па је тада: $\measuredangle ACE = \measuredangle AEC$.

Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи несуседни за углове $\measuredangle AEC$ и $\measuredangle ACE$ у троуглу ΔACE, па је $\measuredangle BAC = \measuredangle AEC + \measuredangle ACE$.

Из последње две једнакости следи да је $\measuredangle AEC = \dfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \dfrac{1}{2}\alpha$. Тачка A је врх једнакокраког троугла ΔACE, па припада симетрали дужи CE.

Конструкција. Са почетком у тачки E конструишемо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha/2$. Даље, конструишемо тачку B на полу-



Слика 2.16.

правој q такву да је $BE = d$ (Слика 2.17). Са центром у тачки B конструишемо круг k полупречника $a = BC$. Тада могу наступити следећи случајеви: круг k и полуправа p имају две, једну или ниједну заједничку тачку.

Претпоставимо да круг $k(B, a)$ и полуправа p имају заједничку тачку и означимо је са C. Ако је $\alpha < 2R$ тада је $\alpha/2 < R$, па симетрала дужи EC сече полуправу q у тачки A. За тачку A постоје следеће могућности: $E-A-B$, $A \equiv B$, $E-B-A$. Претпоставимо да важи распоред тачака: $E-A-B$. Тада су A, B, C три неколинеарне тачке (јер $A \in q$, $B \in q$ и $C \in p$) и одређују темена $\triangle ABC$.

Доказ. Докажимо да је $\triangle ABC$ тражени троугао.

(i) Тачка C припада кругу $k(B, a)$ одакле следи $BC = a$.

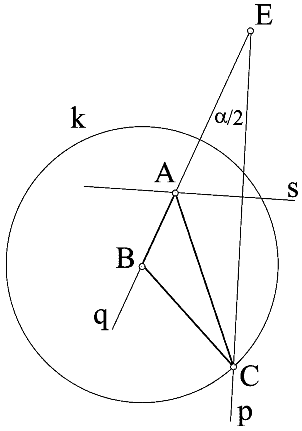
(ii) По конструкцији тачка A припада симетрали дужи CE па је троугао ΔACE једнакокраки, тј. $AC = AE$. Како још важи и распоред тачака $E - A - B$, закључујемо да је

$$BE = BA + AE = BA + AC.$$

По конструкцији је $BE = d$, одакле следи $BA + AC = d$, па је и други услов задовољен.

(iii) Троугао ΔACE је једнакокраки па је $\measuredangle BAC = 2\measuredangle EAC$ као спољашњи несуседни, а по конструкцији је $\measuredangle EAC = \measuredangle(p, q) = \alpha/2$, одакле следи $\measuredangle BAC = \alpha$.

Дакле, овако конструисани троугао ΔABC је тражени троугао.

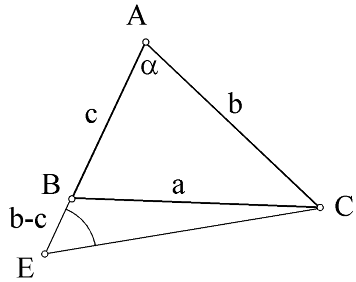


Слика 2.17.

Дискусија. Под условом да је $\alpha/2 < R$ и да важи распоред тачака $E - A - B$ задатак има два, једно или ниједно решење, у зависности од тога да ли круг $k(B, a)$ сече, додирује или нема заједничких тачака са полуправом p. У осталим случајевима задатак нема решења.

Napomena. Случај када је дато $b - c = d$, $b > c$ разматра се аналогно, с тим што се на страници BA троугла ΔABC одреди тачка E таква да је $A - B - E$ и $AE = AC$ (Слика 2.18). За конструкцију троугла ΔBEC имамо довољно елемената:

$BC = a$, $BE = b - c$ и $\measuredangle BEC = R - \dfrac{\alpha}{2}$. Теме A налазимо у



Слика 2.18.

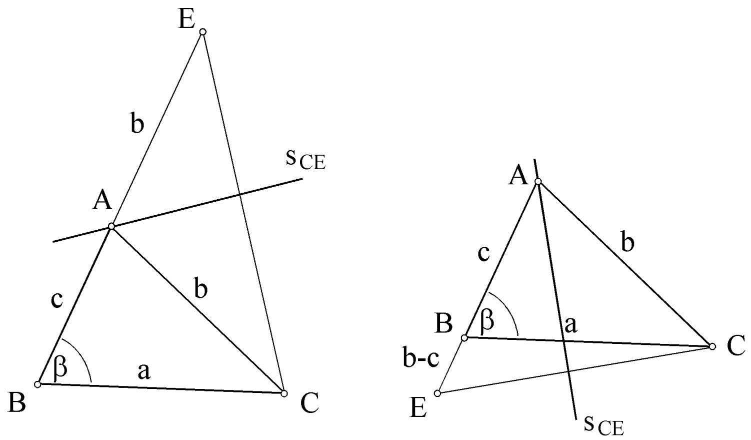
пресеку праве BE и симетрале s дужи CE, јер је троугао ΔACE

једнакокраки. □

Задатак 74. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$BC = a, \quad \measuredangle B = \beta, \quad b \pm c = d.$$

Упутство: Задатак се у оба случаја решава одређивањем тачке E на правој AB, тако да у првом случају важи распоред тачака $B - A - E$, а у другом $A - B - E$ (Слика 2.19).



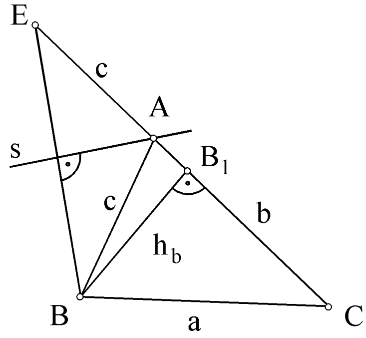
Слика 2.19.

Задатак 75. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$BC = a, \quad b \pm c = d, \quad h_b,$$

при чему је h_b *висина из темена* B.

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. $BC = a$, $b + c = d$ и h_b је његова висина (Слика 2.20). Означимо са B_1 подножје висине из темена B на страницу AC, а са E тачку праве AC такву да је $AE = AB$ и $C - A - E$. За конструкцију троугла ΔBCB_1, а самим тим и троугла ΔBCE имамо довољно елемената. Теме A налази се на симетрали основице BE једнакокраког троугла ΔABE.



Слика 2.20.

Конструкција. Са почетком у тачки B_1 конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p,q) = R$. На полуправој p конструишимо тачку B такву да је $BB_1 = h_b$, а затим круг $k(B,a)$ са центром у тачки B и полупречником a. Претпоставимо да постоји пресечна тачка круга k и полуправе q и означимо је са C. На правој B_1C одредимо тачку E такву да је $CE = d$ и важи $B_1, E \ddot{-} C$. Конструишимо затим симетралу s дужи BE и означимо са A пресечну тачку правих s и CE и претпоставимо да важи распоред тачака $C - A - E$. Тачке A, B и C су по конструкцији три неколинеарне тачке па одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

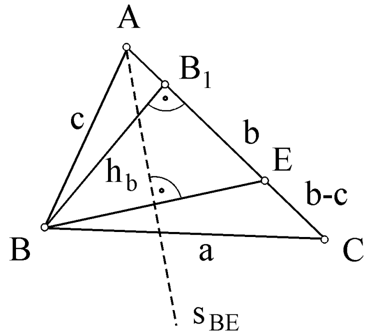
(i) По конструкцији је $BB_1 \perp B_1C$ и $BB_1 = h_b$, а како су тачке A, C и B_1 колинеарне то је h_b висина троугла ΔABC.

(ii) По конструкцији теме C припада кругу $k(B,a)$ па је и други услов задовољен, тј. $BC = a$.

(iii) Тачка A по конструкцији припада симетрали s дужи BE па је $AB = AE$, а како је још по конструкцији $CE = CA + AE$ то је $CE = CA + AB$, тј. $CE = b + c$. С друге стране, по конструкцији је $CE = d$. Следи $b + c = d$, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да постоји пресечна тачка C круга k и полуправе q, тј. $h_b < a$, и да важи распоред тачака $C - A - E$, задатак има решење. У осталим случајевима задатак нема решења.

Напомена: Случај када је познато $b - c = d$ разматра се тако што се са E означи тачка праве AC таква да је $AE = AB$ и притом важи



Слика 2.21.

$C, E \ddot{-} A$. Тада, под претпоставком $b > c$, дуж CE једнака је $b - c$ (Слика 2.21).

Задатак 76. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$\measuredangle A = \alpha, \quad BC = a, \quad h_b \pm h_c = d,$$

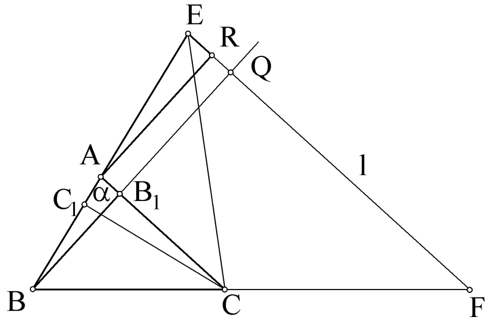
при чему су h_b *и* h_c *висине из темена* B *и* C *редом.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао, тј. $\measuredangle A = \alpha$, $BC = a$, $h_b + h_c = d$ (Слика 2.22). Са B_1 и C_1 означимо подножја висина h_b и h_c. Праву BB_1 продужимо и на њој одредимо тачку Q такву да важи $B_1Q = h_c$ и да важи распоред тачака $B - B_1 - Q$. Добићемо да је:

$$BQ = BB_1 + B_1Q = h_b + h_c = d.$$

Конструишемо праву l, која пролази кроз тачку Q и паралелна је правој AC. Уведимо још и следеће ознаке: $E = AB \times l$, $F = BC \times l$ и R подножје нормале из тачке A на праву l. Тада је $AR = B_1Q = h_c$ односно $AR = h_c$.

Троуглови ΔACC_1 и ΔAER су подударни јер је: $\measuredangle AC_1C = \measuredangle ERA (= R)$, $CC_1 = AR (= h_c)$ и $\measuredangle C_1AC = \measuredangle REA$ па је $AC = AE$, тј. ΔAEC је једнакокраки а одавде је $\measuredangle AEC = \measuredangle ACE$. Закључујемо да је $\alpha = \measuredangle BAC = 2\measuredangle AEC$, тј. $\measuredangle AEC = \alpha/2$. Како је $\measuredangle BAC = \measuredangle AEF$ видимо да је полуправа EC симетрала угла $\measuredangle AEF$.

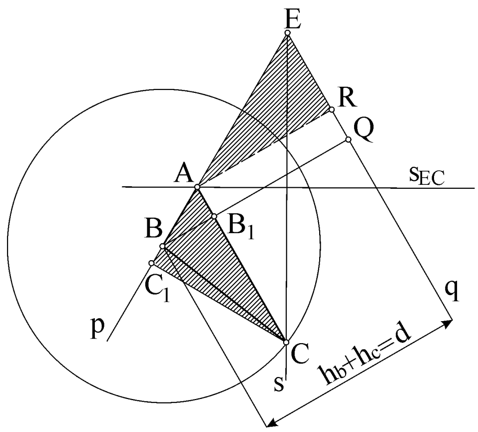


Слика 2.22.

Конструкција. Нека је E почетак полуправих p и q и $\measuredangle(p,q) = \alpha$ (Слика 2.23). На полуправој p уочимо тачку B, која је на растојању $d = h_b + h_c$ од полуправе q. Подножје нормале из тачке B на полуправу q означимо са Q. Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle(p,q)$ и конструишимо круг k са центром у тачки B и полупречника $a = BC$. Круг $k(B,a)$ може имати две, једну или ниједну заједничку тачку са симетралом s. Претпоставимо да круг $k(B,a)$ има заједничких тачака са симетралом s и једну од њих означимо са C. Конструишимо симетралу дужи EC и означимо је са s_{EC}. Пресечну тачку ове симетрале и дужи BE означимо са A. Тада може важити један од распореда тачака: $E-A-B$, $A \equiv B$ или $E-B-A$. Претпоставимо да важи распоред тачака $E-A-B$. Тада су тачке A, B и C неколинеарне и одређују темена неког $\triangle ABC$.

Доказ. Докажимо да је троугао $\triangle ABC$ тражени троугао. Са B_1 означимо пресек правих BQ и AC. Тачка C припада кругу $k(B,a)$ па је $BC = a$. Како је s_{EC} симетрала дужи EC то је троугао $\triangle ACE$ једнакокраки, одакле закључујемо да је $\measuredangle BAC = 2\measuredangle AEC = 2\alpha/2 = \alpha$ тј. $\measuredangle A = \alpha$. Како полуправе AC и q са полуправом p заклапају једнаке углове, односно угао α, то су AC и q паралелне. По конструкцији је: $BQ \perp q$ одакле следи $BQ \perp AC$ тј. $BB_1 \perp AC$, па је $BB_1 = h_b$. Даље, са C_1 означимо подножје нормале из тачке C на страницу AB а са R подножје нормале из тачке A на праву q. Посматрајмо сада троуглове ACC_1 и AER. Та два троугла су подударна, јер за њих важи: $\measuredangle C_1 = \measuredangle R (= R)$, $AC = AE$ и $\measuredangle C_1AC = \measuredangle REA$. Из њихове подударности добијамо $CC_1 = AR$, тј. $AR = h_c$. Сада је:

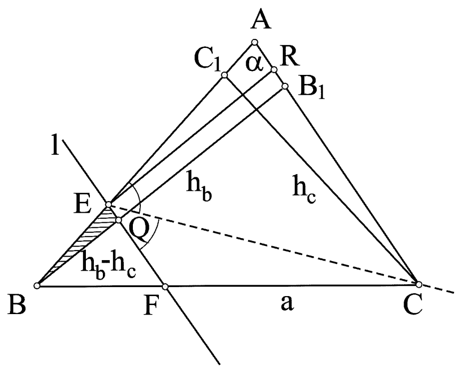
$$h_b + h_c = BB_1 + AR = BB_1 + B_1Q = BQ = d,$$



Слика 2.23.

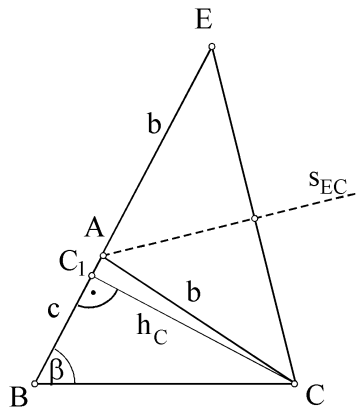
па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је угао $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака $E - A - B$, задатак ће имати два, једно или ниједно решење у зависности од тога да ли круг $k(B, a)$ са полуправом s има две, једну или нема заједничких тачака. У осталим случајевима задатак нема решење. □



Слика 2.24.

Напомена: Ако је познато $h_b - h_c = d$, онда на BB_1 одредимо тачку Qтакву да је $B_1Q = h_c$ и $B, Q \ddot{-} B_1$ (Слика 2.24). Кроз тачку Q конструишимо праву l паралелну са AC и означимо са E и F пресечне тачке праве l редом са AB и BC а са R подножје нормале из тачке E на праву AC. Тада су троуглови ΔAER и ΔACC_1 подударни па је троугао ΔAEC једнакокраки. То значи да је $\measuredangle CEA = R - \alpha/2$. Како је $\measuredangle FEA = 2R - \alpha$, закључујемо да је $\measuredangle CEA = \measuredangle FEA/2$, тј. тачка C је на симетрали угла $\measuredangle FEA$.



Слика 2.25.

Задатак 77. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$b \pm c = d, \quad BC = a \quad \text{и висина} \quad h_c.$$

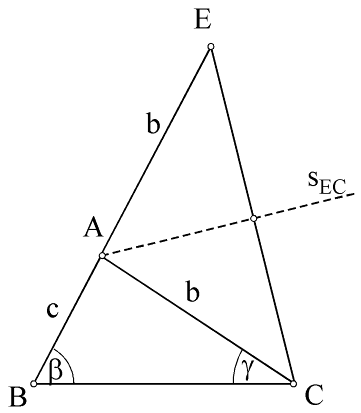
Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је збир страница $b + c = d$, висина $CC_1 = h_c$ и угао $\measuredangle B = \beta$ (Слика 2.25). Означимо са E тачку праве AB такву да је $AE = AC$ и $B - A - E$.

За конструкцију троугла ΔBCC_1 а самим тим и троугла ΔBCE имамо довољно елемената. Теме A налази се у пресеку симетрале основице CE једнакокраког троугла ΔACE и праве BE.

Остатак задатка као и део када је дата разлика страница $b - c = d$ препуштамо читаоцу.

Задатак 78. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$b \pm c = d, \quad \measuredangle B = \beta \quad \text{и} \quad \measuredangle C = \gamma.$$



Слика 2.26.

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је збир страница $b + c = d$, $\measuredangle B = \beta$ и угао $\measuredangle C = \gamma$ (Слика 2.26). Означимо са E тачку праве AB такву да је $AE = AC$ и $B - A - E$.

За троугао ΔBCE имамо $BE = d$, $\measuredangle B = \beta$ и $\measuredangle BEC = \measuredangle BAC/2 = R-(\beta+\gamma)/2$. Дакле, троугао ΔBCE можемо конструисати. Теме A налази се у пресеку симетрале основице CE једнакокраког троугла ΔACE и праве BE.

Остатак задатка као и део када је дата разлика страница $b-c = d$ препуштамо читаоцу. $\square$

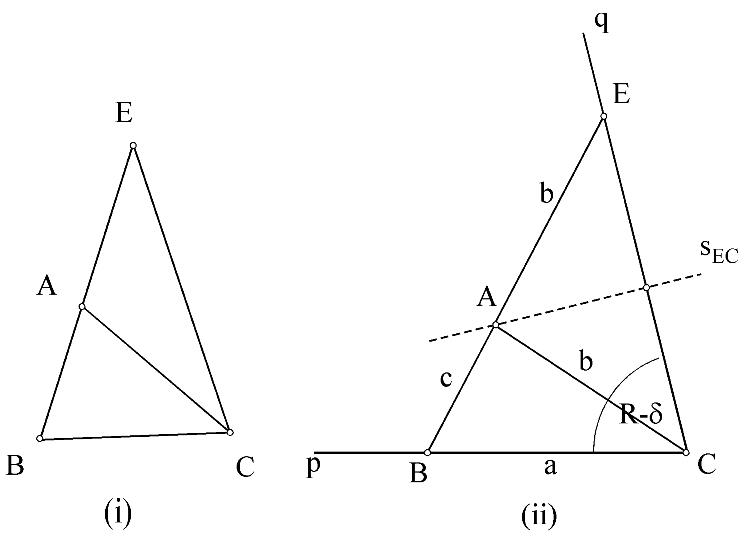
Задатак 79. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$b \pm c = d, \quad BC = a \quad \text{и} \quad \measuredangle B - \measuredangle C = \delta.$$

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је збир страница $b+c = d$, $BC = a$ и разлика углова $\measuredangle B-\measuredangle C = \delta$ (Слика 2.27 (i)). Означимо са E тачку праве AB такву да је $AE = AC$ и $B - A - E$.

За троугао ΔBCE имамо следеће елементе: $BE = d$, $BC = a$ и $\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + \measuredangle ACE = \gamma + \alpha/2 = R - \beta + \gamma = R - \delta$. Дакле, троугао ΔBCE можемо конструисати. Теме A налази се у пресеку симетрале основице CE једнакокраког троугла ΔACE и праве BE.

Конструкција. Са почетком у тачки C конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = R - \delta/2$ (Слика 2.27 (ii)). На полуправој p



Слика 2.27.

одредимо тачку B такву да је $BC = a$. Конструишимо затим круг $k(B, d)$. Претпоставимо да круг k и полуправа q имају заједничких тачака и једну од њих означимо са E. Конструишимо затим симетралу s дужи CE и означимо са A пресечну тачку правих s и BE и претпоставимо да важи распоред тачака $B - A - E$. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне па одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је $BC = a$.

(ii) По конструкцији тачка E припада кругу $k(B, d)$. С друге стране троугао ΔACE је једнакокраки па је због $B - A - E$ задовољено $BE = BA + AE = BA + AC = b + c$. Према томе, добијамо да је $b + c = d$.

(iii) По конструкцији је $\measuredangle BCE = \measuredangle(p, q) = R - \delta$. Као у анализи задатка добија се да је $\measuredangle BCE = R - (\beta - \gamma)$, одакле следи да је $\beta - \gamma = \delta$.

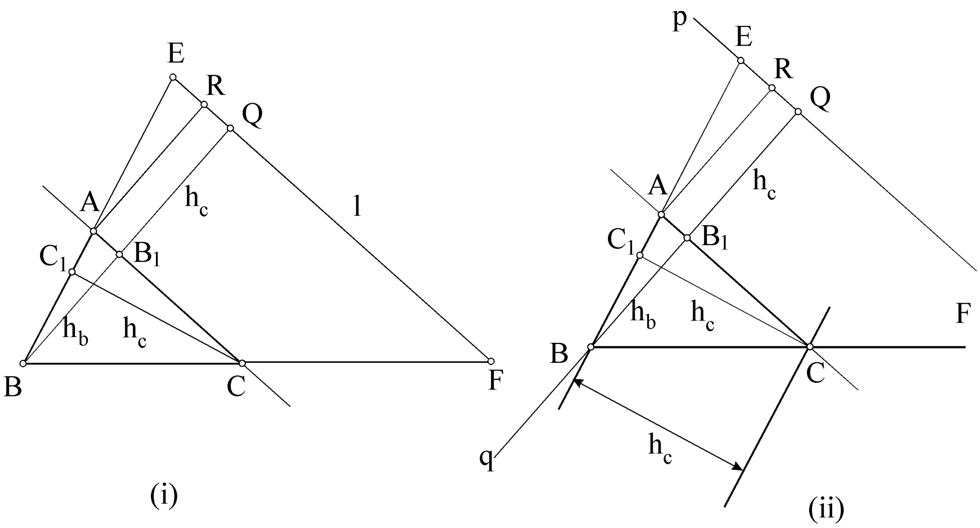
Дакле, троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\delta < 2R$ и да важи распоред тачака $B - A - E$, задатак има решење. У осталим случајевима задатак нема решења.

Део када је дата разлика страница $b - c = d$ препуштамо читаоцу. $\square$

Задатак 80. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$b \pm c = d \quad \text{и висине} \quad h_b \quad \text{и} \quad h_c.$$



Слика 2.28.

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је збир страница $b + c = d$, и нека су му $h_b = BB_1$ и $h_c = CC_1$ висине редом из темена B и C. (Слика 2.28. (i)). Означимо са Q тачку праве BB_1 такву да је $B_1Q = h_c$ и $B - B_1 - Q$. Кроз тачку Q конструишимо праву l нормалну на праву BQ. Оначимо са E и F пресечне тачке праве l редом са правама AB и BC. Нека је R подножје нормале из тачке A на праву l. Тада су троуглови ΔAER и ΔCAC_1 подударни па је $AE = AC$. Дакле $BE = BA+AE = b+c = d$. Даље, важи $BQ = h_b + h_c$. Према томе, имамо довољно елемената за конструкцију правоуглог троугла ΔBQE. Тачка A се налази на растојању h_c од праве l а тачка C на растојању h_c од праве BE при чему је права AC паралелна правој l.

Конструкција. Са почетком у тачки Q конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = R$. На полуправој p одредимо тачке B и B_1

такве да је $B - B_1 - Q$, $QB_1 = h_c$ и $BB_1 = h_b$ (Слика 2.28. (ii)). Кроз тачку B_1 конструишимо праву m паралелну полуправој q. Конструишимо затим круг $k(B, d)$. Претпоставимо да постоји пресечна тачка круга k и полуправе q и означимо је са E. Означимо са A пресечну тачку правих m и BE. На краку AB_1 угла $\measuredangle ABAB_1$ одредимо тачку C која је на растојању h_c од крака AB. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани троугао ΔABC управо тражени троугао.

(i) Означимо са C_1 подножје нормале из тачке C на праву AB. Тада је по конструкцији $CC_1 \perp AB$ и $CC_1 = h_c$, па је висина из темена C заиста једнака датој дужи h_c.

(ii) По конструкцији тачке B и B_1 припадају полуправој p која је управна на праву m у тачки B_1. Како је још $A, C \in m$ и $BB_1 = h_b$, то је висина троугла ΔABC из темена B једнака датој дужи h_b.

(iii) Означимо са R подножје нормале из тачке A на полуправу q. Троуглови ΔAER и $\Delta iCAC_1$ су подударни јер је $AR = CC_1 = h_c$, $\measuredangle AER = \measuredangle CAC_1$ и $\measuredangle ARE = \measuredangle CC_1B$. Из њихове подударности следи $AE = CA$. С обзиром на то да важи распоред тачака $B - A - E$ имамо $BE = BA + AE = BA + CA = b + c$, тј. $BE = b + c$. Како је по конструкцији $BE = d$, следи да је и трећи услов задатка задовољен, тј. $b + c = d$.

Дакле, троугао ΔABC је заиста тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $h_b + h_c < d$ задатак има решење.

Напомена. Део задатка када је дата разлика страница $b - c = d$ препуштамо читаоцу. Приметимо да у том случају мора бити $b > c$ и $h_b < h_c$. $\square$

Задатак 81. *Конструисати троугао ΔABC ако је познато:*

$$b + c = d_1, \quad h_b + h_c = d_2, \quad BC = a.$$

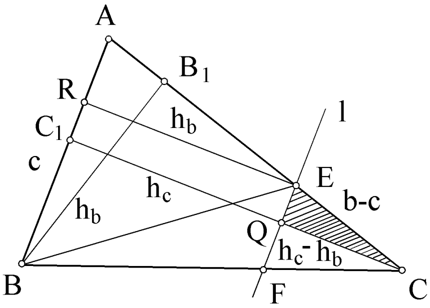
Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је збир страница $b + c = d_1$, збир висина $h_b = BB_1$ и $h_c = CC_1$ једнак d_2 и страница $BC = a$ (Слика 2.28. (i)). Означимо са Q тачку праве BB_1 такву да је $B_1Q = h_c$ и $B - B_1 - Q$. Кроз тачку Q конструишимо праву l нормалну на праву BQ. Оначимо са E и F

пресечне тачке праве l редом са правама AB и BC, а са R подножје нормале из тачке A на праву l. Тада су троуглови ΔAER и ΔCAC_1 подударни па је $AE = AC$. Дакле, важи $BE = BA + AE = b + c = d_1$. Даље, такође важи $BQ = h_b + h_c = d_2$. Према томе, имамо довољно елемената за конструкцију правоуглог троугла ΔBQE ($BE = d_1$, $BQ = d_2$ и $\measuredangle BQE = R$). Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи несуседни углу $\measuredangle AEC$ тругла ΔAEC па је $\measuredangle BAC = 2\measuredangle AEC$. С друге стране је $\measuredangle BEF = \measuredangle BAC$ па је $\measuredangle BEF = 2\measuredangle AEC$, тј. EC је симетрала угла $\measuredangle BEF$. Узимајући у обзир да је $BC = a$, закључујемо да се теме C налази у пресеку круга $k(B, a)$ и симетрале угла $\measuredangle BEF$. Теме A припада симетрали основице CE једнакокраког троугла ΔACE.

Читаоцу препуштамо остатак задатка. □

Задатак 82. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:*

$$b - c = d_1, \quad h_c - h_b = d_2, \quad BC = a.$$



Слика 2.29.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је разлика страница $b - c = d_1$, разлика висина $h_c - h_b = d_2$ и страница $BC = a$ (Слика 2.29). Означимо са Q тачку праве CC_1 такву да је $QC_1 = h_b$ и $Q, C_1 \ddot{-} C$. Кроз тачку Q конструишимо праву l нормалну на праву CC_1. Оначимо са E пресечну тачку правих l и AC, а са R подножје нормале из тачке E на праву AB. Тада су троуглови ΔAER и ΔABB_1 подударни па је $AE = AB$. Дакле, важи $CE = AC - AE = b - c = d_1$. Такође важи $CQ = CC_1 - QC_1 = h_c - h_b = d_2$. Према томе, имамо довољно елемената за конструкцију правоуглог троугла ΔCQE ($CE = d_1$, $CQ = d_2$

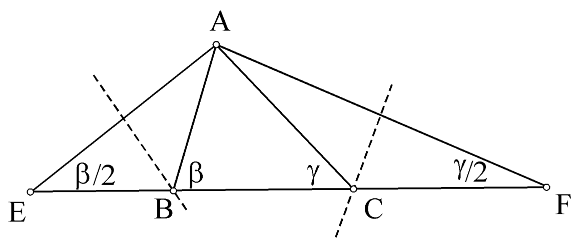
и $\measuredangle CQE = R$). Угао $\measuredangle AEC$ је угао на основици једнакокраког тругла ΔABE па је $\measuredangle AEB = R - \measuredangle BAC/2$. С друге стране је $\measuredangle AEF = 2R - \measuredangle BAC$ па је $\measuredangle AEF = 2\measuredangle AEB$, тј. полуправа EB је симетрала угла $\measuredangle AEF$. Узимајући у обзир да је $BC = a$, закључујемо да се теме B налази у пресеку круга $k(C, a)$ и симетрале угла $\measuredangle AEF$. Теме A припада симетрали основице BE једнакокраког троугла ΔABE.

Читаоцу препуштамо остатак задатка. □

Задатак 83. *Конструисати троугао ΔABC ако је познато: полуобим p и углови $\measuredangle B = \beta$ и $\measuredangle C = \gamma$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао, тј. да му је полуобим p и углови код темена B и C једнаки редом датим угловима β и γ. Означимо са E и F тачке праве BC такве да је $BE = AB$, $CF = AC$ и важи распоред тачака $E - B - C - F$ (Слика 2.30). Нека је $\beta + \gamma < 2R$. За троугао ΔAEF важи

$$EF = a + b + c = 2p, \quad \measuredangle AEF = \beta/2 \quad \text{и} \quad \measuredangle AFE = \gamma/2,$$



Слика 2.30.

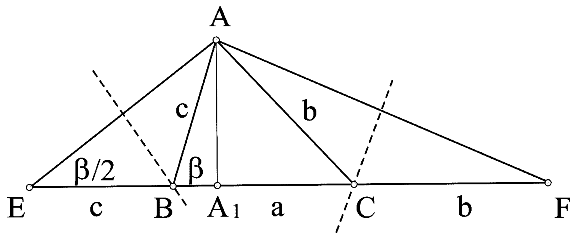
па се он лако може конструисати. Темена B и C налазе се у пресеку праве EF редом са симетралама страница AE и AF.

Читаоцу препуштамо остатак решења. □

Задатак 84. *Конструисати троугао ΔABC ако је познато: полуобим p, висина h_a и угао $\measuredangle B = \beta$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао, тј. да му је полуобим p, висина из темена A једнака h_a и угао код темена B једнак датом углу β. Означимо са E и F тачке праве BC такве да је $BE = AB$, $CF = AC$ и важи распоред тачака $E-B-C-F$ (Слика 2.31). За троугао ΔAEF имамо

$$EF = a + b + c = 2p, \quad \measuredangle AEF = \beta/2 \quad \text{и} \quad AA_1 = h_a,$$

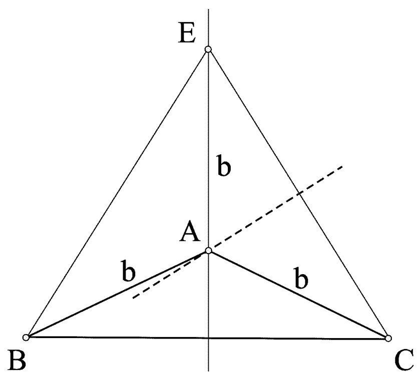


Слика 2.31.

па се он лако може конструисати. Темена B и C налазе се у пресеку праве EF редом са симетралама страница AE и AF.

Читаоцу препуштамо остатак решења. □

Задатак 85. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:* $BC = a$, $b \pm h_a = d$ *и* $b = c$.

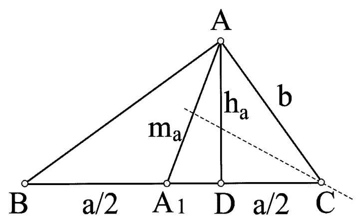


Слика 2.32.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени једнакокраки троугао, тј. да му је $BC = a$, $b + h_a = d$ и $b = c$. Означимо са A_1 подножје висине из темена A а са E тачку на правој AA_1 такву да је $AE = AC$ и $A_1 - A - E$ (Слика 2.32). За конструкцију правоуглог троугла ΔA_1CE имамо довољно елемената ($A_1E = d$, $A_1C = a/2$ и $\measuredangle EA_1C = R$). Тачка A налази се на симетрали дужи CE, док је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Читаоцу препуштамо остатак задатка. □

Задатак 86. *Конструисати троугао ΔABC ако је познато: висина h_a, тежишна дуж m_a и $a = 2b$.*



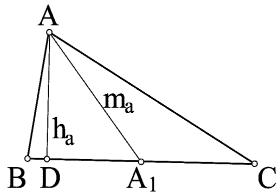
Слика 2.33.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао. Средиште странице BC означимо са A_1 а са D означимо подножје нормале из тачке A на праву BC са $h_a = AD$ висину и са $m_a = AA_1$ тежишну линију из темена A на страницу BC, (Слика 2.33). Правоугли троугао ADA_1 се лако може конструисати. Троугао ΔAA_1C је једнакокраки тј. $AC = A_1C$ ($b = a/2$), па тачка C припада симетрали дужи AA_1. Тачка B симетрична је тачки C у односу на тачку A_1.

Читаоцу препуштамо остатак решења. □

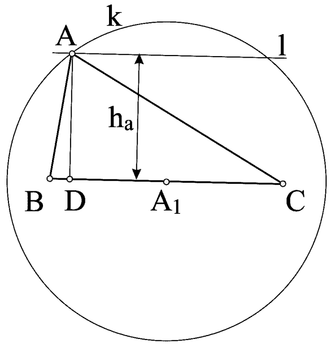
Задатак 87. *Конструисати троугао ΔABC ако је познато: $BC = a$, висина h_a и тежишна дуж m_a.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је ΔABC тражени троугао. Средину странице BC означимо са A_1, са D означимо подножје нормале из тачке A на праву BC, (Слика 2.34), са $h_a = AD$ висину и са $m_a = AA_1$ тежишну линију из темена A на страницу BC. Троугао ADA_1 се лако може конструисати.



Слика 2.34.

Конструкција. Конструишимо дуж $BC = a$ а затим на растојању h_a (Слика 2.35) од ове дужи конструишимо праву l паралелну са BC. Конструишимо средиште дужи $BC = a$ и означимо га са A_1. Затим, конструишимо скуп тачака, које су од дате тачке A_1 удаљене за m_a, тј. конструишимо круг $k(A_1, m_a)$. Круг k и права l имају или немају заједничких тачака. Претпоставићемо да имају заједничких



Слика 2.35.

тачака и једну од њих означимо са A. Тада су тачке A, B и C три неколинеарне тачке и одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је $BC = a$.

(ii) Са D означимо подножје нормале из тачке A на праву BC. Тачка D је на правој BC а тачка A на правој l, која је паралелна са BC. Како је $AD \perp BC$ то је AD нормално растојање паралелних правих BC и l а оно је по конструкцији једнако h_a. Значи $AD = h_a$ је висина троугла ΔABC, па је и други услов задовољен.

(iii) Тачка A_1 је средиште дужи BC по конструккцији. Како A припада кругу $k(A_1, m_a)$ то је $AA_1 = m_a$ тежишна дуж троугла ΔABC. Дакле, троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Задатак има два, једно или ни једно решење у зависности од броја пресечних тачака круга k и праве l. $\square$

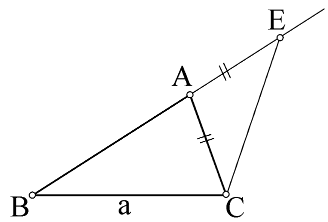
Задатак 88. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дато:*

$$\measuredangle B = \beta, \quad BC = a, \quad b + c = d.$$

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC троугао са траженим особинама. Конструишимо тачку E на правој AB тако да важи распоред тачака $E - A - B$ и $AC = AE$ (Слика 2.36). Тада је:

$$BE = BA + AE = BA + AC = c + b = d.$$

Посматрајмо троугао ΔBEC: за њега нам је познато да је $BC = a$,

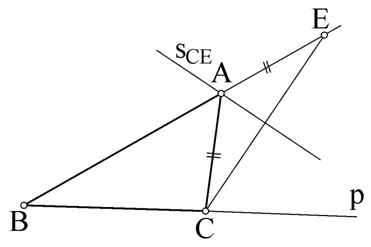


Слика 2.36.

$BE = d$ и $\measuredangle B = \beta$, па се овај троугао може конструисати. Теме A троугла ΔAEC припада симетрали странице EC зато што је троугао ΔAEC једнакокраки по конструкцији.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки B тако да је $\measuredangle(p, q) = \beta$. На полуправој p одредимо тачку C тако да је $BC = a$ (Слика 2.37) а на полуправој q одредимо тачку E тако да је $BE = d$. Спојимо тачке C и E и конструишемо симетралу дужи CE. Пресек симетрале дужи CE са полуправом BE означимо са A. За тачке A, B и E могућ је један од наредних распореда тачака: $E - A - B$, $A \equiv B$ и $E - B - A$.

Нека важи распоред $E - A - B$. У том случају су A, B и C три неколинеарне тачке и као такве одређују темена неког троугла ΔABC.

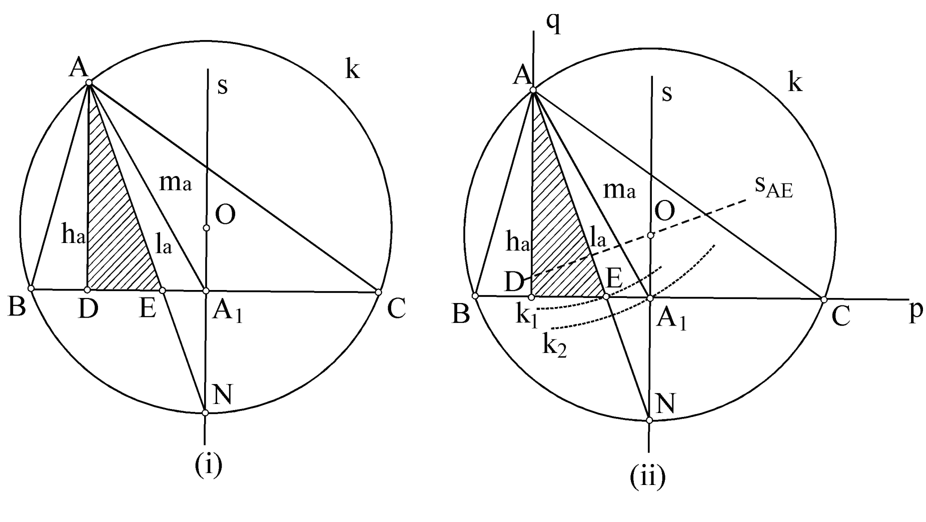


Слика 2.37.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Како важи распоред тачака $E - A - B$ следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle(p,q) = \beta$. По конструкцији је $BC = a$ и како важи $A \in s_{CE}$ то је $AC = AE$. Из $E - A - B$ следи $BA + AC = BA + AE = BE = d$ тј. $BA + AC = d$. Дакле, сва три услова захтевана у задатку су задовољена.

Дискусија. Задатак има решења само ако је $\beta < 2R$ и ако важи распоред тачака $E - A - B$. У осталим случајевима задатак нема решења. □

Задатак 89. *Конструисати троугао ΔABC када су му дате висина h_a, тежишна дуж m_a и одсечак симетрале l_a угла $\measuredangle A$.*



Слика 2.38.

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека му је $AD = h_a$ висина, $m_a = AA_1$ тежишна дуж и $AE = l_a$ одсечак симетрале угла код темена A. Нека је k описани круг око троугла ΔABC, s симетрала странице AB и N пресечна тачка круга k и праве s таква да је $N, A \div AB$. Лукови $\overset{\frown}{AN}$ и $\overset{\frown}{NC}$ су подударни међу собом па је $\measuredangle BAN = \measuredangle CAN$. То знач да тачка N припада и симетрали AE унутрашњег угла $\measuredangle A$ троугла ΔABC (Слика 2.38 (i)). За правоугли троугао ΔADE познати су хипотенуза $AE = l_a$ и катета $AD = h_a$. Тачка A_1 припада правој DE и налази се на растојању m_a од тачке A. Сада можемо пречи на конструкцију троугла ΔABC.

Конструкција. Са почетком у тачки D конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = R$ (Слика 2.38 (ii)). На полуправој q одредимо тачку A такву да је $AD = h_a$. Конструишимо кругове $k_1(A, l_a)$ и $k_2(A, m_a)$. Означимо са E и A_1 пресечне тачке редом кругова k_1 и k_2 са полуправом p. Претпоставимо да важи распоред тачака $D - E - A_1$, тј. да је $h_a < l_a < m_a$. У тачки A_1 конструишимо праву s управну на праву DE и означимо са N пресечну тачку правих s и AN. Означимо са O пресечну тачку праве s и симетрале s_{AN} дужи AN. Конструишимо затим круг $k(O, ON = OA)$. Означимо са B и C пресечне тачке круга k и праве DE. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне па одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $AD = h_a$ и $AD \perp DE$. Тачке D, E, B и C су по конструкцији колинеарне, одакле следи да је $AD \perp BC$, тј. $AD = h_a$ је висина троугла ΔABC.

(ii) Права s је по конструкцији нормална на тетиву BC у тачки A_1 а како је још $AA_1 = m_a$, то је m_a тежишна дуж из темена A троугла ΔABC.

(iii) Права s је, као што смо се уверили, симетрала дужи BC. То знач да су лукови $\overset{\frown}{AN}$ и $\overset{\frown}{NC}$ подударни па су подударни и њихови периферијски углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle CAN$. То значи да је права AN симетрала угла $\measuredangle$ троугла ΔABC. По конструкцији тачка E припада дужи BC. Даље је $AE = l_a$, па је и трећи услов задовољен.

Доказ је завршен.

Дискусија. Задатак има решење под условом $h_a < l_a < m_a$. Ако је $h_a = l_a = m_a$ троугао ΔABC је једнакокраки. $\square$

Задатак 90. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дата висина* h_a, *тежишна дуж* m_a *и разлика углова* $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$.

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека му је $AD = h_a$ висина, $m_a = AA_1$ тежишна дуж и разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$. Нека је k описани круг око троугла ΔABC, s симетрала странице BC и N пресечна тачка круга k и праве s таква да је $N, A \div AB$. Тачка N припада и симетрали AE, $E \in BC$, унутрашњег угла $\measuredangle A$ троугла ΔABC (Слика 2.38 (i)).

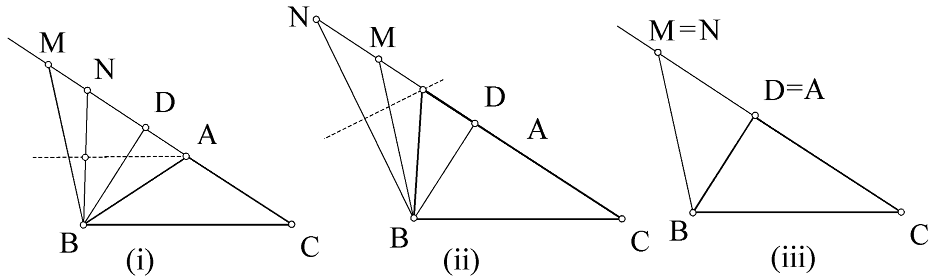
Такође важи $\measuredangle DAE = \dfrac{1}{2}\measuredangle A - \measuredangle BAD = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$.

За правоугли троугао ΔADE познати су угао $\measuredangle DAE = \delta/2$ и катета $AD = h_a$. Тачка A_1 припада правој DE и налази се на растојању m_a од тачке A. Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC. $\square$

Аналогно се решава и следећи задатак.

Задатак 91. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дат одсечак симетрале* l_a, *тежишна дуж* m_a *и разлика углова* $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$.

Задатак 92. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је познато:* $\measuredangle A = \alpha$, *збир страница* AB *и* AC *једнак датој дужи* m, *а збир висине* BD *и дужи* CD *једнак датој дужи* n.



Слика 2.39.

Упутство: Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека је $b + c = m$, $BD + CD = n$ и $\measuredangle A = \alpha$. На полуправој CA одредимо тачке M и N такве да је $CM = m$ и $CN = n$. Тада је $DM = h_b$ и $AN = c$. Троугао ΔDMB је једнакокрако правоугли, па је $\measuredangle BMC = R/2$. Такође, троугао ΔBAN је једнакокраки па је $\measuredangle BNC = \alpha/2$.

За троугао ΔMNB имамо познату страницу и два угла и лако га можемо конструисати. Након тога лако одређујемо тачку C. Тачка A налази се у пресеку праве MN и симетрале s дужи BN. Постоје три могућности за дужи m и n: $m > n$, $m < n$ и $m = n$.

(i) Ако је $m > n$ онда су углови троугла ΔBMN: $\measuredangle BMN = R/2$ и $\measuredangle BNM = 2R - \alpha/2$ (Слика 2.39 (i)).

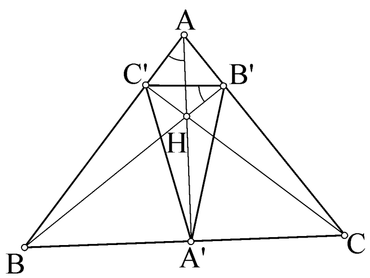
(ii) Ако је $m < n$ онда су углови троугла ΔBMN: $\measuredangle BMN = 3R/2$ и $\measuredangle BNM = \alpha/2$ (Слика 2.39 (ii)).

(iii) Ако је $m = n$ онда је $M \equiv N$, па је троугао ΔABC правоугли (Слика 2.39 (iii)). $\square$

Задатак 93. *Конструисати троугао ΔABC када су дата подножја A', B', C' његових висина.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Са A', B' и C' обележимо подножја његових висина (Слика 2.40), редом из темена A, B, C и са H ортоцентар. Уочимо четвороугао $AC'HB'$. Дуж AH се из тачака B' и C' види под правим углом па је $AC'HB'$ тетиван. Његова темена припадају кругу, чији је пречник дуж AH. Према томе важиће једнакост углова над истим луком $\overset{\frown}{C'H}$:

$$\measuredangle C'AH = \measuredangle C'B'H. \tag{2.3}$$



Слика 2.40.

Аналогно, четвороугао $CB'HA'$ је тетиван и његова темена припадају кругу са пречником CH. Тада су периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{HA'}$ једнаки тј. важи:

$$\measuredangle HB'A' = \measuredangle HCA'. \tag{2.4}$$

Посматрајмо даље троуглове ABA' и CBC'. Из

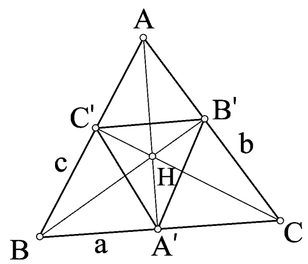
$$\measuredangle AA'B = \measuredangle CC'B (= R) \quad \text{и} \quad \measuredangle ABA' \equiv \measuredangle C'BC$$

добијамо да су ова два троугла слична. Из сличности троуглова следи да су им и трећи одговарајући углови једнаки: $\measuredangle BAA' = \measuredangle BCC'$, тј.

$$\measuredangle C'AH = \measuredangle HCA' \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) следи да је $\measuredangle C'B'H = \measuredangle HB'A'$, тј. права $B'H \equiv B'B$ је симетрала угла $\measuredangle A'B'C'$. Аналогно се доказује да је права $C'H \equiv C'C$ симетрала угла $\measuredangle B'C'A'$ а права $A'H \equiv A'A$ симетрала угла $\measuredangle C'A'B'$. Дакле, ортоцентар H, троугла ΔABC, се налази у пресеку симетрала углова троугла $\Delta A'B'C'$.

Конструкција. Нека су дате три неколинеарне тачке A', B' и C'. Оне одређују темена троугла $\Delta A'B'C'$ (Слика 2.41). Конструишимо симетрале углова тог троугла и пресечну тачку означимо са H. Конструишимо затим праве a, b и c такве да важи: $A' \in a$, $B' \in b$, $C' \in c$, $a \perp A'H$, $b \perp B'H$ и $c \perp C'H$. Са A, B и C редом означимо пресек правих b и c, c и a, a и b. Тачке A, B и C су три неколинеарне тачке и одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.41.

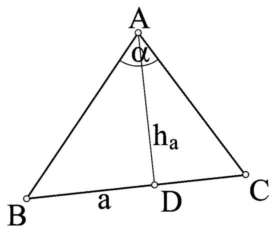
Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Најпре докажимо да је AA' висина датог троугла. Како је по конструкцији $HA' \perp BC \equiv a$, довољно је доказати да тачка A припада правој HA'. Праве b и c су по конструкцији нормалне на симетрале углова $\measuredangle B'$ и $\measuredangle C'$ троугла $\Delta A'B'C'$, па су као такве симетрале спољашњих углова $\measuredangle B'$ и $\measuredangle C'$ троугла $\Delta A'B'C'$. Како је полуправа AA' симетрала угла $\measuredangle A'$ троугла $\Delta A'B'C'$ то она пролази кроз пресек симетрала преостала два спољашња угла троугла $A'B'C'$. Дакле, тачка A је пресек правих b и c и припада правој AH', одакле следи да је AA' по дефиницији једна од висина троугла ΔABC. Аналогно се доказује да су BB' и CC' висине троугла ΔABC, чиме је доказ завршен.

Дискусија. Ако су A', B' и C' неколинеарне тачке, задатак увек има решења. $\square$

Задатак 94. *Конструисати троугао ΔABC када је дато:*

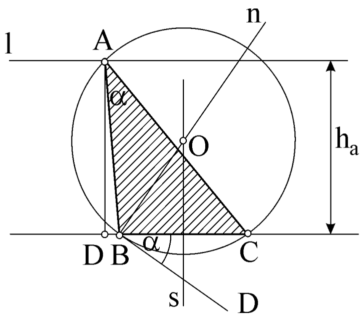
$$BC = a, \quad AD = h_a, \quad \measuredangle A = \alpha.$$

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао (Слика 2.42). Нека је $BC = a$, $AD = h_a$ и $\measuredangle A = \alpha$. Дакле дуж BC се из тачке A види под углом α и тачка A је од дужи BC удаљена за дуж h_a.



Слика 2.42.

Конструкција. За конструкцију ћемо користити задатак 71. Конструишимо дуж $BC = a$. С једне стране полуправе BC конструишимо полуправу BD (Слика 2.43) такву да је $\measuredangle(BC, BD) = \alpha$. Конструишимо затим нормалу n на полуправу BD у тачки B и симетралу s дужи BC. Тачком O означимо пресек правих s и n, тада је $OB = OC$. Надаље конструишимо круг $k(O, OB = OC)$. У примеру 2. 4. 1 смо доказали да је геометријско место тачака из којих се дуж BC види под углом α - лук круга k, који се налази са оне стране дужи BC са које није BD. Овом геометријском месту тачака припада треће теме A траженог троугла ΔABC. Конструишимо праву l на растојању h_a, паралелну са BC са оне стране од BC са које није полуправа BD. Тада права l и круг k могу имати две, једну или ниједну заједничку тачку. Претпоставимо да круг k и права l имају заједничких тачака. Једну од тих тачака означимо



Слика 2.43.

са A. Дакле, ван праве BC се налази тачка A, па су A, B и C три неколинеарне тачке, па одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо то да је овако конструисан троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је $BC = a$.

(ii) Такође важи да је $\measuredangle A = \dfrac{1}{2}\measuredangle BOC = \measuredangle(OB, s) = \measuredangle(BC, BD) = \alpha$, тј. $\measuredangle A = \alpha$.

(iii) Како још A припада правој l која је на растојању h_a од праве BC, то је растојање тачке A до праве BC једнако h_a. Значи, $AD = h_a$ је висина троугла ΔABC, па је тиме доказ завршен.

Дискусија. Задатак има два, једно или нема решење у зависности од тога да ли права l и круг k имају две, једну или немају заједничких тачака, при чему је $\alpha < 2R$. Задатак ће бити без решења у свим осталим случајевима. □

Задатак 95. *Конструисати троугао* ΔABC *када је дато:*

$$BC = a, \quad AA_1 = m_a, \quad \measuredangle A = \alpha.$$

Упутство: Теме A тругла ΔABC припада геометријском месту тачака из којих се дуж $BC = a$ види под углом α. С друге стране, теме A припада кругу $k(A_1, m_a)$. □

Задатак 96. *Конструисати троугао* ΔABC *када је дато:*

$$BC = a, \quad BB' = h_b, \quad \measuredangle A = \alpha.$$

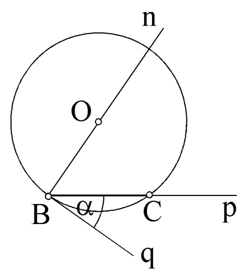
Упутство: Теме A тругла ΔABC налази се у пресеку геометријског места тачака из којих се дуж $BC = a$ види под углом α и тангенте из тачке C на круг $k(B, h_b)$. $\square$

Задатак 97. *Конструисати троугао ΔABC када је дато:*

$$BC = a, \quad AA' = h_a \quad \text{и полуобим} \quad p.$$

Упутство: Нека је ΔABC тражени троугао. Означимо са E и F тачке праве BC, такве да је $BE = AB$, $CF = AC$ и $E{-}B{-}C{-}F$. Тада је $EF = 2p$ и $\measuredangle EAF = R + \alpha/2 = \delta$. Теме A тругла ΔAEF налази се у пресеку геометријског места тачака из којих се дуж $EF = 2p$ види под углом δ и праве паралелне правој EF на растојању h_a од праве EF. Темена B и C налазе се у пресеку редом симетрала дужи AE и AF са правом EF. $\square$

Задатак 98. *Конструисати троугао ΔABC када је дато: полупречник описаног круга r, полуобим p и $\measuredangle A = \alpha$.*



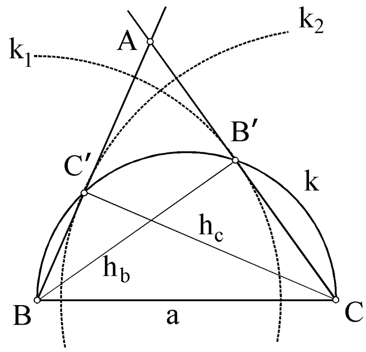
Слика 2.44.

Упутство: Нека је ΔABC тражени троугао. Ако су познати полупречник описаног круга r и угао $\measuredangle A = \alpha$, онда можемо одредити страницу $BC = a$ (Слика 2.44). Заиста. Са почетком у тачки B конструишимо полуправе p и qтакве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Конструишимо полуправу n нормалну у тачки B на полуправу q, тако да је полуправа p унутар правог угла одређеног са q и n. На полуправој n одредимо тачку O такву да је $BO = R$ а затим конструишимо круг $k(O, OB = R)$. Са C означимо другу пресечну тачку полуправе p и круга k. На тај начин, добили смо једну страницу $BC = a$ траженог троугла. Означимо са $d = 2p - a = b + c$. Према томе, конструкцију траженог троугла смо свели на конструкцију троугла коме су познати угао $\measuredangle A = \alpha$, страница $BC = a$ и збир страница $b + c = d$.□

На потпуно исти начин може се решити и следећи задатак:

Задатак 99. *Конструисати троугао ΔABC када је дато: полупречник описаног круга r, $b \pm c$ и $\measuredangle A = \alpha$.*

Задатак 100. *Конструисати троугао ΔABC када је познато: угао $\measuredangle A = \alpha$, полупречник описаног круга r и збир или разлика висина $h_b \pm h_c$.*



Слика 2.45.

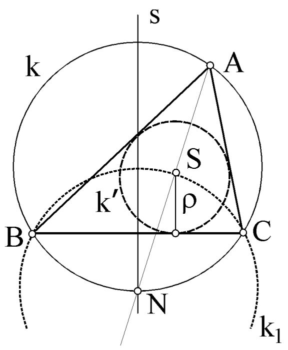
Упутство: Нека је ΔABC тражени троугао. Ако су познати полупречник описаног круга r и угао $\measuredangle A = \alpha$, онда можемо одредити страницу $BC = a$ (види упутство уз Задатак 98.). Сада се наш задатак своди на Задатак 76. када је познато: $\measuredangle A = \alpha$, $BC = a$ и $h_b \pm h_c$. □

Задатак 101. *Конструисати троугао ΔABC када је позната страница $BC = a$ и висине h_b и h_c.*

Упутство: Нека је ΔABC тражени троугао. Означимо са B' и C' подножја висина редом из темена B и C (Слика 2.45). Тада тачке B' и C' припадају кругу k над пречником $BC = a$. Дакле, тачке B' и C' налазимо у пресеку круга k редом са круговима $k_1(B, h_b)$ и $k_2(C, h_c)$. Теме A троугла ΔABC добија се у пресеку правих BC' и CB'. □

Задатак 102. *Конструисати троугао ΔABC када је познато страница $BC = a$, угао $\measuredangle A = \alpha$ и полупречник ρ уписаног круга.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека је $BC = a$, $\measuredangle A = \alpha$ и ρ полупречник уписаног круга. Како је $\measuredangle A = \alpha$ то значи да тачка A припада геометријском месту тачака (Слика 2.46) из којих се дуж BC види под углом α (види Задатак 71.).

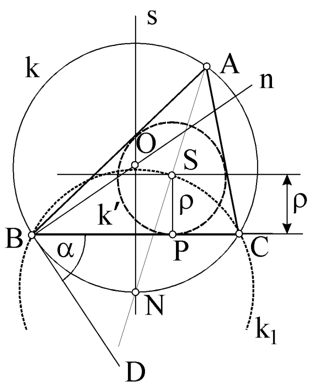


Слика 2.46.

Према задатку 72. а) геометријско место тачака, које су средишта уписаних кругова, чија је једна страница BC а треће теме припада луку круга k из чијих се тачака дуж BC види под углом α је кружни лук круга $k_1(N, NB = NC)$ који је унутар круга k. Центар S уписаног круга је на растојању ρ од странице BC.

Конструкција. Нека је дата дуж $BC = a$. Конструишимо полуправу BD са почетком у тачки B, такву да је $\measuredangle(BC, BD) = \alpha$, затим нормалу n на плуправу BD у тачки B такву да су полуправе n и BD са разних страна праве BC (Слика 2.47). Конструишимо симетралу s дужи BC и означимо са O пресек симетрале s и нормале n. Затим конструишимо круг $k(O, OB = OC)$. Геометријско место тачака из којих се дуж BC види под углом α је лук круга k. Тај лук се налази са оне стране дужи BC са које није полуправа BD. Нека је N пресек симетрале s_{BC} дужи BC и лука $\overset{\frown}{BC}$, при чему је $N, BD \ddot{-} BC$. Конструишимо круг $k_1(N, NB = NC)$ а потом на растојању ρ конструишимо праву l паралелну правој BC, тако да се права l налази са оне стране праве BC са које није полуправа BD.

Права l и кружни лук круга k_1, који лежи у кругу k могу имати или не заједничких тачака. Претпоставимо да имају заједничких тачака и једну од њих означимо са S. Конструишимо круг $k'(S,\rho)$. По конструкцији је права BC тангента круга $k'(S,\rho)$, па су тачке B и C изван круга $k'(S,\rho)$. Конструишимо из тачке B другу тангенту t_b на круг k' и са A обележимо пресек тангенте t_b и круга k. Тачке A, B, C су неколинеарне и образују неки троугао ΔABC.



Слика 2.47.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $BC = a$.

(ii) Тачка A по конструкцији припада геометријском месту тачака из којих се дуж BC види под углом α, тј. $\measuredangle A = \alpha$, па је и други услов задовољен.

(iii) Тачка S по конструкцији припада геометријском месту центара уписаних кругова. Како је тачка S, по конструкцији, на правој l, то је растојање тачке S од праве BC једнако ρ. Значи, круг $k'(S,\rho)$ је уписан у троугао ΔABC, па је и трећи услов задовољен.

Дакле, троугао ΔABC је тражени троугао.

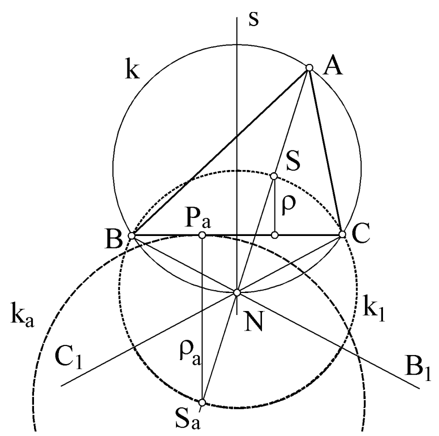
Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ задатак има два једно или нема решења, у зависности од тога да ли права l и кружни лук круга k_1, који је унутар круга k, имају две, једну или немају заједничких тачака. Иначе, задатак неће имати решења. □

За читаоца могу бити интересантна следећа два задатка:

Задатак 103. *Конструисати троугао ΔABC када је позната страница $BC = a$, полупречник описаног круга r и полупречник уписаног* *круга* ρ.

Задатак 104. *Конструисати троугао* ΔABC *када је дат угао* $\measuredangle A = \alpha$, *полупречник описаног круга* r *и полупречник уписаног круга* ρ.

Задатак 105. *Конструисати троугао* ΔABC *када је познато страница* $BC = a$, *угао* $\measuredangle A = \alpha$ *и полупречник* ρ_a *спольа уписаног круга који додирује страницу* BC.



Слика 2.48.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека је $BC = a$, $\measuredangle A = \alpha$ и ρ_a полупречник спольа уписаног круга који додирује страницу BC и продужетке других двеју страница. Како је $\measuredangle A = \alpha$ то значи да тачка A припада геометријском месту тачака (Слика 2.48) из којих се дуж BC види под углом α (види Задатак 71.).

Према задатку 72. б) геометријско место тачака, које су средишта уписаних кругова, чија је једна страница BC а треће теме припада луку круга k из чијих се тачака дуж BC види под углом α је кружни лук круга $k_1(N, NB = NC)$ који се налази унутар угла B_1NC_1, при чему за тачке B_1 и C_1 важи $B - N - B_1$ и $C - N - C_1$. Центар S_a спольа уписаног круга који додирује BC је на растојању ρ_a од странице BC.

Наставак решења задатка препуштамо читаоцу. $\square$

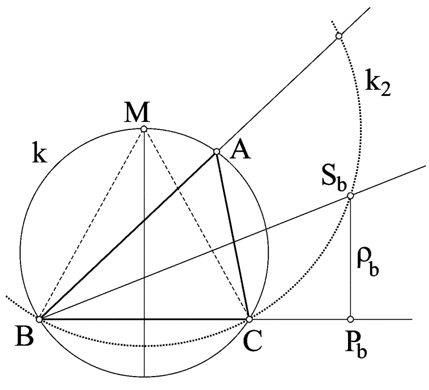
За вежбу су интересантна и следећа два задатка:

Задатак 106. *Конструисати троугао* ΔABC *када је позната страница* $BC = a$, *полупречник описаног круга* r *и полупречник споља уписаног круга* ρ_a.

Задатак 107. *Конструисати троугао* ΔABC *када је дат унутрашњи угао* $\measuredangle A = \alpha$, *полупречник описаног круга* r *и полупречник споља уписаног круга* ρ_a.

Задатак 108. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дато: страница* $BC = a$, *угао код темена* $\measuredangle A = \alpha$ *и* ρ_b *полупречник споља уписаног круга, који додирује страницу* AC *и продужетке страница* AB *и* BC.

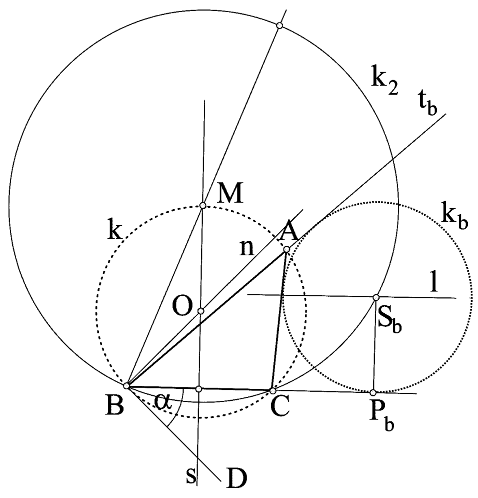
Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека је $BC = a$, $\measuredangle A = \alpha$ и ρ_b полупречник споља уписаног круга, који додирује страницу AC и продужетке страница AB и BC. Како је $\measuredangle A = \alpha$ то значи да тачка A припада геометријском месту тачака (Слика 2.49) из којих се дуж BC види под углом α (задатак 71.).



Слика 2.49.

Према задатку 72. в) геометријско место тачака, које су средишта споља уписаних кругова, који додирују страницу AC и продужетке остале две странице троугла, чија је једна страница BC а треће теме припада луку круга k из чијих се тачака дуж BC види под углом α је кружни лук круга $k_2(M, MB = MC)$. То геометријско место тачака лежи у углу $\measuredangle MBC$, где је $M = s_{BC} \times \overset{\frown}{BAC}$.

Конструкција. Нека је дата дуж $BC = a$. Конструишимо са једне стране полуправе BC полуправу BD такву да је $\measuredangle(BC, BD) = \alpha$. У тачки B конструишимо нормалу n на полуправу BD (Слика 2.50). Конструишимо симетралу s дужи BC и означимо са O пресек симетрале s и нормале n. Затим конструишимо круг $k(O, OB = OC)$. Геометријско место тачака из којих се дуж BC види под углом α је лук круга k који се налази са оне стране праве BC са које није полуправа BD. Нека је M пресечна тачка симетрале s_{BC} и лука $\overset{\frown}{BAC}$. Конструишимо круг $k_2(M, MB = MC)$ а потом на растојању ρ_b од праве BC конструишимо праву l паралелну правој BC, тако да је права l са оне стране праве BC са које није полуправа BD. Права l и кружни лук круга $k_2(M, MB = MC)$, који лежи у углу $\measuredangle MBC$ могу имати или не заједничких тачака. Претпоставимо да имају заједничку тачку и означимо је са S_b. Конструишимо круг $k_b(S_b, \rho_b)$. По конструкцији права BC је тангента круга $k_b(S_b, \rho_b)$, па су тачке B и C изван круга $k_b(S_b, \rho_b)$. Конструишимо из тачке B другу тангенту t_b на круг k_b и са A обележимо пресек тангенте t_b и круга k. Тачке A, B, C су по конструкцији неколинеарне и образују неки троугао ΔABC.



Слика 2.50.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $BC = a$.

(ii) Тачка A, по конструкцији, припада геометријском месту тачака из којих се дуж BC види под углом α, тј. $\measuredangle A = \alpha$, па је и други услов задовољен.

(iii) Тачка S_b припада геометријском месту средишта споља уписаних кругова, који додирују страницу AC и продужетке страница AB и BC. Како је тачка S_b, по конструкцији, на правој l, то је растојање тачке S_b од праве BC једнако ρ_b. Како су по конструкцији AB и BC тангенте на круг k_b, то је k_b споља уписан круг у троугао ΔABC, који додирује страницу AC.

Према томе, доказали смо да је овако конструисани троугао ΔABC управо тражени троугао.

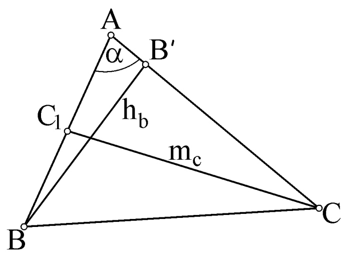
Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ задатак има решење ако права l сече кружни лук круга $k_2(M, MB = MC)$, који лежи у углу $\measuredangle MBC$. У осталим случајевима задатак нема решења. $\square$

Следећа два задатка дајемо без решења:

Задатак 109. *Конструисати троугао ΔABC ако је позната страница $BC = a$, полупречник описаног круга r и полупречник споља уписаног круга ρ_b.*

Задатак 110. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат унутрашњи угао $\measuredangle A = \alpha$, полупречник описаног круга r и полупречник споља уписаног круга ρ_b.*

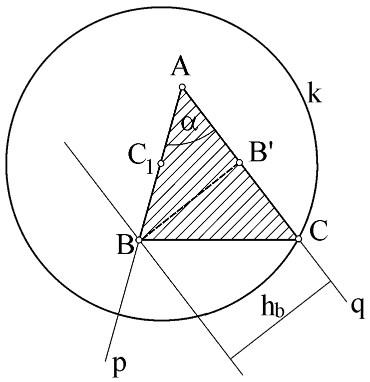
Задатак 111. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао $\measuredangle A = \alpha$, висина h_b из темена B и тежишна дуж m_c из темена C.*



Слика 2.51.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Конструишимо из темена B висину h_b и подножје те висине означимо са B', тј. $BB' = h_b$. Са C_1 означимо средиште странице AB (Слика 2.51). Тада је $CC_1 = m_c$. Правоугли троугао $\Delta ABB'$ се лако може конструисати.

Конструкција. Конструишемо две полуправе p и q s почетком у тачки A (Слика 2.52), тако да граде угао α. На полуправој p конструишемо тачку B тако да је на растојању h_b од полуправе q. Са B' означимо подножје нормале из тачке B на полуправу q а са C_1 средиште дужи AB. Конструишемо круг $k(C_1, m_c)$. Означимо са C једну од пресечних тачака k и полуправе q под условом да постоји. Тачке B и C су на полуправама p и q и различите су од тачке A. То ыначи да су тачке A, B и C неколинеарне и да образују неки троугао ΔABC.



Слика 2.52.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC управо тражени троугао.

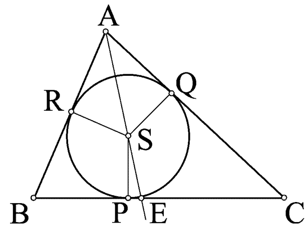
(i) По конструкцији је $\measuredangle A = \measuredangle(p, q) = \alpha$, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle A = \measuredangle BAC = \alpha$.

(ii) По конструкцији је $BB' = h_b$, $BB' \perp q$ и $A, C \in q$ па је h_b заиста висина троугла ΔABC из темена B.

(iii) Такође, по конструкцији је $C \in k(C_1, m_c)$ па је $CC_1 = m_c$. Како је још C_1 средиште странице AB следи да је m_c тежишна дуж из темена C.

Према томе, доказ је завршен.

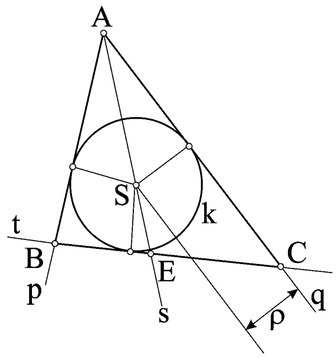
Дискусија. Ако је $\alpha < 2R$ задатак има два, једно или нема решења, у зависности од тога да ли круг k и полуправа q имају две, једну или немају заједничких тачака. $\square$



Слика 2.53.

Задатак 112. *Конструисати троугао ΔABC ако је дато: угао код темена $\measuredangle A = \alpha$, полупречник уписаног круга ρ и одсечак симетрале l_a угла код темена A.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао. Означимо са S центар уписаног круга у троугао ΔABC а са E пресечну тачку полуправе AS и странице BC (Слика 2.53). Са P, Q и R означимо нормалне пројекције тачке S на дужи BC, CA и AB, редом. Тада је $SP = SQ = SR = \rho$ и $AE = l_a$.



Слика 2.54.

Конструкција. Конструишимо полуправе p и q са заједничким почетком у тачки A, такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle A$. На симетрали s угла $\measuredangle A$ конструишимо тачку S тако да је од полуправих p и q удаљена за ρ. Конструишимо круг $k(S, \rho)$ и додирне тачке овог круга и полуправих p и q означимо редом са P и Q (Слика 2.54). На симетрали s одредимо тачку E такву да је $AE = l_a$. Претпоставимо да важи распоред тачака $A - S - E$. Тачка E може бити унутар, на или изван круга k. Претпоставимо да тачка E није унутар круга k. Из тачке E на круг k конструишимо тангенту t и означимо са B и C пресечне тачке тангенте t редом са полуправама p и q. Тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је тако конструисани троугао ΔABC управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је $\measuredangle A = \measuredangle(p, q) = \alpha$, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle A = \alpha$.

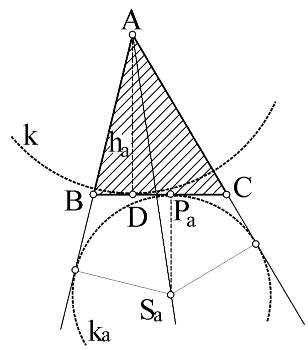
(ii) Тачка E, по конструкцији, налази се на симетрали угла $\measuredangle A$ на растојању l_a од тачке A, тј. $AE = l_a$. Даље, по конструкцији је $E \in BC$, па је и други услов задовољен.

(iii) Круг k, по конструкцији, додирује све три странице троугла ΔABC и има полупречник ρ. То значи да је круг k са полупречником ρ уписан у троугао ΔABC.

На тај начин је доказ завршен.

Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака $A - S - E$, задатак има два, једно или нема решења, у зависности од тога да ли је тачка E изван, на или унутар круга k. Задатак ће бити без решења у свим осталим случајевима. $\square$

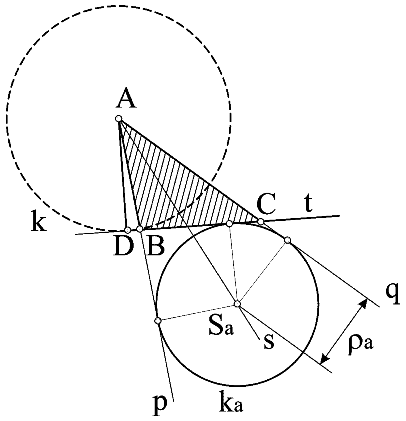
Задатак 113. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао $\measuredangle A = \alpha$, полупречник споља уписаног круга ρ_a и h_a - висина из темена A.*



Слика 2.55.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао (Слика 2.55). Уочимо кругове $k(A, h_a)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$. Тада је страница BC на заједничкој тангенти кругова k и k_a.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки A, при чему је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle A$ (Слика 2.56). На симетрали s угла $\measuredangle A$ конструишемо тачку S_a тако да је од полуправих p и q удаљена за дату дуж ρ_a. Тачка S_a је подједнако удаљена од полуправих p и q, јер се налази на симетрали s угла $\measuredangle A$. Конструишимо кругове $k_a(S_a, \rho_a)$ и $k(A, h_a)$. Тада су кругови k и k_a дисјунктни, додирују се или секу, тј. имају две, једну или немају унутрашњих заједничких тангената. Претпоставимо да имају унутрашњих заједничких тангената и једну од њих означимо са t. Нека су B и C пресечне тачке тангенте t и редом полуправих p и q. Тачке B и C су на полуправама p и q и различите су од тачке A, тј. тачке A, B и C су три неколинеарне тачке, па одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.56.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) Означимо са D подножје нормале из тачке A на праву $t \equiv BC$. Како је по конструкцији $AD \perp BC$ и $D \in k(A, h_a)$, то је $AD = h_a$. Према томе, $AD = h_a$ је висина троугла ΔABC из темена A.

(ii) По конструкцији је још $\measuredangle(p, q) = \alpha$, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle A = \alpha$.

(iii) Круг $k_a(S_a, \rho_a)$ по конструкцији додирује тангенту $t \equiv BC$ и полуправе p и q, тј. продужетке страница AB и AC. То значи да је круг $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг троугла ΔABC, који додирује страницу BC. Како је полупречник тог круга једнак ρ_a то је и трећи услов задатка задовољен, чиме је доказ завршен.

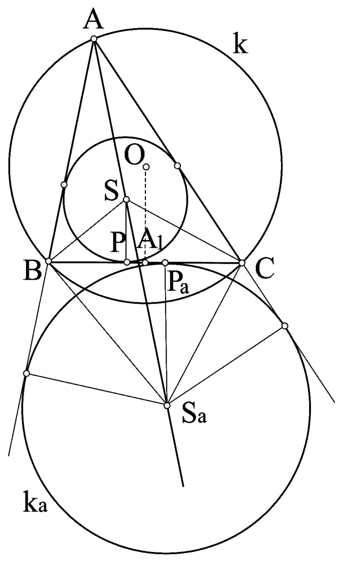
Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$, задатак има два, једно или нема решења, у зависности од тога да ли кругови $k_a(S_a, \rho_a)$ и $k(A, h_a)$ имају две, једну или немају заједничких унутрашњих тангената. $\square$

Задатак 114. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дат угао* $\measuredangle A = \alpha$, *полупречник уписаног круга* ρ *и висина* h_a.

Задатак 115. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дат угао* $\measuredangle A = \alpha$, *полупречник споља уписаног круга* ρ_b *и висина* h_a.

Задатак 116. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дат угао* $\measuredangle A = \alpha$, *полупречник споља уписаног круга* ρ_c *и висина* h_a.

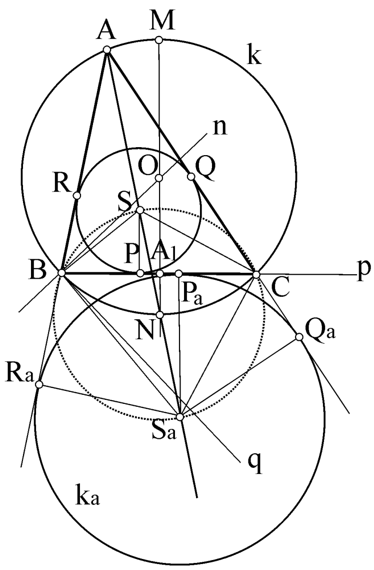
Задатак 117. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дат угао* $\measuredangle A = \alpha$, r *- полупречник описаног круга и разлика страница* $b - c = d$.



Слика 2.57.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао, тј. да му је $\measuredangle A = \alpha$, r полупречник описаног круга и разлика страница $b - c = d$ (Слика 2.57). Конструишимо симетралу s

угла $\measuredangle A$. Са S означимо центар уписаног круга k_1 датог троугла ΔABC а са S_a центар споља уписаног круга k_a, који додирује страницу BC и продужетке страница AB и AC. Са O означимо центар описаног круга k а са A_1 средиште странице BC троугла ΔABC. Означимо, даље, са P и P_a нормалне пројекције тачака S и S_a на страницу BC. Тада, према Задатку 10. (”Велики” задатак) важи $PP_a = b - c$ и $PA_1 = A_1P_a$. Тачка A припада геометријском месту тачака из којих се дуж BC види под углом α.



Слика 2.58.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки B, при чему је $\measuredangle(p,q) = \alpha$ (Слика 2.58). На нормали n на полуправу q одредимо тачку O такву да је $OB = r$. Конструишемо круг $k(O, OB)$ и означимо са C пресек праве p и круга k. Означимо са A_1 средиште, а са s симетралу дужи BC. Нека су M и N пресечне тачке праве s и круга k, при чему важи $M, q \div BC$. На правој BC конструишимо тачке P и P_a такве да је $PA_1 = A_1P_a = d/2$ при чему важи распоред $P - A_1 - P_a$. Нека су n_1 и n_2 полуправе са почетним тачкама редом у P и P_a управне на праву BC при чему важи $n_1, n_2 \div BC$ и $n_1, N \div BC$. Конструишимо сада круг k' са центром у тачки N и полупречником $NB = NC$ и означимо са S и S_a пресечне тачке редом полуправих n_1 и n_2 са кругом k'. Тада је SS_a пречник круга k', тј. тачке S, N и S_a су колинеарне. Означимо са A пресечну тачку праве SS_a и круга k. Тачке A, B и C су неколинеарне по конструкцији и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији, тачке A, B и C припадају кругу $k(O,r)$, па је r полупречник описаног круга око троугла ΔABC.

(ii) Даље важи:

$$\measuredangle A = \measuredangle BAC = \frac{1}{2}\measuredangle BOC = \measuredangle BON = \measuredangle(p,q) = \alpha.$$

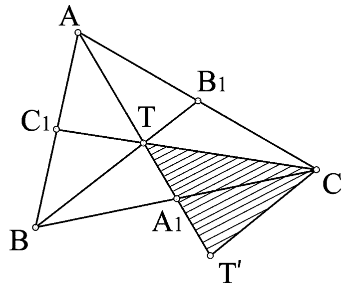
(iii) Тачка S припада геометријском месту тачака, које су средишта кругова уписаних у троуглове чија је једна страница BC а треће теме на луку $\overset{\frown}{BC}$ круга k са оне стране праве BC са које није полуправа q. Зато је S центар уписаног круга у троугао ΔABC. По конструкцији, P је подножје нормале из тачке S на BC, па је P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Са S_a означимо другу заједничку тачку праве SN и круга k'. Тада је тачка P_a нормална пројекција тачке S_a на праву BC. Тачка S_a је на геометријском месту средишта споља уписаних кругова у троуглове чија је једна страница BC а треће теме променљива тачка лука $\overset{\frown}{BC}$, који додирују страницу BC троугла ΔABC. Тачке S и S_a су симетричне у односу на тачку N па су њихове нормалне пројекције P и P_a симетричне у односу на тачку A_1. Према томе: P и P_a су додирне тачке уписаног и споља уписаног круга у троугао ΔABC, који додирују страницу BC троугла ΔABC. Као у анализи, на основу задатка 10. е) важи: $PP_a = b - c$. По конструкцији је $PP_a = 2PA_1 = 2d/2 = d$ одакле закључујемо да је $b - c = d$, па је и трећи услов задатка задовољен, тј. ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Задатак има решење ако је $\alpha < 2R$ и ако важи распоред $B - P - P_a - C$. У осталим случајевима задатак нема решења. □

Задатак 118. *Конструисати троугао ΔABC ако су му дате тежишне дужи $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$ и $CC_1 = m_c$.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су му $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$ и $CC_1 = m_c$ тежишне дужи. Означимо са T тежиште троугла ΔABC а са T' тачку праве AA_1 такву да је $A_1T = A_1T'$ при чему је $T - A_1 - T'$ (Слика 2.59). Троуглови

ΔBTA_1 и $\Delta CT'A_1$ су подударни према првом ставу о подударности троуглова јер је $TA_1 = T'A_1$, $BA_1 = CA_1$ и $\measuredangle BA_1T = \measuredangle CA_1T'$. Из њихове подударности следи $BT = CT'$. Према томе, за троугао $\Delta TT'C$ су познате све три странице $TT' = 2m_a/3$, $CT' = BT = 2m_b/3$ и $CT = 2m_c/3$ и за њих мора да важи неједнакост троугла. То значи да и за дате дужи m_a, m_b и m_c мора да важи неједнакост троугла. Сада можемо пређи на конструкцију троугла ΔABC.



Слика 2.59.

Конструкција. Конструишимо најпре трогао $\Delta TT'C$ такав да је $TT' = 2m_a/3$, $T'C = 2m_b/3$ и $CT = 2m_c/3$ (Слика 2.59). Означимо са A_1 средиште дужи TT'. Конструишимо затим на правој CA_1 тачку B такву да је $BA_1 = CA_1$ и $B - A_1 - C$, а на правој TT' тачку A такву да је $AT = TT'$ и $A - T - T'$. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је тачка A_1 средиште странице BC троугла ΔABC па је AA_1 тежишна дуж овог троугла. С обзиром на то да по конструкцији важи распоред тачака $A - T - A_1 - T'$ биће $AA_1 = AT + TA_1 = TT' + TT'/2 = 3TT'/2 = m_a$, тј. $AA_1 = m_a$, па је први услов задатка задовољен.

(ii) Тачка T дели тежишну дуж AA_1 у односу $AT : TA_1 = 2 : 1$, па је T тежиште троугла ΔABC. Означимо са B_1 пресечну тачку праве BT са страницом AC, а са C_1 пресечну тачку праве CT са страницом AB троугла ΔABC. То значи да су BB_1 и CC_1 тежишне дужи редом из темена B и C троугла ΔABC. Као у анализи задатка показује се да је $BT = CT'$. С друге стране је по конструкцији $CT' = 2m_b/3$ па имамо да је $BB_1 = 3BT/2 = 3CT'/2 = m_b$, тј.

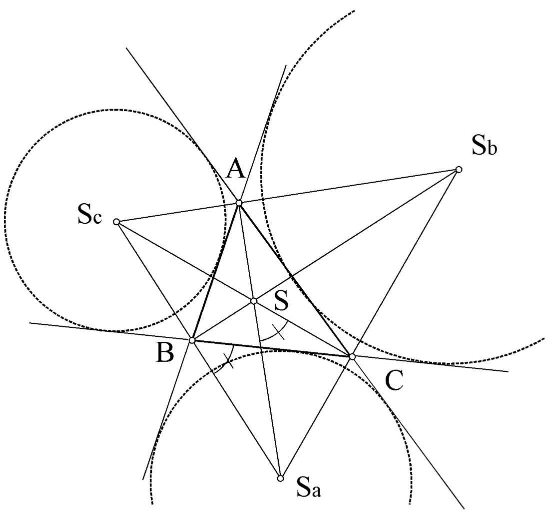
$BB_1 = m_b$ па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Тежиште T дели тежишну дуж CC_1 у односу $CT : TC_1 = 2 : 1$ па је $CC_1 = 3CT/2 = m_c$. Дакле, троугао ΔABC је заиста тражени троугао.

Дискусија. Задатак има решење под условом да се може конструисати троугао чије су странице једнаке редом датим дужима $2m_a/3$, $2m_b/3$ и $2m_c/3$. □

Задатак 119. *Конструисати троугао ΔABC ако су му три дате неколинеарне тачке S_a, S_b и S_c центри споља уписаних кругова.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су му неколинеарне тачке S_a, S_b и S_c центри споља уписаних кругова (Слика 2.60). Означимо са S центар уписаног круга у троуглу ΔABC. Права AS_a је симетрала унутрашњег а права S_bS_c симетрала спољашњег угла $\measuredangle A$ троугла ΔABC па је $AS_a \perp S_bS_c$, тј. дуж AS_a је висина троугла $S_aS_bS_c$. На потпуно исти начин закључујемо да су и дужи BS_b и CS_c висине овог троугла. Дакле, тачка S представља ортоцентар троугла $\Delta S_aS_bS_c$.



Слика 2.60.

Важи распоред тачака $S_c - A - S_b$, па је полуправа S_aA унутар угла $\measuredangle S_bS_aS_c$. С обзиром на то да је четвороугао BS_aCS тетивни имамо

$$\begin{aligned}\measuredangle S_bS_aS_c \equiv \measuredangle BS_aC &= 2R - \measuredangle BSC = 2R - \measuredangle BSS_a - \measuredangle CSS_a\\ &= 2R - \measuredangle S_aCB - \measuredangle S_aBC = 2R - (R - \measuredangle SCB) - (R - \measuredangle SBC)\\ &= \measuredangle SCB + \measuredangle SBC = \frac{1}{2}(\measuredangle ACB + \measuredangle ABC) = \frac{1}{2}(2R - \measuredangle BAC)\\ &= R - \frac{1}{2}\measuredangle BAC.\end{aligned}$$

То значи да је угао $\measuredangle S_bS_aS_c$ оштар. Аналогно се доказује да је $\measuredangle S_aS_bS_c = R - \measuredangle ABC/2$ и $\measuredangle S_aS_cS_b = R - \measuredangle ACB/2$, тј. и углови $\measuredangle S_aS_bS_c$ и $\measuredangle S_aS_cS_b$ су оштри, па је троугао $\Delta S_aS_bS_c$ оштроугли.

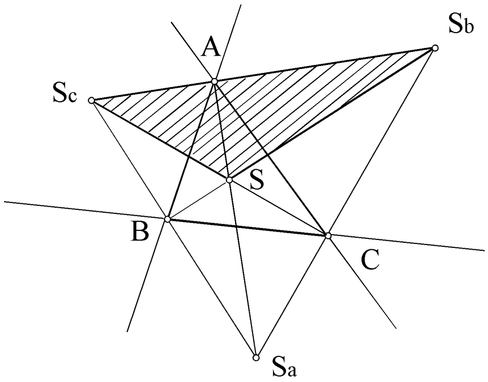
Конструкција. Нека су S_a, S_b и S_c три дате неколинарне тачке. Претпоставимо да образују оштроугли троугао $\Delta S_aS_bS_c$. Означимо са A, B и C подножја висина редом из тачака S_a, S_b и S_c на праве S_bS_c, S_aS_c и S_aS_b. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани троугао ΔABC управо тражени троугао. Означимо са S ортоцентар троугла $\Delta S_aS_bS_c$. Углови $\measuredangle SCS_b$ и $\measuredangle SAS_b$ су прави, па је четвороугао SCS_bA тетиван, одакле следи да је $\measuredangle CS_bS = \measuredangle CAS$. Углови $\measuredangle S_aAS_b$ и $\measuredangle S_bBS_a$ су прави, па је и четвороугао S_aS_bAB тетиван, одакле следи $\measuredangle S_aS_bB = \measuredangle S_aAB$. Дакле, $\measuredangle BAS_a = \measuredangle S_aAC$ тј. права AS_a је симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ΔABC. По конструкцији је $S_bS_c \perp AS_a$, па је права S_bS_c симетрала спољашњег угла код темена A троугла ΔABC. Аналогно се доказује да су праве BS_b и S_aS_c симетрале редом унутрашњег и спољашњег угла код темена B и да су праве CS_c и S_aS_b симетрале редом унутрашњег и спољашњег угла код темена C троугла ΔABC. Пресеци тих симетрала су тачке S_a, S_b и S_c, па је ΔABC заиста тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је троугао $\Delta S_aS_bS_c$ оштроугли задатак има јединствено решење. □

Задатак 120. *Конструисати троугао ΔABC ако су му три дате неколинеарне тачке S, S_b и S_c редом центри упсаног круга, споља уписаног круга који додирује страницу AC и споља уписаног круга који додирује страницу AB.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су му неколинеарне тачке S, S_b и S_c редом центри упсаног круга, споља



Слика 2.61.

уписаног круга који додирује страницу AC и споља уписаног круга који додирује страницу AB (Слика 2.61). Означимо са S_a центар споља уписаног круга троугла ΔABC, који додирује страницу BC. Права AS је симетрала унутрашњег а права S_bS_c симетрала спољашњег угла $\measuredangle A$ троугла ΔABC па је $AS \perp S_bS_c$, тј. дуж AS је висина троугла ΔSS_bS_c. На потпуно исти начин закључујемо да су и дужи BS_c и CS_b висине овог троугла. Дакле, тачка S_a представља ортоцентар троугла ΔSS_bS_c, тј. тачке A, B и C су подножја висина редом из темена S, S_c и S_b троугла ΔSS_bS_c.

Као у анализи Задатка 119. показује се да је угао $\measuredangle S_bS_aS_c$ оштар. С друге стране $\measuredangle S_bSS_c = \measuredangle BSC = 2R - \measuredangle CS_aB = 2R - \measuredangle S_bS_aS_c$. То значи да је угао $\measuredangle S_bSS_c$ туп.

Конструкција. Нека су S, S_b и S_c три дате неколинарне тачке. Претпоставимо да образују тупоугли троугао ΔSS_bS_c са тупим углом $\measuredangle S_bSS_c$. Означимо са A, B и C подножја висина редом из тачака S, S_c и S_b на праве S_bS_c, SS_b и SS_c. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани троугао ΔABC управо тражени троугао. Означимо са S_a ортоцентар троугла ΔSS_bS_c. Углови $\measuredangle SCS_b$ и $\measuredangle SAS_b$ су прави, па је четвороугао SCS_bA тетиван, одакле следи да је $\measuredangle CS_bS = \measuredangle CAS$. Углови $\measuredangle SAS_b$ и $\measuredangle SBS_c$ су прави, па је и четвороугао $ASBS_c$ тетиван, одакле следи $\measuredangle SS_cB = \measuredangle SAB$. Оштри углови $\measuredangle SS_cB$ и $\measuredangle CS_bS$ су једнаки као углови са нормалним крацима. Дакле, $\measuredangle BAS = \measuredangle SAC$ тј. права AS је симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ΔABC. По конструкцији је

$S_bS_c \perp AS$, па је права S_bS_c симетрала спољашњег угла код темена A троугла ΔABC. Аналогно се доказује да су праве BS_b и BS_c симетрале редом унутрашњег и спољашњег угла код темена B и да су праве CS_c и CS_b симетрале редом унутрашњег и спољашњег угла код темена C троугла ΔABC.

(i) Дакле, тачка S се налази у пресеку симетрала AS, BS_b и CS_c редом унутрашњих углова код темена A, B и C троугла ΔABC, па је S центар уписаног круга.

(ii) Тачка S_b се по конструкцији налази у пресеку симетрали BS_b унутрашњег угла код темена B и редом симетрала S_bS_c и CS_b спољашњих углова код темена A и C троугла ΔABC, па је S_b центар споља уписаног круга који додирује страницу AC.

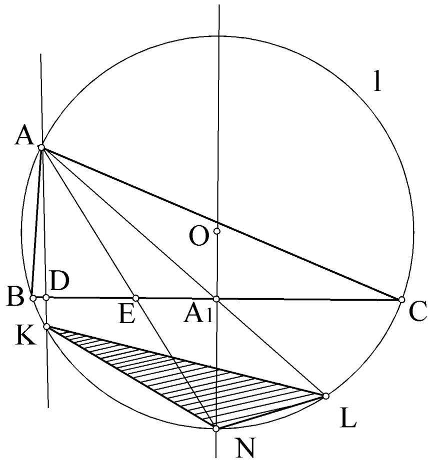
(iii) Тачка S_c се по конструкцији налази у пресеку симетрале CS_c унутрашњег угла код темена C и редом симетрала S_bS_c и BS_c спољашњих углова код темена A и B троугла ΔABC, па је S_c центар споља уписаног круга који додирује страницу AB. Дакле, троугао ΔABC је заиста тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је троугао ΔSS_bS_c тупоугли, са тупим углом код темена S, задатак има јединствено решење. □

Задатак 121. *Конструисати троугао ΔABC ако су дате тачке K, L и N у којима његов описани круг сече редом праве одређене висином AD, тежишном дужи AA_1 и симетралом AE унутрашњег угла код темена A.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су дате тачке K, L и N у којима његов описани круг l сече редом праве одређене висином AD, тежишном дужи AA_1 и симетралом AE унутрашњег угла код темена A (Слика 2.62). Тада је круг l описан и око троугла ΔKLN. Означимо са O цнтар круга l а са A_1 средиште странице BC. Пресечна тачка N симетрале AE унутрашњег угла код темена A и круга l припада симетрали странице BC (Види Задатак 10.). Праве AD и ON су нормалне на BC па су пралелне међу собом. Такође, тачка A_1 налази се у пресеку правих ON и AL.

Конструкција. Нека су дате три тачке K, L и M такве да је угао $\measuredangle KNL$ туп. Означимо са O центар круга l описаног око троугла ΔKLN. Кроз тачку K конструишимо праву p паралелну правој ON. Означимо са A другу пресечну тачку праве p и круга l, а



Слика 2.62.

са A_1 пресечну тачку правих ON и AL. У тачки A_1 конструишимо праву q нормалну на праву ON и означимо са B и C пресечне тачке праве q и круга l. Тачке A, B и C по конструкцији припадају кругу l па су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

Доказ. (i) Тетива BC нормална је на пречник круга l по конструкцији у тачки A_1 па је тачка A_1 средиште дужи BC. Значи AA_1 је тежишна дуж троугла ΔABC. Како је L пресечна тачка праве AA_1 и описаног круга око троугла ΔABC, то је први услов задатка задовољен.

(ii) Означимо са D пресечну тачку правих BC и AK. Тада је по конструкцији $AD \parallel ON$ и $ON \perp BC$ па је $AD \perp BC$, тј. AD је висина троугла ΔABC. Тачка K се налази у пресеку висине AD и описаног круга l око троугла ΔABC па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Тачка N по конструкцији припада пресеку симетрале странице BC и описаног круга l. То значи да су кружни лукови $\overset{\frown}{BN}$ и $\overset{\frown}{CN}$ једнаки а самим тим и периферијски углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle CAN$. Дакле, AN је симетрала унутрашњег угла код темена A, па је и трећи услов задатка задовољен.

Дискусија. Под условом да је угао $\measuredangle KNL$ туп задатак има јединствено решње. $\square$

Аналогно се може решити и следећи задатак:

Задатак 122. *Конструисати троугао* ΔABC *ако су дате тачке* K, L *и* M *у којима његов описани круг сече редом праве одређене висином* AD, *тежишном дужи* AA_1 *и симетралом* AF *спољашњег угла код темена* A.

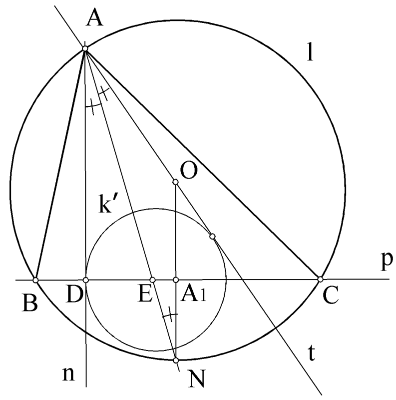
Задатак 123. *Дате су три колинеарне тачке* D, E *и* A_1. *Конструисати троугао* ΔABC *коме је тачка* D *подножје висине из темена* A, *тачка* E *пресек симетрале унутрашњег угла код темена* A *са страницом* BC, *тачка* A_1 *средиште странице* BC *и коме је дуж која спаја теме* A *са ортоцентром* H *једнака датој дужи* d.

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека је тачка D подножје висине из темена A, тачка E пресек симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC, тачка A_1 средиште странице BC и нека је дуж која спаја теме A са ортоцентром H једнака датој дужи d (Слика 2.63). Означимо са O центар описаног круга око троугла ΔABC, а са N пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са симетралом странице BC троугла ΔABC. Тада тачка N припада кругу l. Троугао ΔOAN је једнакокраки па је $\measuredangle OAN = \measuredangle ONA$. С друге стране, важи $\measuredangle ONA = \measuredangle DAE$. Следи $\measuredangle OAN = \measuredangle DAE$, тј. AE је симетрала угла $\measuredangle DAO$. То значи да су праве AD и AO тангенте на круг k' са центром у тачки E и полупречником DE.

Према Ојлеровој теореми (Задатак 8.) дужи AH и OA_1 су паралелне при чему је $OA_1 = AH/2$ и OA_1 и AH су истосмерне. То значи да је $OA_1 = d/2$. Приметимо још да за тачке D, E и A_1 важи распоред тачака $D - E - A_1$.

Конструкција. Нека су на правој p дате тачке D, E и A_1 такве да важи распоред $D - E - A_1$. Конструишимо тачку O такву да је $OA_1 \perp p$ и $OA_1 = d/2$. Конструишимо затим круг $k'(E, DE)$ и тангенту t из тачке O на круг k'. Означимо са n нормалу на праву p у тачки D а са A пресечну тачку правих t и n. Конструишимо круг $l(O, OA)$ и означимо са B и C пресечне тачке круга l и праве p. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

Доказ. (i) По конструкцији су праве $n \equiv AD$ и $p \equiv BC$ међу собом нормалне па је тачка D подножје висине из темена A троугла ΔABC.



Слика 2.63.

(ii) По конструкцији је дуж OA_1 нормална у тачку A_1 на тетиву BC круга $l(O, OA)$ па је A_1 средиште дужи BC.

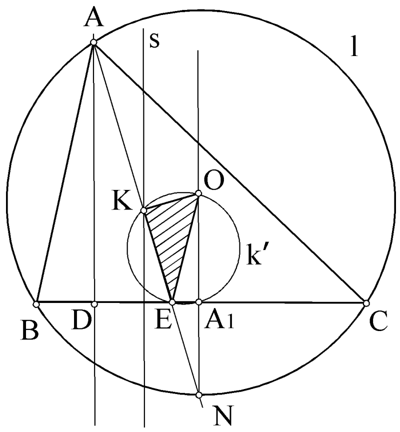
(iii) Означимо са N пресечну тачку праве OA_1 и круга l. Тада је троугао ΔOAN једнакокраки па је $\measuredangle ONA = \measuredangle OAN$. Даље важи $\measuredangle DAN = \measuredangle OAN$ па је $\measuredangle ONA = \measuredangle DAN$, тј. AN је симетрала угла $\measuredangle DAO$. С друге стране, AE је по конструкцији симетрала угла $\measuredangle DAO$, па се праве AE и AN поклапају. Права AN је симетрала угла $\measuredangle BAC$ због једнакости кружних лукова $\overset{\frown}{BN}$ и $\overset{\frown}{CN}$. Дакле, AE је симетрала угла $\measuredangle BAC$, па је и овај услов задовољен.

(iv) Означимо са H ортоцентар троугла ΔABC. Као у анализи задатка, доказује се да је $OA_1 = AH/2$. С друге стране, по конструкцији је $OA_1 = d/2$. Следи $AH = d$ па је троугао ΔABC заиста тражени троугао.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $D - E - A_1$ задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли из тачке O на круг k' постоје две, једна или ниједна тангента.

Задатак 124. *Дате су три разне тачке D, E и O. Конструисати троугао ΔABC тако да му је тачка D подножје висине из темена A, тачка E пресек симетрале унутрашњег угла $\measuredangle A$ са страницом BC и O центар описаног круга.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је тачка D подножје висине из темена A, тачка E пресек симетрале унутрашњег угла $\measuredangle A$ са страницом BC и тачка O центар описаног круга (Слика 2.64). Није тешко закључити да угао $\measuredangle DEO$ мора бити туп. Означимо са N пресечну тачку симетрале AE и описаног круга l, а са K средиште дужи AN. Тада је $OK \perp AN$, па тачка K припада кругу k' над пречником OE. С друге стране, тачка K је подједнако удаљена од правих ON и AD, тј. припада правој s паралелној правама ON и AD при чему је права s подједнако удаљена од правих ON и AD. Даље, AD је управна на DE и A припада правој KE. Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.



Слика 2.64.

Конструкција. Нека су D, E и O три разне тачке такве да је угао $\measuredangle DEO$ туп. Конструишимо круг k' над пречником OE и нормале n и m редом у тачкама D и O на праву DE. Конструшимо сада праву s између паралелних правих m и n подједнако удаљену од обе праве и означимо са K пресечну тачку праве s и круга k'. Са A и N означимо пресечне тачке праве KE редом са правама n и m. Тада је $OA = ON$. На крају, конструишимо круг l са центром у тачки O и полупречником $OA = ON$. Означимо са B и C пресечне тачке круга l са правом DE. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији тачке B и C припадају кругу l са центром у тачки O и полупречником OA. То значи да је тачка O центар описаног круга око троугла ΔABC.

(ii) По конструкцији је $n \perp DE$, $A, D \in n$, $B, C \in DE$ па је $AD \perp BC$, тј. тачка D је подножје висине из темена A троугла ΔABC.

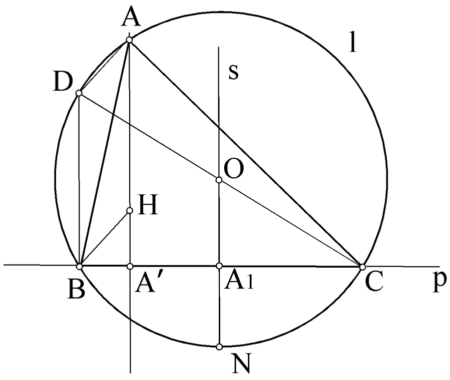
(iii) По конструкцији су тачке A, K, E и N колинеарне и права m је симетрала дужи BC јер је $OB = OC$. То значи да је AN симетрала угла $\measuredangle BAC$, па је E пресечна тачка симетрале угла $\measuredangle A$ и странице BC троугла ΔABC.

Дискусија. Под условом да је угао $\measuredangle DEO$ туп задатак има два решења ако круг k' и права s имају две заједничке тачке. У осталим случајевима задатак нема решења.

Задатак 125. *Дате су три тачке A, A_1 и H. Конструисати троугао ΔABC тако да му је тачка A теме, A_1 средиште странице BC и H ортоцентар.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је тачка A теме, A_1 средиште странице BC и H ортоцентар (Слика 2.65). Нека је l круг са центром у тачки O описан око троугла ΔABC а N пресечна тачка круга l и симетрале странице BC, при чему је $A, N \div BC$. Означимо са A' подножје висине из тачке A а са D пресечну тачку праве OC и круга l. Тада је $\measuredangle DAC$ прав тј. $DA \perp AC$. Како је још $BH \perp AC$, закључујемо да су праве DA и BH паралелне. С друге стране, на исти начин закључујемо да су и праве BD и AH паралелне. Дакле, четвороугао $ADBH$ је паралелограм, па су му наспрамне странице AH и DB једнаке и истосмерне. Код правоуглог троугла ΔBCD са правим углом код темена B дуж OA_1 је средња линија јер је A_1 средиште странице BC и $OA_1 \perp BC$. То значи да је $OA_1 = BD/2$ и $OA_1 \parallel BD$ при чему су дужи DB и OA_1 истосмерне. Дакле, биће $OA_1 \parallel AH$, $OA_1 = AH/2$ и дужи OA_1 и AH су истосмерне. Даље, темена B и C припадају правој која је у тачки A_1 нормална на праву AH.

Конструкција. Нека су A, A_1 и H три дате тачке. Кроз тачку A_1 конструишимо праву s паралелну правој AH. На правој s одредимо тачку O такву да је $OA_1 = AH/2$ и да су дужи OA_1 и AH истосмерне. Конструишимо затим круг l са центром у тачки O и полупречником OA. У тачки A_1 конструишимо праву p нормалну на правој s. Са B и C означимо пресечне тачке праве p и круга l. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне, па одређују темена троугла ΔABC.



Слика 2.65.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) Тачка A је теме троугла ΔABC.

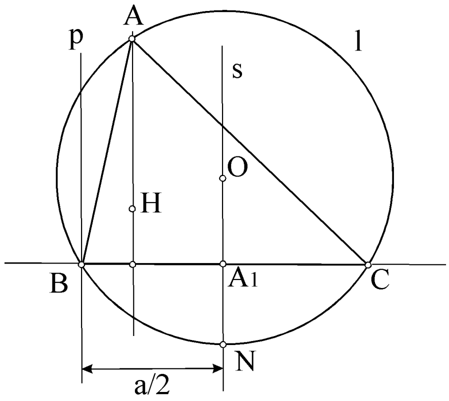
(ii) Тачка A_1 по конструкцији припада симетрали s странице BC, па је A_1 средиште те странице.

(iii) По конструкцији су праве AH и $s \equiv OA_1$ паралелне при чему је $OA_1 = AH/2$. Означимо са H_1 ортоцентар конструисаног троугла ΔABC. Као у анализи задатка доказује се да је $OA_1 = AH_1/2$, $AH_1 \parallel OA_1$ при чему су AH_1 и OA_1 истосмерне дужи. Према томе, тачке H и H_1 се поклапају, па је H ортоцентар конструисаног троугла ΔABC.

Дискусија. Задатак има јединствено решење под условом да су A, A_1 и H три разне тачке.

Задатак 126. *Дат је круг l и тачка H у равни тог круга. У круг l уписати троугао ΔABC коме је ортоцентар дата тачка H, а страница BC једнака датој дужи a.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC коме је ортоцентар дата тачка H, а страница BC једнака датој дужи a уписан у дати круг l (Слика 2.66). Означимо са O центар круга l а са A_1 средиште странице BC. Према Ојлеровој теореми, дужи AH и OA_1 су паралелне и истосмерне и притом важи $OA_1 = AH/2$. Када су познате страница $BC = a$ и описани круг l онда је познато и растојање d тачке O од праве BC, тј. $OA_1 = d$. Тачка A налази се на растојању



Слика 2.66.

$2d$ од тачке H. Симетрала s странице BC паралелна је правој AH. Тачке B и C припадају нормали на симетралу s и на растојању су $a/2$ од ње.

Конструкција. У помоћној конструкцији конструишимо дуж $d = OA_1$ када је познат описани круг l и страница $BC = a$.

Нека су сада у равни дати круг l и тачка H. Конструишимо круг k' са центром у тачки H и полупречником $2d$ и означимо са A једну од пресечних тачака кругова l и k'. Конструишимо праву s кроз тачку O паралелну правој AH. Нека је права p паралелна правој s на растојању $a/2$ од ње. Означимо са B једну од пресечних тачку праве p и круга l и то ону за коју важи да су дужи AH и OA_1 истосмерне, где смо са A_1 означили подножје нормале из тачке B на праву s. Означимо са C пресечну тачку праве BA_1 и круга l. Тада је A_1 средиште дужи BC, а тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији тачке A, B и C припадају кругу l, тј. l је описани круг око троугла ΔABC.

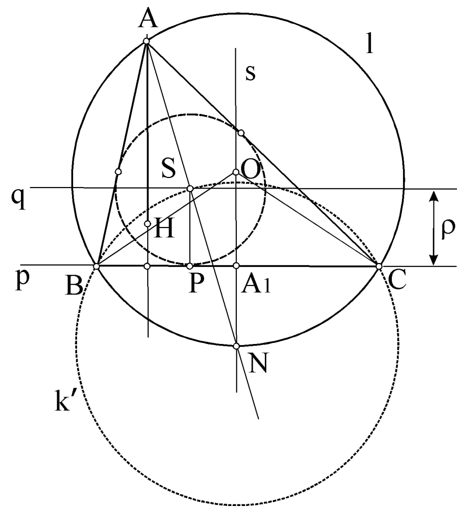
(ii) По конструкцији је $BC = BA_1 + A_1C = a/2 + a/2 = a$, па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Означимо са H_1 ортоцентар троугла ΔABC. Тада, према Ојлеровој теореми дужи AH_1 и OA_1 су паралелне и истосмерне и притоме је $AH_1 = 2OA_1$. По конструкцији дужи AH и OA_1 су паралелне и истосмерне при чему је $AH = 2OA_1$. То значи да се тачке H и H_1 поклапају, тј. H је ортоцентар троугла ΔABC.

Дискусија. Под условом да је пречник круга l већи од дате дужи a задатак има јединствено решење до на подударност.

Задатак 127. *Конструисати троугао ΔABC коме страница BC једнака датој дужи a, дуж која спаја теме A са ортоцентром H једнака датој дужи d и полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да су код троугла ΔABC дати следећи елементи: страница $BC = a$, одсечак висине $AH = d$ и полупречник уписаног круга ρ, при чему смо са H означили ортоцентар датог троугла. Нека је O центар описаног круга l око троугла ΔABC, A_1 средиште странице BC, N пресечна тачка круга l и симетрале странице BC таква да је $A, N \div BC$. Означимо са S центар уписаног круга k у троуглу ΔABC. Тада, тачка S припада геометријском месту центара уписаних кругова (види Задатак 72.), тј. луку $\overset{\frown}{BC}$ круга k' са центром у тачки N и полупречником $NB = NC$, при чему је $\overset{\frown}{BC}, N \div BC$. Тачка S налази се на растојању ρ од странице BC.



Слика 2.67.

Конструкција. На правој p одредимо тачке B и C такве да је дуж BC једнака датој дужи a (Слика 2.67). Означимо са A_1 средиште дужи BC. На симетрали s дужи BC одредимо тачку O такву да је дуж $OA_1 = d/2$. Конструишимо круг l са центром у тачки O и полупречником $OB = OC$. Са N означимо једну од пресечних тачака праве s и круга l. Конструишимо круг k' са центром у тачки N и полупречником $BN = CN$. На растојању ρ од праве p конструишимо праву q паралелну правој p, тако да је $N, q \div p$. Означимо са S пресечну тачку праве q и круга k', а са A другу пресечну тачку круга l и праве NS. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) По конструкцији је страница BC једнака датој дужи a.

(ii) Тачка S по конструкцији припада геометријском месту центара уписаних кругова и на растојању ρ је од странице BC, па је и други услов задовољен.

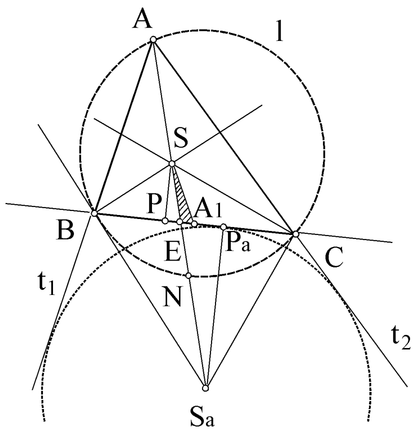
(iii) Означимо са H ортоцентар троугла ΔABC. Као у анализи задатка доказује се да за паралелне и истосмерне дуж AH и OA_1 важи $OA_1 = AH/2$. С друге стране, по конструкцији је $OA_1 = d/2$, па је $AH = d$.

Дискусија. С обзиром на то да постоје две могућности за избор тачке N, задатак може имати четири, два или ниједно решење, у зависности од тога да ли права q и круг k' имају две, једну или немају заједничких тачака.

Задатак 128. *Дате су три неколинеарне тачке A_1, S и E. Конструисати троугао ΔABC тако да је A_1 средиште странице BC, тачка S центар уписаног круга и E тачка у којој симетрала унутрашњег угла $\measuredangle A$ сече страницу BC.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су му неколинеарне тачке A_1, S и E редом средиште странице BC, центар уписаног круга и пресек симетрале $\measuredangle A$ и страницое BC (Слика 2.68). Означимо са l описани круг око троугла ΔABC, са k уписани а са k_a спола уписани круг, са центром у тачки S_a који додирује страницу BC. Нека су P и P_a додирне тачке редом кругова k и k_a са страницом BC. У Задатку 10. ђ) доказано је да је A_1 средиште дужи PP_a. Даље, тачка P је подножје нормале из тачке S на праву

$EA_1 \equiv BC$. Страница BC припада унутрашњој заједничкој тангенти кругова k и k_a, док су странице AC и AB на спољашњим заједничким тангентама посматраних кругова.



Слика 2.68.

Конструкција. Нека су дате три неколинеарне тачке S, E и A_1. Означимо са P подножје нормале из тачке S на праву EA_1. На правој EA_1 конструишимо тачку P_a такву да је $PA_1 = A_1P_a$ и $P - A_1 - P_a$. У тачки P_a конструишимо нормалу n на праву EA_1 и означимо са S_a пресечну тачку правих AE и n. Конструишимо кругове $k(S, SP)$ и $k_a(S_a, S_aP_a)$. Права EA_1 је унутрашња заједничка тангента кругова k и k_a. Претпоставимо да је $SP < S_aP_a$, тј. да важи распоред тачака $P - E - A_1$. Конструишимо заједничке спољашње тангенте t_1 и t_2 кругова k и k_a. Означимо са A пресечну тачку правих t_1 и t_2, са B пресечну тачку правих t_1 и EA_1 а са C пресечну тачку правих t_2 и EA_1. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне па одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао.

(i) Под претпоставком да важи распоред тачака $P - E - A_1$ важиће и $A - S - E - S_a$, па је круг $k(S, SP)$ уписан у троугао ΔABC, тј. тачка S је центар уписаног круга.

(ii) По конструкцији, тачка E се налази у пресеку симетрале SS_a угла код темена A и странице BC троугла ΔABC, па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Означимо са A' средиште странице BC. Тада је, као у анализи, тачка A' средиште дужи PP_a. С друге стране, по конструкцији, средиште дужи PP_a је тачка A_1. Због јединствености средишта дужи закључујемо да је $A_1 \equiv A'$ па је тачка A_1 средиште дужи BC. Дакле, ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $P - E - A_1$, тј. даје угао $\measuredangle SEA_1$ туп, задатак има јединствено решење до на подударност. $\square$

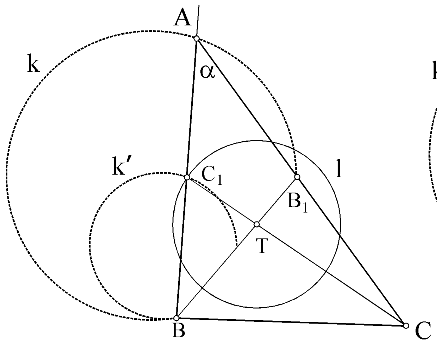
Задатак 129. *Дате су три неколинеарне тачке A_1, S_a и E. Конструисати троугао ΔABC тако да је A_1 средиште странице BC, тачка S_a центар спољa уписаног круга који додирује страницу BC и E тачка у киојој симетрала унутрашњег угла $\measuredangle A$ сече страницу BC.*

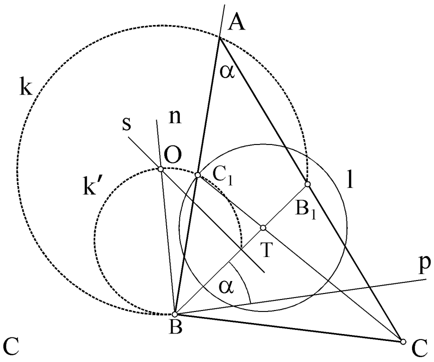
Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су тачке A_1, S_a и E неколинеарне и нека је A_1 - средиште странице BC, S_a - центар спољa уписаног круга који додирује страницу BC и E - пресек симетрале $\measuredangle A$ и страницое BC (Слика 2.68). Означимо са l описани круг око троугла ΔABC, са k уписани круг са центром у тачки S а са k_a спољa уписани круг који додирује страницу BC. Нека су P и P_a додирне тачке редом кругова k и k_a са страницом BC. У Задатку 10. ђ) доказано је да је A_1 средиште дужи PP_a. Даље, тачка P_a је подножје нормале из тачке S_a на праву $EA_1 \equiv BC$. Страница BC припада унутрашњој заједничкој тангенти кругова k и k_a, док су странице AC и AB на спољашњим заједничким тангентама посматраних кругова.

Наставак решења препушта се читаоцу. $\square$

Задатак 130. *Конструисати троугао ΔABC ако су му дате тежишне дужи $BB_1 = m_b$ и $CC_1 = m_c$ као и угао $\measuredangle A = \alpha$.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека су му $BB_1 = m_b$ и $CC_1 = m_c$ тежишне дужи а угао код темена A једнак датом углу α. У том случају теме A припада геометријском месту тачака из којих се дуж BB_1 види под углом α (Слика 2.69 (i)). Тачка C_1 представља средиште странице AB, тј. $BA : BC_1 = 2$. То значи да у хомотетији са центром у тачки B и коефицијентом $k = 1/2$ тачки A одговара тачка C_1. С друге стране, тачка C_1 припада кругу са центром у тежишту T и полупречником $m_c/3$.





Слика 2.69.

Конструкција. Конструишимо дуж $BB_1 = m_b$ и на њој тачку T такву да је $BT : TB_1 = 2 : 1$. Са почетком у тачки B конструишимо полуправу p такву да је $\measuredangle(BB_1, p) = \alpha$ (Слика 2.69 (ii)). Нека је s симетрала дужи BB_1 а n нормала на полуправу p у тачки B. Означимо са O пресечну тачку правих s и n, а са k круг са центром у тачки O и полупречником $OB = OB_1$. Лук BB_1 круга k, који није са исте стране праве BB_1 као и полуправа p, представља геометријско место тачака из којих се дуж BB_1 види под углом α. Конструишимо затим кружни лук k' који у хомотетији $\mathcal{H}_{B,1/2}$ одговара кружном луку k. Означимо са l круг са центром у тачки T и полупречником $m_c/3$, а са C_1 пресечну тачку кружног лука k' и круга l. На полуправој C_1T одредимо тачку C такву да је $CT = 2/3\,m_c$ и да важи распоред тачака $C_1 - T - C$. На крају, означимо са A пресечну тачку праве CB_1 и кружног лука $\overset{\frown}{BB_1}$ круга k. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисни троугао управо тражени троугао. По конструкцији је $C_1 = \mathcal{H}_{B,1/2}(A)$, тј. $AC_1 = AB/2$ и $A - C_1 - B$, одакле следи да је C_1 средиште странице AB. Тачка T по конструкцији дели дужи BB_1 и CC_1 у односу $2 : 1$, па она представља тежиште троугла ΔABC. То значи да су дужи BB_1 и CC_1 тежишне дужи троугла ΔABC.

(i) По конструкцији је је $BB_1 = m_b$, па је први услов задатка задовољен.

(ii) По конструкцији је $CC_1 = CT + TC_1 = 2m_c/3 + m_c/3 = m_c$, тј.

$CC_1 = m_c$ па је и други услов задовољен.

(iii) По конструкцији, теме A припада геометријском месту тачака таквих да је $\measuredangle BAB_1 = \alpha$ а теме C припада полуправој AB_1 па је $\measuredangle A = \measuredangle BAC = \alpha$. Дакле, конструисани троугао ΔABC је тражени троугао.

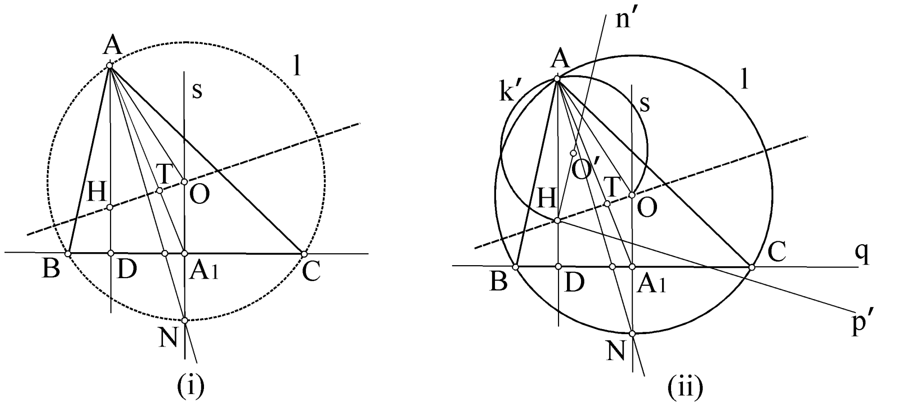
Дискусија. Под условом да постоји пресечна тачка кружног лука k' и круга l задатак има јединствено решење. $\square$

Задатак 131. *Дат је круг l и у његовој равни тачка T. Конструисати троугао ΔABC уписан у круг l, тако да му тачка T буде тежиште, а разлика углова код темена B и C једнака датом углу ω.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека је уписан у дати круг l, тако да му дата тачка T буде тежиште, а разлика углова код темена B и C једнака датом углу ω. Означимо са O центар круга l, са A_1 средиште странице BC, са D подножје висине из темена A, а са E и N пресечне тачке симетрале унутрашњег угла код темена A редом са страницом BC и кругом l (Слика 2.70 (i)). Према Ојлеровој теореми (види Задатак 8.), тачке O, T и H су колинеарне, тачка T је између тачака H и O и $HT = 2TO$. Такође, дужи AH и OA_1 су паралелне и истосмерне, при чему је $AH = 2OA_1$. Важи још да је $BC \perp OA_1$. Лако се доказује да је $\measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2 = \omega/2$ и да је AN симетрала угла $\measuredangle HAO$. То значи да је $\measuredangle HAO = \omega$, тј. тачка A припада геометријском месту тачака из којих се дуж HO види под углом ω. Напоменимо још да тежиште T припада унутрашњости круга l.

Конструкција. Нека је дат круг l са центром O и у његопвој унутрашњости тачка T различита од тачке O. На правој OT одредимо тачку H такву да је $HT = 2TO$ и да важи распоред тачака $O - T - H$ (Слика 2.70 (ii)).

Са почетком у тачки H конструишимо полуправу p' такву да је $\measuredangle(HO, p') = \omega$. Конструишимо нормалу n' на полуправу p' у тачки H и симетралу s' дужи HO. Означимо са O' пресечну тачку правих n' и s' и конструишимо круг k' са центром у тачки O' и полупречником $O'H$. Гометријско место тачака из којих се дуж OH види под датим углом ω представља лук $\overset{\frown}{OH}$ круга k' који није са исте стране праве OH са које је полуправа p' (види Задатак 71.). Означимо са A пресечну тачку круга l и лука $\overset{\frown}{OH}$. Конструишимо



Слика 2.70.

праву s кроз тачку O паралелну правој AH. На правој s одредимо тачку A_1 такву да су дужи OA_1 и AH истосмерне и $OA_1 = AH/2$. Конструишимо кроз тачку A_1 нормалу q на праву s и означимо са B и C пресечне тачке те нормале са кругом l. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији тачке A, B и C припадају кругу l, па је први услов задатка задовољен.

(ii) По конструкцији је A_1 средиште дужи BC, $OA_1 \perp BC$, $OA_1 \parallel AH$, одакле следи да је $AH \perp BC$, тј. тачка H припада висини из темена A троугла ΔABC. Према првом делу Ојлерове теореме закључујемо да је H ортоцентар троугла ΔABC. По конструкцији су тачке O, T и H колинеарне, при чему је $HT = 2TO$, па је на основу другог дела Ојлерове теореме дата тачка T тежиште троугла ΔABC.

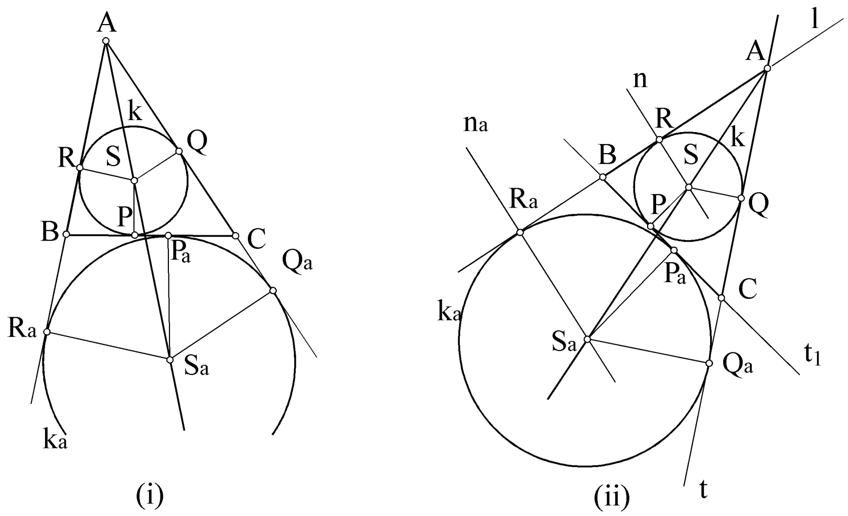
(iii) Означимо са D подножје висине из темена A а са N пресечну тачку круга l и праве OA_1 такву да је $A, N \div BC$. Тада је AN симетрала унутрашњег угла код темена A. Означимо са E пресечну тачку правих AN и BC. Као у анализи задатка доказује се да је $\measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$, тј. да је $\measuredangle DAO = \measuredangle B - \measuredangle C$. С друге стране, по конструкцији је $\measuredangle HAO = \omega$, тј. $\measuredangle DAO = \omega$. Дакле, $\measuredangle B - \measuredangle C = \omega$, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\omega < 2R$, и да је T унутрашња тачка круга l, задатак има два, једно или нема решења, до на симетрију у односу на праву OT, у зависности од тога да ли разматрани лук $\overset{\frown}{OH}$ круга k' са кругом l има две, једну или нема заједничких тачака. У осталим случајевима задатак нема решења.

Задатак 132. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је дато: страница* $BC = a$*, полупречник уписаног круга* ρ *и полуобим* p*.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао. Обележимо са P, Q и R додирне тачке уписаног круга k редом са страницама BC, AC и AB, троугла ΔABC (Слика 2.71 (i)). Означимо са P_a, Q_a и R_a додирне тачке споља уписаног круга $k_a(S_a, \rho_a)$ редом са BC, CA и AB. Тада је $S_aP_a = S_aQ_a = S_aR_a$.

С друге стране, као у "Великом" задатку доказује се да важи $AQ_a = AR_a = p$ и $QQ_a = RR_a = a$. Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.



Слика 2.71.

Конструкција. На правој l одредимо тачке A, R и R_a такве да је $A - R - R_a$, $AR_a = p$ и $RR_a = a$ (Слика 2.71 (ii)). У тачки R конструишимо нормалу n и на њој тачку S такву да је $RS = \rho$. Конструишимо затим нормалу n_a у тачки R_a на праву l и означимо са S_a пресечну тачку правих n_a и AS. Конструишимо кругове $k(S, RS)$ и $k_a(S_a, S_aR_a)$. Права RR_a је њихова заједничка спољашња тангента.

Нека је t друга заједничка спољашња тангента ових кругова. Због симетрије, тачка A припада правој t. Претпоставимо да кругови k и k_a имају унутрашњих заједничких тангенти и нека је t_1 једна од њих. Означимо са B и C пресечне тачке тангенте t_1 редом са правама l и t. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је круг $k(S, \rho)$ уписан у троугао ΔABC, тј. ρ је полупречник уписаног круга троугла ΔABC.

(ii) Означимо са Q и Q_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву AC. Као у анализи задатка показује се да је $AQ_a = AR_a = (AB + BC + CA)/2$, а како је по конструкцији $AQ_a = p$ следи да је $(AB + BC + CA)/2 = p$, тј. полуобим троугла ΔABC је једнак датој дужи p.

(iii) Као у анализи задатка се показује да је $RR_a = BC$, а како је по конструкцији $RR_a = a$ следи да је $BC = a$ па је и трећи услов задатка задовољен.

Дискусија. Задатак има два једно или нема решења у зависности од тога да ли кругови k и k_a имају две, једну или немају унутрашних заједничких тангенти. □

Задатак 133. *Конструисати троугао ΔABC ако је задато: угао код темена $\measuredangle A = \alpha$, полупречник уписаног круга ρ и полуобим p.*

Упутство: Користити да је $AQ_a = AR_a = p$ и да се центар уписаног круга налази на растојању ρ од кракова угла $\measuredangle A = \alpha$. □

Задатак 134. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао код темена $\measuredangle A = \alpha$, полупречник спољa уписаног круга ρ_a који додирује страницу BC и одсечак симетрале $AE = l_a$.*

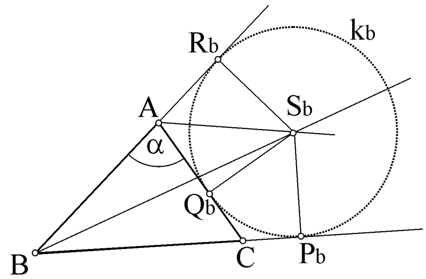
Упутство: Користити да се центар спољa уписаног круга k_a налази на растојању ρ_a од кракова угла $\measuredangle A = \alpha$ и да тачка E припада тангенти на круг k_a. □

Задатак 135. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао код темена $\measuredangle A = \alpha$ и полупречници спољa уписаних кругова ρ_a и ρ_b.*

Упутство: Користити да се центар споља уписаног круга k_a налази на растојању ρ_a од кракова угла $\measuredangle A = \alpha$ а да се центар споља уписаног круга k_b налази на растојању ρ_b од кракова угла напоредног датом углу $\measuredangle A = \alpha$. Поред тога темена B и C припадају унутрашњој заједничкој тангенти кругова k_a и k_b. $\square$

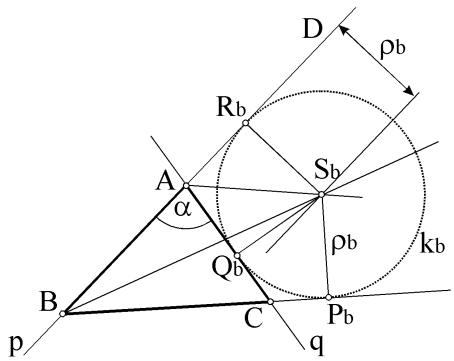
Задатак 136. *Конструисати троугао* ΔABC *ако је задато: угао код темена* $\measuredangle A = \alpha$*, полупречник споља уписаног круга* ρ_b *који додирује страницу* AC *и* p *полуобим.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Обележимо са P_b, Q_b и R_b додирне тачке споља уписаног круга k_b и правих BC, AC и AB, редом (Слика 2.72). Како тачке P_b, Q_b и R_b припадају кругу $k_b(S_b, \rho_b)$ то је $S_bP_b = S_bQ_b = \rho_b$ и $BR_b = BP_b$. С друге стране је $BR_b + BP_b = BA + AR_b + BC + CP_b = BA + AQ_b + BC + CQ_b = BA + BC + CA = 2p$. Дакле, биће $BR_b = BP_b = p$, где је p полуобим. Сада имамо све елементе за конструкцију.



Слика 2.72.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки A такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Продужимо полуправу p преко темена A и на том продужетку са D обележимо произвољну тачку (Слика 2.73). Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle(q, AD)$ и на њој тачку S_b удаљену за ρ_b од полуправих q и AD. Означимо са R_b и Q_b подножја нормала из тачке S_b на полуправе AD и q, редом. Како је S_b на симетрали угла $\measuredangle(q, AD)$ то је $SR_b = SQ_b = \rho_b$. Конструишимо даље круг $k_b(S_b, \rho_b)$. Он додирује полуправе AD и q у тачкама R_b и Q_b. На правој p одредимо тачку B такву да је $BR_b = p$ и претпоставимо са важи распоред тачака $B - A - R_b$. Тачка B је ван круга $k_b(S_b, \rho_b)$ и BR_b је једна тангента. Конструишимо и другу тангенту из тачке B на круг $k_b(S_b, \rho_b)$ и додирну тачку означимо са P_b. Са C означимо пресечну тачку полуправих BP_b и q. Тачке A, B и C су три неколинеарне тачке и одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.73.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао. (i) По конструкцији $\measuredangle(p, q) = \alpha$, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle A = \measuredangle BAC = \alpha$.

(ii) Круг k_b додирује праве AB, BC и AC редом у тачкама R_b, P_b и Q_b. Како је његов полупречник једнак ρ_b по конструкцији, то је и други услов задовољен.

(iii) Као у анализи задатка показује се да је

$$BR_b = BP_b = (AB + BC + CA)/2.$$

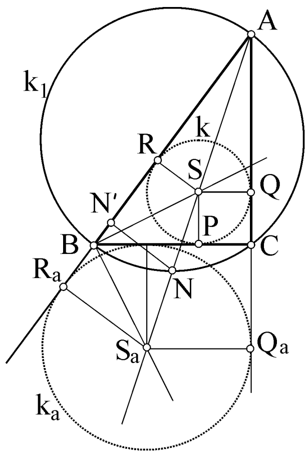
С друге стране, по конструкцији је $BR_b = p$ одакле следи да је полуобим једнак p, па је и трећи услов задовољен.

Дискусија. Задатак има решење под условом да је $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака $R_b - A - B$. У осталим случајевима задатак нема решења. $\square$

Задатак 137. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао код темена $\measuredangle A = \alpha$, ρ полупречник уписаног круга и збир страница $b + c = d$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао, тј. угао $\measuredangle A$ једнак је углу α, ρ полупречник уписаног круга и збир страница b и c једнак датој дужи d (Слика 2.74). Означимо са S центар уписаног круга у троугао ΔABC. Са P, Q и

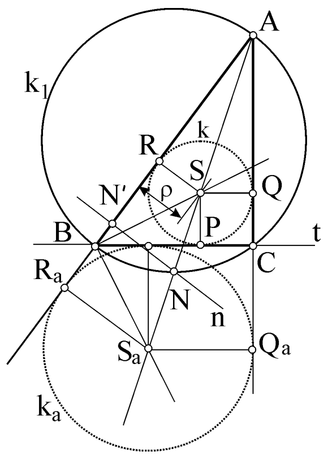
R означимо подножја нормала из тачке S редом на странице BC, CA и AB троугла ΔABC. Опишимо круг k_1 око троугла ΔABC и означимо са N другу пресечну тачку праве AS са кругом k_1. Означимо са N' подножје нормале из тачке N на праву AB. Конструишимо спола уписани круг k_a, који додирује страницу BC. У Задатку 10. и) показали смо да је $AN' = (b+c)/2 = (AB + AC)/2$. Тачке S и S_a су на кругу са центром у тачки N и полупречником $BN = CN$ па је $SN = S_aN$, а темена B и C припадају унутрашњој заједничкој тангенти кругова k и k_a. Сада се лако може конструисати троугао ΔABC.



Слика 2.74.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки A такве да је $\measuredangle(p,q) = \alpha$. Конструишимо затим симетралу s угла $\measuredangle(p,q)$ и на њој одредимо тачку S на растојању ρ од полуправих p и q. Означимо са R и Q подножја нормала тачке S редом на полуправе p и q (Слика 2.75). На полуправој p одредимо тачку N' тако да је $AN' = d/2$, где је $d = b + c$ дата дуж. У тачки N' конструишимо нормалу n на полуправу p и означимо са N пресечну тачку правих n и s. Претпоставимо да важи распоред тачака $A - S - N$. На полуправој s одредимо тачку S_a такву да важи распоред тачака $S - N - S_a$ и $SN = NS_a$. Са R_a означимо подножје нормале из тачке S_a на полуправу p. Конструишимо затим кругове $k(S,\rho)$ и $k_a(S_a, S_aR_a)$. По конструкцији, полуправе p и q су заједничке спољашње тангенте кругова $k(S,\rho)$ и $k_a(S_a, S_aR_a)$.

Претпоставимо да кругови $k(S,\rho)$ и $k_a(S_a, S_aR_a)$ имају унутрашњих заједничких тангенти и једну од њих обележимо са t. Означимо са B и C пресечне тачке праве t редом са полуправама p и q. Тачке A, B и C су неколинеарне по конструкцији и одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.75.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $\measuredangle(p,q)=\alpha$. Како је још $B\in p$, $C\in q$ следи $\measuredangle A=\measuredangle BAC=\alpha$.

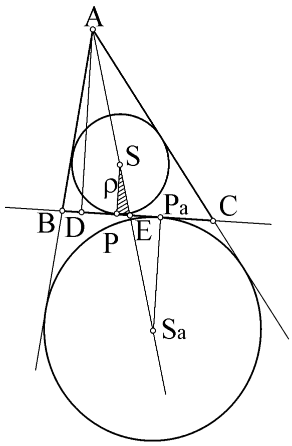
(ii) Даље, по конструкцији круг $k(S,\rho)$ додирује све три странице AB, BC и CA троугла ΔABC па је ρ полупречник уписаног круга у троуглу ΔABC.

(iii) По конструкцији је $AN'=d/2$. С друге стране, као у анализи, доказујемо да важи важи $AN'=(b+c)/2$. Упоређивањем последњих двеју једнакости добијамо $b+c=d$, па је и трећи услов задатка задовољен.

Дискусија. Под условом да је $\alpha<2R$ и да важи распоред тачака $A-S-N$ задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли кругови k и k_a имају две, једну или ни једну унутрашњу заједничку тангенту. □

Задатак 138. *Конструисати троугао ΔABC ако је задато: разлика углова $\measuredangle B-\measuredangle C=\delta$, полупречник уписаног круга ρ и разлика страница $b-c=d$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Означимо са S центар уписаног а са S_a центар споља уписаног круга k_a (Слика 2.76). Са P и P_a означимо подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву BC. Према задатку 10. важи $PP_a = b - c$. Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle A$ и означимо са E пресечну тачку правих s и BC. Са D означимо подножје висине из темена A на страницу BC. Такође важи:



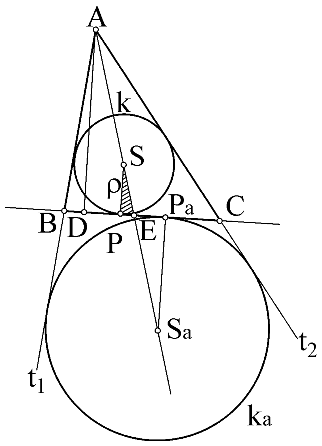
Слика 2.76.

$$\begin{aligned}\measuredangle PSE = \measuredangle DAE = \measuredangle BAE - \measuredangle BAD &= \frac{1}{2}\measuredangle A - (R - \measuredangle B)\\ &= \frac{1}{2}\measuredangle A - R + \measuredangle B = \frac{1}{2}\measuredangle A - \frac{1}{2}(\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C) + \measuredangle B\\ &= \frac{1}{2}\measuredangle B - \frac{1}{2}\measuredangle C = \frac{1}{2}(\measuredangle B - \measuredangle C) = \delta/2,\end{aligned}$$

тј. $\measuredangle PSE = \delta/2$. Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла PSE, а самим тим и троугла ΔABC.

Конструкција. Конструишимо праву l и на њој одредимо тачку P. Затим, конструишимо нормалу n у тачки P и на њој одредимо тачку S такву да је $PS = \rho$. Конструишимо полуправу p са почетком у тачки S такву да је $\measuredangle(SP, p) = \delta/2$ и означимо са E пресечну тачку праве l и полуправе p. На правој l конструишимо тачку P_a са оне стране тачке P са које је и E тако да је $PP_a = d$ (Слика 2.77).

Нека важи распоред тачака $P - E - P_a$. Конструишимо у тачки P_a нормалу на праву l и њен пресек са правом SE означимо са S_a. Тада важи распоред тачака $S - E - S_a$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, S_aP_a)$. По конструкцији, права l је заједничка унутрашња тангента кругова $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, S_aP_a)$. Постоје тачно две праве t_1 и t_2, које су заједничке спољашње тангенте кругова $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, S_aP_a)$. Претпоставимо да се тангенте t_1 и t_2 секу и пресечну тачку означимо са A. Тачка A припада правој SE јер је SE оса симетрије кругова $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, S_aP_a)$. Претпоставимо да важи распоред тачака $A - S - E - S_a$. Даље, означимо са B и C пресечне тачке праве l редом са тангентама t_1 и t_2. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне па одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.77.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

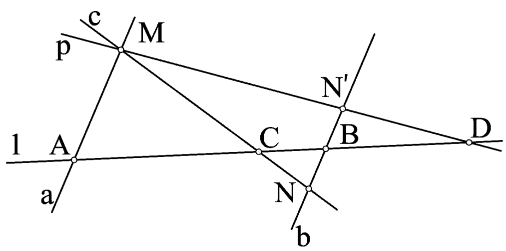
(i) Означимо са D подножје нормале из тачке A на праву $l \equiv BC$. Тада, као у анализи задатка доказујемо да је $\measuredangle PSE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$. С друге стране је по конструкцији $\measuredangle PSE = \delta/2$. Према томе, важи $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, па је први услов задовољен.

(ii) Као у анализи, доказујемо да важи $PP_a = b - c$ и како је по конструкцији $PP_a = d$ биће $b - c = d$, па је и други услов задовољен.

(iii) На крају, круг $k(S, \rho)$ по конструкцији додирује странице AB, BC, CA троугла ΔABC, тј. уписан је у троугао ΔABC и како му је полупречник једнак датој дужи ρ, то је и трећи услов задатка задовољен, па је конструисани ΔABC управо тражени троугао.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $P-E-P_a$, $\delta < 2R$ и да је дуж PE мања од дужи EP_a, задатак има решење. У осталим случајевима задатак нема решења. □

Задатак 139. *Ако су дате три колинеарне тачке A, B и C, конструисати тачку D тако да је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.*

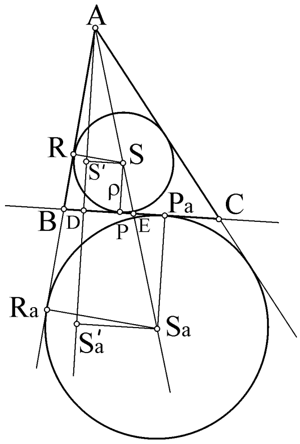


Слика 2.78.

Решење: Конструишимо праву l и на њој тачке A, B и C такве да важи распоред тачака $A-C-B$ (Слика 2.78). У тачкама A и B конструишимо две произвољне паралелне праве a и b. У тачки C конструишимо праву c, која није паралелна са правама a и b. Означимо са M и N пресечне тачке праве c редом са правама a и b. Конструишимо тачку N' симетричну тачки N у односу на тачку B. Конструишимо затим праву p одређену тачкама M и N' и обележимо њен пресек са правом l са D. Покажимо да важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Како важи распоред тачака $A-C-B$, то је први услов задовољен. Троуглови ΔCMA и ΔCNB су слични па је $AC : CB = AM : BN$. Аналогно, из сличности троуглова ΔADM и $\Delta BDN'$ следи $AD : BD = AM : BN'$. Из сличности ових троуглова и $BN = BN'$ закључујемо да је $AC : CB = AD : BD$, па је и други услов задовољен. Дакле важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. □

Задатак 140. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ и страница BC једнака датој дужи a.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Означимо са D подножје висине из темена A, са S центар уписаног круга k а са S_a центар споља уписаног круга k_a који



Слика 2.79.

додирује страницу BC. Означимо са P и Q и R подножја нормала из тачаке S редом на праве AB, BC и CA а са P_a Q_a и R_a подножја нормала из тачаке S_a редом на праве BC, CA и AB (Слика 2.79). Са S' и S'_a означимо подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву AD а са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC.

Према Задатку 59. (б) парови тачака A, E и S, S_a су хармонијски спрегнути, тј. важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$. Одвде је $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$ јер су A, D, S', S'_a нормалне пројекције хармонијски спрегнутих тачака A, E, S и S_a на праву AD.

Из распореда тачака $A-R-B-R_a$, $A-Q-C-Q_a$ следи $RR_a = AR_a - AR$, $QQ_a = AQ_a - AQ$, $AR = AQ$, $AR_a = AQ_a$. Дакле, важи и $RR_a = QQ_a$. Сада је

$$\begin{aligned} RR_a &= \frac{1}{2}(RR_a + QQ_a) = \frac{1}{2}(RB + BR_a + QC + CQ_a) \\ &= \frac{1}{2}(BP + BP_a + PC + CP_a) = \frac{1}{2}(BC + BC) = BC = a, \end{aligned}$$

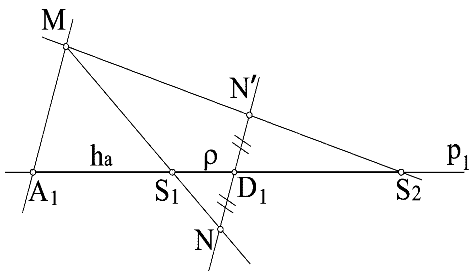
тј. $RR_a = a$. Висина троугла је $AD = h_a$. Сада можемо прећи на конструкцију троугла ΔABC.

Помоћна конструкција (види Задатак 217.):
Уочимо неку праву p_1 и на њој тачке A_1 и D_1 такве да је $A_1D_1 = h_a$. Нека је S_1 тачка праве p_1, таква да важи распоред тачака $A_1-S_1-D_1$

и $S_1D_1 = \rho$ (Слика 2.80). Тада на правој p_1 постоји тачно једна тачка S_2 таква да је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$, при чему ћемо претпоставити да важи распоред тачака: $A_1 - S_1 - D_1 - S_2$. Уместо ове претпоставке о распореду тачака можемо увести и претпоставку $\rho < h_a/2$.

Конструкција. На произвољној правој m одредимо тачке R и R_a такве да је $RR_a = a$. Обележимо са s_R и s_{R_a} нормале у тачкама R и R_a на праву m, а са S и S_a означимо тачке редом на правама s_R и s_{R_a}, са исте стране праве m, тако да је $RS = \rho$ и $R_aS_a = D_1S_2$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, R_aS_a)$ (Слика 2.81). Права $RR_a \equiv t_1$ је заједничка спољашња тангента кругова k и k_a. Из претпоставке $\rho < h_a/2$ следи $S_1D_1 < S_2D_1/2$, тј. $SR < S_aR_a$. Зато права SS_a сече праву RR_a у некој тачки A тако да су тачке A и R_a са разних страна тачке R. Означимо са t_2 другу заједничку тангенту кругова k и k_a. И ова тангента због симетричности садржи тачку A. Додирне тачке тангенте t_2 са круговима k и k_a означимо са Q и Q_a.

Кругови k и k_a могу имати или не заједничких унутрашњих тангената. Претпоставимо да имају заједничку унутрашњу тангенту и означимо је са p. Додирне тачке праве p и кругова k и k_a означимо са P и P_a а са B и C пресечне тачке праве p редом са правама RR_a и QQ_a. Тачка A је по конструкцији пресечна тачка спољашњих заједничких тангената кругова k и k_a а B и C су на унутрашњој заједничкој тангенти p поменутих кругова, одакле следи да су A, B и C три неколинеарне тачке, па одређују темена неког троугла ΔABC.



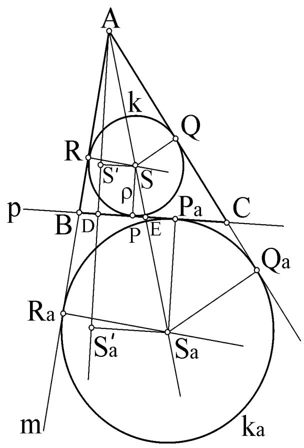
Слика 2.80.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је круг $k(S, \rho)$ уписан у троугао ΔABC, па је ρ полупречник уписаног круга у тај троугао.

(ii) Такође, по конструкцији је $RR_a = a$. С друге стране, као у анализи показујемо да је $RR_a = BC$ одакле закључујемо да је $BC = a$ па је и други услов задовољен.

(iii) Докажимо још и да је висина AD једнака датој дужи h_a. Означимо са E заједничку тачку симетрале угла $\measuredangle A$ и странице BC а са D означимо подножје нормале из тачке A на праву BC. По конструкцији су тачке S и S_a центри редом уписаног круга k и споља уписаног круга k_a, одакле као у анализи закључујемо да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$. Означимо даље, са S' и S'_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву AD. Тада, тачке A, D, S' и S'_a су нормалне пројекције редом тачака A, E, S и S_a на праву AD, одакле следи да је $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$.



Слика 2.81.

По конструкцији је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$.

Дакле, четворке тачака A, D, S', S'_a и A_1, D_1, S_1, S_2 су две четворке хармонијски спрегнутих и на исти начин распоређених тачака, при чему је $D_1S_1 = SR = \rho = S'D$ и $D_1S_2 = S_aR_a = DS'_a$. Следи да је $AD = A_1D_1$. Како је још $A_1D_1 = h_a$ то је $AD = h_a$, па је и трећи услов задовољен.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $A_1{-}S_1{-}D_1{-}S_2$, тј. да је $\rho < h_a/2$ задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли кругови k и k_a имају две, једну или немају заједничких унутрашњих тангената. $\square$

Задатак 141. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина* AD *једнака датој дужи* h_a*, полупречник уписаног круга једнак датој дужи* ρ *и полуобим једнак датој дужи* p.

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао. Означимо са D подножје висине из темена A, са S центар уписаног круга k а са S_a центар спољa уписаног круга k_a који додирује страницу BC. Означимо са P и Q и R додирне тачке круга k редом са правама AB, BC и CA а са P_a Q_a и R_a додирне тачке круга k_a редом са правама BC, CA и AB (Слика 2.79). Са S' и S'_a означимо подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву AD а са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC.

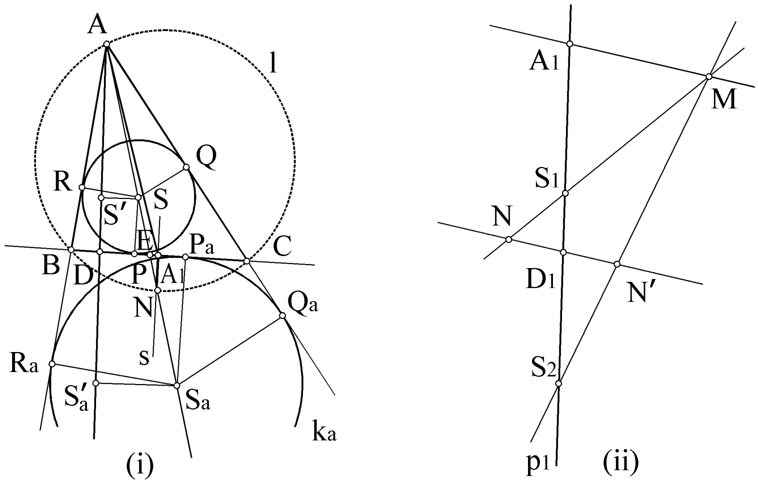
Према Задатку 59. (б) парови тачака A, E и S, S_a су хармонијски спрегнути, тј. важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$. Одавде је $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$ јер су A, D, S', S'_a нормалне пројекције хармонијски спрегнутих тачака A, E, S и S_a на праву AD.

Такође, важи $AR_a = AQ_a = (AB + BC + CA)/2$. Сада имамо довољно елемената за конструкцију. Завршетак решења препушта се читаоцу.

Задатак 142. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина* AD *једнака датој дужи* h_a*, полупречник уписаног круга једнак датој дужи* ρ *и збир страница* $b + c = d$.

Упутство: Када су познати висина h_a и полупречник уписаног круга ρ, онда можемо одредити полупречник ρ_a спољa уписаног круга у помоћној конструкцији. У "Великом задатку" је показано да важи $AN' = (b+c)/2$ и $NN' = (\rho_a + \rho)/2$, при чему је N пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и описаног круга l, а N' нормална пројекција тачке N на праву AB. Значи, правоугли троугао $\Delta ANN'$ можемо лако конструисати. Затим на правој AN одредимо тачке S и S_a редом на растојању ρ и ρ_a од праве AB. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$. Страница BC припада унутрашњој заједничкој тангенти кругова k и k_a, док су странице AB и AC на спољашњим заједничким тангентама поменутих кругова. $\square$

Задатак 143. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина* AD *једнака датој дужи* h_a*, полупречник уписаног круга једнак датој дужи* ρ *и тежишна дуж једнака датој дужи* m_a.



Слика 2.82.

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао. Означимо са A_1 средиште странице BC, са N пресечну тачку описаног круга l и симетрале странице BC при чему је $A, N \div BC$, са D подножје висине из темена A, са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC, са S и S_a редом центар уписаног круга k и спођа уписаног круга k_a који додирује страницу BC (Слика 2.82 (i)). Додирне тачке правих BC, CA и AB са круговима k и k_a означимо редом са P и P_a, Q и Q_a, R и R_a. Нека су S' и S'_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву AD. С обзиром на то да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$. То значи да у помоћној конструкцији, с обзиром на то да су тачке A, D и S' познате можемо одредити тачку S'_a, тј. можемо одредити полупречник ρ_a споља уписаног круга k_a. Као у "Великом" задатку доказује се да је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$. Правоугли троугао ΔADA_1 се лако може конструисати. Сада можемо прећи на конструкцију троугла ΔABC.

Помоћна конструкција (види Задатак 217.). Одредимо на некој правој p_1 тачке A_1, D_1 и S_1 такве да је $A_1D_1 = h_a$, $S_1D_1 = \rho = SP$ и важи распоред тачака $A_1 - S_1 - D_1$ (Слика 2.82 (ii)). Тада на правој p_1 постоји тачно једна тачка S_2 таква да је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$, при чему ћемо претпоставити да важи распоред тачака: $A_1 - S_1 - D_1 - S_2$, тј. $\rho < h_a/2$.

Конструкција. Конструишимо правоугли троугао ΔADA_1 код кога је $\measuredangle D = R$, $AD = h_a$ и $AA_1 = m_a$. У тачки A_1 конструишимо нормалу s на праву A_1D и на њој тачку N такву да је $A_1N = d$ и $A, N \div DA_1$. На правој AN конструишимо тачку S на растојању ρ од праве DA_1 тако да важи $A, S \ddot{-} DA_1$. Означимо са k круг са центром у тачки S и полупречником ρ, а са E пресечну тачку правих AN и DA_1. Нека су t_1 и t_2 тангенте круга k из тачке A. Са B и C означимо пресечне тачке правих t_1 и t_2 са правом DA_1. По конструкцији A, B и C су три неколинеарне тачке и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $AD \perp DA_1$, $AD = h_a$, $B, C \in DA_1$, одакле следи да је $AD \perp BC$, тј. дата дуж h_a је висина троугла ΔABC.

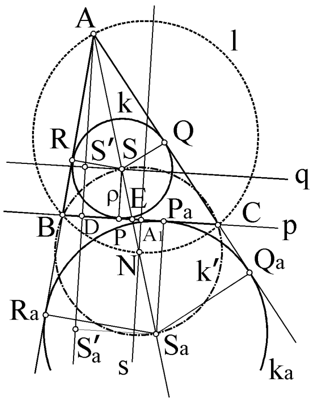
(ii) По конструкцији је ρ полупречник уписаног круга у троуглу ΔABC.

(iii) Означимо са S_a центар споља уписаног круга који додирује страницу BC. Тада су тачке A, E, S и S_a хармонијски спрегнуте, па исто важи и за њихове нормалне пројекције на праву AD, тј. важи $\mathcal{H}(A, D; S', Sa')$. По конструкцији је $AD = h_a$, $S'D = \rho$ и $A - S' - D$, одакле следи да је $DS'_a = \rho_a$ (као у помоћној конструкцији). Означимо са P и P_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву BC. За дуж A_1N важи $A_1N = (\rho_a - \rho)/2 = (S_aP_a - SP)/2$ и $A_1N \perp PP_a$, тј. $A_1N \parallel SP, S_aP_a$ а то значи да је A_1N средња линија сложног трапеза SPP_aS_a па је A_1 средиште странице PP_a. Како се средишта дужи PP_a и BC поклапају (види "Велики" задатак), то је $AA_1 = m_a$ тежишна дуж троугла ΔABC.

Дискусија. Под условом да је $h_a \leq m_a$ и $\rho < h_a/2$ задатак има јединствено решење до на подударност. $\square$

Задатак 144. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ и полупречник описаног круга једнак датој дужи r (Слика 2.83). Када су познати h_a и ρ у помоћној конструкцији одређујемо полупречник ρ_a споља уписаног круга који додирује страницу BC. Такође, важи $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$, $A, N \div BC$ (као у Задатку 2.82). Тачка S је на растојању ρ од праве BC и



Слика 2.83.

припада геометријском месту центара уписаних кругова, тј. луку $\overset{\frown}{BC}$ крига $k'(N, NB = NC)$, за који важи $\overset{\frown}{BC}, N \div BC$. Тачка A се налази у пресеку праве SN и описаног круга l.

Помоћна конструкција (види Задатак 217.). Одредимо на некој правој p_1 тачке A_1, D_1 и S_1 такве да је $A_1D_1 = h_a$, $S_1D_1 = \rho = SP$ и важи распоред тачака $A_1 - S_1 - D_1$ (Слика 2.82 (ii)). Тада на правој p_1 постоји тачно једна тачка S_2 таква да је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$, при чему ћемо претпоставити да важи распоред тачака $A_1 - S_1 - D_1 - S_2$, тј. $\rho < h_a/2$. Тада је $D_1S_2 = \rho_a$ дуж подударна полупречнику споља уписаног круга који додирује страницу BC троугла ΔABC.

Конструкција. Конструишимо круг l пречника $MN = 2r$. На MN одредимо тачку A_1 такву да је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$ и $N - A_1 - M$. Са p означимо праву нормалну у тачки A_1 на пречник MN, а са B и C пресечне тачке праве праве p и круга l. Означимо са k' круг са центром у тачки N и полупречником $NB = NC$, а са $\overset{\frown}{BC}$ лук круга k' за који важи $\overset{\frown}{BC}, N \div p$. На растојању ρ од праве p конструишимо праву q паралелну правој p такву да је $q, N \div p$. Означимо са S, под условом да постоји, пресечну тачку лука $\overset{\frown}{BC}$ са правом q. Са A означимо пресечну тачку праве SN и круга l. По конструкцији, тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) Тачке A, B и C припадају кругу l полупречника r, па је први услов задатка задовољен.

(ii) По конструкцији тачка S припада геометријском месту центара уписаних кругова и на растојању ρ је од BC, па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Означимо са S_a тачку симетричну тачки S у односу на тачку N а са E пресечну тачку правих SN и BC. Тада је S_a центар спођа уписаног круга који додирује сраницу BC. Означимо са P и P_a подножја нормала редом из S и S_a на BC. Дакле, важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$. Такође ρ и ρ_a су редом полупречник уписаног и спођа уписаног круга који додирује BC, јер је A_1N средња линија сложеног трапеза SPP_aS_a. Нека су S' и S'_a подножја норамала из S и S_a на висину троугла ΔABC. Тада је $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$. Како је $A - S' - D - S'_a$, $S'D = \rho$, $S'_aD = \rho_a$ и упоређујући са одговарајућим дужима у помоћној конструкцији, закључујемо да је $AD = h_a$, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\rho < h_a/2 < r$, задатак може имати два, једно или да нема решења у зависности од тога да ли лук $\widehat{BC}$ круга k' и права q имају две, једну или немају заједничких тачака.

Задаци 145.-151. решавају се аналогно претходним и њихово решавање препушта се читаоцима за вежбу.

Задатак 145. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник спођа уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и страница BC једнака датој дужи a.*

Задатак 146. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник спођа уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и збир страница $b + c = d$.*

Задатак 147. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник спођа уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и тежишна дуж AA_1 једнака датој дужи m_a.*

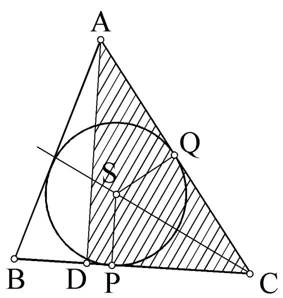
Задатак 148. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник спођа уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Задатак 149. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и збир страница $b + c = d$.*

Задатак 150. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и тежишна дуж AA_1 једнака датој дужи m_a.*

Задатак 151. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

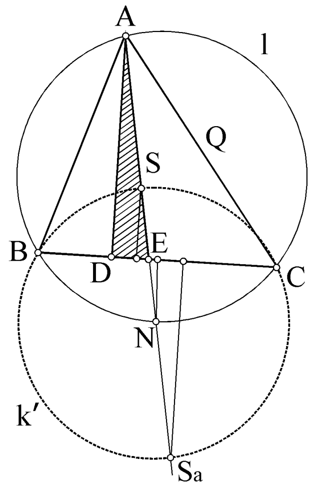
Задатак 152. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a и страница AC једнака датој дужи b.*



Слика 2.84.

Упутство: Када су познати полупречници ρ и ρ_a, онда у помоћној конструкцији можемо одредити висину $AD = h_a$. За правоугли троугао ΔADC позната је катета h_a и хипотенуза $AC = b$, па га лако можемо конструисати (Слика 2.84). Тачка S се налази на симетрали угла $\measuredangle ACD$ на растојању ρ од кракова CA и CD. Теме B се добија као пресечна тачка друге тангенте из тачке A на круг $k(S, \rho)$ и праве CD. $\square$

Задатак 153. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи* ρ*, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу* BC *једнак датој дужи* ρ_a *и одсечак симетрале унутрашњег угла* $\measuredangle A$ *једнак датој дужи* l_a*.*

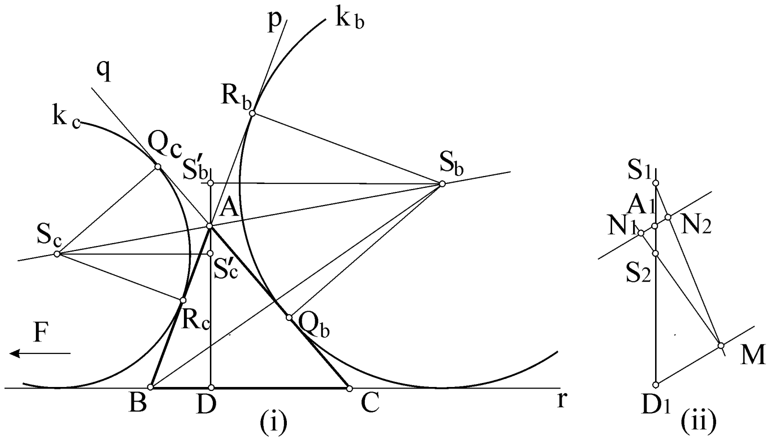


Слика 2.85.

Упутство: Када су познати полупречници ρ и ρ_a, онда у помоћној конструкцији можемо одредити висину $AD = h_a$. За правоугли троугао ΔADE позната је катета h_a и хипотенуза $AE = l_a$, па га лако можемо конструисати (Слика 2.85). Тачке S и S_a конструишимо на правој AE тако да су редом на растојању ρ и ρ_a од праве DE, тако да важи распоред тачака $A - S - E - S_a$. Нека је N средиште дужи SS_a. Конструишимо круг k' са центром у тачки N и полупречником $SN = S_aN$ и са B и C означимо пресечне тачке круга k' и праве DE. $\square$

Задатак 154. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a*, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу* AC *једнак датој дужи* ρ_b *и страница* BC *једнака датој дужи* a*.*

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао, тј. нека му је висина AD једнака датој дужи h_a, полупречник споља



Слика 2.86.

уписаног круга који додирује AC једнак ρ_b и страница BC једнака датој дужи b (Слика 2.86 (i)). Означимо са k_b и k_c спола уписане кругове који додирују странице AC и AB редом, а са S_b и S_c њихове центре. Нека је D подножје висине из темена A. Означимо још са F пресечну тачку правих S_bS_c и BC а са S_b' и S_c' нормалне пројекције тачака S_b и S_c на праву AD. У Задатку 59. је доказано да важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$. Одавде следи да је $\mathcal{H}(A, D; S_b', S_c')$ као нормалне пројекције хармонијски спрегнутих тачака на праву AD. То значи да у помоћној конструкцији можемо одредити полупречник ρ_c спола уписаног круга који додирује страницу AB. У "Великом" задатку је доказано да је $Q_bQ_c = R_bR_c = a$, где су Q_b, Q_c подножја нормала из тачке S_b на праву AC, а R_b, R_c подножја нормала из тачке S_c на праву AB.

Помоћна конструкција (види Задатак 217.). Одредимо на некој правој p_1 тачке A_1, S_1 и D_1 такве да је $S_1D_1 = \rho_b$, $A_1D_1 = h_a$ и важи $A_1, S_1 \ddot{-} D_1$ (Слика 2.86 (ii)). Тада на правој p_1 постоји тачно једна тачка S_2 таква да је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$, при чему ћемо претпоставити да важи $\rho_b > h_a/2$. Тада је $D_1S_2 = \rho_c$ дуж подударна полупречнику спола уписаног круга који додирује страницу AB троугла ΔABC.

Конструкција. На прозвољној правој p одредимо тачке R_b и R_c такве да је $R_bR_c = a$. Нека су n_{R_b} и n_{R_c} нормале редом у тачкама R_b и R_c на праву p. На правама n_{R_b} и n_{R_c} конструишимо тачке S_b и S_c такве да је $S_bR_b = \rho_b$ и $S_cR_c = \rho_c$, при чему је $S_b, S_c \div p$. Конструишимо кругове k_b и k_c редом са центрима у тачкама S_b и S_c и полупречницима ρ_b и ρ_c. Конструишимо другу унутрашњу заједничку тангенту кругова k_b и k_c и означимо са A пресечну тачку правих p и q. Конструишимо спољашњу заједничку тангенту r кругова k_b и k_c и означимо са B и C пресечне тачке праве r редом са правама p и q.

Тачке A, B и C су по конструкцији три неколинеарне тачке па одређују темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији круг k_b полупречника ρ_b је спроља уписан у троугао ΔABC, па је први услов задатка задовољен.

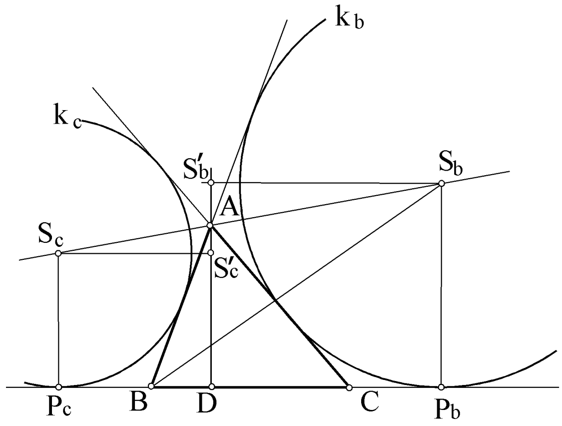
(ii) По конструкцији тачке S_b и S_c су центри спроља уписаних кругова који додирују странице AC и AB троугла ΔABC, па за њихове нормалне пројекције R_b и R_c на праву AB, као у анализи доказујемо да је $R_bR_c = BC$. С друге стране, по конструкцији је $R_bR_c = a$, па је $BC = a$, тј. и други услов задатка је задовољен.

(iii) Означимо са D подножје висине из темена A, а са S_b' и S_c' нормалне пројекције тачака S_b и S_c на праву AD. Приметимо да је тачка D нормална пројекција пресечне тачке F правих S_bS_c и BC на праву AD. Тада, као у анализи закључујемо да је $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, а одавде је $\mathcal{H}(A, D; S_b', S_c')$. По конструкцији је $S_bR_b = \rho_b = S_1D_1$, $S_cR_c = \rho_c = S_2D_1$, $AD = A_1D_1$ и $A_1D_1 = h_a$, одакле следи да је висина AD једнака датој дужи h_a. Дакле, ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\rho_b > h_a/2$, задатак има јединствено решење до на подударност.

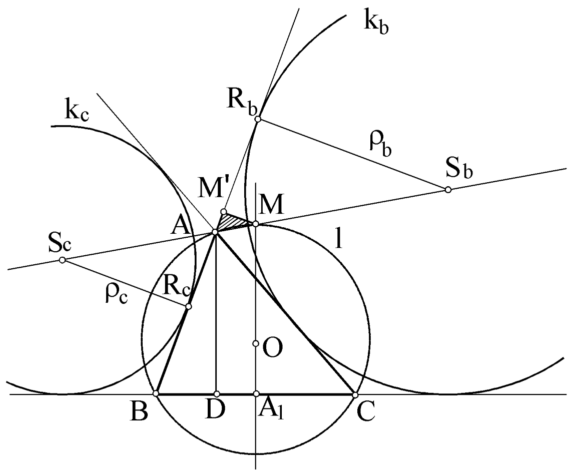
Задатак 155. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, полупречник спроља уписаног круга који додирује страницу AC једнак датој дужи ρ_b и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d.*

Упутство: Када је позната висина h_a и полупречник ρ_b спроља уписаног круга који додирује страницу AC, онда у помоћној конструкцији можемо одредити полупречник ρ_c спроља уписаног круга k_c који додирује страницу AB. У "Великом" задатку доказали смо да је $P_bP_c = b + c$, где су P_b и P_c додирне тачке спроља уписаних кругова k_b и k_c са правом BC. Дакле, права BC је заједничка спољашња тангента кругова k_b и k_c, а теме A налази се у пресеку унутрашњих заједничких тангенти поменутих кругова (Слика 2.87). $\square$



Слика 2.87.

Задатак 156. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a*, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу* AC *једнак датој дужи* ρ_b *и разлика страница* $AC = b$ *и* $AB = c$ *једнак датој дужи* d.



Слика 2.88.

Упутство: Када је позната висина h_a и полупречник ρ_b споља уписаног круга који додирује страницу AC, онда као у претходним случајевима, у помоћној конструкцији можемо одредити полупречник ρ_c споља уписаног круга k_c који додирује страницу AB. У "Великом" задатку доказали смо да је $AM' = (b-c)/2$, $MM' = (\rho_b-\rho_c)/2$, где је M пресечна тачка описаног круга l око троугла ΔABC, таква да је $A, M \ddot{-} BC$ а M' подножје нормале из тачке M на праву AC. Дакле, за троугао $\Delta AMM'$, са правим углом код темена M', познате су катете AM' и MM' па га лако можемо конструисати. Центри S_b и S_c уписаних кругова k_b и k_c припадају правој AM и налазе се редом на растојању ρ_b и ρ_c од праве AM' (Слика 2.88). □

Задаци 157.-166. решавају се аналогно претходним и њихово решавање препушта се читаоцима за вежбу.

Задатак 157. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу AC једнак датој дужи ρ_b и тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a.*

Задатак 158. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, полупречник споља уписаног круга који додирује страницу AC једнак датој дужи ρ_b и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Задатак 159. *Конструисати троугао ΔABC ако су му полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице AC и AB једнаки датим дужима ρ_b и ρ_c редом, а страница AC једнака датој дужи b.*

Задатак 160. *Конструисати троугао ΔABC ако су му полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице AC и AB једнаки датим дужима ρ_b и ρ_c редом, а тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a.*

Задатак 161. *Конструисати троугао ΔABC ако су му полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице AC и AB једнаки датим дужима ρ_b и ρ_c редом, а одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнака датој дужи l_a.*

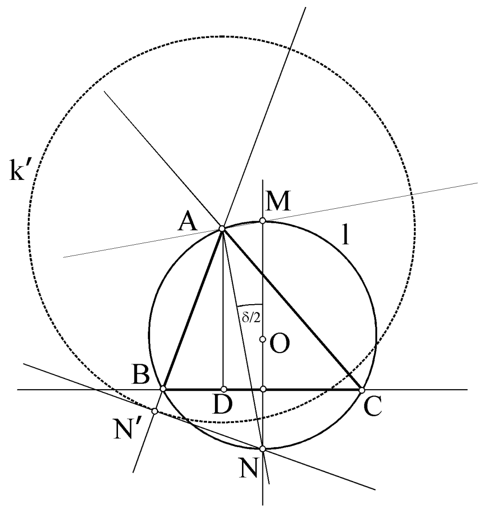
Задатак 162. *Конструисати троугао ΔABC ако су му полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице AC и AB једнаки датим дужима ρ_b и ρ_c редом, а полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Задатак 163. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ, а полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице AC и AB једнаки датим дужима ρ_b и ρ_c редом.*

Задатак 164. *Конструисати троугао ΔABC ако су му полупречници споља уписаних кругова који додирују редом странице BC, AC и AB једнаки датим дужима ρ_a, ρ_b и ρ_c редом.*

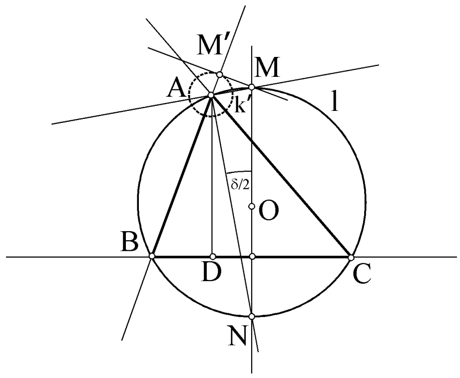
Задатак 165. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d.*

Задатак 166. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d.*



Слика 2.89.

Задатак 167. *Конструисати троугао ΔABC ако му је дата разлика унутрашњих углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d.*



Слика 2.90.

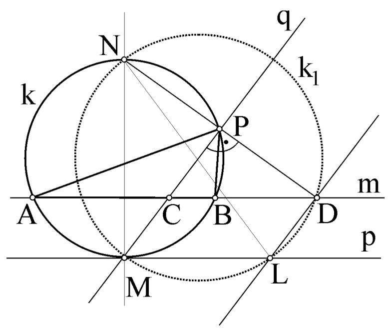
Упутство: Нека је ΔABC тржени троугао. Означимо са D подножје висине из темена A а са M и N пресечне тачке симетрале странице BC и описаног круга l, при чему је $A, N \div BC$. Нека је N' подножје нормале из тачке N на праву AB. Тада је као у "Великом" задатку $AN' = (b + c)/2 = d/2$. Дакле, тачка N' је додирна тачка тангенте из тачке N на круг $k'(A, d/2)$ и $A, N' \ddot{-} MN$. Није тешко доказати још да је $\measuredangle MNA = \measuredangle DAN = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$ (Слика 2.89). $\square$

Задатак 168. *Конструисати троугао ΔABC ако му је дата разлика унутрашњих углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, полупречник описаног круга једнак датој дужи r и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d.*

Упутство: Означимо са D подножје висине из темена A а са M и N пресечне тачке симетрале странице BC и описаног круга l, при чему је $A, N \div BC$. Нека је M' подножје нормале из тачке M на праву AB. Тада је као у "Великом" задатку $AM' = (b - c)/2 = d/2$. Дакле, тачка M' је додирна тачка тангенте из тачке M на круг $k'(A, d/2)$ и $A, M' \ddot{-} MN$. Важи, као у претходном задатку, још да је $\measuredangle MNA = \measuredangle DAN = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$ (Слика 2.90). $\square$

Задатак 169. *Дате су две разне тачке A и B и дуж l. Одредити тачке C и D на правој AB такве да је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ и $CD = l$.*

Решење: На произвољној правој m уочимо две тачке A и B. Конструишимо произвољан круг k који садржи тачке A и B. Означимо са M и N пресечне тачке круга k и симетрале дужи AB (Слика 2.91). Кроз тачку M конструишимо праву p паралелну са m. На правој p уочимо тачку L тако да је $ML = l$. Тачке M, L и N су неколинеарне и одређују тачно један круг k_1.



Слика 2.91.

Тачке M и N су са разних страна праве m па круг k_1 и права m имају две заједничке тачке. Једну од њих означимо са D. Конструишимо праву q која садржи тачку N и паралелна је са LD и означимо са C пресечну тачку правих m и q. Докажимо да су тачке C и D тражене тачке.

Тачке N, M и L припадају кругу k_1, при чему је $\measuredangle NML = R$, одакле следи да је NL пречник круга k_1. С друге стране, тачка D припада кругу k_1 над пречником NL па је $\measuredangle NDL = R$, тј. $ND \perp LD$. По конструкцији је $q \parallel LD$, па је $q \perp ND$. Означимо са P пресечну тачку правих ND и q. Како је $q \equiv MP$ имамо да је $PM \perp PN$. Такође је и

$$PC \perp PD. \tag{2.6}$$

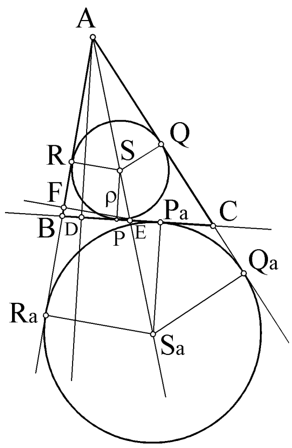
Дакле $\measuredangle MPN = R$ па тачка P припада кругу над пречником MN, тј. тачка P припада кругу k.

Уочимо троугао ΔAPB. Из једнакости лукова $\overset{\frown}{AM}$ и $\overset{\frown}{BM}$ следи једнакост углова $\measuredangle APM$ и $\measuredangle BPM$, тј. $\measuredangle APC = \measuredangle BPC$ па је PC симетрала унутрашњег угла код темена P троугла ΔAPB. Сада, узимајући у обзир релацију (2.6) закључујемо да је PD симетрала спољашњег угла код темена P троугла ΔAPB. Према задатку 13. в) следи $AC : CB = AD : DB$, а како је још $A - C - B - D$ или

$B - C - A - D$ следи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. По конструкцији је четвороугао $MCDL$ паралелограм па је и други услов задатка задовољен, тј. важи $CD = ML = l$. □

За конструисање троуглова у задацима 170..-188.. примењује се помоћна конструкција из задатка 169.

Задатак 170. *Конструисати троугао ΔABC ако му је угао код темена A једнак датом углу α, одсечак симетрале угла код тамена A једнак датој дужи l_a и страница BC једнака датој дужи a.*

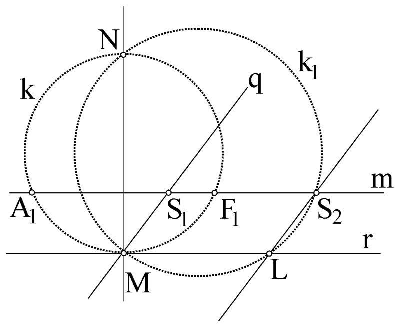


Слика 2.92.

Решење: *Анализа.* Нека је троугао ΔABC тражени троугао. Конструишимо круг k уписан у троугао ΔABC и круг k_a споља уписан, који додирује страницу BC (Слика 2.92). Означимо са S и S_a средишта кругова k и k_a а са R и R_a, Q и Q_a додирне тачке кругова k и k_a редом са правама AB и AC. Означимо, даље са P и P_a додирне тачке кругова k и k_a са страницом BC а са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC. Нека је F нормална пројекција тачке E на праву AB. У Задатку 10. смо показали да важи $RR_a = a$. Такође важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ (задатак 59. (б)). Како су A, F, R, R_a нормалне пројекције тачака A, E, S, S_a то ће бити задовољено $\mathcal{H}(A, F; R, R_a)$. Сада, с обзиром на то да су познати $\measuredangle A$ и одсечак симетрале угла $AE = l_a$, можемо прећи на конструкцију троугла ΔABC.

Конструкција. Конструишимо две полуправе A_x и A_y са заједничким почетком у тачки A тако да је угао $\measuredangle(A_x, A_y) = \alpha$ (Слика 2.94). Конструишимо затим симетралу A_z угла $\measuredangle A$ и на њој одредимо тачку E такву да је $AE = l_a$. Означимо са F подножје нормале из тачке E на полуправу Ax. Конструишимо сада тачке R и R_a на полуправој A_x тако да је $\mathcal{H}(A, F; R, R_a)$ и $RR_a = a$.

Помоћна конструкција. На произвољној правој m уочимо две тачке A_1 и F_1 такве да важи $A_1F_1 = AF$. Конструишимо тачке S_1 и S_2 на правој m тако да је $\mathcal{H}(A_1, F_1; S_1, S_2)$ и $S_1S_2 = a$. Конструишимо произвољан круг k, који садржи тачке A_1, F_1. Означимо са M и N пресечне тачке круга k и симетрале дужи A_1F_1 (Слика 2.93). Кроз тачку M конструишимо праву r паралелну са m. На правој r уочимо тачку L тако да је $ML = a$. Тачке M, L и N су неколинеарне и одређују тачно један круг k_1.



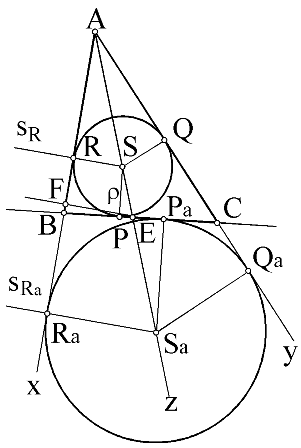
Слика 2.93.

Тачке M и N су са разних страна праве m па круг k_1 и права m имају две заједничке тачке. Једну од њих означимо са S_2. Конструишимо праву q паралелну са LS_2 и означимо са S_1 пресечну тачку правих m и q. Као у Задатку 169. доказује се да важи $\mathcal{H}(A_1, F_1; S_1, S_2)$ и $S_1S_2 = a$.

Сада на полуправој A_x конструишемо тачке R и R_a тако да је $AR = A_1S_1$ и $AR_a = A_1S_2$ и како је још $AF = A_1F_1$ то важи $\mathcal{H}(A, F; R, R_a)$. Како важи распосед тачака $A_1 - S_1 - F_1 - S_2$ то ће бити $A - R - F - R_a$ и

$$RR_a = AR_a - AR = A_1S_2 - A_1S_1 = S_1S_2 = a$$

тј. $RR_a = a$. Конструишимо нормале s_R и s_{R_a} на полуправу A_x кроз тачке R и R_a. Означимо са S и S_a пресечне тачке редом правих s_R и s_{R_a} са полуправом A_z. Конструишимо круг $k(S, SR)$. Из тачке E на круг k могу се конструисати две, једна или ни једна тангента у зависности од тога да ли је E ван, на или унутар круга k. Претпоставимо да се кроз тачку E може конструисати тангента на круг k и означимо је са t. Под претпоставком да је $\alpha < 2R$, тангента t ће сећи полуправе A_x и A_y у тачкама B и C. Тачке A, B и C су по конструкцији три неколинеарне тачке па одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.94.

Доказ. Докажимо да је троугао ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је угао $\measuredangle(A_x, A_y) = \alpha$, $B \in A_x$, $C \in A_y$ па је $\measuredangle A = \measuredangle BAC = \alpha$.

(ii) Тачка E је на симетрали A_z угла $\measuredangle A$ и при том важи $AE = l_a$ по конструкцији, па је и други услов задовољен.

(iii) По конструкцији је S центар уписаног круга. Даље важи $\mathcal{H}(A, F; R, R_a)$ и $RR_a = a$. Како су A, F, R, R_a нормалне пројекције тачака A, E, S, S_a то ће бити $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, па ће S_a бити центар спо̂ља уписаног круга троугла ΔABC, који додирује страницу BC.

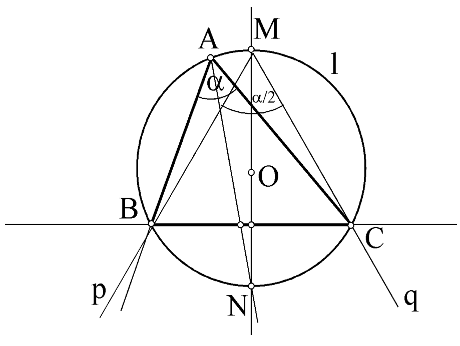
Као у анализи показује се да је $RR_a = BC$ и како је $RR_a = a$ по конструкцији, то ће бити $BC = a$, па је и трећи услов задовољен. Дакле, троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака

A, R, F, R_a, задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли је тачка E ван, на или унутар круга k. □

Задатак 171. *Конструисати троугао ΔABC ако му је угао код темена A једнак датом углу α, одсечак симетрале угла код тамена A једнак датој дужи l_a и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Упутство. С обзиром на то да је познат угао $\measuredangle A = \alpha$ и полупречник описаног круга r, у помоћној конструкцији можемо одредити страницу $BC = a$. У том случају задатак се своди на претходни.



Слика 2.95.

Помоћна конструкција. Конструишимо круг l полупречника r и један његов пречник $MN = 2r$ (Слика 2.95). Са почетком у тачки M конструишимо полуправе p и q са једне и са друге стране полуправе MN, такве да је $\measuredangle(MN, p) = \measuredangle(MN, q) = \alpha/2$. Са B и C означимо пресечне тачке круга l редом са полуправама p и q. Овако конструисана дуж $BC = a$ је страница траженог троугла. □

Задатак 172. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој дужи a, одсечак симетрале угла код тамена A једнак датој дужи l_a и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Упутство. С обзиром на то да је позната страница $BC = a$ и полупречник описаног круга r у првој помоћној конструкцији можемо одредити унутрашњи угао $\measuredangle A = \alpha$.

Конструишимо полуправе p и q са почетком у тачки A такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. На симетрали s угла $\measuredangle(p, q)$ конструишимо тачку E

такву да је $AE = l_a$. Означимо са F подножје нормале из тачке E на полуправу p.

У другој помоћној каонструкцији, као у Задатку 171., одредимо тачке R и R_a на полуправој p такве да је $\mathcal{H}(A, F; R, R_a)$ и $RR_a = a$. У пресеку нормала редом кроз тачке R и R_a са симетралом s налазимо тачке S и S_a. Сада можемо конструисати круг $k(S, SR)$. Темена B и C налазимо у пресеку тангенте из тачке E на круг k са полуправама p и q. □

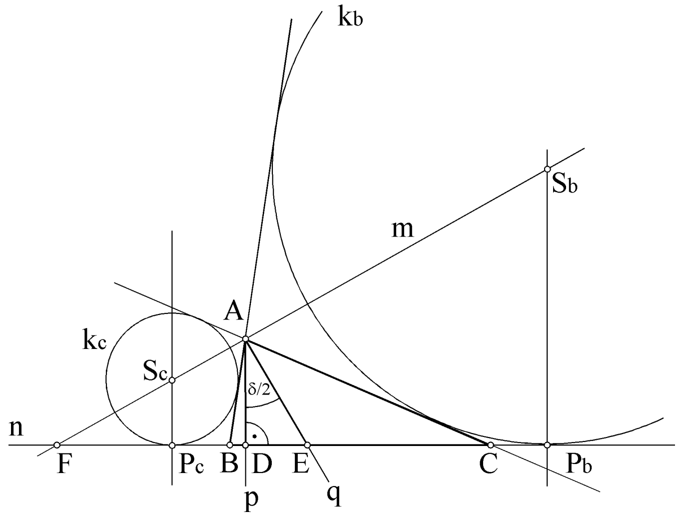
Задатак 173. *Конструисати троугао ΔABC ако му је дата разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, висина из темена A једнака датој дужи h_a и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d.*

Решење: *Анализа.* Означимо са D подножје нормале из темена A, а са E и F пресечне тачке редом симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Нека су S_b и S_c центри споља уписаних кругова k_b и k_c који додирују редом странице AC и AB. Означимо са P_b и P_c додирне тачке кругова k_b и k_c са правом BC (Слика 2.96). Сада је $\measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2 = \delta/2$ и $AD = h_a$ па се троуго ΔADE може конструисати. Такође имамо $\measuredangle AFD = \measuredangle DAE$, као оштри углови са нормалним крацима. Из $\mathcal{H}(F, A; S_c, S_b)$ следи $\mathcal{H}(D, F; P_c, P_b)$. Као у "Великом" задатку доказује се да је $P_bP_c = b + c$.

Конструкција. Са почетком у тачки A конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = \delta/2$ и на полуправој p тачку D такву да је $AD = h_a$. У тачки D конструишимо нормалу n на полуправу p, а са E означимо пресечну тачку праве n са полуправом q. Конструишимо у тачки A нормалу m на полуправу q и означимо са F пресечну тачку правих m и n.

Помоћна конструкција. На произвољној правој l уочимо две тачке F_1 и D_1 такве да важи $F_1D_1 = FD$. Конструишимо тачке P_1 и P_2 на правој l тако да је $\mathcal{H}(F_1, D_1; P_1, P_2)$ и $P_1P_2 = d$. Конструишимо произвољан круг k, који садржи тачке F_1, D_1. Означимо са M и N пресечне тачке круга k и симетрале дужи F_1D_1 (Слика 2.97). Кроз тачку M конструишимо праву r паралелну са l. На правој r уочимо тачку L тако да је $ML = d$. Тачке M, L и N су неколинеарне и одређују тачно један круг k_1.

Тачке M и N су са разних страна праве l па круг k_1 и права l имају две заједничке тачке. Једну од њих означимо са P_2 и то



Слика 2.96.

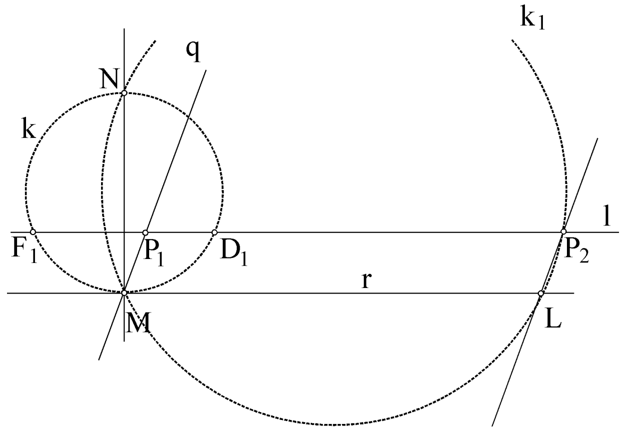
ону за коју је $F_1 - D_1 - P_2$. Кроз тачку M конструишимо праву q паралелну са LP_2 и означимо са P_1 пресечну тачку правих l и q. Као у Задатку 169. доказује се да важи $\mathcal{H}(F_1, D_1; P_1, P_2)$ и $P_1P_2 = a$.

Наставимо сада главну конструкцију. На правој FD конструишимо тачке P_b и P_c такве да је $FP_b = F_1S_2$, $FP_c = F_1S_1$ и $F - P_c - D - P_b$. У тачкама P_c и P_b конструишимо нормале n_1 и n_2 на праву FD и означмо редом са S_c и S_b њихове пресечне тачке са правом m. Конструишимо кругове $k_c(S_c, S_cP_c)$ и $k_b(S_b, S_bP_b)$ и претпоставимо да је тачка A ван кругова k_b и k_c. Из тачке A конструишимо обе унутрашње заједничке тангенте поменутих кругова и означимо са B и C њихове пресечне тачке са правом n тако да важи распоред $F - B - C$. Тачке A, B и C су неколинеарне по конструкцији и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $AD \perp n$, $B, C \in n$, $AD = h_a$, па је висина из темена A једнака датој дужи h_a.

(ii) По конструкцији, тачке S_b и S_c представљају центре споља уписаних кругова k_b и k_c, па је S_bS_c симетрала спољашњег угла код темена A. С обзиром на то да је по конструкцији $AE \perp AF$, следи да је AE симетрала унутрашњег угла код темена A. Као у анализи



Слика 2.97.

задатка, доказује се да је $\measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$. С друге стране, по конструкцији је $\measuredangle DAE = \measuredangle(p, q) = \delta/2$. Дакле, $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, па је и други услов задовољен.

(iii) Као у анализи, за овако конструисани троугао ΔABC доказујемо да важи $\mathcal{H}(F, A; S_c, S_b)$, $\mathcal{H}(F, D; P_c, P_b)$ и $P_bP_c = b + c$. По конструкцији је $\mathcal{H}(F_1, D_1; P_1, P_2)$, $P_1P_2 = d$, $FD = F_1D_1$, $FP_c = F_1P_1$, $FP_b = F_1P_2$, па је $P_bP_c = FP_b - FP_c = F_1P_2 - F_1P_1 = P_1P_2 = d$, тј. $P_bP_c = d$. Дакле, $b + c = d$, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\delta < 2R$ и $2h_a < d$ задатак има јединствено решење. □

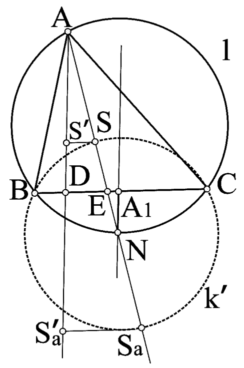
Задатак 174. *Конструисати троугао ΔABC ако му је дата разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, висина из темена A једнака датој дужи h_a и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d.*

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са S и S_a центар уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, а са P и P_a њихове нормалне пројекције на праву BC. За троугао ΔADE има довољно елемената за конструкцију. Из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(D, E; P, P_a)$. Из "Великог" задатка имамо $PP_a = b - c$. □

Задатак 175. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника $\rho + \rho_a$ једнак датој дужи d и страница BC једнака датој дужи a.*

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са S и S_a центар уписаног и спољa уписаног круга који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције на праву AD. Из $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ следи $\mathcal{H}(A,D;S',S'_a)$. Такође важи $S'S'_a = \rho + \rho_a \ = \ d$. У помоћној конструкцији одређујемо $S'D = \rho$ и $S'_aD = \rho_a$. Из "Великог" задатка је $RR_a = a$. $\square$

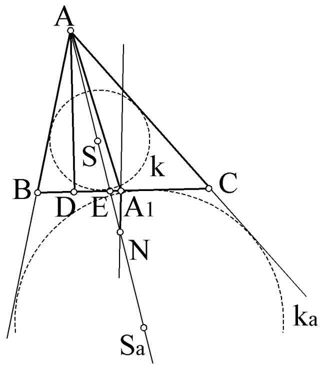
Задатак 176. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника $\rho + \rho_a$ једнак датој дужи d и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*



Слика 2.98.

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са S и S_a центар уписаног и спољa уписаног круга који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције на праву AD, са A_1 средиште странице BC а са N пресечну тачку симетрале странице BC и описаног круга l (Слика 2.98). Из $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ следи $\mathcal{H}(A,D;S',S'_a)$. Такође важи $S'S'_a = \rho + \rho_a = d$. У помоћној конструкцији одређујемо $S'D = \rho$ и $S'_aD = \rho_a$. Нека је сада $d_1 = \rho_a - \rho$. Из "Великог" задатка је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$. Нека је N произвољна тачка круга l полупречника r. Сада можемо одредити тачке B и C на кругу l такве да је $BC \perp A_1N$ и $A_1N = d_1/2$. Тада, тачке S и S_a припадају кругу $k'(N, NB = NC)$ и редом су на растојањима ρ и ρ_a од BC, при чему је $S - N - S_a$, а теме A добијамо у пресеку праве SS_a са кругом l. $\square$

Задатак 177. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a*, збир полупречника* $\rho + \rho_a$ *једнак датој дужи* d *и тежишна дуж једнака датој дужи* m_a*.*

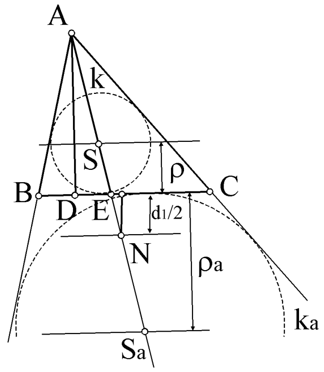


Слика 2.99.

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са S и S_a центар уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције на праву AD, са A_1 средиште странице BC а са N пресечну тачку симетрале странице BC и описаног круга l (Слика 2.99). Као у Задатку 176. одредимо полупречнике ρ и ρ_a. Нека је сада $d_1 = \rho_a - \rho$. Из "Великог" задатка је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$. Конструишимо најпре правоугли троугао ΔADA_1. Позната му је катета $AD = h_a$ и хипотенуза $AA_1 = m_a$. На нормали на дуж DA_1 одредимо тачку N такву да је $A_1N = d_1/2$ и $A, N \div DA_1$. На правој AN конструишимо тачке S и S_a редом на растојањима ρ и ρ_a од DA_1, тако да важи $A - S - N - S_a$. Темена B и C добијамо у пресеку тангенти из тачке A на круг $k(S, \rho)$ са правом DA_1. $\square$

Задатак 178. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a*, збир полупречника* $\rho + \rho_a$ *једнак датој дужи* d *и одсечак симетрале угла код темена* A *једнак датој дужи* l_a*.*

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC, са S и S_a центар уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције



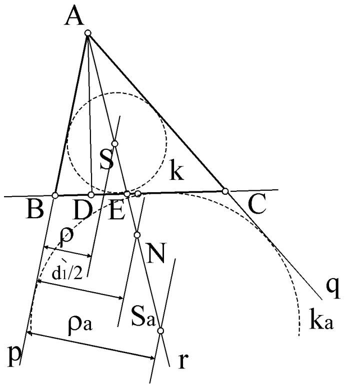
Слика 2.100.

на праву AD. Нека је још A_1 средиште странице BC а N пресечна тачка симетрале странице BC и описаног круга l (Слика 2.100). Као у Задатку 176. одредимо полупречнике ρ и ρ_a. Нека је сада $d_1 = \rho_a - \rho$. Из "Великог" задатка је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$. Конструишимо најпре правоугли троугао ΔADE, коме је позната хипотенуза $AE = l_a$ и катета $AD = h_a$. На правој AE конструишимо тачку N на растојању $d_1/2$ од праве DE тако да је $A, N \div DE$. На правој AN конструишимо тачке S и S_a редом на растојањима ρ и ρ_a од DE, тако да важи $A - S - E - N - S_a$. Темена B и C добијамо у пресеку тангенти из тачке A на круг $k(S, \rho)$ са правом DE. □

Задатак 179. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника $\rho + \rho_a$ једнак датој дужи d и угао код темена A једнак датом углу α.*

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC, са S и S_a центар уписаног и спол̂а уписаног круга који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције на праву AD. Нека је још A_1 средиште странице BC а N пресечна тачка симетрале странице BC и описаног круга l и N' подножје нормале из тачке N на праву AB (Слика 2.101). Као у Задатку 176. одредимо у помоћној конструкцији полупречнике ρ и ρ_a. Нека је сада $d_1 = \rho_a - \rho$. Из "Великог" задатка је $NN' = (\rho + \rho_a)/2$.

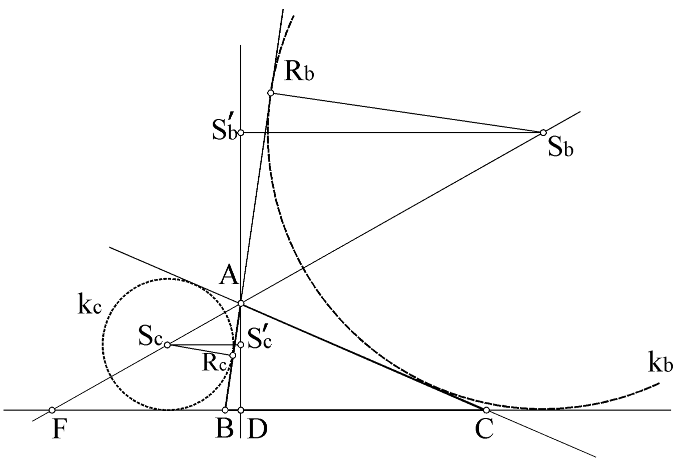
Конструишимо са почетком у тачки A полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$ и симетралу r угла $\measuredangle(p, q)$. На растојању $d/2$ од по-



Слика 2.101.

луправе p на полуправој r конструишимо тачку N. На правој AN конструишимо тачке S и S_a редом на растојањима ρ и ρ_a од полуправе p. Темена B и C добијамо у пресеку унутрашње заједничке тангенте кругова $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$ са полуправама p и q редом. $\square$

Задатак 180. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника $\rho + \rho_a$ једнак датој дужи d и разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$.*



Слика 2.102.

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC, са S и S_a центар уписаног и споља уписаног круга редом, који додирује страницу BC, а са S' и S'_a њихове нормалне пројекције на праву AD. Нека је још A_1 средиште странице BC а N пресечна тачка симетрале странице BC и описаног круга l. Тада је $\measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$. Као у Задатку 176. одредимо у помоћној конструкцији полупречнике ρ и ρ_a. Нека је сада $d_1 = \rho_a - \rho$. Из "Великог" задатка је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$.

За правоугли троугао ΔADE позната је катета $AD = h_a$, и оштар угао $\measuredangle DAE = \delta/2$ па га можемо конструисати. На растојању $d/2$ од праве DE на полуправој AE конструишимо тачку N, такву да је $A, N \div DE$. На правој AN конструишимо тачке S и S_a редом на растојањима ρ и ρ_a од праве DE, такве да је $A - S - E - S_a$. Темена B и C добијамо у пресеку тангенти из тачке A на круг $k(S, \rho)$ са правом DE. □

Задатак 181. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника спроља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и страница BC једнака датој дужи a.*

Упутство. Означимо са D подножје висине из темена A, са F пресечну тачку симетрале спољашњег угла код темена A са страницом BC, са S_b и S_c центре спроља уписаних кругова који додирују редом странице AC, и AB а са S'_b и S'_c њихове нормалне пројекције на праву AD. Тада је $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ тј. $\mathcal{H}(A, D; S'_b, S'_c)$. Како је познато $AD = h_a$, $S'_bS'_c = \rho_b - \rho_c$, $S'_b, S'_c, A \ddot{-} D$ и одредимо у помоћној конструкцији полупречнике $S'_bD = \rho_b$ и $S'_cD = \rho_c$. Из "Великог" задатка је $R_bR_c = BC = a$. □

Коришћењем помоћне конструкције као у претходном задатку и резултата из "Великог" задатка решвају се задаци 182.-188.

Задатак 182. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника спроља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d_1 и збир страница AC и AB једнак датој дужи d_2.*

Задатак 183. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника спроља уписаних* *кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и полупречник описаног круга једнак датој дужи r.*

Задатак 184. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ.*

Задатак 185. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC једнак датој дужи ρ_a.*

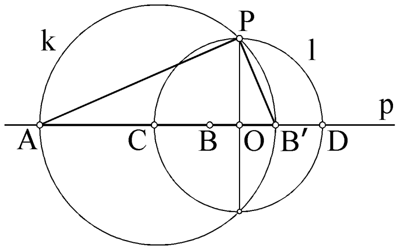
Задатак 186. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a.*

Задатак 187. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и угао код темена A једнак датом углу α.*

Задатак 188. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d и разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$.*

Задатак 189. *На правој p дате су три тачке A, B и O. Конструисати на правој p тачке C и D такве да је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ и тачка O средиште дужи CD.*

Решење: Претпоставимо да тачке C и D задовољавају постављене услове. Тада према Задатку 55. важи $OA \cdot OB = OC^2$ и $A - B - O$. Нека је B' тачка праве p таква да је $OB = OB'$ и $B - O - B'$ (Слика 2.103). Означимо са k круг над пречником AB'. Тачка O се налази у кругу k па права n кроз тачку O нормална на правој p има са кругом k две заједничке тачке. Једну од њих означимо са P. Са l означимо круг са центром у тачки O и полупречником OP. Круг l и права p имају две заједничке тачке, означимо их са C и D. Дуж OP је висина која одговара хипотенузи AB' правоуглог троугла



Слика 2.103.

$\Delta AB'P$ па је $OP^2 = OA \cdot OB'$. С друге стране, $OP = OC = OD$ јер тачке C и D припадају кругу $l(O, OP)$. Како је још $OB' = OB$, следи $OA \cdot OB = OC^2$. Дакле, важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ и O је средиште дужи CD. □

Задатак 190. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао $\measuredangle A = \alpha$, одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је угао $\measuredangle A = \alpha$, одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d. Означимо са E пресечну тачке симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC. Нека су S и S_a центар уписаног круга k и споља уписаног круга k_a који додирује страницу BC. Означимо са R и R_a додирне тачке кругова k и k_a са правом AB, а са P, P_a и Q, Q_a додирне тачке поменутих кругова редом са правама BC и AC (Слика 2.104). Нека је N пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A са симетралом странице BC. У том случају тачка N припада описаном кругу l око троугла ΔABC. Тада је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N представља средиште дужи SS_a и $AN' = (b + c)/2$. Заиста, да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи непосредно јер су S и S_a тачке у којима симетрале унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle B$ троугла ΔABE секу праву AE. Код троугла ΔNBS је $\measuredangle S = \measuredangle B$ па је $NS = NB$. Такође, код троугла ΔNBS_a је $\measuredangle S_a = \measuredangle B$ па је $NS_a = NB$. Дакле, $NS = NS_a$, тј. N је заиста средиште дужи SS_a. Сада, због распореда тачака $A - R - N' - R_a$ важи $AN' = AR_a - N'R_a$. Такође важи $AR_a = AQ_a$ као тангентне дужи из тачке A на спољa уписани круг k_a одакле због $A-R-B-R_a$ и $A-Q-C-Q_a$ имамо

$$\begin{aligned} AR_a &= \frac{1}{2}(AR_a + AQ_a) = \frac{1}{2}(AB + BR_a + AC + CQ_a) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BP_a + AC + CP_a) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC). \end{aligned}$$

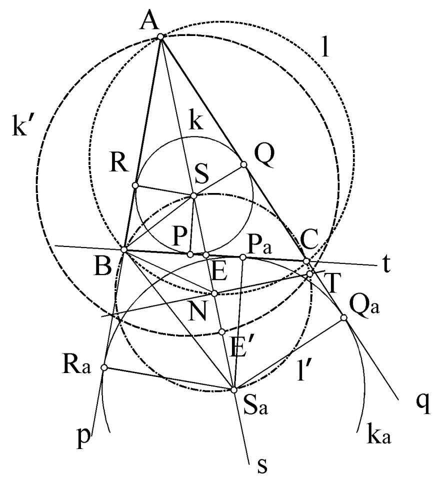
Коришћењем једнакости $RR_a = QQ_a$ имамо

$$\begin{aligned} N'R &= \frac{1}{2}RR_a = \frac{1}{4}(RR_a + QQ_a) = \frac{1}{4}(RB + BR_a + CQ + CQ_a) \\ &= \frac{1}{4}(PB + BP_a + CP + CP_a) = \frac{1}{2}BC, \end{aligned}$$

па је

$$AN' = \frac{1}{2}(AB + AC) = \frac{1}{2}(b + c) = \frac{d}{2}.$$

Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.



Слика 2.104.

Конструкција. Са почтком у тачки A конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Означимо са s полуправу са почетком у тачки A која полови угао $\measuredangle(p, q)$. На полуправој s конструишимо тачку E такву да је $AE = l_a$, а на полуправој p тачку N' такву да је $AN' = d/2$. Означимо са N пресечну тачку нормале n кроз тачку N' на полуправу p и праве s и претпоставимо да важи распоред

$A-E-N$. Тачка N постоји под претпоставком да је $\alpha < 2R$. Конструишимо тачке S и S_a на полуправој s такве да је $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ и N средиште дужи SS_a. Као у задатку 189., на полуправој s одредимо тачку E' такву да је $EN = E'N$ и $E-N-E'$. Конструишимо затим круг k' над пречником AE'. При томе, тачка N је унутар круга k' па нормала у тачки N на полуправу s има са кругом k' две заједничке тачке. Означимо са T једну од њих. Конструишимо круг l' са центром у тачки N и полупречником NT. Означимо са S и S_a пресечне тачке круга l' са полуправом s, тако да је $A-S-E-S_a$. Дуж NT је висина правоуглог троугла $\Delta ATE'$ која одговара хипотенузи AE', па је $NT^2 = AN \cdot NE'$. С друге стране, $NT = NS = NS_a$ јер тачке S и S_a припадају кругу $l'(N,NT)$. Како је још $NE' = NE$, следи $NA \cdot NE = NS^2$. Дакле, према Задатку 55. важи $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ и N је средиште дужи SS_a.

Означимо са R и R_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на полуправу p. Тада кругови $k(S,SR)$ и $k_a(S_a,S_aR_a)$ додирују и полуправу q. Са Q и Q_a означимо додирне тачке кругова k и k_a са полуправом q. При томе кругови k и k_a имају или немају унутрашњих заједничких тангенти. Пртпоставимо да имају унутрашњу заједничку тангенту и означимо је са t. Нека су P и P_a додирне тачке тангенте t редом са круговима k и k_a. Означимо са B и C пресечне тачке тангенте t редом са полуправама p и q. Тада су по конструкцији тачке A, B и C три неколинеарне тачке и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

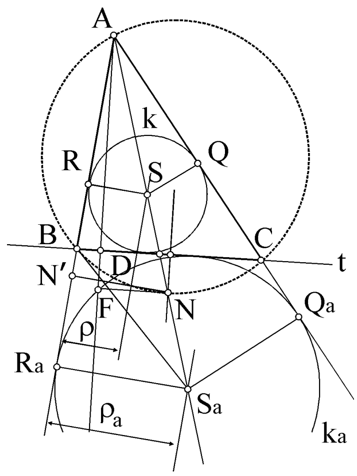
(i) По конструкцији је $\measuredangle(p,q) = \alpha$, тачка A је почетак полуправих p и q, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle BAC = \alpha$.

(ii) Као у анализи задатка доказујемо да је $AN' = (b+c)/2$ а по конструкцији је $AN' = d/2$, па је $b + c = d$. тј. и други услов је задовољен.

(iii) Означимо са E' пресечну тачку праве BC са симетралом s угла $\measuredangle A$. По конструкцији кругови $k(S,SR)$ и $k_a(S_a,S_aR_a)$ су редом уписани и споља уписани круг троугла ΔABC па је $\mathcal{H}(A,E';S,S_a)$. С друге стране, по конструкцији важи $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ па се тачке E и E' поклапају због јединствености четврте хармонијске тачке. То значи да је $AE = l_a$ одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака $A-E-N$, задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли кругови k и k_a имају две једну или немају унутрашњих заједничких тангената. □

Задатак 191. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a*, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга* $\rho_a - \rho$ *једнака датој дужи* d_1 *и збир страница* $AC = b$ *и* $AB = c$ *једнак датој дужи* d_2*.*



Слика 2.105.

Упутство. Из "Великог" задатка имамо да је

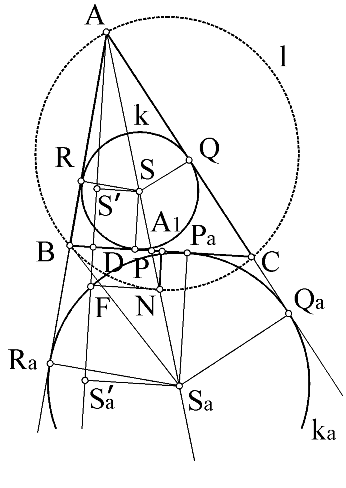
$$A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho) = d_1/2, \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = d_2/2.$$

Означимо са S и S_a нормалне пројекције редом центра уписаног круга k и споља уписаног круга k_a на праву одређену висином AD. Нека је N пресечна тачка симетрале унутрашњег угла $\angle A$ са симетралом странице BC, а F подножје нормале из тачке N на праву AD (Слика 2.105). Тада је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, N је средиште дужи $S'S'_a$ и $DF = A_1N$.

У помоћној конструкцији одредимо тачке S' и S'_a такве да је $AD = h_a$, $DF = (\rho_a - \rho)/2 = d_1/2$, $A - D - F$ и F средиште дужи $S'S'_a$. Тада за полупречнике уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC добијамо $\rho = S'D$ и $\rho_a = DS'_a$. Сада, из "Великог" задатка имамо $NN' = (\rho_a + \rho)/2 = d_3/2$.

Сада, за троугао $\Delta AN'N$ са правим углом код темена N' имамо познате катете $AN' = d_2/2$ и $NN' = d_3/2$ па га лако можемо конструисати. На полуправој AN одредимо тачке S и S_a редом на растојањима ρ и ρ_a од праве AN' и претпоставимо да важи распоред тачака $A-S-N-S_a$. Означимо са R и R_a подножја нормала из тачака S и S_a на праву AN' и конструишимо кругове $k(S, SR = \rho)$ и $k_a(S_a, S_aR_a = \rho_a)$. Тачка A налази се у пресеку праве SS_a и спољашње заједничке тангенте RR_a кругова k и k_a па она припада и другој спољашњој заједничкој тангенти QQ_a поменутих кругова. Претпоставимо да кругови k и k_a имају унутрашњу заједничку тангенту и означимо је са t. Темена B и C добијамо у пресеку унутрашње заједничке тангенте t редом са спољашњим заједничким тангентама RR_a и QQ_a. □

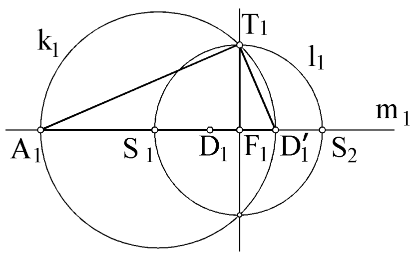
Задатак 192. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d_1 и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d_2.*



Слика 2.106.

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d_1 и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d_2. Означимо са E пресечну тачке симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC. Нека су S и S_a центар уписаног круга k и споља уписаног круга k_a који додирује страницу BC. Означимо са R и R_a додирне тачке кругова k и k_a са правом AB, а са P, P_a и Q, Q_a додирне тачке поменутих кругова редом са правама BC и AC (Слика 2.106). Нека је N пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A са симетралом странице BC. У том случају тачка N припада описаном кругу l око троугла ΔABC. Тада је, као што знамо, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N представља средиште дуж SS_a и $A_1N = (\rho_a - \rho)/2 = d_1/2$. Означимо са S', S'_a и F подножја нормала редом из тачака S, S_a и N на праву AD. Тада је $\mathcal{H}(A, D; S', S'_a)$, F је средиште дужи $S'S'_a$, $DF = A_1N = d_1/2$ и $A - S' - D - F - S'_a$. Такође важи $PP_a = b - c = d_2$ ("Велики" задатак). Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.

Помоћна конструкција. На правој m_1 уочимо тачке A_1, D_1 и F_1 такве да је $A_1D_1 = h_a$, $D_1F_1 = d_1/2$ и $A_1 - D_1 - F_1$. Конструишимо тачку D'_1 такву да је $D'_1F_1 = D_1F_1$ и $D_1 - F_1 - D'_1$, а затим круг k_1 над пречником $A_1D'_1$ (Слика 2.107). Означимо са T_1 једну од пресечних тачака нормале на праву m_1 у тачки F_1 са кругом k_1. Са S_1 и S_2 означимо пресечне тачке круга $l_1(F_1, F_1T_1)$ са правом m_1 такве да је $A_1 - S_1 - D_1 - F_1 - S_2$. Дуж F_1T_1 је висина правоуглог троугла



Слика 2.107.

$\Delta A_1D'_1T_1$ која одговара хипотенузи $A_1D'_1$ па је $F_1T_1^2 = F_1A_1 \cdot F_1D'_1$, тј. $F_1T_1^2 = F_1A_1 \cdot F_1D_1$. С обзиром на то да је $F_1T_1 = F_1S_1 = F_1S_2$ имамо $F_1S_1^2 = F_1A_1 \cdot F_1D_1$. Дакле, према задатку 55. закључујемо да је $\mathcal{H}(A_1, D_1; S_1, S_2)$ и F_1 је средиште дужи S_1S_2. Тада за полупречнике уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC добијамо $\rho = S'D = S_1D_1$ и $\rho_a = DS'_a = D_1S_2$.

Конструкција. На произвољној правој a конструишимо тачке P и P_a

такве да је $PP_a = d_2$. На нормали n у тачки P конструишимо тачку S такву да је $SP = \rho$, а на нормали n_a у тачки P_a тачку S_a такву да је $S_aP_a = \rho_a$ и $S, S_a \div PP_a$. Под претпоставком да је $\rho < \rho_a$, спољашње заједничке тангенте t_1 и t_2 кругова $k(S,\rho)$ и $k_a(S_a,\rho_a)$ сећи ће се у тачки A која припада правој SS_a и важи $A - S - S_a$. Означимо са B и C тачке у којима тангенте t_1 и t_2 секу праву $a \equiv PP_a$. По конструкцији тачке A, B и C су неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији су тачке S и S_a редом центри уписаног и споља уписаног круга троугла ΔABC. Означимо са E пресечну тачку правих SS_a и BC а са S' и S'_a подножја нормала редом из тачака S и S_a на праву одређену висином AD. Тада је $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$ а одавде $\mathcal{H}(A,D;S',S'_a)$. По конструкцији је $A_1D_1 = h_a$, $\rho = S'D = S_1D_1$, $\rho_a = DS'_a = D_1S_2$ и $\mathcal{H}(A_1,D_1;S_1,S_2)$, одакле следи због јединствености четврте хармонијске тачке да је $AD = A_1D_1 = h_a$, па је први услов задатка задовољен.

(ii) По конструкцији $\rho = S'D = S_1D_1$ и $\rho_a = DS'_a = D_1S_2$ су полупречници редом уписаног и споља уписаног круга троугла ΔABC, важи $A_1 - S_1 - D_1 - F_1 - S_2$, $\mathcal{H}(A_1,D_1,S_1,S_2)$ и F_1 је средиште дужи S_1S_2 па је

$$D_1F_1 = S_1F_1 - S_1D_1 = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho) - \rho = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho).$$

С друге стране, по конструкцији је $D_1F_1 = d_1/2$ па је $\rho_a - \rho = d_1$.

(iii) По конструкцији је $PP_a = d_2$ а као у анализи се доказује да је $PP_a = b - c$ па је $b - c = d_2$. Дакле, троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $A - S - S_a$ задатак има јединствено решење.

Задатак 193. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d и полуобим једнак датој дужи p.*

Упутство. Из "Великог" задатка имамо да је $A_1N = (\rho_a - \rho)/2 = d/2$ и $AR_a = p$. У помоћној конструкцији као у претходним случајевима налазимо полупречнике уписаних кругова ρ и ρ_a јер је позната висина h_a и разлика полупречника $\rho_a - \rho = d$. Сада су за правоугли троугао ΔAS_aR_a познате катете $AR_a = p$ и $S_aR_a = \rho_a$ па га лако можемо конструисати. На хипотенузи AS_a конструишимо тачку S на растојању ρ од праве AR_a. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S, \rho_a)$. Тада тачка A припада и другој заједничкој спољашњој тангенти t кругова k и k_a. Темена B и C налазимо у пресеку унутрашње заједничке тангенте поменутих кругова, уколико постоји, редом са правама AR_a и t. $\square$

Коришћењем помоћне конструкције из Задатка 189. и резултата из "Великог" задатка решвају се лако и задаци 194.-197.

Задатак 194. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d и одсечак симетрале AE унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a.*

Задатак 195. *Конструисати троугао ΔABC ако су му висине из темена A и B једнаке редом датим дужима h_a и h_b а разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d.*

Задатак 196. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d и угао код темена A једнак датом углу α.*

Задатак 197. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d и угао код темена B једнак датом углу β.*

Задатак 198. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d и разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$.*

Задатак 199. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, разлика полупречника споља уписаног и уписаног круга $\rho_a - \rho$ једнака датој дужи d_1 и разлика полупречника споља уписаних кругова $\rho_b - \rho_c$ једнака датој дужи d_2.*

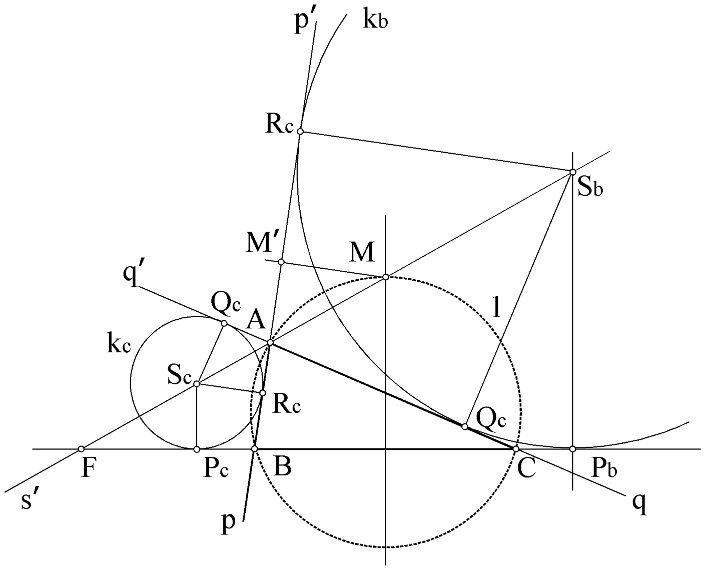
Упутство. Из чињенице да је позната висина h_a и разлика полупречника $\rho_a - \rho = d_1$ коришћењем помоћне конструкције из Задатка

189. налазимо полупречнике ρ и ρ_a. Такође, из чињенице да је позната висина h_a и разлика полупречника $\rho_b - \rho_c = d_2$ коришћењем помоћне конструкције из Задатка 169. налазимо полупречнике ρ_b и ρ_c. Сада, из "Великог" задатка имамо $\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$, па можемо одредити полупречник описаног круга троугла ΔABC. Такође, из "Великог" задатка имамо $A_1N = (\rho_a - \rho)/2$, па можемо конструисати темена B и C. Центар S уписаног круга k припада луку $\widehat{BC}$ круга $k'(N, NB = NC)$, за који важи $\widehat{BC}, N \div BC$. Такође S је на растојању ρ од праве BC. Теме A налази се у пресеку праве SN и описаног круга. $\square$

Задатак 200. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао $\measuredangle A = \alpha$, одсечак симетрале спољашњег угла код темена A једнак датој дужи $\bar{l}_a$ и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d.*

Решење: *Анализа.* Нека је ΔABC тражени троугао, тј. нека му је угао $\measuredangle A = \alpha$, одсечак симетрале спољашњег угла код темена A једнак датој дужи $\bar{l}_a$ и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d. Означимо са F пресечну тачке симетрале спољашњег угла код темена A са правом BC. Нека су S_b и S_c центри споља уписаних кругова k_b и k_c који редом додирују странице AC и AB. Означимо са R_b и R_c додирне тачке кругова k_b и k_c са правом AB, а са P_b, P_c и Q_b, Q_c додирне тачке поменутих кругова редом са правама BC и AC (Слика 2.108). Нека је M пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A са симетралом странице BC. У том случају тачка M припада описаном кругу l око троугла ΔABC. Тада је $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, тачка M представља средиште дужи S_bS_c и $AM' = (b-c)/2$. То значи да као у задатку 189., можемо одредити тачке S_b и S_c када су познате тачке A, F и M. Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.

Конструкција. Са почтком у тачки A конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p, q) = \alpha$. Означимо са q' полуправу комплементарну полуправој q а са s' полуправу са почетком у тачки A која полови угао $\measuredangle(p, q')$. На полуправој s' конструишимо тачку F такву да је $AF = \bar{l}_a$, а на полуправој p', комплементарну полуправој p, тачку M' такву да је $AM' = d/2$. Означимо са M пресечну тачку нормале n кроз тачку M' на полуправу p' и праве s' и претпоставимо да важи распоред $F - A - M$. Као у задатку 189., конструишимо тачке S_b и S_c на полуправој s' такве да је $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ и M средиште дужи



Слика 2.108.

S_bS_c. Означимо са R_b и R_c подножја нормала редом из тачака S_b и S_c на праву одређену полуправом p. Тада кругови $k(S_b, S_bR_b)$ и $k_c(S_c, S_cR_c)$ додирују и праву одређену полуправом q. Са Q_b и Q_c означимо додирне тачке кругова k_b и k_c са правом q. Праве p и q су по конструкцији унутрашње заједничке тангенте кругова k_b и k_c. Означимо са са t једну од спољашњих заједничких тангенти поменутих кругова, и то ону која има заједничке тачке са полуправама p и q. Нека су P_b и P_c додирне тачке тангенте t редом са круговима k_b и k_c. Означимо са B и C пресечне тачке тангенте t редом са полуправама p и q. Тада су по конструкцији тачке A, B и C три неколинеарне тачке и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији је $\measuredangle(p, q) = \alpha$, тачка A је почетак полуправих p и q, $B \in p$, $C \in q$ па је $\measuredangle BAC = \alpha$.

(ii) Као у анализи задатка доказујемо да је $AM' = (b - c)/2$ а по конструкцији је $AM' = d/2$, па је $b - c = d$. тј. и други услов је задовољен.

(iii) Означимо са F' пресечну тачку праве BC са симетралом s' спољашњег угла $\measuredangle A$. По конструкцији кругови $k(S_b, S_bR_b)$ и $k_c(S_c, S_cR_c)$ су споља уписани кругови троугла ΔABC па је

$\mathcal{H}(A, F'; S_b, S_c)$. С друге стране, по конструкцији важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ па се тачке F и F' поклапају због јединствености четврте хармонијске тачке. То значи да је $AF = \bar{l}_a$ одсечак симетрале спољашњег угла код темена A, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\alpha < 2R$ и да важи распоред тачака $F - A - M$, задатак има јединствено решење до на подударност. □

Задатак 201. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d_1$ и збир страница $AC = b$ и $AB = c$ једнак датој дужи d_2.*

Упутство. Нека је ΔABC тражени троугао. Означимо са F пресечну тачку симетрале спољашњег угла код темена A са правом BC, са D подножје висине из темена A, са A_1 средиште дужи BC, са S_b и S_c центре споља уписаних кругова k_b и k_c који додирују редом странице AC и AB а са ρ_b и ρ_c редом њихове полупречнике. Нека су P_b, Q_b и R_b додирне тачке круга k_b редом са правама BC, CA и AB, а P_c, Q_c и R_c додирне тачке круга k_c редом са правама BC, CA и AB. Означимо са M пресечну тачку описаног круга l и симетрале странице BC тако да је $A, M \ddot{-} BC$ а са M'' подножје нормале из тачке M на праву AD. Тачка M'' је средиште дужи $S_b'S_c'$ јер је M средиште дужи S_bS_c. Пар тачака A, F је хармонијски спрегнут са паром тачака S_b, S_c па исто важи и за њихове нормалне пројекције на праву AD, тј. $\mathcal{H}(A, D; S_b', S_c')$. Као у "Великом" задатку закључујемо да је $A_1M = (\rho_b + \rho_c)/2 = d_1/2$ и $P_bP_c = (b + c)/2 = d_2/2$. Како је $AD = h_a$, $DM'' = A_1M = d_1/2$, M'' средиште дужи $S_b'S_c'$, $\mathcal{H}(A, D; S_b', S_c')$ и важи распоред тачака $D - A - M''$ у помоћној конструкцији, као у задатку 189., можемо одредити полупречнике споља уписаних кругова $\rho_b = S_b'D = S_bP_b$ и $\rho_c = S_c'D = S_cP_c$. □

Задатак 202. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d_1$ и разлика страница $AC = b$ и $AB = c$ једнака датој дужи d_2.*

Упутство. Означимо са M пресечну тачку описаног круга l и симетрале странице BC тако да је $A, M \ddot{-} BC$. Нека је A_1 средиште странице BC и M' подножје нормале из тачке M на праву AB. Из

"Великог" задатка имамо да је $A_1M = (\rho_b + \rho_c)/2 = d_1/2$ и како је познато h_a, као у претходном случају налазимо полупречнике споља уписаних кругова ρ_b и ρ_c. Сада, из "Великог" задатка је $MM' = (\rho_b - \rho_c)/2$ и $AM' = (b-c)/2 = d_2/2$, па можемо конструисати правоугли троугао $\Delta AMM'$. У наставку користимо чињеницу да су тачке A, M, S_b и S_c колинеарне. $\square$

Коришћењем помоћне конструкције као у Задатку 189. и резултата из "Великог" задатка решавају се задаци 203.-209.

Задатак 203. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$ и полуобим једнак датој дужи p.*

Задатак 204. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$ и одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a.*

Задатак 205. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a, збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$ и висина из темена B једнака датој дужи h_b.*

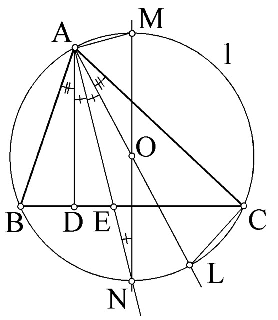
Задатак 206. *Конструисати троугао ΔABC ако му је угао код темена A једнак датом углу α, висина из темена A једнака датој дужи h_a и збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$.*

Задатак 207. *Конструисати троугао ΔABC ако му је угао код темена B једнак датом углу β, висина из темена A једнака датој дужи h_a и збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$.*

Задатак 208. *Конструисати троугао ΔABC ако му је разлика унутрашњих углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, висина из темена A једнака датој дужи h_a и збир полупречника споља уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d$.*

Задатак 209. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој дужи h_a и збирови полупречника уписаних кругова $\rho_b + \rho_c = d_1$ и $\rho_a + \rho = d_2$.*

Задатак 210. *Ако је производ страница AB и AC троугла ΔABC једнак d^2, тада је $AE \cdot AN = d^2$ при чему су E и N пресечне тачке симетрале унутрашњег угла код темена A редом са страницом BC и описним кругом l троугла ΔABC.*



Слика 2.109.

Решење. Означимо са AL и MN пречнике а са O центар описаног круга око троугла ΔABC (Слика 2.109). Тада је AE симетрала угла $\measuredangle DAO$, па је $\measuredangle DAE = \measuredangle OAE = \measuredangle ANM$ а одавде $\measuredangle BAD = \measuredangle CAL$. Сада, из сличности троуглова ΔABD и ΔALC следи $AB : AL = AD : AC$, тј. $AB \cdot AC = AL \cdot AD$. На исти начин из сличности троуглова ΔADE и ΔNAM следи $AD : AE = AN : MN$, тј. $AE \cdot AN = MN \cdot AD$. Из последње две једнакости, узимајући у обзир да је $MN = AL$ следи $AE \cdot AN = AB \cdot AC = d^2$. □

Напомена. Задатак 210. се може преформулисати на следећи начин: *Ако је производ страница AB и AC троугла ΔABC једнак d^2, тада су тачке E и N инверзне у односу на круг инверзије $k(A, d)$, при чему су E и N пресечне тачке симетрале унутрашњег угла код темена A редом са страницом BC и описним кругом l троугла ΔABC.*

Задатак 211. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, страница BC једнака датој дужи a и производ страница AB и AC једнак d^2.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. да му је дат одсечак симетрале угла код темена $AE = l_a$, страница $BC = a$ и производ страница $AB \cdot AC = d^2$. Означимо са S и S_a редом центре уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, са E и N пресечне тачке симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC (Слика 2.110). Тада је $AE \cdot AN = d^2$. Такође важи $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N је средиште дужи SS_a а темена B и C припадају кругу l' са средиштем у тачки N и полупречником $NS = NS_a$.

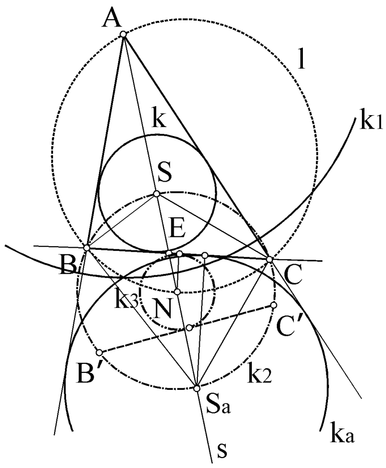
Докажимо наведене особине. Означимо са AL и MN пречнике а са O центар описаног круга око троугла ΔABC (Слика 2.109). Тада је AE симетрала угла $\measuredangle DAO$, па је $\measuredangle DAE = \measuredangle OAE = \measuredangle ANM$ а одавде $\measuredangle BAD = \measuredangle CAL$. Сада, из сличности троуглова ΔABD и ΔALC следи $AB : AL = AD : AC$, тј. $AB \cdot AC = AL \cdot AD$. На исти начин из сличности троуглова ΔADE и ΔNAM следи $AD : AE = AN : MN$, тј. $AE \cdot AN = MN \cdot AD$. Из последње две једнакости, узимајући у обзир да је $MN = AL$ следи $AE \cdot AN = AB \cdot AC = d^2$, па је тиме прва особина доказана.

Друга наведена особина доказује се непосредно јер су S и S_a тачке у којима редом симетрала унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle B$ троугла ΔABE сече праву одређену страницом AE.

Да је тачка N средиште дужи SS_a следи из "Великог " задатка.

Углови $\measuredangle SBS_a$ и $\measuredangle SCS_c$ су први па тачке B и C припадају кругу над пречником SS_a, чиме смо показали да важи и четврта особина.

Сада имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABC.



Слика 2.110.

Конструкција. На произвољној полуправој s са почетком у тачки A одредимо тачку E такву да је $AE = l_a$. Затим, на полуправој s конструишимо тачку N инверзну тачки E у односу на круг инверзије $k_1(A, d)$ и претпоставимо да важи распоред тачака $A - E - N$. Сада на полуправој s конструишимо тачке S и S_a такве да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ и да је N средиште дужи SS_a (Види Задатак 189.). Конструишимо круг k_2 над пречником SS_a. Претпоставимо да је $a < SS_a$. У том случају можемо конструисати неку тетиву $B'C'$ круга k_2 једнаку датој дужи a. Конструишимо круг k_3 са центром у тачки N такав да му је $B'C'$ тангента. У том случају све тангенте круга k_3 одсецају тетиве на кругу k_2 једнаке датој дужи a, па ће то важити и за тангенту t кроз тачку E (под условом да постоји, тј. да тачка E није унутар круга k_3). Означимо са B и C пресечне тачке праве t и круга k_2.Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне, јер A припада симетрали s а B и C припадају правој t која са s има једну заједничку тачку E. Према томе, тачке A, B и C представљају темена неког троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) По конструкцији, тетиве BC и $B'C'$ круга k_2 додирују његов концентрични круг па је $BC = B'C'$. По конструкцији је $B'C' = a$ па је $BC = a$, тј. први услов је задовољен.

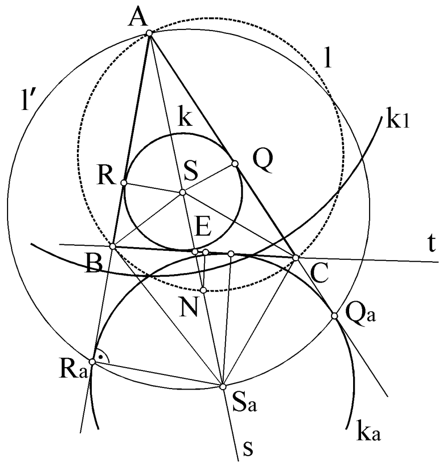
(ii) По конструкцији су S и S_a тачке полуправе AE такве да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ а тачке B и C припадају кругу над пречником SS_a, па је $AE : BE = AS : SE$ и $AC : CE = AS : SE$ па тачка S припада симетралама унутрашњих углова код темена B и C троугла ΔABC. Дакле, тачка S је центар уписаног круга троугла ΔABC па је AS симетрала унутрашњег угла код темена A. С обзиром на то да је по конструкцији $AE = l_a$ и E пресечна тачка правих AS и BC, то је и други услов задатка задовољен.

(iii) Као у анализи задатка доказује се да је $AB \cdot AC = AE \cdot AN$. С друге стране, по конструкцији су тачке E и N инверзне међусобно у односу на круг $k_1(A, d)$, па је $AE \cdot AN = d^2$. Дакле, закључујемо да је $AB \cdot AC = d^2$, па је ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под претпоставком да важи распоред тачака $A - E - N$, тј. $l_a < d$, и да је $a < SS_a$ задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли је тачка E ван, на или унутар круга k_3. У осталим случајевима задатак нема решења. □

Задатак 212. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, полуобим једнак датој дужи p и производ страница AB и AC једнак d^2.*

Упутство: Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка. Означимо са S и S_a редом центре уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, са E и N пресечне тачке



Слика 2.111.

симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC (Слика 2.111).

Тада је $AE \cdot AN = d^2$, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N је средиште дужи SS_a и $AR_a = p$, где смо са R_a означили подножје нормале из тачке S_a на праву AB.

Конструкција би ишла тако што на полуправој As одредимо тачку E такву да је $AE = l_a$, а потом и тачку N такву да је $AE \cdot AN = d^2$ и $A - E - N$. Сада одредимо тачке S и S_a на полуправој As, тако да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ и N средиште дужи SS_a. Конструишимо круг l' над пречником AS_a и на њему тачку R_a такву да је $AR_a = p$. Означимо са R подножје нормале из тачке S на полуправу AR_a и конструишимо кругове $k(S, SR)$ и $k_a(S_a, S_aR_a)$. Конструишимо и другу спољашњу заједничку тангенту поменутих кругова а са Q и Q_a означимо њене додирне тачке са круговима k и k_a. Са B и C означимо пресечне тачке унутрашње заједничке тангенте t поменутих кругова (под условом да постоји) редом са спољашњим заједничким тангентама AR_a и AQ_a. $\square$

Задатак 213. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, полупречник описаног круга једнак датој дужи r и производ страница AB и AC једнак d^2.*

Упутство: Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка. Означимо са S и S_a редом центре уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC а са E и N пресечне тачке симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC. Тада је $AE \cdot AN = d^2$, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N је средиште дужи SS_a и центар O описаног круга l налази се на симетрали дужи AN на растојању r од њених крајева. Темена B и C припадају још и кругу k' над пречником SS_a. $\Box$

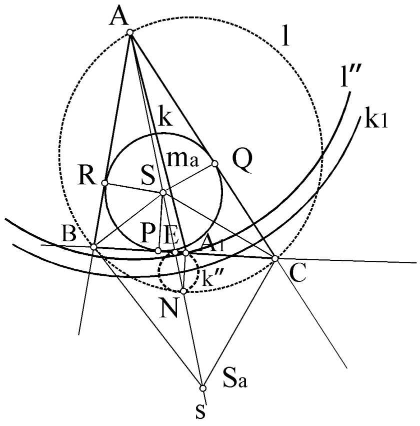
Задатак 214. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, полупречник уписаног круга једнак датој дужи ρ и производ страница AB и AC једнак d^2.*

Упутство: Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка. Нека су S и S_a редом центри уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, а E и N пресечне тачке симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC. Тада је $AE \cdot AN = d^2$, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N је средиште дужи SS_a а темена B и C налазе се у пресеку тангенти из тачке A на круг $k(S, \rho)$ са тангентом из тачке E на круг $k(S, \rho)$.$\Box$

Задатак 215. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, висина из темена A једнака датој дужи h_a и производ страница AB и AC једнак d^2.*

Упутство: Нека су S и S_a редом центри уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC, а E и N пресечне тачке симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC. Тада је $AE \cdot AN = d^2$, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, тачка N је средиште дужи SS_a а подножје D висине из темена A припада кругу над пречником AE и на растојању h_a је од темена A. Подножје нормале из тачаке S на праву DE означимо са P а са k круг са центром у тачки S и полупречником SP. Темена B и C налазе се у пресеку тангенти из тачке A на круг k са правом DE. $\Box$

Задатак 216. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале угла код темена A једнак датој дужи l_a, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и производ страница AB и AC једнак d^2.*



Слика 2.112.

Упутство: Са S и S_a означимо редом центре уписаног и спопља уписаног круга који додирује страницу BC а са E и N пресечне тачке симетрале угла код темена A редом са страницом BC и описаним кругом l троугла ΔABC. Тада је $AE \cdot AN = d^2$, $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ и тачка N је средиште дужи SS_a. Нека је A_1 средиште странице BC. Тачка A_1 налази се у пресеку круга k'' над пречником EN са кругом $l''(A, m_a)$. Нека је P подножје нормале из тачке S на праву EA_1 а k круг са центром у тачки S и полупречником SP. Темена B и C налазе се налазе се у пресеку тангенти из тачке A на круг k са правом EA_1. □

Задатак 217. *Конструисати скуп свих тачака, којима су растојања од двеју датих тачака A и B сразмерна двема датим дужима m и n.*

Решење: Случај када је $m = n$ је тривијалан. Нека је $m \neq n$. Тачке A и B одређују једну праву l. На правој l (Слика 2.113) постоје две тачке C и D такве да је дуж AB подељена тим тачкама у размери $m : n$, тј. да је

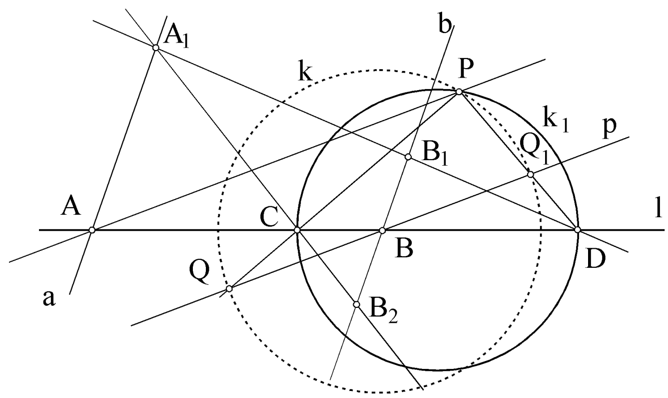
$$AC : CB = AD : BD = m : n.$$

Конструишимо ове две тачке. Нека су a и b две произвољне праве, различите од праве l, такве да је $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$. На правој a одредимо тачку A_1 такву да је $AA_1 = m$ и на правој b тачке B_1 и B_2 такве да је је $n = BB_1 = BB_2$ и важи распоред тачака

$B_1 - B - B_2$. Означимо са C и D пресечне тачке праве l редом са правама A_1B_2 и A_1B_1. Посматрајмо троуглове ΔAA_1C и ΔBB_2C. Из $\measuredangle C = \measuredangle C$ и $AA_1 \parallel BB_2$ следи $AC : CB = AA_1 : B_2B = m : n$. Аналогно за троуглове ΔADA_1 и ΔBDB_1 из $\measuredangle D \equiv \measuredangle D$ и $AA_1 \parallel BB_1$ следи $AD : BD = AA_1 : BB_1 = m : n$. Упоређивањем последњих једнакости добијамо

$$AC : CB = AD : BD = m : n. \tag{2.7}$$

Нека је P произвољна тачка која припада траженом геометријском



Слика 2.113.

месту тачака, тј. нека је

$$AP : BP = m : n. \tag{2.8}$$

Конструишимо праву AP, а затим праву p кроз тачку B тако да је $AP \parallel p$ и означимо са Q и Q_1 пресечне тачке праве p редом са правама PC и PD. Уочимо троуглове ΔAPC и ΔBQC. Из $\measuredangle C = \measuredangle C$ и $AP \parallel BQ$ следи $AP : BQ = AC : BC = m : n$. Аналогно за троуглове ΔAPD и ΔBQ_1D из $\measuredangle D \equiv \measuredangle D$ и $AP \parallel BQ_1$ следи

$$AP : BQ_1 = AD : BD = m : n. \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) следи $AP : BQ_1 = AP : BQ$ а одавде је $BQ_1 = BQ$. Из (2.7) и (2.8) следи $AP : BQ = AP : BP$ тј. $BQ = BP$.

Дакле добили смо да је $BQ_1 = BQ = BP$ па тачке P, Q и Q_1 припадају истом кругу $k(B, BP)$. Како су још тачке Q, B и Q_1

колинеарне и важи распоред тачака $Q - B - Q_1$, то је QQ_1 пречник круга k, па је $\measuredangle QPQ_1$ прав угао. Из $C \in PQ$ и $D \in PQ_1$ следи да је $\measuredangle QPQ_1 \equiv \measuredangle CPD$, тј. и $\measuredangle CPD$ је прав угао. Значи тачка P припада кругу k_1 над пречником CD.

Обратно, нека је P произвољна тачка круга k_1 различита од тачака C и D. Означимо са Q и Q_1 тачке у којима праве PC и PD секу праву p која пролази кроз тачку B а паралелна је правој AP. Тада је, као и малопре, тачка B средиште дужи QQ_1. Осим тога, угао $\measuredangle CPD$ је прав, па је и угао $\measuredangle QPQ_1$ прав. Следи да се средиште круга описаног око троугла ΔQPQ_1 поклапа са средиштем хипотенузе QQ_1, па је $BQ = BQ_1$. С друге стране, $AP : BQ_1 = AC : CB = m : n$, па је $AP : PB = m : n$.

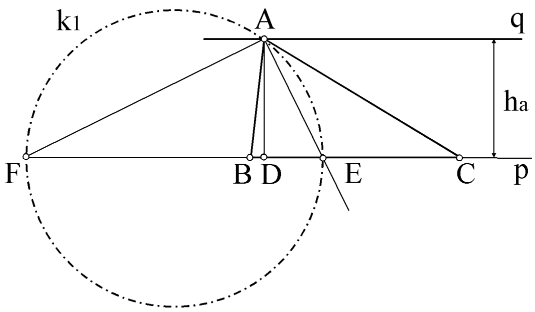
Дакле, скуп свих тачака којима су растојања од двеју датих тачака A и B срезмерна двема неједнаким дужима m и n представља круг k_1 над пречником CD. Тај круг се назива *Аполонијев круг дужи* AB.

Задатак 218. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је страница* BC *једнака датој* a*, висина из темена* A *једнака* h_a *и однос страница* AC *и* AB *једнак односу датих дужи* m *и* n*.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. да му је страница BC једнака датој a, висина из темена A једнака h_a и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.114). Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутрашњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С друге стране, тачка A се налази на растојању h_a од праве BC.

Конструкција. Конструишимо на правој p тачке B и C такве да је $BC = a$. На правој p конструишимо тачке E и F такве да је $CE : EB = SF : EF = m : n$ и $B - E - C$. Случај када је $m = n$ је тривијалан. Нека је $m \neq n$ и k_1 круг над пречником EF, тј. Аполонијев круг дужи BC. На растојању h_a од праве p конструишимо праву q паралелну правој p. Под претпоставком да постоји пресечна тачка круга k_1 и праве q означимо је са A. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.



Слика 2.114.

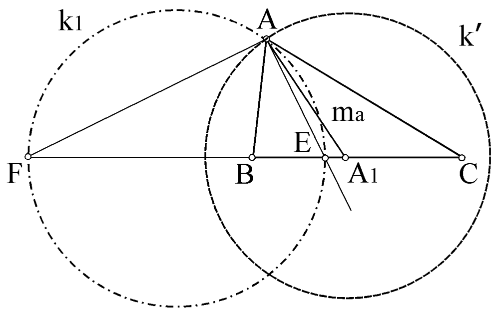
(i) По конструкцији је $BC = a$ па је први услов задовољен.

(ii) Тачка A се по конструкцији налази на растојању h_a од праве $p \equiv BC$ па је h_a висина троугла ΔABC.

(iii) Тачка A по конструкцији припада геометријском месту тачака таквих да је $AC : AB = m : n$, па је троугао ΔABC тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $m \neq n$, задатак има два, једно или нема решења у зависности од тога да ли круг k_1 и права q имају две једну или ниједну заједничку тачку. □

Задатак 219. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој a, тежишна дуж из темена A једнака m_a и однос страница AC и AB једнак односу датих дужи m и n.*



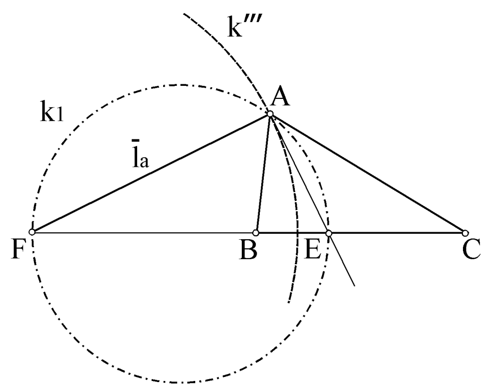
Слика 2.115.

Упутство: Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. да му је страница BC једнака датој a, тежишна дуж из темена A једнака m_a и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.115). Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутршњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С друге стране, тачка A припада кругу k' са центром у средишту дужи BC, тачки A_1, и полупречником m_a. □

Задатак 220. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој a, одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a и однос страница AC и AB једнак односу датих дужи m и n.*

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. страница BC једнака датој a, одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a и размера страница $AC : AB = m : n$. Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутршњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С друге стране, тачка A припада кругу k'' са центром у тачки E и полупречником l_a. □

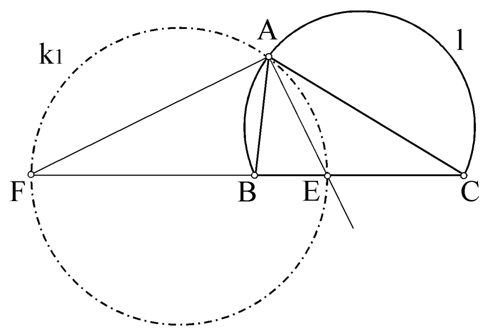
Задатак 221. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој a, одсечак симетрале спољашњег угла код темена A једнак датој дужи $\bar{l}_a$ и однос страница AC и AB једнак односу датих дужи m и n.*



Слика 2.116.

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. страница BC једнака датој a, одсечак симетрале спољашњег угла код темена A једнак датој дужи $\bar{l}_a$ и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.116). Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутрашњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С друге стране, тачка A припада кругу k''' са центром у тачки F и полупречником $\bar{l}_a$. □

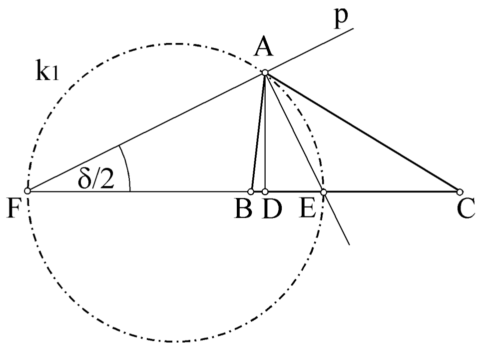
Задатак 222. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој a, угао код темена A једнак датом углу α и однос страница AC и AB једнак односу датих дужи m и n.*



Слика 2.117.

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. страница BC једнака датој a, угао код темена A једнак датом углу α и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.117). Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутрашњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С друге стране, тачка A припада кругу геометријском месту тачака из којих се дуж BC "види" под углом α. □

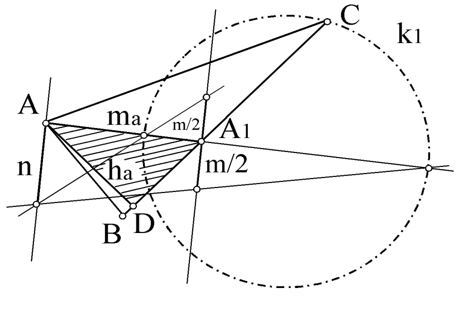
Задатак 223. *Конструисати троугао ΔABC ако му је страница BC једнака датој a, разлика унутрашњих углова код темена B и C једнака датом углу δ и однос страница AC и AB једнак односу датих дужи m и n.*



Слика 2.118.

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. страница BC једнака датој a, разлика унутрашњих углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$ и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.118). Означимо са E и F пресечне тачке редом симетрала унутршњег и спољашњег угла код темена A са страницом BC. Тачка A припада Аполонијевом кругу дужи $BC = a$, тј. кругу над пречником EF. С обзиром на то да је $\measuredangle AFD = \measuredangle DAE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2 = \delta/2$, то тачка A припада полуправој p са почетком у тачки F, која са полуправом FE гради угао једнак $\delta/2$. □

Задатак 224. *Конструисати троугао ΔABC ако му је висина из темена A једнака датој h_a, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и однос страница BC и AC једнак односу датих дужи m и n.*

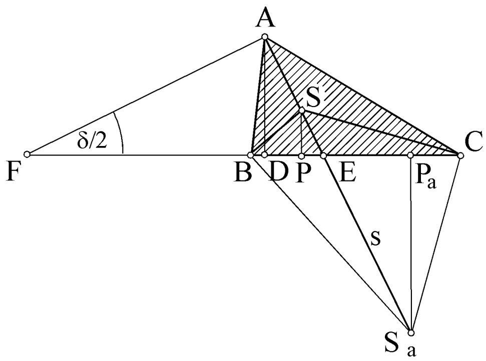


Слика 2.119.

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. нека му је висина из темена A једнака датој h_a, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и размера страница $AC : AB = m : n$ (Слика 2.119). Означимо са D подножје висине из темена A а са A_1 средиште странице BC. Троугао ΔADA_1 се лако може конструисати. Тачка C припада геометријском месту тачака за које важи $CA_1 : CA = (m/2) : n$. □

Задатак 225. *Конструисати троугао ΔABC ако му је разлика углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a и $(b+c) : a = m : n$.*

Решење: *Анализа.* Као и до сад, претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка. Обележимо са D подножје висине из темена A, са S центар уписаног круга k, са S_a центар споља уписаног круга k_a троугла ΔABC (Слика 2.120). Означимо са P и P_a додирне тачке кругова k и k_a са правом BC а са F обележимо пресек симетрале спољашњег угла $\measuredangle A$ са правом BC.



Слика 2.120.

Тада је:

$$\measuredangle DAE = \measuredangle BAE - \measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle A - (R - \measuredangle B)$$
$$= \frac{1}{2}\measuredangle A - \frac{1}{2}(\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C) + \measuredangle B = \frac{1}{2}(\measuredangle B - \measuredangle C) = \delta/2.$$

Углови $\measuredangle DAE$ и $\measuredangle AFD$ су једнаки као углови са нормалним крацима, па је $\measuredangle AFD = \delta/2$.

У троуглу ΔABE права BS је симетрала угла $\measuredangle ABE$, па је

$$AS : SE = BA : BE.$$

Аналогно за троугао ΔACE, права CS је симетрала угла $\measuredangle ACE$, одакле следи

$$AS : SE = CA : CE.$$

Дакле, $AS : SE = BA : BE = CA : CE$, па због особина пропорције следи

$$AS : SE = (AB+CA) : (EB+CE) = (AB+CA) : BC = (b+c) : a = m : n$$

а одавде је

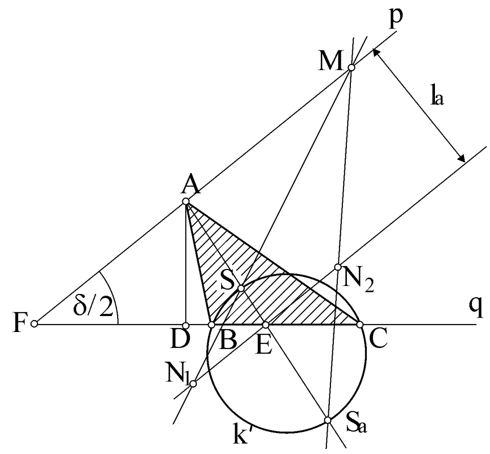
$$AS : SE = m : n.$$

То значи да тачка S дели симетралу AE у размери $m : n$. Аналогно показујемо да важи $AS_a : S_aE = m : n$, тј. да и тачка S_a дели симетралу AE у размери $m : n$.

Угао $\measuredangle SBS_a$ је прав као угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle B$, па према томе тачка B припада кругу k' чији је пречник SS_a. Аналогно је и угао $\measuredangle SCS_a$ прав па и тачка C припада кругу k' над пречником SS_a. Дакле, тачке B и C припадају Аполонијевом кругу дужи AE.

Конструкција. Конструишимо две полуправе p и q са заједничким почетком у тачки F тако да је $\measuredangle(p, q) = \delta/2$. Одредимо затим на полуправој q тачку E на растојању до полуправе p једнаком датој дужи l_a и означимо са A нормалну пројекцију тачке E на полуправу p (Слика 2.121). Дакле важи $AE = l_a$. Конструишимо тачке S и S_a на полуправој AE тако да је $AS : SE = AS_a : S_aE = m : n$ (Задатак 217.). У том циљу на полуправој p одредимо тачку M тако да је $AM = m$ и на правој, која је паралелна правој p и пролази кроз тачку E, одрадимо тачке N_1 и N_2 са разних страна у односу на тачку E тако да је $EN_1 = EN_2 = n$.

Означимо са S унутрашњу а са S_a спољашњу тачку дужи AE, које је деле у размери $m : n$. Дакле важи распоред тачака $A - S - E - S_a$, тј. $m > n$. Конструишимо круг k' над пречником SS_a. Тада је круг k' Аполонијев круг који одговара дужи AE. Тачке S и S_a су са разних страна полуправе q па круг k' и полуправа q имају две заједничке тачке. Обележимо их редом са B и C. Тачке A, B и C су три неколинеарне тачке и одређују темена неког троугла ΔABC.



Слика 2.121.

Доказ. Докажимо да је ΔABC тражени троугао.

(i) Како тачке B и C припадају Аполонијевом кругу, то је

$$BA : BE = SA : SE = m : n, \quad CA : CE = AS : SE = m : n. \tag{2.10}$$

Одавде, BS је симетрала угла $\measuredangle ABE$ а CS је симетрала угла $\measuredangle ACE$. Према томе, BS и CS су симетрале унутрашњих углова $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ троугла ΔABC и секу се у тачки S. Тада ће AS бити симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ΔABC. Из (2.10) следи да је

$$AS : SE = (AB + CA) : (EB + CE) = (AB + CA) : BC,$$

тј. $(AB + CA) : BC = m : n$, односно $(b + c) : a = m : n$, па је један од услова задатка задовољен.

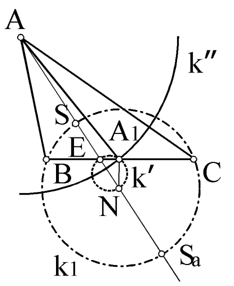
(ii) Означимо са D подножје нормале из тачке A на полуправу q. Тада су углови $\measuredangle DAE$ и $\measuredangle AFD$ као углови са нормалним крацима једнаки. Како је $AF \perp AS$ то је AF симетрала спољашњег угла код темена A. Као у анализи се показује да је $\measuredangle ADE = (\measuredangle B - \measuredangle C)/2$. По конструкцији је $\measuredangle DAE = \measuredangle AFD = \measuredangle(p, q) = \delta/2$. Дакле $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, па је и други услов задатка задовољен.

(iii) Показали смо да је AS симетрала унутрашњег угла код темена A и по конструкцији је $E \in AS$, $AE = l_a$, $AS : SE = AS_a : S_aE$ и $A - S - E - S_a$. То значи да је $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ и $AE = l_a$. Означимо са E' пресечну тачку правих AS и BC. Тада је $\mathcal{H}(A, E'; S, S_a)$, па је

$E \equiv E'$, због јединствености четврте хармонијске тачке, тј. $E \in BC$ па је и трећи услов задатка задовољен. Дакле троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\delta < 2R$ тј. $\delta/2 < R$ задатак има решење ако важи распоред тачака $A - S - E - S_a$, тј. ако је $m > n$. □

Задатак 226. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, тежишна дуж из темена A једнака m_a и $(b+c) : a = m : n$.*



Слика 2.122.

Упутство: Нека троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. нека му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, тежишна дуж из темена A једнака m_a и $(b+c) : a = m : n$ (Слика 2.119), при чему је $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Означимо са E пресечну тачку симетрале угла код темена A са страницом BC а са A_1 средиште странице BC. Као у претходном задатку, тачке B, C, S и S_a припадају Аполонијевом кругу k_1 дужи AE. Означимо са N центар круга k_1. Тачка A_1 припада кругу k' над пречником EN. С друге стране тачка A_1 припада кругу k'' са центром у тачки A и полупречником m_a. Тачке B и C налазе се у пресеку круга k_1 и праве EA_1. □

Коришћењем помоћне конструкције као у Задатку 219. решавају се задаци 227.-231.

Задатак 227. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, полупречник описаног круга једнак датој дужи r и $(b+c) : a = m : n$.*

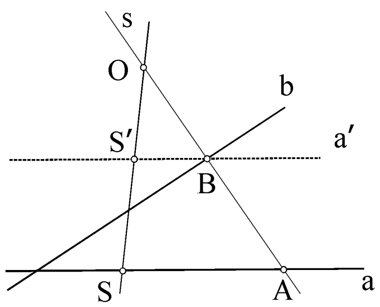
Задатак 228. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, висина из темена A јаднака датој дужи h_a и $(b+c) : a = m : n$.*

Задатак 229. *Конструисати троугао ΔABC ако му је тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a, висина из темена A јаднака датој дужи h_a и $(b+c) : a = m : n$.*

Задатак 230. *Конструисати троугао ΔABC ако му је полупречник описаног круга једнак датој дужи r, висина из темена A јаднака датој дужи h_a и $(b+c) : a = m : n$.*

Задатак 231. *Конструисати троугао ΔABC ако му је разлика унутрашњих углова $\measuredangle B - \measuredangle C = \delta$, висина из темена A јаднака датој дужи h_a и $(b+c) : a = m : n$.*

Задатак 232. *Нека су дате две праве a и b и тачка O ван њих. Конструисати праву s која садржи тачку O и сече праве a и b редом у тачкама A и B тако да су дужи OA и OB сразмерне двема датим дужима m и n.*



Слика 2.123.

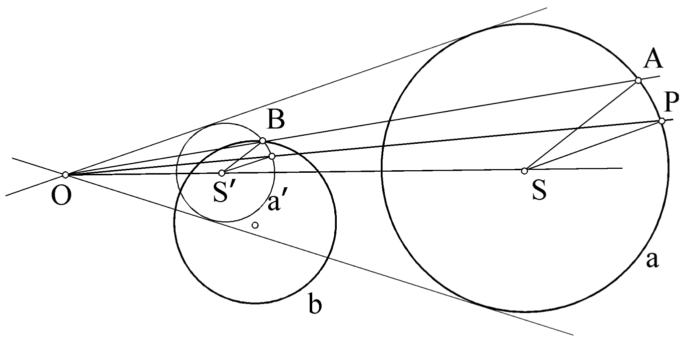
Решење: Претпоставимо да права s пролази кроз тачку O и сече праве a и b у тачкама A и B тако да је $OA : OB = m : n$ (Слика 2.123). То значи да у хомотетији $\mathcal{H}_{O,\frac{m}{n}}$ тачки B одговара тачка A. Тада тачка B припада правој a' која у поменутој хомотетији одговара правој a. То значи да је B заједничка тачка правих a' и b.

Означимо са S произвољну тачку праве a а са S' тачку праве OS такву да је $OS : OS' = m : n$. Тада у поменутој хомотетији права

a', паралелна правој a, кроз тачку S' одговара правој a. Праве a' и b могу да имају заједничких тачака или не. Означимо са B произвољну заједничку тачку поменутих правих, под условом да постоји. С обзиром на то да права OB сече праву a' у тачки B она сече и њој паралелну праву a. Означимо са A пресечну тачку правих OB и a. Троуглови ΔOAS и $\Delta OBS'$ су слични па је $OA : OB = OS : OS'$. С друге стране, по конструкцији је $OS : OS' = m : n$, одкле следи да је $OA : OB = m : n$.

У зависности од тога да ли се праве a' и b поклапају, секу или су паралелне, задатак има бесконачно много решења, једно или нема решења. $\square$

Задатак 233. *Нека су дата два круга a и b и тачка O ван њих. Конструисати праву s која садржи тачку O и сече кругове a и b редом у тачкама A и B тако да су дужи OA и OB сразмерне двема датим дужима m и n.*



Слика 2.124.

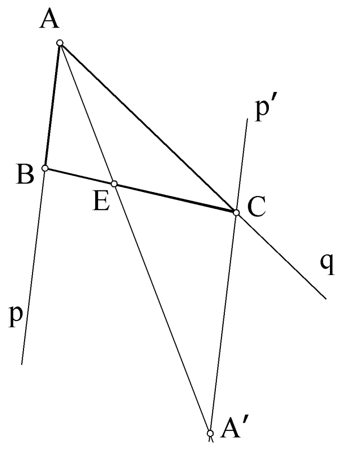
Решење: Претпоставимо да права s пролази кроз тачку O и сече кругове a и b у тачкама A и B тако да је $OA : OB = m : n$ (Слика 2.124). То значи да у хомотетији $\mathcal{H}_{O,\frac{m}{n}}$ тачки B одговара тачка A. Тада тачка B припада кругу a' који у поменутој хомотетији одговара кругу a. То значи да је B заједничка тачка кругова a' и b.

Означимо са S средиште а са P произвољну тачку круга a а са S' и P' тачке које у хомотетији $\mathcal{H}_{O,\frac{m}{n}}$ одговарају тачкама S и P. Тада у тој хомотетији кругу $a(S, SP)$ одговара круг $a'(S', S'P')$. Кругови a' и b могу да имају заједничких тачака или не. Претпоставимо да имају заједничких тачака и једну од њих означимо са B. Како се тачка B налази на кругу a' она у поменутој хомотетији одговара некој тачки A круга a, па су A и B тражене тачке.

У зависности од тога да ли се кругови a' и b поклапају, секу, додирују или немају заједничких тачака, задатак има бесконачно много решења, два, једно или нема решења. □

Задатак 234. *Конструисати троугао ΔABC ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, угао код темена A јаднак датом углу α и однос страница $b : c = m : n$.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да троугао ΔABC задовољава све услове задатка, тј. да му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена A једнак датој дужи l_a, угао код темена A јаднак датом углу α и однос страница $b : c = m : n$ (Слика 2.125). Означимо са E пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена A са страницом BC. Тада је $CE : BE = AC : AB$, тј. $CE : BE = m : n$. То значи да у хомотетији са центром у тачки E и коефицијентом m/n тачки B одговара тачка C. Означимо са A' тачку која у хомотетији $\mathcal{H}_{E,-\frac{m}{n}}$ одговара тачки A, са p полуправу AB, са q полуправу AC а са p' полуправу која у хомотетији $\mathcal{H}_{E,-\frac{m}{n}}$ одовара полуправој p. Тада се тачка C налази у пресеку полуправих p' и q.



Слика 2.125.

Конструкција. Са почетком у тачки A конструишимо полуправе p и q такве да је $\measuredangle(p,q)=\alpha$. Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle(p,q)=\alpha$ и тачку E на полуправој s такву да је $AE=l_a$. Конструишимо полуправу p' која у хомотетији $\mathcal{H}_{E,-\frac{m}{n}}$ одговара полуправој p. Претпоставимо да полуправе p' и q имају заједничку тачку и означимо је са C. Са B означимо пресечну тачку полуправе p са правом CE. Тада, тачка C у хомотетији $\mathcal{H}_{E,-\frac{m}{n}}$ одговара тачки B. Тачке A, B и C су по конструкцији неколинеарне и одређују темена троугла ΔABC.

Доказ. Докажимо да је овако конструисан троугао ΔABC управо тражени троугао.

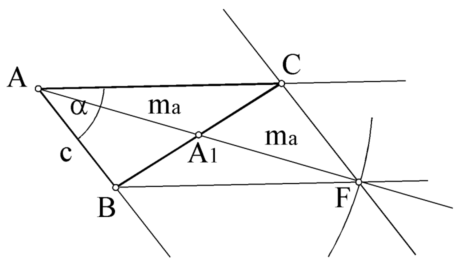
(i) По конструкцији је $\measuredangle(p,q)=\alpha$, $B\in p$, $C\in q$ па је $\measuredangle BAC=\alpha$.

(ii) По конструкцији тачка E се налази у пресеку симетрале угла код темена A са страницом BC, а како је још $AE=l_a$, то је и други услов задатка задовољен.

(iii) Како је E пресечна тачка симетрале s унутрашњег угла код темена A са страницом BC по конструкцији, то је $CE:BE=AC:AB$. С друге стране је $CE:BE=m:n$ па је $AC:AB=m:n$, тј. троугао ΔABC је тражени троугао.

Дискусија. Под условом да је $\alpha<2R$ и полуправе p' и q имају заједничку тачку, задатак има јединствено решење. □

Задатак 235. *Конструисати троугао ΔABC ако му је угао код темена A једнак датом углу α, тежишна дуж из темена A једнака датој дужи m_a и страница AB једнака датој дужи c.*



Слика 2.126.

Упутство: Претпоставимо да је троугао ΔABC тражени троугао (Слика 2.126). Означимо са A_1 средиште странице BC а са F тачку полуправе AA_1 такву да је $AF = AA_1$ и важи распоред тачака $A - A_1 - F$. Четвороугао $ABFC$ је паралелограм јер му се дијагонале полове. Њему су познати углови, једна страница и дијагонала па га лако можемо конструисати. Тачке A, B и C одређују темена траженог троугла. $\square$

Коришћењем помоћне конструкције као у Задатку 232. или 233. решавају се задаци 236.-243.

Задатак 236. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је тежишна дуж из темена* A *једнака датој дужи* m_a *а висине из темена* B *и* C *једнаке редом датим дужима* h_b *и* h_c.

Задатак 237. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена* A *једнак датој дужи* l_a *а висине из темена* B *и* C *једнаке редом датим дужима* h_b *и* h_c.

Задатак 238. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је страница* BC *једнака датој дужи* a, *тежишна дуж из темена* B *једнака датој дужи* m_b *а висина из темена* A *једнака датој дужи* h_a.

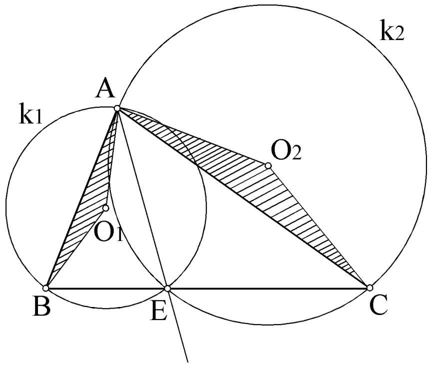
Задатак 239. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је страница* BC *једнака датој дужи* a, *тежишна дуж из темена* C *једнака датој дужи* m_c *а висина из темена* B *једнака датој дужи* h_b.

Задатак 240. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је страница* BC *једнака датој дужи* a, *полупречник описаног круга једнак датој дужи* r *и угао* $\measuredangle(a, m_b)$ *једнак датом углу* ω.

Задатак 241. *Конструисати троугао* ΔABC *ако су му странице* AC *и* AB *једнаке редом датим дужима* b *и* c *а тежишна дуж из темена* A *једнака датој дужи* m_a.

Задатак 242. *Конструисати троугао* ΔABC *ако су му странице* AC *и* AB *једнаке редом датим дужима* b *и* c *а одсечак симетрале угла код темена* A *једнак датој дужи* l_a.

Задатак 243. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је страница* BC *једнака датој дужи* a, *тежишна дуж из темена* B *једнака датој дужи* m_b *и однос страница* $b : c = m : n$.



Слика 2.127.

Задатак 244. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је одсечак симетрале унутрашњег угла код темена* A *једнак датој дужи* l_a*, а полупречници кругова описаних око троуглова* ΔABE *и* ΔACE *једнаки редом датим дужима* r_1 *и* r_2*.*

Упутство: Нека је троугао ΔABC тражени троугао (Слика 2.127). Означимо са O_1 и O_2 средишта кругова k_1 и k_2 описаних редом око троуглова ΔABE и ΔACE. Тада су троуглови ΔABO_1 и ΔACO_2 слични, па је

$$AB : AC = AO_1 : AO_2 = r_1 : r_2.$$

С друге стране је $AB : AC = BE : EC$, па је $BE : EC = r_1 : r_2$. □

Задатак 245. *Конструисати троугао* ΔABC *ако му је угао код темена* A *једнак датом углу* α*, а полупречници кругова описаних око троуглова* ΔABE *и* ΔACE *једнаки редом датим дужима* r_1 *и* r_2*, где је* E *пресечна тачка симетрале угла код темена* A *са страницом* BC*.*

Упутство: Нека је троугао ΔABC тражени троугао (Слика 2.127). Означимо са O_1 и O_2 средишта кругова k_1 и k_2 описаних редом око троуглова ΔABE и ΔACE. Тада је $\measuredangle O_1AO_2 = \measuredangle BAC$. □

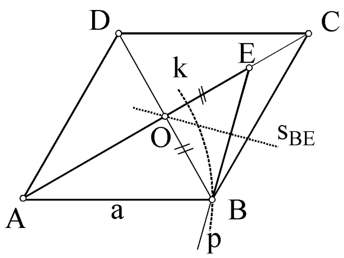
Задатак 246. *Дата су два круга* k_1 *и* k_2 *и тачка* S*. Конструисати две паралелне праве* t_1 *и* t_2 *од којих прва додирује круг* k_1 *а друга* k_2 *тако да одстојања тачке* S *до правих* t_1 *и* t_2 *буду сразмерна двема датим дужима* m *и* n*.*

Упутство: Означимо са k_1' круг који у хомотетији $\mathcal{H}_{S,m/n}$ одговара кругу k_1. Тада је права t_2 заједничка тангента кругова k_1' и k_2. $\square$

2.7 Конструкције четвороуглова

Задатак 247. *Конструисати ромб ако му је страница једнака датој дужи a а збир дијагонала $d_1 + d_2$ једнак датој дужи d.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је четвороугао $ABCD$ тражени ромб. Нека је $AB = a$ страница (ивица) ромба а $d_1 = AC$ и $d_2 = BD$ дијагонале ромба. Дијагонале ромба се полове и међјусобно су нормалне. Означимо са O пресечну тачку дијагонала AC и BD. Тада је $OA + OB = d_1/2 + d_2/2 = d/2$, $AB = a$, $\measuredangle AOB$ прав угао. Означимо са E тачку праве AC такву да је $OB = OE$ и важи распоред тачака $A - O - E$ (Слика 2.128). Троугао ΔOBE је једнакокраки. Сада је



Слика 2.128.

$AE = AO + OE = AO + OB = (d_1 + d_2)/2 = d/2$, $\measuredangle AEB = R/2$, $AB = a$. Дакле, имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔABE. Тачка O налази се у пресеку симетрале дужи BE и странице AE троугла ΔABE.

Конструкција. Конструишимо дуж AE такву да је једнака датој дужи $d/2$. Са почетком у тачки E конструишимо полуправу p такву да је угао $\measuredangle(AE, p) = R/2$. Конструишимо круг k са центром у тачки A и полупречником a. Конструишимо симетралу s дужи BE. Пресечну тачку круга k и полуправе p означимо са B.

Означимо са O пресечну тачку симетрале s и дужи AE . На полуправој BO конструишимо тачку D такву да је $OB = OD$ и важи распоред тачака $B - O - D$. Затим, на полуправој AO конструишимо тачку C такву да је $OA = OC$ и да важи распоред тачака $A - O - C$. Тачке A, B, C и D одређују темена неког четвороугла $ABCD$.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани четвороугао управо тражени ромб.

(i) По конструкцији, дијагонале овог четвороугла се полове и нормалне су па је $ABCD$ ромб.

(ii) Тачка B, по конструкцији, припада кругу $k(A, a)$, па је страница AB једнака датој дужи a.

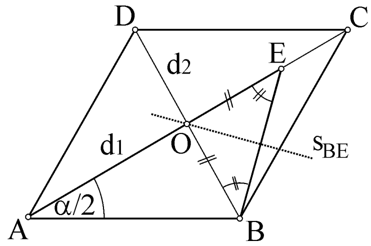
(iii) По конструкцији је још и $AE = d/2$. Троугао ΔOBE је једнакокраки па је $OB = OE$. С обзиром на распоред тачака $A - O - E$ имамо $AE = AO + OE = AO + OB = (d_1 + d_2)/2$. С друге стране, по конструкцији је $AE = d/2$ па је $(d_1 + d_2)/2 = d/2$, тј. $d_1 + d_2 = d$. Дакле, $ABCD$ је заиста тражени ромб.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $A - O - E$, у зависности од тога да ли круг $k(A, a)$ и полуправа p имају две, једну или немају заједничких тачака, задатак ће имати два, једно или неће имати решења. □

Задатак 248. *Конструисати ромб ако му је угао код темена A једнак датом углу α и збир дијагонала $d_1 + d_2$ једнак датој дужи d.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је $ABCD$ тражени ромб. Означимо са O пресек дијагонала. Угао између дијагонала $AC = d_1$ и $BD = d_2$ је прав, тј. $\measuredangle AOB = R$ (Слика 2.129). На дијагонали AC конструишимо тачку E таква да је $OB = OE$ и важи распоред тачака $A - O - E$. Тада је $\measuredangle AEB = R/2$ јер је троугао ΔOEB једнакокраки и правоугли. Такође, $AE = AO + OE = AO + OB = (d_1 + d_2)/2 = d/2$ тј. $AE = d/2$, $\measuredangle EAB = \alpha/2$ и тачка O припада симетрали дужи BE. Према томе, имамо довољно елемената за конструкцију ромба.

Конструкција. Конструишимо дуж AE једнаку датој дужи $d/2$. Са почетком у тачки A конструишимо полуправу p такву да је $\measuredangle(AE, p) = \alpha/2$ а са почетком у тачки E конструишимо полуправу q, такву да је $\measuredangle(EA, q) = R/2$, при чему су полуправе p и q са исте стране праве AE. Пресечну тачку полуправих p и q означимо са B. Конструишимо симетралу s дужи BE и пресечну тачку симетрале s и дужи AE означимо са O и претпоставимо да важи распоред тачака $A - O - E$. Затим на полуправој BO конструишимо тачку



Слика 2.129.

D такву да је $BO = OD$ и да важи распоред тачака $B - O - D$. На полуправој AO конструишимо тачку C такву да је $AO = OC$ и важи распоред тачака $A - O - C$. Тачке A, B, C и D одређују темена траженог ромба.

Доказ. Докажимо да је овако конструисани четвороугао $ABCD$ управо тражени ромб.

(i) По конструкцији је угао $\measuredangle AOB$ прав јер је троугао ΔBOE једнакокрако правоугли. Како је још $AO = OC$, $A - O - C$, $BO = OD$ и $B - O - D$ то је $ABCD$ ромб, јер му се дијагонале AC и BD полове и нормалне су међу собом.

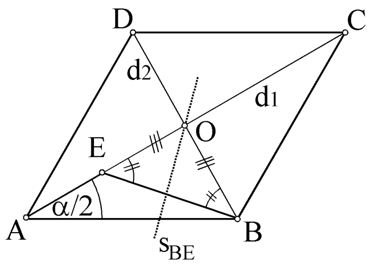
(ii) Четвороугао $ABCD$ је ромб па је $\measuredangle A = 2\measuredangle BAC = 2 \cdot \alpha/2 = \alpha$, тј. $\measuredangle A = \alpha$, па је и овај услов задовољен.

(iii) Из $A - O - E$ и $OB = OE$ следи $AE = AO + OE = AO + OB = d_1/2 + d_2/2$, тј. $AE = d_1/2 + d_2/2$. По конструкцији је $AE = d/2$ па је $d_1/2 + d_2/2 = d/2$, тј. $d_1 + d_2 = d$. Дакле четвороугао $ABCD$ је тражени ромб.

Дискусија. Под условом да важи распоред тачака $A - O - E$ и да је угао α мањи од опруженог угла, задатак има јединствено решење. □

Задатак 249. *Конструисати ромб ако му је угао код темена A једнак датом углу α и разлика дијагонала $d_1 - d_2$ једнака датој дужи d.*

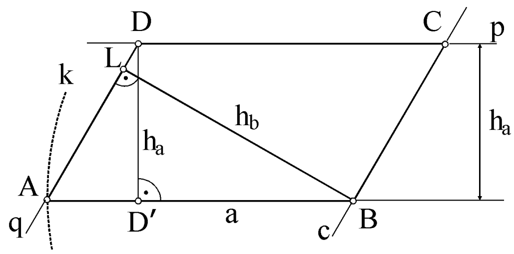
Упутство: Претпоставимо да је $ABCD$ тражени ромб. Означимо са O пресек дијагонала. Угао између дијагонала $AC = d_1$ и $BD = d_2$ је прав, тј. $\measuredangle AOB = R$ (Слика 2.130). На дијагонали AC конструишимо тачку E таква да је $OB = OE$ и важи распоред тачака $A - E - O$. Тада је $\measuredangle AEB = 3R/2$ јер је троугао ΔOEB једнакокраки и правоугли. Такође, $AE = AO - OE = AO - OB = (d_1 - d_2)/2 = d/2$ тј. $AE = d/2$, $\measuredangle EAB = \alpha/2$ и тачка O припада симетрали дужи BE. □



Слика 2.130.

Задатак 250. *Конструисати паралелограм ако му је једна страница једнака датој дужи a и висине једнаке редом датим дужима h_a и h_b.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је $ABCD$ тражени паралелограм, тј. нека је страница $AB = a$, висина која одговара страниици AB једнака h_a и висина која одговара страници BC једнака h_b (Слика 2.131). Означимо са L подножје нормале из тачке B на праву AD. За троугао ΔABL је $AB = a$, $BL = h_b$ и угао $\measuredangle BLA = R$. Теме D паралелограма $ABCD$ припада полуправој AL и налази се на растојању h_a од праве AB.



Слика 2.131.

Конструкција. Конструишимо дуж BL једнаку датој дужи h_b. У тачки L конструишимо полуправу q нормалну на LB. Пресек круга $k(B, a)$ и полуправе q означимо са A. На растојању h_a од праве AB конструишимо праву p паралелну правој AB такву да су права p и тачка L са исте стране праве AB. Означимо са D пресечну тачку правих q и p. Затим конструишимо праву c кроз тачку B паралелну правој q и означимо са C пресечну тачку правих p и c. Тачке A, B, C и D одређују темена неког четвороугла $ABCD$.

Доказ. Докажимо да је $ABCD$ тражени паралелограм.

(i) По конструкцији су праве AB и $CD \equiv p$ међусобно паралелне. Исто важи и за праве $AD \equiv q$ и $BC \equiv c$, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

(ii) По конструкцији $A \in k(B, a)$ па је $AB = a$.

(iii) Означимо са D' подножје нормале из тачке D на праву AB. По конструкцији тачка D припада правој p, која је на растојању h_a од AB и паралелна је са AB па је $DD' = h_a$ висина паралелограма која одговара страници AB.

(iv) По конструкцији је BL управна на $AD \equiv AL$ и $BL = h_b$, па је висина која одговара страници BC једнака h_b.

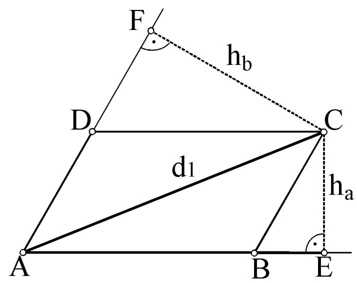
Дакле, четвороугао $ABCD$ је тражени паралелограм.

Дискусија. Под условом да се троугао ΔABL може конструисати, тј. да је $h_b < a$, задатак има решење. У осталим случајевима задатак нема решења. □

Задатак 251. *Конструисати паралелограм $ABCD$ ако му је једна дијагонала једнака датој дужи d_1 и висине једнаке редом датим дужима h_a и h_b.*

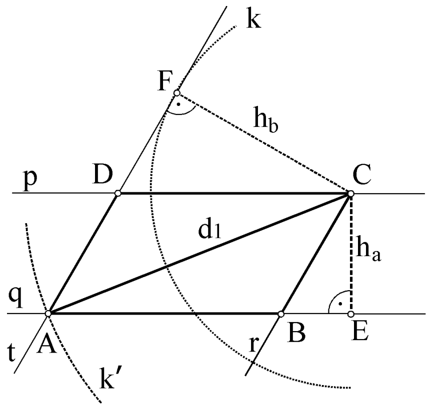
Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је $ABCD$ тражени паралелограм. Нека је $AC = d_1$ дијагонала паралелограма а E и F подножја нормала из тачке C редом на праве AB и AD. Тада су $CE = h_a$, $CF = h_b$ висине посматраног паралелограма из тачке C (Слика 2.132). Нека још важи и распоред тачака $A - B - E$ и $A - D - F$. Имамо довољно елемената за конструкцију троугла ΔACE. Уочимо још да се тачка D налази у пресеку правих p и t, при чему је p права која пролази кроз C и паралелна је правој AE, а t тангента из тачке A на круг $k(C, h_b = CF)$. Сада можемо прећи на конструкцију паралелограма.

Конструкција. Конструишимо две паралелне праве p и q на растојању h_a. Нека је C произвољна тачка праве p (Слика 2.133). Означимо са E подножје нормале из тачке C на праву q. Конструишимо круг $k'(C, d_1)$. Круг k' и права q могу имати две једну или ни једну заједничку тачку у зависности од тога да ли је $d_1 > h_a$, $d_1 = h_a$ или $d_1 < h_a$. Нека имају заједничких тачака и једну од њих означимо са A. Конструишимо круг $k(C, h_b)$. Тада се из тачке A на круг k могу конструисати две једна или ни једна тангента у зависности од тога да ли је $d_1 > h_b$, $d_1 = h_b$ или $d_1 < h_b$. Нека је t



Слика 2.132.

тангента из тачке A на круг k. Означимо са D пресечну тачку правих t и p. Кроз тачку C конструишимо праву r паралелну правој t и означимо са B пресечну тачку правих q и r



Слика 2.133.

Доказ. Докажимо да је четвороугао $ABCD$ тражени паралелограм.

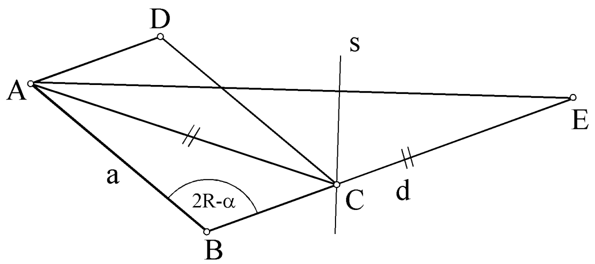
(i) Наспрамне странице четвороугла $ABCD$ припадају паралелним правама по конструкцији. Значи $ABCD$ је паралелограм.

(ii) По конструкцији су висине CE и CF једнаке редом дужима h_a и h_b.

(iii) Тачка A припада кругу $k'(C, d_1)$ па је $AC = d_1$ дијагонала. Доказ је завршен.

Дискусија. Ако је d_1 мања од h_a или h_b задатак нема решења. Ако је d_1 једнака једној а већа од друге дужи скупа $\{h_a, h_b\}$ онда задатак има два решења. Уколико је d_1 већа од обе дужи h_a и h_b задатак има четири решења. □

Задатак 252. *Конструисати паралелограм $ABCD$ ако му је ивица AB једнака датој дужи a, угао код темена A једнак датом углу α и збир странице BC и дијагонале AC једнак датој дужи d.*



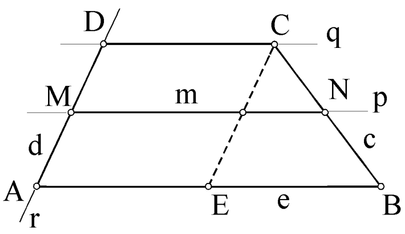
Слика 2.134.

Упутство: Претпоставимо да је $ABCD$ тражени паралелограм. Нека је E тачка праве BC таква да је $CE = AC$ и $B - C - E$ (Слика 2.134). Сада је $BE = BC + CE = BC + AC = d$. Дакле, за троугао ΔABE имамо познате две странице $AB = a$, $BE = d$ и угао $\measuredangle ABE = 2R - \alpha$, па га лако можемо конструисати. Троугао ΔACE је једнакокраки па му врх C припада симетрали s основице AE. □

Задатак 253. *Конструисати трапез $ABCD$ ако су краци BC и AD, средња линија и разлика основица AB и CD подударни редом датим дужима c, d, m, e.*

Решење: *Анализа.* Претпоставимо да је $ABCD$ тражени трапез. Означимо са M и N средишта кракова AD и BC редом, и нека је E пресечна тачка праве AB са правом, која је у тачки C паралелна са правом AD (Слика 2.135). Тада је четвороугао $AECD$ паралелограм, па је $CE \cong AD \cong d$ и $EB = AB - CD = a - b = e$. Дакле, троугао ΔEBC се може конструисати. Тачка M припада правој која садржи средиште N дужи BC и паралелна је са BE при чему је $MN = m$. Сада имамо довољно елемената за конструкцију трапеза $ABCD$.

Конструкција. Конструишимо троугао EBC за који је $BC = c$, $EC = d$ и $EB = e$. Нека је N средиште дужи BC (Слика 2.135).



Слика 2.135.

Конструишимо праву p кроз тачку N паралелну правој EB. Одредимо тачку M на правој p такву да је $MN = m$. Конструишимо затим праву q кроз тачку C паралелну правој p и праву r кроз тачку m паралелну правој CE. Означимо са A и D пресечне тачке праве r редом са правама EB и q. Тачке A, B, C и D одређују четвороугао $ABCD$. је тражени трапез.

Доказ. Докажимо да је $ABCD$ тражени трапез.

(i) По конструкцији странице AB и CD су паралелне, па је $ABCD$ трапез.

(ii) По конструкцији четвороугао $AECD$ је паралелограм па је $AD = EC$. С друге стране, по конструкцији је $EC = d$ па је $AD = d$.

(iii) По констрикцији је $BC = c$.

(iv) Дуж MN је средња линија трапеза $ABCD$, јер је N средиште дужи BC и права $MN \equiv p$ је паралелна са AB. Како је још по конструкцији $MN = m$, следи да је четвороугао $ABCD$ тражени трапез.

Дискусија. Да би задатак имао решење, потребан и довољан услов је:

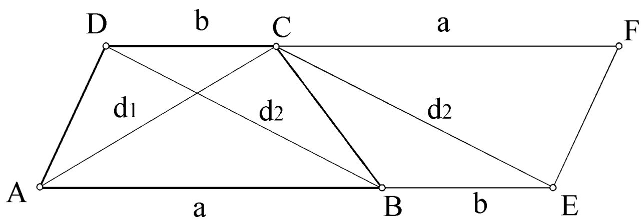
$$|c - d| < a - b < c + d, \quad m > (a - b)/2.$$

□

Задатак 254. *Конструисати трапез $ABCD$ ако су му дате све четири странице.*

Упутство: Претпоставимо да је $ABCD$ тражени трапез. Нека су му странице AB, CD, BC и AD једнаке редом датим дужима a, b, c и d. Означимо са E пресечну тачку праве AB са правом, која је у тачки C паралелна са правом AD. Тада је четвороугао $AECD$ паралелограм, па је $CE = AD = d$ и $EB = AB - CD = a - b = e$. Дакле, троугао ΔEBC се може лако конструисати, јер су му познате све три странице, а самим тим и трапез $ABCD$. □

Задатак 255. *Конструисати трапез $ABCD$ ако су му дате обе основице и обе дијагонале.*



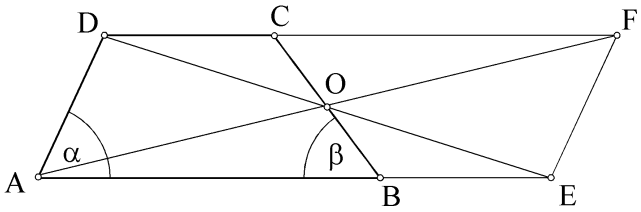
Слика 2.136.

Упутство: Претпоставимо да је $ABCD$ тражени трапез, тј. нека су му основице $AB = a$, $CD = b$ а дијагонале $AC = d_1$ и $BD = d_2$. На правама AB и CD конструишимо тачке E и F такве да је $BE = CD = b$ и $CF = AB = a$ при чему важе распореди тачка $A - B - E$ и $D - C - F$ (Слика 2.136). Тада је четвороугао $AEFD$ паралелограм, па је $EF = AD$ и $\measuredangle DAB = \measuredangle EFC$. То значи да су троуглови ΔABD и ΔFCE подударни, па је $CE = BD = d_2$. Дакле, за троугао ΔAEC познате су странице $AE = a + b$, $CE = d_2$ и $AC = d_1$, па га лако можемо конструисати. □

Задатак 256. *Конструисати трапез $ABCD$ ако су му дате обе основице и углови на мањој основици.*

Упутство: Нека су основице трапеза $ABCD$ редом једнаке a и b $(a > b)$ и углови на мањој основици $\measuredangle C = \gamma$ и $\measuredangle D = \delta$. Означимо са E пресечну тачку правих BC и AD. Тада, у троуглу ΔCDE је позната страница и два спољашња угла на њој, па га лако можемо конструисати. Троуглови ΔABE и ΔDCE су слични па важи $AE : DE = a : b$. □

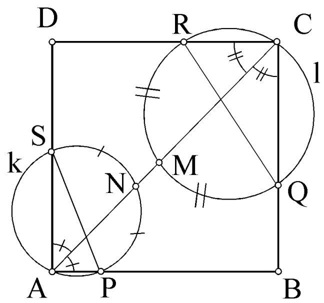
Задатак 257. *Конструисати трапез $ABCD$ ако му је дат збир основица, висина и углови на већој основици.*



Слика 2.137.

Упутство: Претпоставимо да је $ABCD$ тражени трапез. Нека су му основице $AB = a$, $CD = b$, $a + b = d$, висина h и углови на већој основици $\measuredangle A = \alpha$ и $\measuredangle B = \beta$. На правама AB и CD конструишимо тачке E и Fтакве да је $BE = CD = b$ и $CF = AB = a$ при чему важе распореди тачка $A - B - E$ и $D - C - F$ (Слика 2.137). Тада је четвороугао $AEFD$ паралелограм код кога је $AE = d$, $\measuredangle A = \alpha$ и висина му је h, па га лако можемо конструисати. Пресечна тачка O дијагонала AF и DE паралелограма $AEFD$ представља средиште крака BC трапеза $ABCD$. □

Задатак 258. *Конструисати квадрат $ABCD$ такав да му четири унапред задате тачке P, Q, R и S припадају редом ивицама AB, BC, CD и DA.*



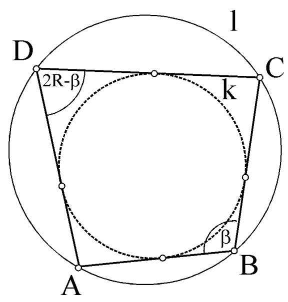
Слика 2.138.

Упутство: Нека је $ABCD$ тражени квадрат, тј. нека му четири унапред задате тачке P, Q, R и S припадају редом ивицама AB, BC, CD и DA (2.138). Тада су углови $\measuredangle PAS$ и $\measuredangle QCR$ прави, па темена A и B припадају круговима k и l редом над пречницима PS

и QR. Дијагонала AC квадрата је симетрала поменутих углова. Означимо са N и M пресечне тачке дијагонале AC редом са круговима k и l. То значи да да су кружни лукови $\overset{\frown}{PN}$ и $\overset{\frown}{NS}$ круга k једнаки међусобно. Аналогно, једнаки су и кружни лукови $\overset{\frown}{QM}$ и $\overset{\frown}{MR}$ круга l. Дакле, дијагонала AC садржи средишта N и M одговарајућих полукругова одређених са k и l.

Према томе, најпре конструишемо кругове k и l, затим тачке N и M а онда и темена A и C као друге пресечне тачке праве MN и кругова k и l редом. □

Задатак 259. *Нека су A, B и C три неколинеарне тачке. Конструисати тачку D такву да је четвороугао $ABCD$ тетивни и тангентни.*



Слика 2.139.

Упутство: Нека је $AB < BC$. Претпоставимо да је $ABCD$ тражени четвороугао, тј. да је тетивни и тангентни (Слика 2.139). Из услова да је четвороугао тетивни следи да су углови $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ суплементи, тј. $\measuredangle ADC = 2R - \measuredangle ABC = \omega$. Из услова да је четвороугао тангентни следи да су му збирови наспрамних страница једнаки, тј. $AD + BC = AB + CD$. Одавде је $CD - AD = BC - AB = d$.

Сада се конструкција четвороугла $ABCD$ своди на конструкцију троугла ΔADC, за који знамо угао $\measuredangle ADC = \omega$, разлику страница $CD - AD = d$ и страницу AC.

Случај када је $AB < BC$ разматра се аналогно.

Ако је $AB = BC$ онда је и $AD = CD$, тј. $ABCD$ је делтоид са правим угловима код темена A и C. □

Задатке 260.-262. препуштамо читаоцима за вежбу.

Задатак 260. *Конструисати четвороугао $ABCD$ ако су му дати следећи елементи:*

а) a, b, c, d, α; б) a, b, c, d_1, α; в) a, b, c, α, δ;
г) a, b, c, d, $\measuredangle(a,c)$; д) a, d_1, d_2, β, γ; ђ) a, c, d_1, $\measuredangle(b,d_1)$, $\measuredangle(d_1,d_2)$.

где смо означили $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, а углови код темена A, B, C, D су редом α, β, γ, δ.

Задатак 261. *Конструисати трапез $ABCD$ ако му је дато:*

а) a, b, c, h, б) a, b, d, α, в) a, b, d_1, d_2,
г) $a - b$, h, d_1, d_2 $(a > b)$ д) $a + b$, h, α, β, ђ) a, b, c, d $(a > b)$.

где смо означили основице AB и CD редом са a и b, краке BC и DA редом са c и d и са h висину која одговара основицама.

Задатак 262. *Конструисати једнакокраки трапез $ABCD$ ако му је дато:*

а) a, b, c, б) a, c, α, в) a, b, α,
г) a, b, d, д) $a + b$, c, d, ђ) $a - b$, c, d $(a > b)$,

где смо означили основице AB и CD редом са a и b, краке BC и DA са c а са d дијагоналу трапеза.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, *Основания геометрии*, Издательство Наука, Москва, 1987.

[2] Т. Анђелић, *Елементарна геометрија*, Техничка књига, Београд, 1965.

[3] С. Л. Анатольевич *Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[4] И. Я. Бакельман, *Вышая геометрия*, Издательство Просвещение, Москва, 1967.

[5] С. В. Бахвалов, *Основания геометрии*, Вышая школа, Москва, 1972.

[6] K. Borsuk and W. Szmielew, *Fondations of Geometry*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1960.

[7] В. Варићак, *Први оснивачи нееуклидске геометрије*, Рад. Југ. Акад. Знан. Ум. 169(1907), 110–194.

[8] H. Weil, *Symmetry*, Princeton university Press, 1952.

[9] H. W. Guggenheimer, *Plane geometry and its groups*, Holden-Day, San Francisko, 1967.

[10] Еуклид, *Еуклидови елементи*, Прва књига, превод А. Билимовић, Научна књига, Београд, 1949.

[11] Еуклид, *Еуклидови елементи*, Друга књига, превод А. Билимовић, Научна књига, Београд, 1950.

[12] П. Јаничић, *Збирка задатака из геометрије*, Седмо издање, Математички факултет, Београд, 2007.

[13] Н. В. Ефимов, *Вышая геометрия*, издание пятое, Наука, Москва, 1971.

[14] Н. В. Јефимов, *Виша геометрија*, Научна књига, Београд, 1948.

[15] P. Yale, *Geometry and Symmetry*, Holden-Day, 1968.

[16] Д. Лопандић, *Геометрија*, Научна књига, Београд, 1979.

[17] Д. Лопандић, *Збирка задатака из основа геометрије са решењима*, Природно-математички факултет у Београду, 1980.

[18] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Графити и Математички факултет Београд, 1994.

[19] С. Минтаковић, *Аксиоматска изградња геометрије*, Школска књига, Загреб, 1962.

[20] С. Минтаковић, *Нееуклидска геометрија Лобачевског*, Школска књига, Загреб, 1972.

[21] А. В. Погорелов, *Предавања из основа геометрије*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1963.

[22] А. В. Погорелов, *Элементарная геометрия*, Издательство Наука, Москва, 1977.

[23] М. Првановић, *Нееуклидске геометрије*, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1974.

[24] М. Првановић, *Основи геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1987.

[25] Пуцељ Иван, *Неевклидичне геометрије*, Љубљана, 1969.

[26] М. Радојчић, *Општа математика*, Научна књига, Београд, 1950.

[27] М. Радојчић, *Елементарна геометрија*, Научна књига, Београд, 1961.

[28] М. Станковић, *Основи геометрије*, Природно-математички факултет, Ниш, 2006.

[29] М. Станковић, *Еуклидска геометрија*, Природно-математички факултет, Ниш, 2014.

[30] М. Станковић, М. Златановић, *Нееуклидске геометрије*, Природно-математички факултет, Ниш, 2006.

[31] Р. Тошић, В. Петровић, *Збирка задатака из основа геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1982.

[32] А. И. Фетисов, *О еуклидској и нееуклидским геометријама*, Школска књига, Загреб, 1981.

[33] Д. Хилберт, *Osnove geometrije*, Математички институт САНУ, Београд, 1957.

[34] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Toronto-New York, 1967.

[35] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Fourth ed., Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[36] Н. Чепинац, *Геометрија за више разреде гимназије, Стереометрија*, Знање, Београд, 1951.