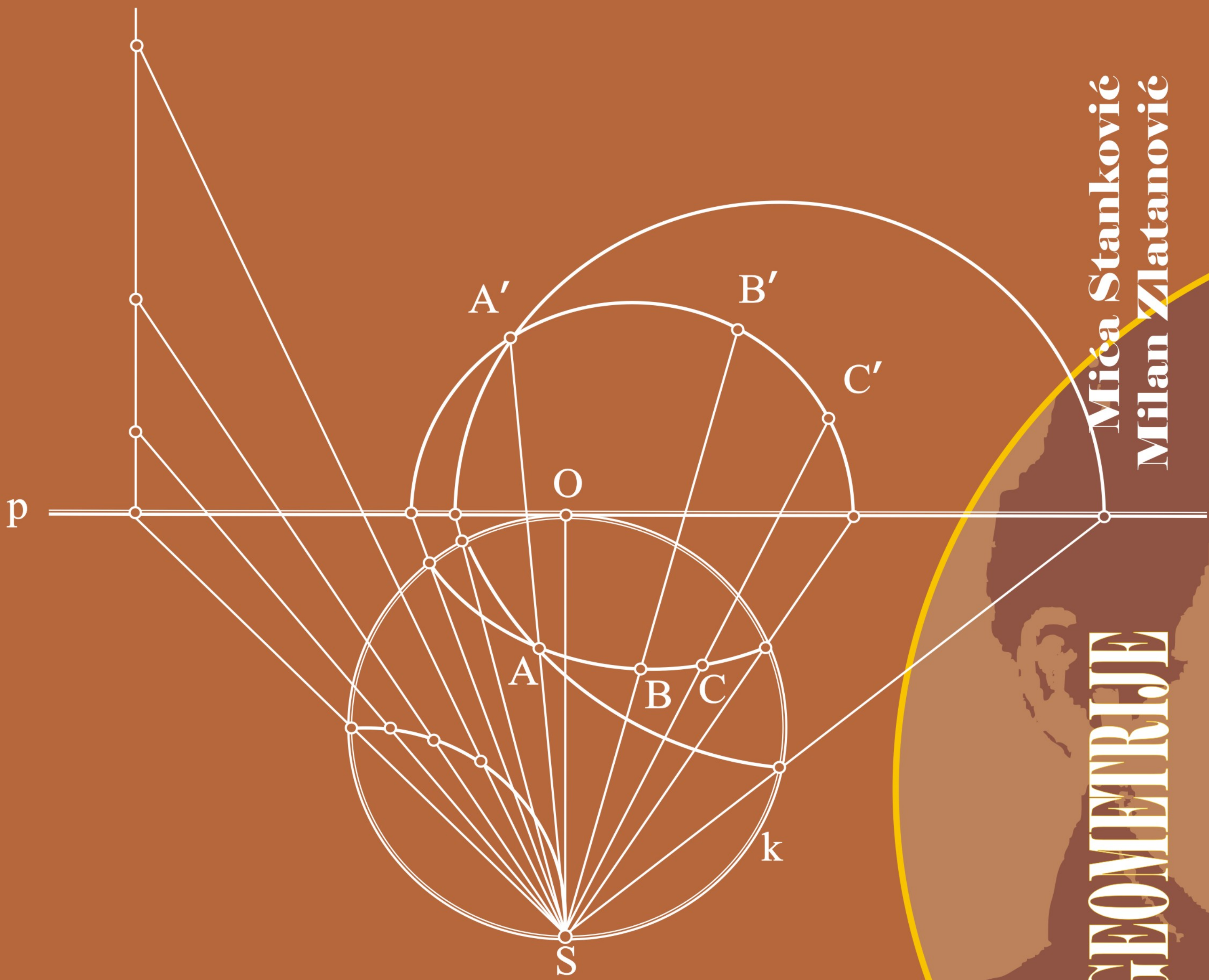


ISBN 978-86-6275-024-2

Mića Stanković
Milan Zlatanović

NEEUKLIDSKE GEOMETRIJE

Mića Stanković
Milan Zlatanović

NEEUKLIDSKE GEOMETRIJE

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet
Niš, 2014

Mića Stanković
Milan Zlatanović

NEEUKLIDSKE GEOMETRIJE

Prvo izdanje

Serija:
udžbenici

Izdavač:
Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet
Niš, 2014

Izdavač:
Prirodno matematički fakultet, Niš

Recenzenti:
Dr Ljubica Velimirović, vanr. prof. PMF-a u Nišu,
Dr Svetislav Minčić, red. prof. u penziji.

Serija:
udžbenici

Obrada računarom i dizajn:
Mića Stanković

Štampa: Sven, Niš
Tiraž: 100

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, broj 1253/1-01 od 18.12.2013. godine odobreno je štampanje rukopisa kao univerzitetskog udžbenika.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

514.13(075.8)

Stanković, Mića, 1965-
Neeuklidske geometrije / Mića Stanković, Milan Zlatanović-1.izd.-Niš: Prirodno matematički fakultet, 2014 (Niš: Sven). - 279 str. : graf. prikazi ; 25 cm-(Serija Monografije, udžbenici, pomoćni udžbenici)

Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž 100. - Napomene uz tekst. - Bibliografija: str. 273-275. - Registar.

ISBN 978-86-6275-024-2
1. Zlatanović, Milan, 1984- [autor]
a) Geometrija, neeuklidova
COBISS.SR-ID 205050380

PREDGOVOR

Ova knjiga nastala je iz predavanja koja su više godina unazad držana na Prirodno matematičkom fakultetu u Nišu na departmanu za matematiku iz predmeta *Neeuklidske geometrije*. Delimičnim proširivanjem tih predavanja nastojali smo da u ovoj knjizi izložimo materiju koja se u okviru kursa *Neeuklidske geometrije* predaje studentima i na drugim univerzitetima u Srbiji. Dakle, ona predstavlja osnovni udžbenik za ovaj predmet. Osnovna ideja programa, a samim tim i ovog kursa sastoji se u prezentaciji metoda pre svega hiperboličke a jednim delom i eliptičke geometrije kojima se prilazi ustanovljavanju i razmatranju elementarnih geometrijskih transformacija neeuklidske ravni i neeuklidskog prostora. Ovde nam nije bio cilj da izvedemo sva tvrđenja, već samo neposredne teoreme i ukažemo na bitne karakteristike koje proističu iz odgovarajućih grupa aksioma.

Knjiga sadrži ukupno jedanaest glava. Prva glava je u stvari uvod u knjigu, pri čemu je dat kratak istorijski razvoj geometrije, počev od antičkih vremena pa do pojave neeuklidskih geometrija u radovima N. Lobačevskog, J. Boljaja i B. Rimana u XIX veku. Druga glava je posvećena Hilbertovom sistemu aksioma euklidske geometrije, sistemu koji se i danas, ponekad u nešto izmenjenim varijantama, koristi za zasnivanje geometrije. Treća glava sadrži materiju koja čitaoca vodi do mogućnosti i potrebe definisanja geometrija koje se razlikuju od geometrije običnog (opažajnog) prostora, tj. od euklidske geometrije. U četvrtoj glavi je izložen uvod u hiperboličku geometriju, tj. u geometriju Lobačevskog u ravni L^2. Peta glava se odnosi na geometriju trouglova i četvorouglova u L^2, dok šesta i sedma glava sadrže materiju koja se odnosi na karakteristične krive u L^2, odnosno karakteristične površi u L^3. Trigonometrija ravni L^2 je izložena u osmoj glavi, a merenje površi u devetoj. Deseta glava se odnosi na Poenkareove modele geometrije Lobačevskog. Na kraju, u jedanaestoj glavi je definisana druga neeuklidska geometrija - eliptička geometrija i izložena najbitnija materija u vezi sa ovom geometrijom.

Tematski, sadržaj knjige je podeljen na tri celine. Prvu celinu čine glave 2-3 i ona je posvećena apsolutnoj geometriji. Nakon uvođenja aksiome paralelnosti u zavisnosti od toga da li je uvedena Plejferova aksioma paralelnosti ili aksioma Lobačevskog, apsolutna geometrija se razvija u dva smera tako da se dobijaju dve potpuno različite geometrije: Euklidska i geometrija Lobačevskog. Glave 4-10 čine drugu celinu i obrađuju problematiku hiperboličke geometrije. Ostatak knjige obrađuje problematiku eliptičke geometrije.

Recenzentima, dr Svetislavu Minčiću i dr Ljubici Velimirović se ovom prilikom najsrdačnije zahvaljujemo za pomoć koju su nam pružili, svojim primedbama i sugestijama, u pripremi ovog udžbenika. Oni su na taj način doprineli da pojedini delovi u knjizi budu tačnije i preciznije izloženi. Zahvaljujemo se i svima onima koji su na bilo koji način doprineli da ova knjiga ugleda svetlost dana u ovom obliku. Naravno bićemo zahvalni i svima onima koji će svojim sugestijama, predlozima i primedbama doprineti poboljšanju ovog udžbenika.

Niš, 20.12.2013. Autori

Sadržaj

Glava 1

Istorijski osvrt

Geometrija kao nauka je ponikla iz svakodnevne prakse. Ljudi su od davnina bili u situaciji da moraju da grade domove i zgrade, da trasiraju puteve, da određuju granice svojih poseda i njihove dimenzije. Takođe, postojala je umetnička potreba za ukrašavanjem kuća i odeće stvaranjem slika iz života i okruženja. Sve to je iziskivalo potrebu za upoznavanjem prostornih osobina objekata na koje su u okruženju nailazili. Ne jednom, te su zakonitosti proveravane i potvrđivane, tokom vremena, kako opažajno, tako i eksperimentima. Saznanja do kojih se je dolazilo prenošena su sa generacije na generaciju najpre usmeno a zatim i pismeno.

Nekoliko vekova pre naše ere, kulturni narodi Vavilona i Egipta su raspolagali podacima o prostornim osobinama predmeta iz okruženja. Moramo napomenuti da ta znanja nisu bila sistematizovana tj. bila su formulisana u obliku pravila i recepata. Na formiranje geometrije kao nauke veliki uticaj su imali starogrčki filozofi i mislioci. Oni su prvi formulisali osnovne stavove nauke o zakonima pravilnog mišljenja, tj. logike. Među njima najistaknutiji iz tog vremena je Aristotel, koji je živeo od 384. do 322. godine pre naše ere.

Reč geometrija izvedena je od dve grčke reči: $\gamma\acute{\eta}$ - zemlja i $\mu\epsilon\tau\rho\grave{\epsilon}\omega$ - meriti. Dakle u bukvalnom prevodu sama reč geometrija znači merenje zemlje.

Postavljanje aksioma geometrije i ispitivanje njihovih uzajamnih odnosa jeste zadatak koji je još od davnina bio predmet mnogobrojnih izvrsnih rasprava matematičke literature. Ovaj zadatak svodi se na logičku analizu naših prostornih opažaja.

Naziv "geometrija" (merenje zemljišta) načinjen je od grčkih reči i potiče od starih Grka koji su znali da su egipatska geometrijska znanja nastala iz praktičnih potreba premeravanja zemljišta. Velika egipatska reka Nil nanosila je svake godine svojim poplavama velike količine mulja. Taj mulj je kao prirodno đubrivo blagotvorno uticao na plodnost zemljišta, a uz to je brisao međe između pojedinih zemljišnih parcela. Stoga je posle svake poplave trebalo ponovo premeravati zemljište i pronalaziti međe između zemljišnih parcela.

U tom periodu geometrija se razvijala kao induktivna nauka. Egipćani su razvili induktivan metod zaključivanja - od pojedinačnog ka opštem. Kada su negde u VI veku pre nove ere vodeću ulogu u nauci i kulturi preuzeli Grci, geometrija počinje da se razvija jednim potpuno novim putem koji će vremenom da se odrazi i u drugim naučnim oblastima. U to vreme nastaje u Grčkoj privredni i kulturni procvat koji je postao značajan za razvoj čitavog antičkog društva. Znanja geometrije, prihvaćena iz egipatske zaostavštine, Grci dalje dopunjuju i proširuju. No, njihovo veliko značenje, nije samo u tome. Važnije je što su grčki matematičari toga doba otkrili novu metodu izgradnje geometrije, metodu koja se danas zove *deduktivna* ili *aksiomatska*. Ona je sve do sada ostala značajna metoda geometrijskih istraživanja i osnovna metoda naučne obrade rezultata tih istraživanja.

Otkriće te metode smatra se jednom od najvećih tekovina matematičke misli. Nije nastala odjednom, nego je rezultat predanog rada naučnika mnogih generacija. Do tog načela, kažu, prvi je došao antički filozof Tales[1]. Tales je putovao u Egipat i tamo od sveštenika upoznao njihove geometrijske i astronomske zaključke o zbiru uglova u trouglu, o upisanom krugu u trougao itd. Njegovi spisi, ukoliko su uopšte i postojali, do nas nisu dospeli, te se ne može pouzdano reći koja je geometrijska tvrđenja on uspeo da dokaže. Istoričar geometrije Eudem iz IV veka pre n.e. pripisivao je Talesu dokaz drugog stava podudarnosti trouglova, stava o jednakosti uglova na osnovici jednakokrakog trougla i njemu obratnog tvrđenja, stava o međusobnoj podudarnosti pravih uglova, stava po kojem je periferijski ugao nad prečnikom bilo kojeg kruga prav ugao i stav po kojem svaki dijametar kružne površi razlaže tu površ na dva podudarna dela. Koristeći sličnost jednakokrako pravouglih trouglova odredio je, kažu, visinu Keopsove piramide, a pomoću podudarnosti trouglova uspeo je da odredi udaljenost usidrenog broda od morske obale.

Načelo dokazivanja geometrijskih tvrđenja u mnogo većoj meri počeo je da sprovodi znameniti starogrčki filozof i matematičar Pitagora[2]. Upoznavši se već u mlađim godinama sa učenjem Talesa, Pitagora je niz godina

[1] Tales (624-547 p.n.e.), poznat kao Tales iz Mileta, antički matematičar

[2] Pitagora (oko 580-oko 500 p.n.e.), starogrčki filozof i matematičar

proveo u Egiptu i Vavilonu, gde je bio u mogućnosti ne samo da se upozna, već i kritički osvrne na sve što se do tada znalo u oblasti geometrije. Po povratku u domovinu on osniva svoju školu Polukrug, ne na rodnom Samosu, već u gradu Krotonu, grčkoj koloniji u južnoj Italiji. U oblasti matematike Pitagora se posebno bavio geometrijom i teorijom brojeva. Posebno je značajna teorema o pravouglom trouglu koja danas nosi njegovo ime. Pitagori ili nekom od njegovih učenika, po svoj prilici Hipasu[3], treba pripisati i teoremu o egzistenciji nesamerljivih duži koja će podstaći razvoj tzv. geometrijske algebre.

Obilje dokazanih geometrijskih tvrđenja već je bilo dovoljno da se postavi pitanje redosleda njihovog izlaganja. To je zahtevao i sam proces dokazivanja tvrđenja koji se sastoji u logičkom izvođenju zaključaka iz ranije poznatih tvrđenja, tj. tvrđenja koja su već dokazana ili se pretpostavljaju. Taj redosled u dokazivanju geometrijskih tvrđenja značio je jedno novo načelo, tzv. načelo sistematizacije.

Prve korake u sistematizaciji geometrije načinio je Pitagorin sledbenik *Hipokrat sa Hiosa*[4] u svom delu *Elementi* pre dve i po hiljade godina. Nažalost, njegovo delo nije sačuvano.

Prve nagoveštaje aksiomatskog zasnivanja geometrije srećemo u atinskoj školi zvanoj Akademija istaknutog starogrčkog filozofa Platona[5]. Sam Platon eksplicitno nije se bavio matematikom, ali su njegova rasuđivanja u oblasti filozofije imala snažnog odraza i u ovoj oblasti, posebno u poimanju brojeva i geometrijskih likova. Platon je prvi počeo da geometrijska tela razmatra odvojeno od opažajnih i ukazao na razliku koja postoji između naučnog zaključivanja i empirijskog saznanja. Geometrijske objekte smatrao je idealnim, savršenim, kakvi se ne mogu sresti u prirodi. Koji su bili principi i kakav je po Platonovom mišljenju bio pravi smisao aksioma i postulata ne zna se pouzdano, ali u nekim sačuvanim delima Platona ima mesta iz kojih se jasno naslućuje aksiomatska metoda u izgradnji bilo koje naučne teorije.

Teorijske osnove deduktivne metode u najopštijoj formi razvio je najdarovitiji Platonov učenik, genijalni starogrčki filozof Aristotel[6]. U više svojih rasprava logičkog karaktera, koje su negde sredinom I veka pre n.e. od strane Andronika sabrana u poseban kodeks pod nazivom Organon, kao i u raspravi Metafizika Aristotel je pokušao da na svojevrstan način naučno

[3]Hipas (IV vek p.n.e.), matematičar iz Metaponta (Krotona)

[4]Hipokrat sa Hiosa (oko 470. p.n.e. do oko 410. p.n.e), starogrčki matematičar, geometar i astronom

[5]Platon iz Atene (427-347 p.n.e.), antički grčki filozof i matematičar

[6]Aristotel iz Stagire (384-322 p.n.e.), starogrčki filozof i besednik

razotkrije opšte zakonitosti deduktivnog zaključivanja. Osnovne principe, tj. osnovna tvrđenja na kojima se zasniva deduktivna teorija, Aristotel je takođe razvrstavao na aksiome i postulate. Po njegovom mišljenju aksiome treba da budu osnovna tvrđenja opštijeg karaktera, tj. tvrđenja koja se prihvataju bez dokazivanja, a koja važe ne samo u jednoj, već u dvema ili više naučnih teorija. Naprotiv, postulati treba da budu osnovna tvrđenja specifičnog karaktera, tj. tvrđenja koja se prihvataju bez dokazivanja i koja važe isključivo u toj naučnoj teoriji. Aristotel je smatrao da aksiome i postulati moraju predstavljati tvrđenja koja su do te mere opštepriznata i iz svakodnevne prakse poznata da ih ne samo nije moguće, već i nije potrebno dokazivati. U takvoj teoriji istinitost izvedenih tvrđenja tj. teorema nije mogla podleći nikakvoj sumnji, pa se nije mogao ni nametati problem neprotivurečnosti deduktivne teorije aristotelovskog tipa.

Leon je pod uticajem *Platona* sastavio nove Elemente oko 370. godine stare ere. Potpunije Elemente napisao je *Teudije*, koje je dopunio *Hermotim iz Kolofona*. I ova dela su izgubljena tokom istorije. Njihov značaj za istoriju matematike je u uticaju koji su izvršila na *Euklida*[7] i njegovo naučno stvaralaštvo. Daleko najčuvenije i najčitanije delo iz tog vremena jesu *Elementi* koje je *Euklid* napisao oko 300. godine stare ere, a koje se sastoji od trinaest knjiga. Značaj Euklidovih Elemenata ogleda se u tome što je više od dva milenijuma to delo bilo osnov svakog obrazovanja. Ono je bilo prevedeno na jezike svih kulturnih naroda sveta. Zahvaljujući delu kakvo je Euklidovi elementi, geometrija je vekovima doživljavana kao savršenstvo, a sva ostala sistematizovana znanja ravnala su se prema njoj i sa njom upoređivala.

Euklidovi *Elementi*, po nekim procenama, je knjiga koja je, osim Biblije, doživela najveći broj izdanja u celoj zapadnoj civilizaciji. Njeno prvo štampano izdanje pojavilo se 1482. godine, a iza toga bilo je još preko hiljadu izdanja. Suštinska karakteristika koja ovu knjigu čini tako slavnom, je njen jednostavan i logičan sled teorema i problema. Logička struktura ove knjige uticala je na naučnu misao čitavih 2000 godina, više nego bilo koje drugo naučno delo. *Elementi* se sastoje iz 13 knjiga. Veliki deo geometrije koji se nalazi u današnjim udžbenicima matematike, praktično je preuzet iz prvih šest knjiga *Elemenata*. To je, zapravo, najstarije naučno delo koje je još uvek u upotrebi.

Na osnovu prevoda Euklidovih Elemenata koji je uradio Anton Bilimović, u nastavku ćemo izložiti osnovne definicije, aksiome i postulate iz ovog dela.

[7] Euklid (grčki: *Ευκλειδες*), (330. p.n.e. - 275. p.n.e.), poznat i kao Euklid iz Aleksandrije, antički matematičar

Osnovne definicije koje je Euklid uveo u svojim Elementima su sledeće:

1. *Tačka je ono što nema delova.*

2. *Linija je dužina bez širine.*

3. *Krajevi linije su tačke.*

4. *Prava je linija ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.*

5. *Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.*

6. *Krajevi površine su linije.*

7. *Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.*

8. *Ugao u ravni je uzajamni nagib dveju linija u ravni koje se seku i koje ne leže u istoj pravoj.*

9. *Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.*

10. *Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom dva susedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji.*

11. *Tup ugao je onaj koji je veći od pravog.*

12. *Oštar ugao je onaj koji je manji od pravog.*

13. *Granica je ono što je kraj ma čega.*

14. *Figura je ono što je omeđeno ili jednom ili sa više granica.*

15. *Krug je ravna figura omeđena takvom jednom linijom, koja se zove periferija, da su sve prave povučene od jedne tačke, koja se nalazi u samoj figuri, prema toj liniji međusobno jednake.*

16. *Ova tačka zove se središte kruga.*

17. *Prečnik kruga je svaka prava što prolazi kroz središte kruga a ograničena je sa svake strane periferijom kruga. On polovi krug.*

18. *Polukrug je figura ograničena prečnikom i njime odvojenom periferijom kruga. Središte polukruga je isto kao i središte kruga.*

19. *Pravolinijske figure su one koje su ograničene pravama; trostrane su ograničene sa tri, četvorostrane sa četiri, mnogostrane sa više od četiri prave.*

20. *Od trostranih figura jednakostrani trougao ima tri jednake strane, jednakokraki ima samo dve jednake strane, a raznostrani ima tri nejednake strane.*

21. *Dalje, od trostranih je pravougli trougao onaj koji ima prav ugao, tupougli onaj koji ima tup ugao, a oštrougli onaj koji ima tri oštra ugla.*

22. *Od četvorostranih figura kvadrat je jednakostran i sa pravim uglovima; pravougaonik je sa pravim uglovima ali nije sa jednakim stranama; romb je sa jednakim stranama ali nije sa pravim uglovima; romboid je sa jednakim naspramnim stranama, ali nije jednakostran ni sa pravim uglovima. Ostale četvorostrane figure neka se zovu trapezi.*

23. *Paralelne su one prave, koje se nalaze u istoj ravni i koje se produžene u beskrajnost na obe strane ne seku jedna sa drugom.*

U svojim Elementima osnovne stavove geometrije Euklid je podelio na *aksiome* i *postulate*. U različitim prepisima Elemenata broj postulata i aksioma nije isti, ali se obično prihvata da je on zasnovao geometriju na devet aksioma i pet postulata. I mi ćemo navesti najpre postulate, kao što je Euklid to učinio u Elementima:

"Neka se pretpostavi:

1. *Da se može povući od svake tačke ka svakoj drugoj tački prava linija.*
2. *I da ograničena prava može biti produžena u svom pravcu neprekidno.*
3. *I da se može opisati od svakog središta svakim rastojanjem krug.*
4. *I da su svi pravi uglovi jednaki međusobno.*
5. *I da će se, ako jedna prava u preseku sa drugim dvema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave beskrajno produžene, seći i to sa one strane sa koje su ovi uglovi manji od dva prava ugla.*"

Nije teško videti da postulati predstavljaju neke geometrijske istine. Interesantno je da je peti postulat zbog svoje složenosti izazivao pažnju matematičara i nagonio ih da pokušavaju da ga izvode iz ostalih aksioma geometrije.

I aksiome kao i postulati predstavljaju neka osnovna tvrđenja, ali s tom razlikom što se ne odnose striktno na geometrijske objekte. Aksiome su:

1. *Oni koji su jednaki istom jednaki su međusobno.*
2. *I ako se jednakim dodaju jednaki celine su jednake.*
3. *I ako se od jednakih oduzmu jednaki ostaci su jednaki.*
4. *I ako se nejednakim dodaju jednaki celine su nejednake.*
5. *I udvostručeni jednaki jednaki su međusobno.*
6. *I polovine od jednakih jednake su međusobno.*
7. *I oni koji se mogu poklopiti jednaki su međusobno.*
8. *I celina je veća od dela.*
9. *I dve prave ne ograničavaju oblast.*

Samo su sedma i deveta aksioma geometrijskog karaktera. U nekim prepisima se sedma aksioma javlja kao šesti postulat što pokazuje da su prepisivači kroz vekove davali sebi određenu slobodu.

U daljem izlaganju u Elementima Euklid koristi *propozicije - teoreme* ($\vartheta\varepsilon\omega\rho\grave{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ - od glagola $\vartheta\varepsilon\omega\rho\grave{\eta}\mu\omega$ - razmišljam), koje dalje izvodi uz pomoć propozicija za koje je već ustanovio da važe.

Od antičkih vremena razvoj geometrije je išao u dva pravca. Sistem aksioma je proširivan tako da bi se mogao dokazati što veći broj tvrđenja, dok se je sa druge strane uporno pokušavalo dokazivanje petog Euklidovog postulata iz spiska postojećih aksioma. Nastavljajući Euklidov rad, na samom startu su antički matematičari uočili da se ne mogu dokazati ili oboriti sva tvrđenja koja su u geometriji mogla biti formulisana. Tako je *Arhimed*[8] u svom delu *O sferi i cilindru*, postojeći sistem aksioma proširio sa pet novih postulata:

I Od svih linija koje imaju zajedničke krajeve prava je najkraća.

II A druge dve linije koje imaju zajedničke krajeve i leže u istoj ravni nisu jednake ako su obe ispupčene i jedna od njih obuhvaćena drugom krivom i pravom koja spaja krajeve, a takođe i ako krive imaju jedan zajednički deo, dok se preostali deo obuhvata; pritom je obuhvaćena kriva manja od one koja je obuhvata.

III Isto tako, od svih površina koje imaju zajedničku ravnu periferiju ravan je najmanja.

IV A druge dve površine koje imaju zajedničku ravnu periferiju nisu jednake ako su obe ispupčene i jedna od njih (ili jedan njen deo) obuhvaćena površinom i ravni periferije; pritom je obuhvaćena površina manja od one koja je obuhvata.

V Pored toga, od dveju nejednakih linija, dveju nejednakih površina ili dvaju nejednakih tela, veća veličina biće manja od one veličine koja se dobija kad manju umnožimo potreban broj puta.

Prva četiri Arhimedova stava ne mogu se prihvatiti kao postulati za logičko zasnivanje metričke geometrije.

Poslednje tvrđenje, koje se obično naziva Arhimedovim postulatom, neobično je važno. Ono se može kratko iskazati u sledećem obliku:

Arhimedov stav: *Za ma koja dva broja a i b, $a < b$, postoji takav ceo broj n, da je $na > b$.*

I nakon Arhimeda se je pokušavalo da se sistem aksioma geometrije upotpuni. Usavršavanjem Euklidovog dela pored Arhimeda, bavili su se *Apolonije*[9] (3. vek pre nove ere), *Geminus, Nikomah* (1. vek pre nove ere), *Papos* (3. vek nove ere), *Teon i Proklo* (5. vek nove ere). Tokom niza vekova, bez obzira na napore koji su činjeni, niko nije uspeo da suštinski unapredi geometriju kao nauku u odnosu na ono što je bilo izneto u Euklidovim elementima. Bilo je tu sjajnih otkrića koja su omogućila i rešavanje mnogih

[8] Arhimed (287.p.n.e.-212.p.n.e.), grčki matematičar, fizičar i astronom

[9] Apolonije iz Pergama (262.p.n.e.-190.p.n.e.), antički helenski matematičar i astronom

geometrijskih problema. Ipak, suštinskih promena u geometriji nije bilo još iz vremena Euklida i Arhimeda.

Propašću grčke kulture u Evropi počinje mračno doba srednjeg veka. U to vreme centar svetske civilizacije postaje arapski istok. Euklidovi Elementi su prevedeni na arapski jezik. I arapski mislioci su pokušavali da dokažu peti postulat. Arapski matematičar *Nasir-Edinu*[10] je najpoznatiji iz tog vremena. Međutim ni njegova interesantna i originalna istraživanja nisu dovela do dokaza petog Euklidovog postulata.

U doba renesanse se u Evropu vraća interesovanje za geometriju. U petnaestom veku Euklidovi Elementi su prevedeni sa arapskog na latinski jezik, a u šesnaestom je pronađen i reprodukovan originalan tekst na grčkom jeziku.

Pokušaji rešavanja problema paralelnih pravih vezanih za dokazivanje petog Euklidovog postulata predstavljaju jedan interesantan pogled na geometriju. Generacije i generacije nastavljača Euklidovog učenja su tokom vekova bile opsednute pokušajima da dokažu peti Euklidov postulat korišćenjem postojećeg sistema aksioma. Razlog za to je činjenica da je Euklid dokazivao tvrđenja koja su imala znatno prostiji oblik od petog postulata. Pokušaji dokazivanja Euklidovog petog postulata išli su najčešće indirektim postupkom. Polazilo se od negacije petog postulata ili nekog njegovog ekvivalentnog tvrđenja. Pokušaji su išli u smeru da se korišćenjem postojećih aksioma na taj način dođe do dva protivrečna tvrđenja. Na taj način je dobijen čitav niz tvrđenja ekvivalentnih petom Euklidovom postulatu, ali do dokaza petog Euklidovog postulata se nije došlo. Mnogi matematičari su bili u zabludi da su dokazali peti Euklidov postulat ne primećujući da su u dokazu načinili grešku tako što su iskoristili neki od ekvivalenata petog postulata.

Posebno su interesantni radovi italijanskog matematičara *Sakerija*[11], koji je pokušao da polazeći od tvrеđenja suprotnog petom postulatu, izgradi geometrijsku teoriju različitu od Euklidove. Sakeri je bio ubeđen da će u takvoj teoriji doći do protivurečnosti, čime bi bila dokazana valjanost petog postulata. Međutim Sakerijeve nade nisu se ispunile, protivurečnost do koje je došao bila je prividna a pitanje postojanja takve protivurečnosti ostalo je otvoreno. Veliki uticaj na kasnje generacije matematičara iz tog vremena imali su radovi francuskog matematičara *Ležandra*[12] koji je dokazao čitav niz interesantnih stavova koji su u vezi sa petim postulatom, kao što su na

[10] Nasir-Edinu u prevodu "branilac vere" (1201-1274), arapski matematičar
[11] Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733), italijanski matematičar
[12] Adrien-Marie Legendre (1753-1833), francuski matematičar

primer:

1) Zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od dva prava ugla.

2) Ako je u nekom trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak dva prava ugla, onda je zbir unutrašnjih uglova u svakom trouglu jednak dva prava ugla.

Preostalo mu je da dokaže da zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti manji od dva prava ugla. Međutim i njegov dokaz je sadržao grešku jer je koristio nedokazana tvrđenja.

Nakon velikog broja pokušaja da se izvede dokaz petog postulata, problem je razrešen tek u devetnaestom veku. Dokazano je da peti Euklidov postulat ne zavisi od ostalih aksioma geometrije. To je bio prvi značajan rezultat koji je znatno unapredio pogled na geometriju još od vremena Euklida. Kroz rad *Nikolaja Ivanoviča Lobačevskog*[13] i *Janoša Boljaja*[14] prvi put je izražena misao da peti Euklidov postulat ne zavisi[15] od ostalih aksioma geometrije i da se samim tim ne može izvesti njegov dokaz.

U početku su prvi radovi osnivača neeuklidske geometrije dočekani sa nevericom i ruganjem. Rezultati Lobačevskog i Boljaja postali su sasvim jasni tek krajem devetnaestog veka sa konačnim formiranjem logičkog pogleda na geometriju. Tada je geometrija prvi put logički korektno bila utemeljena. Šta više, došlo se do zaključka da osim Euklidove geometrije postoji i geometrija bitno različita od nje. Tu novootkrivenu geometriju danas nazivamo *geometrijom Lobačevskog-Boljaja* ili *hiperboličkom geometrijom*.

Nemački matematičar *Bernard Riman*[16] u svom radu *O hipotezama koje leže u osnovi geometrije* dolazi do još jedne neeuklidske geometrije koja je danas poznata pod nazivom *rimanska geomerija u užem smislu* ili *eliptička geometrija*. Otkriće Euklidske geometrije, pored geometrije imalo je uticaja na zasnivanje bilo koje deduktivne teorije. Došlo se do saznanja da osnovna geometrijska tvrđena, odnosno aksiome i postulati, važe ne samo na skupu tačaka pravih i ravni shvaćenih u klasičnom Euklidovom smislu već na skupu tačaka pravih i ravni shvaćenih u mnogo širem smislu. Došlo je do proširivanja i apstrakcije geometrijskih pojmova u skoro svim geometrijskim tvrđenjima. Dajući tako apstrahovanim pojmovima konkretna značenja dolazi se do modela na kojima se može izvesti realizacija Euklidove geometrije, geometrije Lobačevskog ili Rimanove geometrije. Interesantni su

[13]Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792-1856), ruski matematičar

[14]Janoš Boljaj (1802-1860), mađarski matematičar

[15]Postoje indikacije da je na tu pomisao prvi došao jedan od najvećih matematičara tog vremena K.F. Gaus (1777-1855). Međutim Gaus nikada nije ništa o tome objavio.

[16]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 -1866), nemački matematičar

modeli koje su sačinili *Eudenio Beltrami*,[17] *Feliks Klajn*,[18] *Anri Poenkare*.[19]

Došlo je do novih stremljenja i podsticaja u aksiomatskom zasnivanju geometrije, što je dovelo do suptilnije analize osnovnih geometrijskih pojmova i tvrđenja. Tako su *Rihard Dedekind*[20] (1872) i *Georg Kantor*[21] (1873), nezavisno jedan od drugog, na različite načine razvili učenje o neprekidnosti. Oni su otklonili jedan znatan nedostatak aksiomatike Euklida uvođenjem aksioma neprekidnosti. Nemački matematičar *Moric Paš* (1882) uvodi aksiome poredka u svom delu *Predavanja iz novije geometrije* i na taj način otklanja još jedan od nedostataka Euklidove aksiomatike.

Nastavljajući rad italijanskih matematičara *Đuzepe Peana* (1889), *Đuzepe Veronezea* (1891) i *Maria Pieria* (1899), tek je nemački matematičar *David Hilbert* (1862-1943) zasnovao geometriju na neprotivurečnom, potpunom, i nezavisnom sistemu aksioma u svom delu *Osnove geometrije* iz 1899 godine. Za razliku od Euklida, Hilbert ne pokušava da opisuje osnovne geometrijske pojmove: tačke, prave, ravni, već ih posredno određuje preko aksioma. Za razliku od Euklidove aksiomatike koja se odnosila na konkretne geometrijske objekte koji su imali potpuno određeno značenje, Hilbertova aksiomatika odnosi se na geometrijske objekte koji mogu da imaju raznovrsna značenja. To je i razlog što se kaže da je Euklidova aksiomatika sadržajnog, a Hilbertova poluformalnog karaktera.

Hilbert u *Osnovama geometrije* uvodi dvadeset aksioma koje razvrstava u pet grupa na sledeći način:

I *Aksiome veze (pripadanja, incidencije)* (osam aksioma),
II *Aksiome poretka* (četiri aksiome),
III *Aksiome podudarnosti* (pet aksioma),
IV *Aksiome neprekidnosti* (dve aksiome),
V *Aksiome paralelnosti* (jedna aksioma).

I danas, kada je prošlo više od sto godina značaj Hilbertovih Osnova geometrije ogleda se u tome, što je stvoren preduslov za izražavanje osobina kao što su *potpunost*, *nezavisnost* i *neprotivurečnost* sistema aksioma.

[17]Eugenio Beltrami (1835-1899) italijanski matematičar
[18]Feliks Kristijan Klajn (Felix Christian Klein (1849-1925), nemački matematiçar
[19]Jules Henri Poincare (1854-1912) francuski matematičar i teorijski fizičar
[20]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), nemački matematičar
[21]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), nemački matematičar

Glava 2

Hilbertov sistem aksioma

2.1 Osnovni pojmovi i grupe aksioma u geometriji

Kao što smo videli u uvodu, još je Euklid u svojim Elementima pokušao da uvede definicije pojmova kao što su tačka, prava i ravan. To i nisu neke stroge definicije, već objašnjenja tih elementarnih geometrijskih pojmova. I mnogo kasnije, matematičari kao npr. Ležandr i Peano, pokušavali su da daju definicije osnovnih geometrijskih pojmova.

Tek je Hilbert u svojim Osnovama geometrije tačku, pravu i ravan svrstao u pojmove koji se ne definišu, tj. predstavljaju osnovne, odnosno polazne pojmove u geometriji.

U zasnivanju geometrije polazimo od proizvoljnog skupa S, dveju klasa C_l i C_π podskupova skupa S i dveju relacija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nad skupom S, od kojih je prva troelementna, a druga četvoroelementna.

Skup S nazivamo *prostorom* a njegove elemente tačkama koje obeležavamo velikim slovima latinice $A, B, C, \ldots$

Elemente klase C_l nazivamo *pravama* i obeležavamo ih malim slovima latinice $a, b, c, \ldots$

Elemente klase C_π nazivamo *ravnima* i obeležavamo ih malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Troelementnu relaciju $\mathcal{B}$ nazivamo relacijom *između*. Upotrebljeni simbol $\mathcal{B}$ je prvo slovo engleske reči *between* (između). Tom relacijom izražavamo činjenicu prema kojoj se jedna tačka C nalazi između tačaka A i B, i to simbolički obeležavamo $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Četvoroelementnu relaciju $\mathcal{C}$ nad skupom S nazivamo relacijom *podudarnosti*. Upotrebljeni simbol $\mathcal{C}$ je prvo slovo latinske reči *congruentia*, što znači podudarnost. Ako je na primer uređen par tačaka (A, B) podudaran sa uređenim parom tačaka (C, D), pisaćemo $\mathcal{C}(A, B; C, D)$ ili $(A, B) \cong (C, D)$.

Svaki neprazan skup tačaka prostora S nazivamo *geometrijskim likom, geometrijskim objektom ili geometrijskom figurom.* Prema tome, osnovne pojmove u geometriji sačinjavaju tri vrste objekata, to su *tačke, prave i ravni* i dve relacije $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Pretpostavljamo da osnovni geometrijski pojmovi imaju izvesne osobine, koje ne dokazujemo, već ih usvajamo bez dokaza. Te osobine su iskazane tvrđenjima koja zovemo osnovnim geometrijskim tvrđenjima ili *aksiomama geometrije.* Prema prirodi tih osobina, aksiome geometrije razvrstavamo u pet grupa i to su :

I *Aksiome incidencije* (devet aksioma),
II *Aksiome poretka* (šest aksioma),
III *Aksiome podudarnosti* (sedam aksioma),
IV *Aksiome neprekidnosti* (jedna aksioma),
V *Aksiome paralelnosti* (jedna aksioma).

Aksiomatika prve četiri grupe sačinjava aksiomatiku *apsolutne geometrije.* Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaja i Lobačevskog.[1] Do uvođenja aksiome paralelnosti prostor S ćemo označavati sa S^3 a odgovarajuću ravan S^2.

2.2 Aksiome incidencije (veze)

Aksiomatika incidencije obuhvata aksiome zasnovane na osnovnim relacijama *pripada* i *sadrži se* ($\in$, $\subset$) prihvaćenim iz teorije skupova koje jednim imenom nazivamo *relacijama incidencije (veze).*

Definicija 2.1. *Za tri ili više tačaka $A, B, C, \ldots$ kaže se da su kolinearne ako postoji prava koja ih sadrži; u protivnom su nekolinearne. Analogno, za četiri ili više tačaka $A, B, C, D, \ldots$ kaže se da su komplanarne ako postoji ravan koja ih sadrži, u protivnom su nekomplanarne.*

Grupu aksioma incidencije sačinjava sledećih devet aksioma:

$\mathbf{I_1}$ *Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.*
$\mathbf{I_2}$ *Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B.*
$\mathbf{I_3}$ *Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.*
$\mathbf{I_4}$ *Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A, B i C.*

[1]Interesantno je napomenuti da je još Euklid u svojim Elementima dugo izbegavao da u dokazima koristi peti postulat. Na taj način je dobio čitav niz tvrđenja za čije dokazivanje nije bio potreban peti postulat, pa se Euklid može smatrati utemeljivačem apsolutne geometrije.

I_5 *Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A,B i C.*
I_6 *Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B i C.*
I_7 *Ako dve razne tačke A i B neke prave p pripadaju nekoj ravni π, tada sve tačke prave p pripadaju ravni π.*
I_8 *Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.*
I_9 *Postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C i D.*

Prve četiri aksiome odnose se na geometriju ravni dok se ostalih pet aksioma odnosi na geometriju prostora. To je i razlog što prve četiri aksiome nazivamo planimetrijskim, a ostalih pet aksoma stereometrijskim aksiomama incidencije. U literaturi se aksiome incidencije nazivaju još i aksiomama veze. Kod nekih autora ova grupa aksioma satoji se od osam aksioma, pri čemu su druga i treća aksioma spojene u jednu.

2.3 Posledice aksioma incidencije

Od posledica aksioma incidencije pomenućemo sledeće:

Teorema 2.3.1. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke tada su svake dve od njih međusobno razne.*

Dokaz. Ovo tvrđenje se lako dokazuje svođenjem na protivurečnost. □

Teorema 2.3.2. *Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke tada su svake dve od njih međusobno razne.*

Dokaz. Analogno dokazu prethodne teoreme. □

Posledica 2.3.1. *Postoje tri nekolinearne tačke.*

Teorema 2.3.3. *Dve razne prave mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Neka prave p i q imaju dve razne zajedničke tačke A i B. Na osnovu aksiome I_3 sledi da se prave p i q poklapaju. □

Teorema 2.3.4. *Postoji jedna i samo jedna prava p koja sadrži dve razne tačke A i B.*

Dokaz. Sledi iz aksioma I_2 i I_3. □

Teorema 2.3.5. *Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B, C.*

Dokaz. Sledi iz aksioma I_5 i I_6. □

Teorema 2.3.6. *Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu p i datu tačku A izvan nje.*

Dokaz. Prema aksiomi I_1 prava p sadrži bar dve razne tačke B i C. Tačke A, B i C su nekolinearne, jer bi u suprotnom tačka A pripadala pravoj p što je iskazom teoreme isključeno. Dakle, nekolinearne tačke A, B i C, na osnovu prethodne teoreme, određuju tačno jednu ravan α. Tačke B i C prave p pripadaju ravni α odakle na osnovu aksiome I_7 sledi da sve tačke prave p pripadaju ravni α. Prema tome, tačka A i prava p pripadaju ravni α. Treba još dokazati jedinstvenost takve ravni. Ako neka ravan β sadrži tačku A i pravu p, tada ona sadrži nekolinearne tačke A, B i C. Na osnovu teoreme 2.3.5. sledi da se ravni α i β poklapaju. □

Teorema 2.3.7. *Postoji tačno jedna ravan koja sadrži dve prave p i q koje se seku u jednoj tački.*

Dokaz. Neka je A presečna tačka pravih p i q. Tada, prema aksiomi I_1 na pravama p i q postoje tačke B i C redom različite od tačke A. Tačke A, B i C određuju tačno jednu ravan α. Tačke A i B prave p pripadaju ravni α odakle sledi da sve tačke prave p pripadaju ravni α. Na isti način tačke A i C prave q pripadaju ravni α odakle sledi da sve tačke prave q pripadaju ravni α. Treba još dokazati jedinstvenost takve ravni. Ako neka ravan β sadrži prave p i q, tada ona sadrži nekolinearne tačke A, B i C, odakle na osnovu teoreme 2.3.5. sledi da se ravni α i β poklapaju. □

Teorema 2.3.8. *Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, tada je njihov presek prava.*

Dokaz. Neka ravni α i β imaju zajedničku tačku A. Tada prema aksiomi I_8 ravni α i β imaju bar još jednu zajedničku tačku B. Na osnovu aksioma I_2 i I_3 tačke A i B određuju pravu $p = AB$, čije sve tačke prema aksiomi I_7 pripadaju ravnima α i β pa samim tim i njihovom preseku. Dokažimo još da van prave p ravni α i β nemaju drugih zajedničkih tačaka. Zaista, ako bi van prave p postojala zajednička tačka P ravni α i β van prave p, onda na osnovu teoreme 8.6 postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačku P i pravu p. To nije moguće, jer su α i β po pretpostavci različite ravni. Dakle, presek ravni α i β je prava p. □

Definicija 2.1. *Zajedničku pravu dveju raznih ravni zvaćemo presečnom pravom tih ravni.*

Teorema 2.3.9. *Ako prava p ne pripada ravni π, onda prava p može sa ravni π imati najviše jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Ako bi prava p imala dve zajedničke tačke sa ravni π onda bi prema aksiomi I_7 sve tačke prave p pripadale ravni π što je u suprotnosti sa uslovom teoreme. □

Definicija 2.2. *Dve prave koje ne pripadaju jednoj ravni su mimoilazne.*

Sledeća teorema opravdava uvođenje pojma mimoilaznih pravih.

Teorema 2.3.10. *Postoje mimoilazne prave.*

Dokaz. Prema aksiomi I_9 postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C i D. Prave $p = AB$ i $q = CD$ su mimoilazne jer bi u suprotnom tačke A, B, C i D bile komplanarne, što je u suprotnosti sa načinom na koji smo ih izabrali. □

2.4 Aksiome poretka

Euklid u svojim Elementima poredak tačaka na pravoj nije nigde specijalno izdvojio. Razlog za to je bio što je poredak na pravoj intuitivno bio veoma jasan. Upoređivanjem rastojanja tačaka vršen je i poredak na pravoj. Prvi koji je uvideo neophodnost aksioma poretka za dokazivanje nekih prostijih stavova o poretku tačaka na pravoj, i strogo uvođenje relacije, bio je nemački matematičar Gaus.[2] Tek je M. Paš[3] uveo pojam rasporeda tačaka bez pojma merenja duži. Kasnije su njegov sistem aksioma upotpunili Peano u svom delu *Načela geometrije* i Hilbert u *Osnovama geometrije*. Potpun opis relacije između, kao jedne od osnovnih relacija u geometriji, Hilbert je dao drugom grupom aksioma.

Ova grupa aksioma opisuje *relaciju između* koja je već uvedena kao osnovni pojam. Grupu aksioma poretka čine sledećih šest aksioma:

[2]Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) je nemački matematičar i naučnik poznat po ključnom doprinosu razvoju teorije brojeva, analize, diferencijalne geometrije, geodezije, magnetizma, astronomije i optike.

[3]Moric Paš (1843-1930), nemački matematičar. U svojim *Predavanjima o novijoj geometriji* iz 1882 on je aksiomatski uveo raspored tačaka na pravoj bez pojma merenja

II₁ *Ako su* A, B, C *tri kolinearne tačke takve da je* $\mathcal{B}(A, B, C)$,[4] *tada su tačke* A, B, C *međusobno različite.*

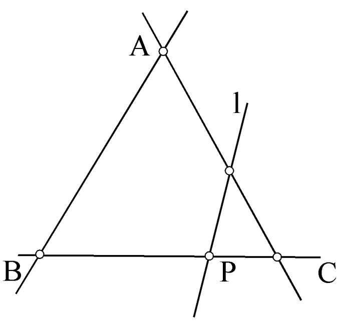
II₂ *Ako su* A, B, C *tri kolinearne tačke takve da je* $\mathcal{B}(A, B, C)$ *tada je* $\mathcal{B}(C, B, A)$.

II₃ *Ako su* A, B, C *tri kolinearne tačke takve da je* $\mathcal{B}(A, B, C)$ *tada nije* $\mathcal{B}(A, C, B)$.

II₄ *Ako su* A, B *dve razne tačke neke prave* p, *tada na pravoj* p *postoji tačka* C *takva da je* $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II₅ *Ako su* A, B, C *tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija* $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II₆ *Ako su* A, B, C *tri nekolinearne tačke ravni* π *i prava* l *pripada ravni* π, *ne sadrži tačku* A *i seče pravu* BC *u tački* P (Slika 2.1) *takvoj da je* $\mathcal{B}(B, P, C)$, *tada prava* l *seče pravu* AC *u tački* Q *koja je između tačaka* A *i* C *ili pravu* AB *u tački* R *koja je između tačaka* A *i* B.



Slika 2.1.

Aksioma II$_6$. naziva se *Pašova aksioma.* Prvih pet aksioma poretka odnose se na geometriju prave, pa je to razlog što ih nazivamo linearnim aksiomama. Pašova aksioma se očigledno odnosi na geometriju ravni. Napomenimo da nije moguće uvesti u potpunosti poredak na pravoj bez primene Pašove aksiome poretka. Ukoliko bismo izbacili Pašovu aksiomu, u cilju izgrađivanja geometrije poretka na pravoj uz pomoć samo linearnih aksioma, morali bismo da dodamo nove aksiome. To su teoreme 2.5.3., 2.5.5. i 2.5.6., koje ćemo dokazati kao posledice Pašove aksiome.

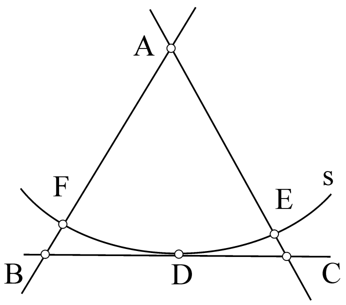
[4] Oznaku $\mathcal{B}$ za troelementnu relaciju između prvi su uveli u svojim *Osnovima geometrije* iz 1955. godine *K. Borsuk* i *W. Šmielova* kao početno slovo engleske reči between, što znači između.

2.5 Posledice aksioma poretka

Teorema 2.5.1. *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada važi jedna i samo jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.*

Dokaz. Prema Aksiomi II_5. važi bar jedna od navedenih triju relacija jer su po pretpostavci A, B, C tri razne kolinearne tačke. Bez gubitka opštosti dokaza pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(A, B, C)$. Treba pokazati da ne važe relacije $\mathcal{B}(A, C, B)$ i $\mathcal{B}(C, A, B)$. Prema Aksiomi II_3. iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ sledi da nije $\mathcal{B}(A, C, B)$. Iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ prema Aksiomi II_2 važi $\mathcal{B}(C, B, A)$, a odavde na osnovu Aksiome II_3 sledi da nije $\mathcal{B}(C, A, B)$. □

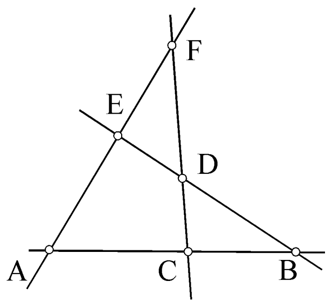
Teorema 2.5.2. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, a D, E, F tačke pravih BC, CA, AB takvih da je $\mathcal{B}(B, D, C)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$, $\mathcal{B}(A, F, B)$, tada tačke D, E, F ne pripadaju jednoj pravoj.*



Slika 2.2.

Dokaz. Kako je $\mathcal{B}(C, E, A)$ i $\mathcal{B}(A, F, B)$ tačke E i F su različite od tačke A. Budući da su AB i AC različite među sobom sa zajedničkom tačkom A, tačke E i F su različite među sobom. Takođe će biti tačke F i D a takođe D i E različite među sobom te su tačke D, E, F različite među sobom (Slika 2.2). Pretpostavimo da su one kolinearne tj. da pripadaju pravoj s. Kako su D, E, F tri razne kolinearne tačke, tada prema prethodnoj teoremi važi tačno jedna od relacija $\mathcal{B}(D, E, F)$, $\mathcal{B}(D, F, E)$, $\mathcal{B}(E, D, F)$. Neka je na primer $\mathcal{B}(F, D, E)$. Pri tome su A, F, E tri razne nekolinearne tačke. Prava BC je u ravni određenoj tačkama A, F, E, ne sadrži tačku A i seče prave FE, EA, AF redom u tačkama D, C, B takvim da je $\mathcal{B}(F, D, E)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$ i $\mathcal{B}(A, F, B)$ što je prema Pašovoj aksiomi nemoguće. Sledi da ne može biti $\mathcal{B}(F, D, E)$. Slično se dokazuje da nije $\mathcal{B}(F, E, D)$ i da nije $\mathcal{B}(E, F, D)$ pa tačke D, E, F ne pripadaju jednoj pravoj. □

Teorema 2.5.3. *Ako su A i B dve razne tačke tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A,C,B)$.*



Slika 2.3.

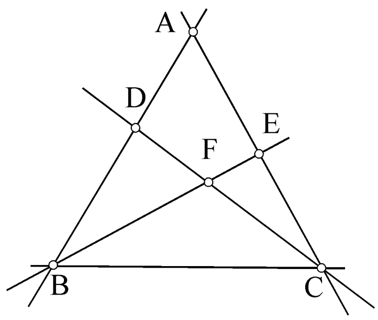
Dokaz. Neka je D bilo koja tačka koja ne pripada pravoj AB. Egzistencija te tačke sledi iz aksiome I_9. Kako je tačka D van prave AB, tačke B i D su različite među sobom te na pravoj BD postoji prema aksiomi II_4 tačka E (Slika 2.3) takva da je $\mathcal{B}(B,D,E)$, E je van prave AB pa mora biti različita od A. Dakle, prema Aksiomi II_4 na pravoj AE postoji tačka F takva da je $\mathcal{B}(A,E,F)$.

Primenom prethodne teoreme na tačke A,B,E koje su tri nekolinearne tačke, i pravu DF u ravni određenoj tim tačkama koja ne sadrži tačku A i seče pravu BE u tački D takvoj da je $\mathcal{B}(B,D,E)$ zaključujemo da prava DF mora da seče ili pravu AE u tački koja je između tačaka A i E ili pravu AB u tački koja je između tačaka A i B. Lako se dokazuje da je prvi slučaj nemoguć. Dakle, prava FD seče pravu AB u nekoj tački C tako da je $\mathcal{B}(A,C,B)$. $\square$

Teorema 2.5.4. *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke, D,E redom tačke pravih AB, AC takve da je $\mathcal{B}(A,D,B)$, $\mathcal{B}(A,E,C)$ tada se prave BE i CD seku u nekoj tački F takvoj da je $\mathcal{B}(B,F,E)$ i $\mathcal{B}(C,F,D)$.*

Dokaz. Teorema se dokazuje korišćenjem prethodne teoreme, činjenice da $A \notin DE$ jer je $D \neq E$, $E \neq A$ i korišćenjem Pašove aksiome (Slika 2.4) za tačke D,A,C i pravu BE. $\square$

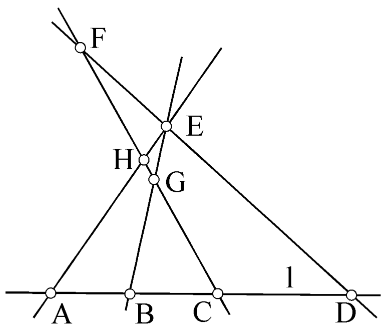
Teorema 2.5.5. *Ako su A,B,C,D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$ tada je $\mathcal{B}(A,C,D)$ i $\mathcal{B}(A,B,D)$.*



Slika 2.4.

Dokaz. Neka je l prava kojoj pripadaju tačke A, B, C i D i neka je E proizvoljna tačka (Slika 2.5) van prave l i F tačka takva da je $\mathcal{B}(D,E,F)$. Kako je $\mathcal{B}(D,E,F)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$, to primenom Pašove aksiome na tačke B, D, E i pravu CF sledi da prava CF seče BE u tački G takvoj da je $\mathcal{B}(B,G,E)$. Takođe iz $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,G,E)$ primenom Pašove aksiome na tačke A, B, E i pravu CF sledi da prava CF seče pravu AE u tački H takvoj da je $\mathcal{B}(A,H,E)$. Sada prava CF seče AE u tački H tako da je $\mathcal{B}(A,H,E)$ a pravu DE u tački u tački F tako da je $\mathcal{B}(D,E,F)$, to na osnovu Pašove aksiome primenjene na tačke A, D, E i pravu CF sledi $\mathcal{B}(A,C,D)$.

Iz $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$ na osnovu aksiome II_2 sledi da je $\mathcal{B}(C,B,A)$ i $\mathcal{B}(D,C,B)$, odakle na osnovu dokazanog dela sledi $\mathcal{B}(D,B,A)$, odakle je $\mathcal{B}(A,B,D)$. □



Slika 2.5.

Teorema 2.5.6. *Ako su A, B, C i D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(A,C,D)$, tada je $\mathcal{B}(B,C,D)$ i $\mathcal{B}(A,B,D)$.*

Dokaz. Neka je E tačka van prave l određene tačkama A, B, C i D i F tačka takva da je $\mathcal{B}(D, E, F)$. Primenimo Pašovu aksiomu na tačke A, D, E i pravu CF. Tada iz $\mathcal{B}(A, C, D)$ i $\mathcal{B}(D, E, F)$ sledi da prava CF seče pravu AE u tački H takvoj da je $\mathcal{B}(A, H, E)$. Analogno, iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, H, E)$, primenom Pašove aksiome na tačke A, B, E i pravu CF, zaključujemo da prava CF seče pravu BE u tački G takvoj da je $\mathcal{B}(B, G, E)$. Ponovnom primenom Pašove aksiome na tačke D, E, B i pravu CF iz $\mathcal{B}(B, G, E)$ i $\mathcal{B}(D, E, F)$ sledi $\mathcal{B}(B, C, D)$, čime je dokazana prva relacija. Sada iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ na osnovu Teoreme 2.5.5. sledi i $\mathcal{B}(A, B, D)$ □

Teorema 2.5.7. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$ tada je $\mathcal{B}(B, C, D)$ i $\mathcal{B}(A, C, D)$ ili $\mathcal{B}(B, D, C)$ i $\mathcal{B}(A, D, C)$.*

Dokaz. Tačke A, C i D su tri nekolinearne tačke. Tada prema Teoremi 2.5.1. važi tačno jedna od relacija $\mathcal{B}(A, C, D)$, $\mathcal{B}(C, D, A)$, $\mathcal{B}(D, A, C)$. Ako bi važila relacija $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada na osnovu Teoreme 2.5.6. važi i $\mathcal{B}(B, C, D)$, čime je prva relacija dokazana. Ako bi bilo $\mathcal{B}(C, D, A)$ tada bi važilo i $\mathcal{B}(A, D, C)$, a kako je još $\mathcal{B}(A, B, D)$, prema Teoremi 2.5.6. sledi $\mathcal{B}(B, D, C)$, tj. važi i druga relacija. Ako bi važila relacija $\mathcal{B}(D, A, C)$ tada bi iz $\mathcal{B}(A, B, D)$, tj. $\mathcal{B}(D, B, A)$ sledilo $\mathcal{B}(B, A, C)$, što protivureči pretpostavci teoreme da je $\mathcal{B}(A, B, C)$. □

Relacija $\mathcal{B}$ uzeta je kao relacija "između" i ona je troelementna. Međutim, ona se može uopštiti, te možemo definisati n-toelementnu relaciju "između".

Definicija 2.1. Konačan skup kolinearnih tačaka $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $n > 3$, je *linearno uređen* ako za svako $1 \leq i < j < k \leq n$ važe relacije $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$. To označavamo $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Sa ovako uvedenom relacijom $\mathcal{B}$ u mogućnosti smo da govorimo o linearnom poretku tačaka na jednoj pravoj. Teoreme 2.5.5., 2.5.6. i 2.5.7. možemo formulisati redom na sledeći način:

Teorema 2.5.8. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.*

Teorema 2.5.9. *ako su A, B, C i D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.*

Teorema 2.5.10. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$ tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ ili $\mathcal{B}(A, B, D, C)$.*

Ako konačno mnogo puta primenimo Teoremu 2.5.8. dobijamo:

Teorema 2.5.11. *Ako je* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *konačan skup od* n *kolinearnih tačaka takvih da za svako* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *važi relacija* $\mathcal{B}(A_{i-1}, A_i, A_{i+1})$ *tada važi relacija* $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Još je Euklid u svojim Elementima pretpostavio da su dva geometrijska lika podudarna ako se kretanjem mogu dovesti do poklapanja. Peano u svom delu Načela geometrije je pojam kretanja prihvatio kao jedan od osnovnih pojmova geometrije. Paš, Veroneze a zatim i Hilbert su u svojim radovima pošli od podudarnosti kao nedefinisane relacije, a uveli su je odgovarajućim aksiomama. Dok Paš i Veroneze usvajaju samo podudarnost duži kao osnovnu relaciju a podudarnost uglova definišu, Hilbert i podudarnost duži i podudarnost uglova uvodi aksiomama. Mi ćemo ovde aksiomama uvesti podudarnost parova tačaka umesto podudarnosti duži i uglova.[5]

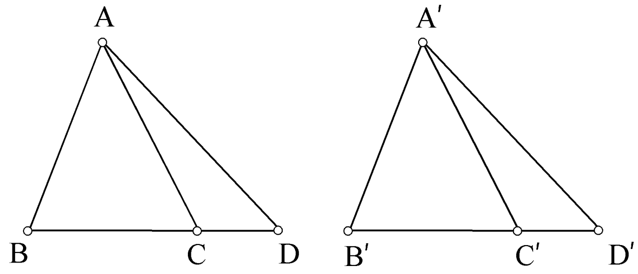
2.6 Aksiome podudarnosti i njihove prve posledice

Relaciju podudarnosti parova tačaka prostora S^3 (koju označavamo: $(A,B) \cong (C,D)$ ili $\mathcal{C}(A,B;C,D)$) karakteriše sledeća grupa aksioma:

III₁ *Za svake dve tačke* $A, B \in S^3$ *je* $(A,A) \cong (B,B)$.
III₂ *Za svake dve tačke* $A, B \in S^3$ *je* $(A,B) \cong (B,A)$.
III₃ *Ako su* $A,B,C,D,E,F \in S^3$ *takve da je* $(A,B) \cong (C,D)$ *i* $(A,B) \cong (E,F)$ *tada je* $(C,D) \cong (E,F)$.
III₄ *Ako su* C *i* C' *tačke otvorenih duži* (AB) *i* $(A'B')$ *redom, takve da je* $(A,C) \cong (A',C')$ *i* $(B,C) \cong (B',C')$, *tada je* $(A,B) \cong (A',B')$.
III₅ *Ako su* A *i* B *dve razne tačke i ako je* A' *kraj neke polupravе* p, *tada na polupravoj* p *postoji tačka* B' *takva da je* $(A,B) \cong (A',B')$.
III₆ *Ako su* A,B,C *tri nekolinearne tačke i* A',B' *dve razne tačke ruba neke poluravni* π' *takve da je* $(A',B') \cong (A,B)$, *tada u poluravni* π' *postoji tačno jedna tačka* C' *takva da je* $(A,C) \cong (A',C')$ *i* $(B,C) \cong (B',C')$.
III₇ *Ako su* A,B,C *i* A',B',C' *dve trojke nekolinearnih tačaka i* D *i* D' *(Slika* 2.6*) tačke polupravih* BC *i* $B'C'$ *takve da je* $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$, $(C,A) \cong (C',A')$ *i* $(B,D) \cong (B',D')$ *tada je* $(A,D) \cong (A',D')$.

Teorema 2.6.1. *Relacija podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.*

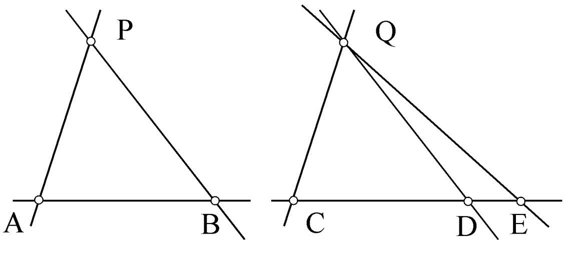
[5] To je način na koji je uvedena podudarnost u Osnovama geometrije Borsuka i Šmielove.



Slika 2.6.

Dokaz. (i) *Refleksivnost.* Neka su A i B dve razne tačke. Prema Aksiomi III_2 imamo da je $(B,A) \cong (A,B)$ i $(B,A) \cong (A,B)$ odakle je prema Aksiomi III_3 $(A,B) \cong (A,B)$, tj. relacija podudarnosti parova tačaka je refleksivna.
(ii) *Simetričnost.* Neka je $(A,B) \cong (C,D)$. Kako je još $(A,B) \cong (A,B)$ prema Aksiomi III_3 sledi da je $(C,D) \cong (A,B)$, tj. relacija je simetrična.
(iii) *Tranzitivnost.* Neka je $(A,B) \cong (C,D)$ i $(C,D) \cong (E,F)$. Tada je $(C,D) \cong (A,B)$ i $(C,D) \cong (E,F)$, odakle prema Aksiomi III_3 sledi $(A,B) \cong (E,F)$, tj. relacija podudarnosti parova tačaka je i tranzitivna relacija. □

Teorema 2.6.2. *Ako su A i B dve razne tačke i C kraj neke poluprave p tada na polupravoj p postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A,B) \cong (C,D)$.*



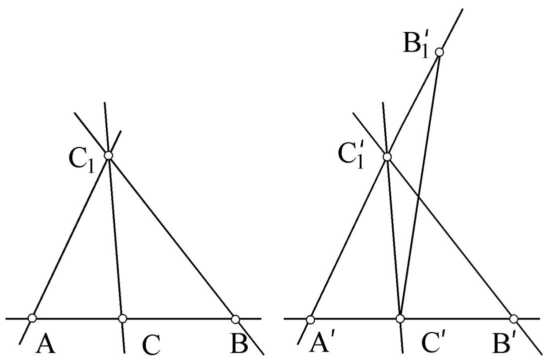
Slika 2.7.

Dokaz. Egzistenciju tačke D omogućava Aksioma III_5. Prema tome dovoljno je dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da na polupravoj p postoji još jedna tačka E, različita od D, takva da je $(A,B) \cong (C,E)$. Neka je P (Slika 2.7) proizvoljna tačka koja ne pripada pravoj AB. Tada na osnovu Aksiome III_6 u jednoj od poluravni sa rubom CD postoji jedinstvena tačka Q takva da je $(A,P) \cong (C,Q)$ i $(B,P) \cong (D,Q)$, pa na osnovu

Aksiome III$_7$ imamo $(B,P) \cong (E,Q)$. Dakle, A,B,P su tri nekolinearne tačke a C i Q tačke na rubu poluravni (CQD) takve da je $(A,B) \cong (C,D)$, $(B,P) \cong (D,Q)$ i $(A,B) \cong (C,E)$, $(B,P) \cong (E,Q)$, sto je u suprotnosti sa Aksiomom III$_6$. □

Teorema 2.6.3. (Osnovna teorema o podudarnosti parova tačaka) *Ako su A,B,C tri razne tačke neke prave l i A',B' tačke neke prave l' takve da je $(A,B) \cong (A',B')$ tada postoji jedna i samo jedna tačka C' takva da je $(A,C) \cong (A',C')$ i $(B,C) \cong (B',C')$, pri tome tačka C' pripada pravoj l'. Osim toga, poretku tačaka A,B,C na pravoj l odgovara analogan poredak tačaka A',B',C' na pravoj l'.*

Dokaz. Neka važi raspored tačaka $\mathcal{B}(A,C,B)$. Pokazaćemo najpre egzistenciju tačke C'. Na polupravoj $A'B'$ poštoje tačke C' i B'' takve da je $(A,C) \cong (A',C')$ i $(B,C) \cong (B'',C')$. Prema Aksiomi III$_4$ sledi da je $(A,B) \cong (A',B'')$. Primenom prethodne teoreme sledi da je $B'' \equiv B'$. Prema tome, dokazali smo da postoji tačka C' takva da je $\mathcal{B}(A',C',B')$, $(A,C) \cong (A',C')$ i $(B,C) \cong (B',C')$. Dokažimo sada jedinstvenost tačke C'. Neka je C'_1 (Slika 2.8) tačka koja zadovoljava iste uslove kao i tačka C'. Ako je tačka C'_1 na pravoj l' tada na osnovu prethodne teoreme sledi da je $\mathcal{B}(C'_1,A',C')$ a kako je još $\mathcal{B}(A',C',B')$, tačke C' i C'_1 bi pripadale istoj polupravoj $B'A'$ pri čemu je $(B,C) \cong (B',C')$ i $(B,C) \cong (B',C'_1)$, što je ponovo u suprotnosti sa prethodnom teoremom.



Slika 2.8.

Neka je sada tačka C'_1 van prave l'. Tada prema Aksiomi III$_6$ u jednoj od poluravni čiji je rub prava l postoji tačka C_1 takva da je $(A,C_1) \cong (A',C'_1)$ i $(B,C_1) \cong (B',C'_1)$. Primenom Aksiome III$_7$ zaključujemo $(C_1,C) \cong$

(C_1', C'). Ako je $B_1' \in A'C_1'$ takva da je $\mathcal{B}(A', C_1', B_1')$ i $(C', B') \cong (C_1', B_1')$ onda prema aksiomi III_7 imamo $(C', B_1') \cong (C_1', B')$. U tom slučaju biće tačke B, C, C_1 nekolinearne a tačke C' i C_1' na rubu neke poluravni π koja sadrži tačke B' i B_1' pri čemu je $(C, C_1) \cong (C', C_1')$. U tom slučaju bi u poluravni π postojale dve razne tačke B' i B_1' takve da je $(C, B) \cong (C', B')$ i $(C_1, B) \cong (C_1', B')$, $(C, B) \cong (C_1', B_1')$ i $(C_1, B) \cong (C', B_1')$, što je prema Aksiomi III_6 nemoguće. Slučajevi $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, A, C)$ razmatraju se analogno. $\square$

U odnosu na relaciju podudarnosti parova tačaka možemo da uvedemo i nešto šire definisanu relaciju koja će se odnositi na uredjene trojke, četvorke, $\ldots$, n-torke tačaka. Činjenicu da je $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$ i $(A, C) \cong (A', C')$ označavaćemo $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Analogno tome možemo definisati relaciju podudarnosti uređenih n-torki:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \cong (A_1', A_2', \ldots, A_n')$$

ako za svako $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ važi $(A_i, A_j) \cong (A_i', A_j')$.

2.7 Dedekindova aksioma neprekidnosti

Grupa aksioma neprekidnosti sastoji se od samo jedne aksiome.

$\mathbf{IV_1}$ (Dedekindova aksioma neprekidnosti) *Ako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva neprazna skupa tačaka orjentisane prave p tako da za proizvoljnu tačku P skupa $\mathcal{M}$ i prizvoljnu tačku Q skupa $\mathcal{N}$ važi da je tačka P ispred tačke Q ($P \prec Q$), tada na pravoj p postoji tačka X takva da za svaku tačku $P \in \mathcal{M} \backslash \{X\}$ i $Q \in \mathcal{N} \backslash \{X\}$ važi relacija $P \prec X \prec Q$.*

Navedena aksioma je dovoljna da se izvede kompletna teorija neprekidnosti u apsolutnoj geometriji. Kao posledice Dedekindove aksiome neprekidnosti navešćemo Arhimedov stav za duži i Kantorovu aksiomu.

Teorema 2.7.1. (Arhimedov stav za duži) *Ako su AB i CD dve duži takve da je $AB > CD$ tada postoji prirodan broj n takav da je*

$$nCD \leqslant AB < (n+1)CD.$$

Arhimedov stav za duži može se formulisati i na sledeći način:

Neka su AB i CD dve duži i neka su A_1, A_2, A_3, $\cdots$ tačke prave AB takve da je

$$\mathcal{B}(A, A_1, A_2), \quad \mathcal{B}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathcal{B}(A_2, A_3, A_4), \cdots$$

i

$$AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \cdots \cong CD.$$

Tada postoji prirodan broj n *takav da je ili* $B \equiv A_n$ *ili* $\mathcal{B}(A_n, B, A_{n+1})$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji beskonačan niz duži $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \cdots$, $\mathcal{B}(A, A_1, A_2)$, $\mathcal{B}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathcal{B}(A_2, A_3, A_4)$,$\cdots$, koje su sve sadržane u AB. Na pravoj AB izaberimo takav raspored tačaka da je $A \prec B$. Sve tačke prave AB podelimo na dve klase. Neka prvoj klasi $\mathcal{M}$ pripadaju sve tačke prave AB koje su ispred tačke A_n. Neka su u drugoj $\mathcal{N}$ sve ostale tačke prave AB. Tada je svaka tačka prave AB sadržana u jednoj i samo jednoj klasi. Klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su neprazni skupovi. Zaista, klasi $\mathcal{M}$ pripada tačka A, a klasi $\mathcal{N}$ tačka B. Pored toga svaka tačka prve klase je ispred svake tačke druge klase. Na osnovu Dedekindove aksiome postoji jedinstvena tačka X prave AB koja vrši presek prave AB. Tačka X nije tačka klase $\mathcal{M}$. Takođe tačka X je tačka koja je ispred svih tačaka klase $\mathcal{N}$. Na osnovu aksiome III_5 postoji tačka C takva da je

$$C \prec X, \quad XC \cong A_1A_2.$$

Kako je $C \prec X$ to tačka C ne može biti tačka klase $\mathcal{N}$. Prema tome tačka C pripada klasi $\mathcal{M}$. Prema definiciji klase $\mathcal{M}$ sledi $C \prec A_n$ i $C \prec A_{n+1}$. Prema tome, svaka od tačaka A_n i A_{n+1} je između tačaka X i C, odakle sledi $A_nA_{n+1} < CX$, što je u suprotnosti sa $XC \cong A_nA_{n+1}$ $\square$

Teorema 2.7.2. *Ako su* a *i* b *proizvoljne duži takve da je* $a < b$, *tada za proizvoljnu duž* c *postoje prirodni brojevi* m *i* n *takvi da je*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Dokaz. Iz Arhimedove teoreme, s obzirom na to da je $a < b$ sledi da postoji prirodan broj n takav da je $c < 2^n(b - a)$, odakle sledi

$$\frac{1}{2^n}c < b - a.$$

Za duži $\frac{1}{2^n}$ i a može nastupiti jedan od slučajeva:
(i) $\frac{1}{2^n}c > a$ ili (ii) $\frac{1}{2^n}c < a$.
(i) Ako je $\frac{1}{2^n}c > a$ onda je $a < \frac{1}{2^n}c < b - a < b$, tj.

$$a < \frac{1}{2^n}c < b,$$

čime je teorema dokazana. U ovom slučaju je $m = 1$.

(ii) Ako je $\frac{1}{2^n}c < a$, tada na osnovu Arhimedovog stava postoji prirodan broj m takav da je

$$(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Tada je

$$a < m\frac{1}{2^n}c = \frac{1}{2^n}c + (m-1)\frac{1}{2^n}c < b - a + a = b,$$

tj.

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

□

Teorema 2.7.3. (Kantorov stav) *Ako beskonačan niz zatvorenih duži* $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... *neke prave* p *zadovoljava uslove:*

(i) *svaka duž tog niza sadrži sledeću duž,*

(ii) *ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima tog niza;*

tada postoji jedinstvena tačka X *koja je sadržana u svim dužima tog niza.*

Dokaz. Neka je $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... beskonačan niz duži prave p, tako da je $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n]$ za svaki prirodan broj n i ne postoji duž koja pripada svim dužima tog niza.

Na pravoj p izaberimo orjentaciju tako da je $A_n \prec B_n$ za svako $n \in N$. Ukoliko za neko n to nije zadovoljeno označimo A_n sa B_n i obrnuto. Tačke prave p podelimo na dve klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tako da tačka pripada prvoj klasi $\mathcal{M}$ ako je ispred neke tačke A_n (samim tim ona je i ispred tačaka A_{n+1}, A_{n+2}, $\cdots$). Drugoj klasi $\mathcal{N}$ neka pripadaju sve ostale tačke prave p. Očigledno je da je svaka tačka prave p u jednoj i samo jednoj od klasa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Takođe obe klase su neprazne jer je npr., $A_1 \in \mathcal{M}$ a $B_1 \in \mathcal{N}$. Tačke klase $\mathcal{M}$ su ispred tačaka klase $\mathcal{N}$. Dakle svi uslovi Dedekindove aksiome su zadovoljeni. Prema tome postoji tačka X koja vrši presek prave p na klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Znači tačka X je iza svih tačaka $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ klase $\mathcal{M}$ a ispred svih tačaka $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ klase $\mathcal{N}$, tj. tačka X pripada duži $[A_nB_n]$ za svako $n \in N$.

Dokažimo još jedinstvenost. Neka je Y još jedna tačka koja pripada svakoj tački datog niza. Tada bi i svaka tačka Z duži XY pripadala svakoj duži pomenutog niza, tj. cela duž XY bi pripadala svakoj duži niza $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ..., što je nemoguće. □

Definicija 2.1. Niz duži $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... neke prave p je *Kantorov niz* ako:

(i) svaka duž tog niza sadrži sledeću duž,

(ii) ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima datog niza duži.

Teorema 2.7.4. *Ne postoji duž manja od svake duži Kantorovog niza.*

Dokaz. Označimo sa X jedinstvenu tačku koja je sadržana u svim dužima Kantorovog niza duži $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$,…,$[A_nB_n]$, … neke prave p. Tada je $\mathcal{B}(A_k, X, B_k)$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da su sve tačke A_k sa jedne a sve tačke B_k sa druge strane tačke X. Kako je $A_kB_k = A_kX \cup XB_k$ i $A_kB_k \supset A_{k+1}B_{k+1}$ to tačka A_{k+1} pripada duži $A_{k+1}X$ a tačka B_{k+1} pripada duži XB_{k+1}. Označimo sa x proizvoljnu duž prave p. Tada na pravoj p postoje tačke A i B takve da je tačka X središte duži, $AB \cong x$, $A_k, A \ddot{-} X$ i $B_k, B \ddot{-} X$. Kada na duži AX ne bi bilo ni jedne od tačaka A_k, tada bi bilo $\mathcal{B}(A_k, A, X)$ za svako $k \in \mathbb{N}$, odakle sledi da bi duž AX pripadala svim dužima Kantorovog niza, što je nemoguće, pa su za dovoljno veliko n sve tačke A_k, $k > n$, između tačaka A i X. Analogno, za dovoljno veliko n su sve tačke B_k, $k > n$, između tačaka X i B. To znači da za dovoljno veliko n duž AB sadrži svaku od duži A_kB_k, $k > n$, odakle je $A_nB_n < x$. □

Često se umesto Dedekindove aksiome uzimaju Arhimedov i Kantorov stav kao aksiome neprekidnosti. Neka uz prve tri grupe aksioma važe Arhimedov i Kantorov stav.

Dokaz Dedekindove aksiome. S obzirom na činjenicu da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni skupovi, to postoje tačke M_1 i N_1 koje pripadaju redom skupovima $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Označimo sa S_1 središte duži M_1N_1. Kako je S_1 tačka prave p to ona pripada tačno jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ukoliko tačka S_1 pripada skupu $\mathcal{M}$, označimo je sa M_2, a tačku N_1 sa N_2, a ako S_1 pripada skupu $\mathcal{N}$ označimo je sa N_2 a tačku M_1 sa M_2. Neka je sada S_2 središte duži M_2N_2. Primenom pomenutog postupka dobijamo niz zatvorenih duži $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,…,$[M_nN_n]$,… od kojih svaka sadrži sledeću i

$$M_{k+1}N_{k+1} = \frac{1}{2}M_kN_k.$$

Dokažimo da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima konstruisanog niza duži. Ako bi x bila takva duž, onda bi za svako k važilo $x < M_kN_k$. Međutim po konstrukciji je $M_kN_k = \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, odakle je $x < \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, tj. $2^{k-1}x < M_1N_1$, za svako $k \in \mathbb{N}$, što je u suprotnosti sa Arhimedovim stavom. Dakle, niz $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,…,$[M_nN_n]$,… je Kantorov, pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svim dužima pomenutog niza. Iz konstrukcije niza duži $[M_kN_k]$, $k \in \mathbb{N}$, sledi da su sve tačke niza $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sa jedne strane tačke X, a sve tačke niza $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sa druge strane tačke X. Tačka X pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Ako je $M \neq X$ proizvoljna tačka skupa $\mathcal{M}$ tada ne može biti $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{N}$ između dveju tačaka skupa $\mathcal{M}$. Analogno, ako je $N \neq X$ tačka skupa $\mathcal{N}$ tada ne može biti $\mathcal{B}(N, X, N_k)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{M}$ koja je između N i X. Dakle, postoji jedinstvena tačka X koja razdvaja tačke skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tj. za svaku tačku $P \in \mathcal{M}\diagdown\{X\}$ i $Q \in \mathcal{N}\diagdown\{X\}$ važi $P \prec X \prec Q$. $\square$

Stavovi analogni Arhimedovom i Kantorovom stavu mogu se pokazati i za uglove.

2.8 Posledice aksioma neprekidnosti

Mnoge teoreme koje su naizgled očigledne ne mogu se dokazati bez primene aksioma neprekidnosti. Sada ćemo navesti nekoliko primera takvih teorema.

Teorema 2.8.1. *Ako je dat krug $k(O, r)$ i tačka P unutar kruga k tada proizvoljna prava l u ravni kruga k koja sadrži tačku P ima sa krugom k dve zajedničke tačke.*

Dokaz. Mogu nastupiti dva slučaja:

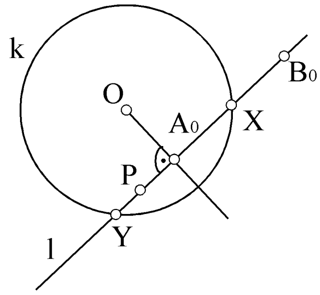
(i) Prava l sadrži središte O kruga k,

(ii) Prava l ne sadrži središte O kruga k.

(i) Neka tačka O pripada pravoj l. Tada postoje tačke X i Y na pravoj l sa raznih strana tačke O takve da je $OX \cong r$ i $OY \cong r$, pa prava l ima sa krugom $k(O, r)$ dve zajedničke tačke X i Y.

(ii) Neka sada tačka O ne pripada pravoj l (Slika 2.9). Označimo sa A_0 podnožje normale iz tačke O na pravoj l. Tada će biti $OA_0 \leqslant OP$. Kako je tačka P unutar kruga k biće $OP < r$, te je i $OA_0 < r$. Odredimo na pravoj l sa bilo koje strane tačke A_0 tačku B_0 takvu da je $A_0B_0 \cong r$. U pravouglom trouglu ΔOA_0B_0 hipotenuza OB_0 je veća od katete A_0B_0 pa je $OB_0 > r$, tj. tačka B_0 je van kruga k. Neka je C_0 središte duži A_0B_0. U tom slučaju za tačku C_0 mogu nastupiti tri mogućnosti: $OC_0 \cong r$, $OC_0 < r$ i $OC_0 > r$.

Ako je $OC_0 \cong r$ tvrđenje sledi neposredno. Ako je tačka C_0 unutar kruga k označimo sa A_1 tačku C_0 a sa B_1 tačku B_0. Ako je C_0 izvan kruga k označimo A_1 tačku A_0 a sa B_1 tačku C_0. U oba slučaja je je $OA_1 < r$ i $OB_1 > r$, duž A_1B_1 je jednaka polovini duži A_0B_0 i sadržana je u njoj.



Slika 2.9.

Označimo sa C_1 središte duži A_1B_1. Za tačku C_1 imamo sledeće mogućnosti: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ ili $OC_1 > r$. Ako je $OC_1 \cong r$, onda je C_1 presečna tačka prave l i kruga k. Ako je $OC_1 > r$ obeležimo sa A_2 tačku A_1 a sa B_2 tačku C_1, a ako je $OC_1 < r$ onda označimo sa A_2 tačku C_1 a sa B_2 tačku B_1. U oba slučaja je $OA_2 < r$, $OB_2 > r$, duž A_2B_2 jednaka je polovini duži A_1B_1 i sadržana je u njoj.

Nastavljajući taj postupak posle n koraka dobijamo da je

$$OA_n < r, \quad OB_n > r, \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n}A_0B_0, \quad [A_nB_n] \subset [A_{n-1}B_{n-1}].$$

Prema tome, dobili smo niz zatvorenih duži $[A_nB_n]$ za koji važi:

(i) svaka duž tog niza sadrži sledeću,

(ii) ne postoji duž sadržana u svim dužima tog niza.

Zaista, jer ako bi postojala takva duž d koja bi pripadala svim dužima tog niza duži, tada broj n možemo izabrati tako da duž $[A_nB_n]$ bude manja od bilo koje unapred zadate duži, pa i od duži d, pa bi veća duž d bila sadržana u manjoj duži A_nB_n, što je nemoguće.

Dakle, zadovoljeni su svi uslovi Kantorovog stava za duži pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svim dužima tog niza duži. Dokažimo da tačka X pripada krugu k, tj. da je jedna od presečnih tačaka prave l i kruga k. Dovoljno je da dokažemo da je $OX \cong r$. Za duži OX i r važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti:

(i) $OX < r$, (ii) $OX > r$ i (iii) $OX \cong r$.

(i) Neka je $OX < r$. Tada postoji neka duž ε takva da je $OX = r - \varepsilon$. Iz trougla ΔOXB_n imamo $OB_n < OX + XB_n$. Tačka X pripada duži $[A_nB_n]$, pa je $XB_n < A_nB_n$. Broj n možemo izabrati dovoljno veliki da duž $[A_nB_n]$ bude manja od bilo koje unapred zadate duži ε. Tada je $XB_n < \varepsilon$ pa je

$OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Dakle, dobili smo da tačka B_n pripada unutrašnjosti kruga što predstavlja kontradikciju. Prema tome nije $OX < r$.

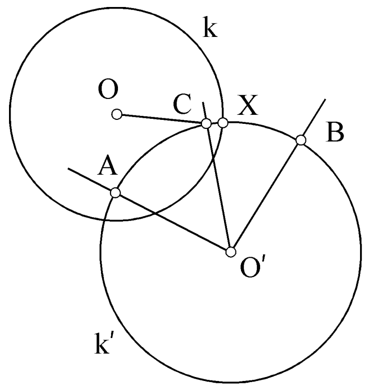
(ii) Analogno se dokazuje da nije $OX > r$.

(iii) Znači, mora biti $OX \cong r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Za tačku Y prave l simetričnu tački X u odnosu na tačku A_0 neposredno se dobija da pripada krugu k. Dakle, prava l i krug k imaju dve zajedničke tačke X i Y. Nije teško zaključiti da osim ovih dveju tačaka krug k i prava l nemaju drugih zajedničkih tačaka. $\square$

Dokaz ove teoreme se ne može izvesti bez upotrebe aksioma neprekidnosti.

Teorema 2.8.2. *Ako dva kruga k i k' pripadaju jednoj ravni i ako jedan od ta dva kruga, npr. k' sadrži neku tačku A koja se nalazi unutar kruga k i neku tačku B van kruga k, tada krugovi k i k' imaju dve zajedničke tačke.*



Slika 2.10.

Dokaz. Neka su O i O' (Slika 2.10) središta a r i r' poluprečnici redom krugova k i k'. Označimo sa s medijatrisu jednog od uglova $\measuredangle AO'B$. Poluprava s ima sa krugom k' jednu zajedničku tačku, označimo je sa C. Pri tome je ili $OC \cong r$ ili $OC < r$ ili $OC > r$. Ako je $OC \cong r$ tada je tačka C jedna zajednička tačka krugova k i k'. Ako je $OC < r$ obeležimo sa A_1 tačku C a sa B_1 tačku B. Ako je pak $OC > r$ obeležimo sa A_1 tačku A a sa B_1 tačku C. U oba slučaja je $OA_1 < r$, $OB_1 > r$ i $\measuredangle A_1O'B_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AO'B$.

Konstruišimo medijatrisu ugla $\measuredangle A_1O'B_1$ i označimo sa C_1 zajedničku tačku medijatrise s_1 i kruga k'. Za tačku C_1 postoje tri mogućnosti: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ ili $OC_1 > r$. Ako je $OC_1 \cong r$ tada je tačka C_1 zajednička tačka krugova k i k'. Ako je $OC_1 < r$ označimo sa A_2 tačku C_1 a sa B_2 tačku B_1, a ako je pak $OC_1 > r$ onda označimo sa A_2 tačku A_1 a sa B_2 tačku C_1. Tada je u oba slučaja $OA_2 < r$, $OB_2 > r$ i $\measuredangle A_2O'B_2 = \frac{1}{2^2}\measuredangle AO'B$.

Nastavljajući taj postupak dobijamo tačke A_n i B_n takve da je $OA_n < r$, $OB_n > r$ i $\measuredangle A_nO'B_n = \frac{1}{2^n}\measuredangle AO'B$. Na taj način je dobijen neograničen niz zatvorenih uglova $[\measuredangle AO'B]$, $[\measuredangle A_1O'B_1]$, $[\measuredangle A_2O'B_2]$, $\ldots$ koji zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) svaki ugao iz tog niza sadrži sledeći,

(ii) ne postoji ugao sadržan u svim uglovima tog niza.

Tada, prema Kantorovom stavu za uglove sledi da postoji jedinstvena poluprava s' sadržana u svim uglovima tog niza. Označimo sa X tačku te poluprave takvu da je $O'X \cong r'$, odnosno tačku u kojoj poluprava s' seče krug k'. Dokažimo da tačka X pripada i krugu k. U tom slučaju za tačku X mogu nastupiti tri mogućnosti: (i) $OX \cong r$, (ii) $OX < r$ ili (iii) $OX > r$.

(i) Neka je $OX < r$. U tom slučaju postoji neka duž ε takva da je $OX = r - \varepsilon$. U trouglu ΔOXB_n je $OB_n < OX + XB_n$. Broj n možemo izabrati tako da tetiva A_nB_n bude manja od bilo koje unapred zadate duži ε. Kako je tačka X unutrašnja tačka duži $A_n, B_n]$ to je $XB_n < A_nB_n$ pa je $XB_n < \varepsilon$. Prema tome imamo da je $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, pa je B_n unutrašnja tačka kruga k što je u kontradikciji sa konstrukcijom niza tačaka B_0, B_1, B_2, $\ldots$ Dakle nije $OX < r$.

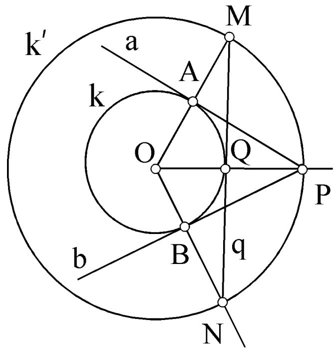
(ii) Na potpuno isti način i pretpostavka $OX > r$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $OX \cong r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Razmatranjem drugog ugla $\measuredangle AO'B$ analognim postupkom dobijamo drugu presečnu tačku Y krugova k i k'. □

Teorema 2.8.3. *Ako je u ravni dat krug $k(O, r)$ i tačka P van tog kruga, tada kroz tačku P postoje dve i samo dve prave koje dodiruju krug $k(O, r)$.*

Dokaz. Tačka P je van kruga $k(O, r)$ pa je $OP > r$. Dakle, na polupravoj OP postoji tačka Q (Slika 2.11) takva da je $OQ = r$. Tačka Q pripada krugu k. Neka je q prava upravna na pravu OP u tački Q. Neka je k' krug sa središtem u tački O i poluprečnikom OP. Kako je $OQ < OP$ tačka Q će biti unutar kruga k'. Prava q sadrži unutrašnju tačku Q kruga k' te prava q i krug k' imaju dve zajedničke tačke M i N. Poluprave OM i ON seku krug $k(O, r)$ u dvema tačkama A i B. Kako su A i P dve razne tačke one određuju tačno jednu pravu a. Slično tačke B i P određuju tačno jednu pravu b. Dokazaćemo da prave a i b imaju sa krugom k samo po jednu zajedničku tačku. Dovoljno je da ustanovimo da je $\measuredangle OAP = \measuredangle OBP = R$.



Slika 2.11.

Kako je $\Delta OAP \cong \Delta OQM$ i $\measuredangle OQM$ prav biće $\measuredangle OAP$ prav. Odatle sledi da je prava a tangenta kruga k. Analogno se pokazuje da je i prava b tangenta kruga k u tački B. Prema tome postoje dve prave koje sadrže tačku P i dodiruju krug $k(O, r)$. Da osim ovih dveju pravih nema drugih tangenti kroz tačku P na krug k dokazuje se indirektnim putem. $\square$

Možemo primetiti da ovaj stav ima uopštenje u prostoru S^3 u kome krugu $k(O, r)$ odgovara sfera $S(O, r)$, tački P prava p a pravama a i b ravni α i β.

Glava 3

Ekvivalenti petog Euklidovog postulata

3.1 Plejferova aksioma paralelnosti

Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u Antičkim vremenima kod Grka. Međutim Euklidova originalna formulacija unekoliko se razlikuje od Plejferove aksiome paralelnosti koja u stvari predstavlja ekvivalent petog Euklidovog postulata.

Peti Euklidov postulat. *Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.*

Pokušaji dokazivanja petog Euklidovog postulata doveli su do niza tvrđenja ekvivalentnih petom Euklidovom postulatu. Jedno od takvih tvrđenja je

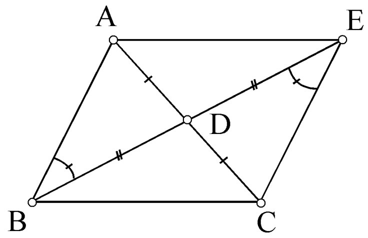
Plejferova aksioma paralelnosti. *Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni $\pi(p, A)$ postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.*

3.2 Ležandrove teoreme

Teoreme u ovom poglavlju odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i n-tougla u Apsolutnoj geometriji (bez aksiome paralelnosti).

Teorema 3.2.1. *Za svaki trougao Δ postoji trougao Δ_1 takav da su zbirovi unutrašnjih uglova trouglova Δ i Δ_1 jednaki među sobom a jedan unutrašnji ugao trougla Δ_1 je bar dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla Δ.*

Dokaz. Označimo sa A, B, C temena trougla Δ ali tako da $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$. Označimo dalje sa D sredinu stranice AC a sa E tačku simetričnu tački B u odnosu na tačku D (Slika 3.1). Tada je ΔEBC traženi trougao Δ_1.



Slika 3.1.

Označimo sa $\sigma(ABC)$ zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC. Iz podudarnosti trouglova ΔABD i ΔCED sledi $\sigma(ABD) = \sigma(CED)$. Međutim, $\measuredangle CED$ jednak je uglu $\measuredangle ABD$, pa je bar jedan od uglova $\measuredangle ABD$ i $\measuredangle DBC$ bar dva puta manji od $\measuredangle ABC$. Tada je $\measuredangle DBC + \measuredangle DEC = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$ pa je

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta) &= \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB \\ &= \measuredangle DBC + \measuredangle DEC + \measuredangle BCA + \measuredangle ECA \\ &= \sigma(EBC) = \sigma(\Delta_1)\end{aligned}$$

Iz $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$ sledi $CE = AB \leq BC$ a odavde $\measuredangle CBE \leq \measuredangle BEC$. Neposredno dobijamo $2\measuredangle EBC \leq \measuredangle EBC + \measuredangle BEC = \measuredangle ABC$, pa je $\Delta_1 = \Delta EBC$ traženi trougao. $\square$

Teorema 3.2.2. (Prva Ležandrova teorema) *U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji trougao Δ takav da mu je zbir unutršnjih uglova veći od zbira dva prava ugla. Označimo sa R prav ugao. To znači da $\sigma(\Delta) > 2R$, tj. $\sigma(\Delta) = 2R + \varepsilon$ pri čemu je $\varepsilon > 0$. Prema prethodnoj teoremi sledi da postoji trougao Δ_1 takav da je $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1)$ a jedan unutrašnji ugao trougla Δ_1 bar dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla Δ. Označimo te uglove redom sa α_1 i α. Tada je

$$\alpha_1 \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

Na isti način postoji Δ_2 takav da je $\sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2)$, a jedan unutrašnji ugao, označimo ga sa α_2 trougla Δ_2 bar dva puta manji od ugla α_1 trougla Δ_1. Tada je

$$\alpha_2 \leq \frac{1}{2}\alpha_1 \leq \frac{1}{2^2}\alpha.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz trouglova $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots \Delta_n \ldots$ i niz uglova $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots$ pri čemu je

$$\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \ldots = \sigma(\Delta_n) \ldots$$

i

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha.$$

Znači, dobili smo $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_n)$ i $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha$ za $\forall n \in N$. Pri tome broj n možemo izabrati tako veliki da ugao α_n bude manji od bilo kog unapred zadatog ugla pa i od ε. Ako je $\alpha_n < \varepsilon$ zbir ostala dva ugla trougla Δ_n je veći od $2R$, a to je nemoguće. Prema tome ne postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova veći od zbira dva prava ugla. □

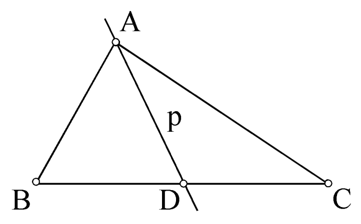
Definicija 3.1. Neka je $\sigma(ABC)$ zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC i R prav ugao. Razliku

$$\delta(ABC) = 2R - \sigma(ABC)$$

nazivamo *defektom trougla* ΔABC.

Očigledno je $\delta(ABC) \geq 0$.

Lema 1. *Ako je zbir unutrašnjih uglova nekog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla, koji je od prvog odsečen nekom pravom takođe jednak zbiru dva prava ugla.*



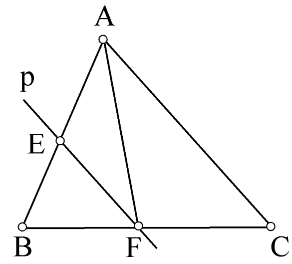
Slika 3.2.

Dokaz. Za presečnu pravu p mogu nastupiti dva slučaja:

(i) da sadrži jedno teme trougla i (ii) ne sadrži ni jedno teme trougla.

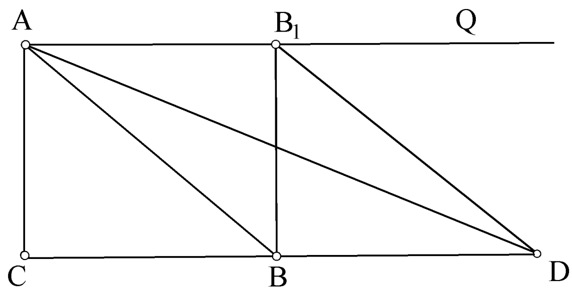
(i) Neka prava p sadrži teme A trougla ΔABC (Slika 3.2). Označimo sa D presečnu tačku prave p sa stranicom BC. Tada je $\sigma(\Delta ABC) = \sigma(\Delta ABD)+\sigma(\Delta ACD)-2R$ i $\sigma(ABC) = 2R$ pa je $\sigma(\Delta ABD)+\sigma(\Delta ACD) = 4R$. S druge strane zbir unutrašnjih uglova u trouglu ne može biti veći od zbira dva prava ugla pa je $\sigma(\Delta ABD) = 2R$ i $\sigma(\Delta ACD) = 2R$

(ii) Neka prava p ne sadrži ni jedno teme trougla ΔABC (Slika 3.3). Označimo sa E i F presečne tačke prave p redom sa stranicama AB i BC trougla ΔABC. Zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC jednak je zbiru dva prava ugla pa je prema dokazanom delu (i) zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABF, a samim tim i trougla ΔBEF jednak zbiru dva prava ugla. $\square$



Slika 3.3.

Lema 2. *Ako je zbir unutrašnjih uglova nekog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova pravouglog trougla koji se od prvog dobija udvostručavanjem jedne katete, takođe jednak zbiru dva prava ugla.*



Slika 3.4.

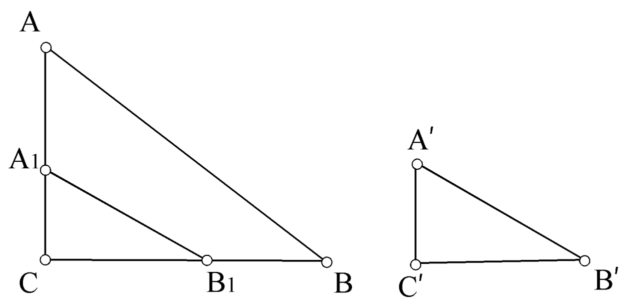
Dokaz. Neka je zbir unutršnjih uglova trougla ΔABC, sa pravim uglom kod temena C, jednak zbiru dva prava ugla (Slika 3.4.). U tački A konstruišimo polupravu AQ upravnu na pravoj AC sa one strane prave AC sa koje je tačka B. Na polupravoj AQ uočimo tačku B_1 takvu da je $AB_1 = CB$. Neka je još D tačka poluprave CB takva da je $BD = BC$ i $\mathcal{B}(C, B, D)$. Kako je $\sigma(\Delta ABC) = 2R$ i $\measuredangle C = R$ sledi $\measuredangle CAB + \measuredangle CBA = R$. S druge strane je $\measuredangle CAB + \measuredangle BAB_1 = R$ pa je $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$. Za trouglove ΔABC i ΔABB_1 imamo $AB \equiv AB$, $BC = AB_1$ i $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$ pa su oni podudarni. Iz njihove podudarnosti sledi $\measuredangle AB_1B = \measuredangle C = R$, $\measuredangle CAB = \measuredangle B_1BA$. Sada je $\measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1BA + \measuredangle ABC = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC = R$, tj. $B_1B \perp CD$. Sada su trouglovi ΔABB_1 i ΔB_1DB podudarni jer je $\measuredangle AB_1B = \measuredangle DBB_1 = R$, $BB_1 \equiv BB_1$ i $AB_1 = DB$. Iz njihove podudarnosti sledi $AB = B_1D$ i $\measuredangle BAB_1 = \measuredangle B_1DB$. Sada trouglovi ΔABD i ΔDB_1A imaju sve odgovarajuće stranice podudarne pa su podudarni prema trećem stavu o podudarnosti trouglova, odakle sledi $\measuredangle BDA = \measuredangle B_1AD$. Zbir unutrašnjih uglova trougla ΔACD je

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta ACD) &= \measuredangle ACD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAC \\ &= R + \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAC = R + \measuredangle B_1AC = 2R\end{aligned}$$

tj. $\sigma(\Delta ACD) = 2R$. □

Lema 3. *Ako je zbir unutrašnjih uglova jednog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova svakog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla.*

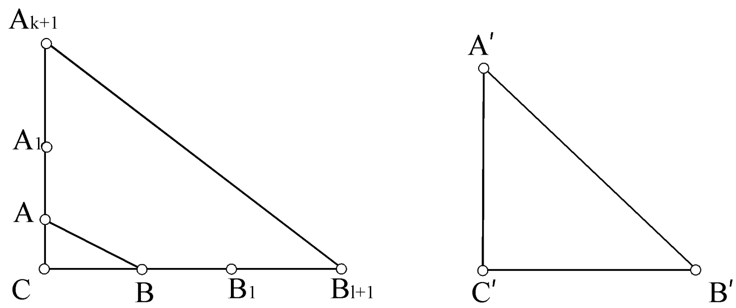
Dokaz. Neka je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla i neka je $\Delta A'B'C'$ proizvoljan pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C'.



Slika 3.5.

(i) Ako su obe katete trougla ΔABC veće ili jednake od odgovarajućih kateta trougla $\Delta A'B'C'$ tada na dužima CB i CA postoje tačke B_1 i A_1 takve da je $CB_1 = C'B'$ i $CA_1 = C'A'$ (Slika 3.5.). Pravougli trougao ΔA_1B_1C nastao je odsecanjem od pravouglog trougla ΔABC čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla pa je prema Lemi 1. zbir unutrašnjih uglova trougla ΔA_1B_1C jednak zbiru dva prava ugla. Iz podudarnosti trouglova ΔA_1B_1C i $\Delta A'B'C'$ sledi da je zbir unutrašnjih uglova trougla $A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla.

(ii) Ako je kateta CA manja od katete $C'A'$ onda na polupravoj CA odredimo niz tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ takav da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ i $CA \cong AA_1$, $AA_1 \cong A_1A_2, \ldots$ (Slika 3.6). Tada postoji prirodan broj k takav da je $CA_k < C'A' < CA_{k+1}$. Pri tome je prema Lemi 2. zbir unutrašnjih uglova u svakom od trouglova ΔA_nBC jednak $2R$.

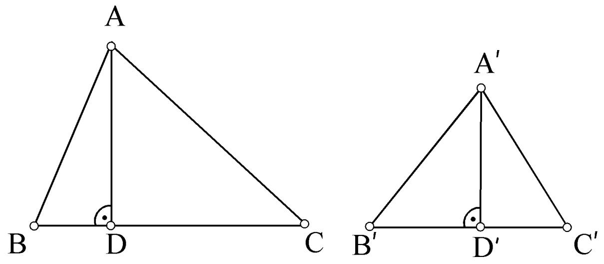


Slika 3.6.

Ako je kateta CB manja od katete $C'B'$ na polupravoj CB uočimo niz tačaka $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ takav da je $\mathcal{B}(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ i $CB \cong BB_1$, $BB_1 \cong B_1B_2, \ldots$ Tada postoji prirodan broj l takav da je $CB_l < C'B' < CB_{l+1}$. Pri tome je prema Lemi 2. zbir unutrašnjih uglova u svakom od trouglova ΔB_nAC jednak $2R$. Dakle, zbir unutrašnjih uglova u trouglu $\Delta A_{k+1}B_{l+1}C$ jednak je $2R$, pri čemu je $CA_{k+1} > C'A'$ i $CB_{l+1} > C'B'$ pa je prema dokazanom delu pod (i) zbir unutrašnjih uglova trougla $\Delta A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla.

Teorema 3.2.3. (Druga Ležandrova teorema) *Ako je u jednom trouglu ΔABC zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla tada je u svakom drugom trouglu $\Delta A'B'C'$ zbir unutrašnjih uglova takođe jednak zbiru dva prava ugla.*

Dokaz. Kod trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ bar po jedna visina ima podnožje na naspramnoj stranici (Slika 3.7). Neka su to podnožja D i D' redom iz tačaka A i A'. Kako je kod ΔABC zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla, to visina AD razlaže taj trougao na trouglove ΔABD i ΔACD takve da su im zbirovi unutrašnjih uglova jednaki po $2R$ (Lema 1).



Slika 3.7.

Trougao ΔABD je pravougli i zbir unutrašnjih uglova mu je jednak $2R$ odakle sledi prema Lemi 3'. da su zbirovi unutrašnjih uglova pravouglih trouglova $\Delta A'B'D'$ i $\Delta A'C'D'$ jednaki po $2R$ pa je i zbir unutrašnjih uglova trougla $A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla. □

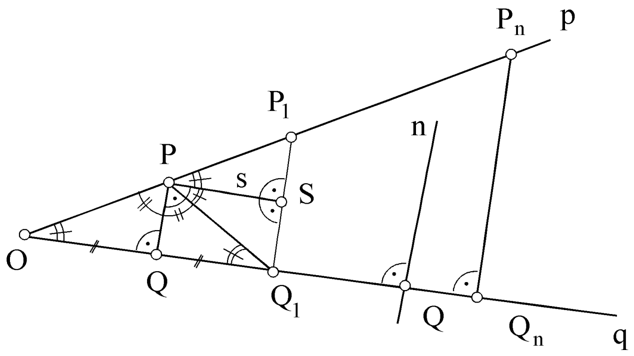
Teorema 3.2.4. *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla, ako i samo ako svaka prava upravna na jedan krak bilo kojeg oštrog ugla seče drugi krak tog ugla.*

Dokaz. Neka je $\measuredangle pOq$ proizvoljan oštar ugao i neka je $P \in p$ proizvoljna tačka. Označimo sa Q podnožje prave, upravne iz tačke P na polupravu q (Slika 3.8). Neka je R proizvoljna tačka poluprave q i n upravna na q u tački R.

Ako važi $\mathcal{B}(O, R, Q)$ onda na osnovu Pašove aksiome direktno sledi da prava n seče i polupravu p. Neka je $\mathcal{B}(O, Q, R)$ i označimo sa P_n, Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ tačke pravih p i q redom, takve da je $\mathcal{B}(O, P, P_1, P_2, \cdots, P_n)$, $\mathcal{B}(O, Q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$, $OP_n = 2^n OP$ i $OQ_n = 2^n OQ$. Ako postoji trougao kod koga je suma unutrašnjih uglova jednaka zbiru dva prava ugla, onda je *zbir unutrašnjih uglova svakog trougla jednak zbiru dva prava ugla* (druga Ležandrova teorema). Označimo sa S tačku prave s upravne na PQ u tački P takvu da je $PS \cong OQ$.

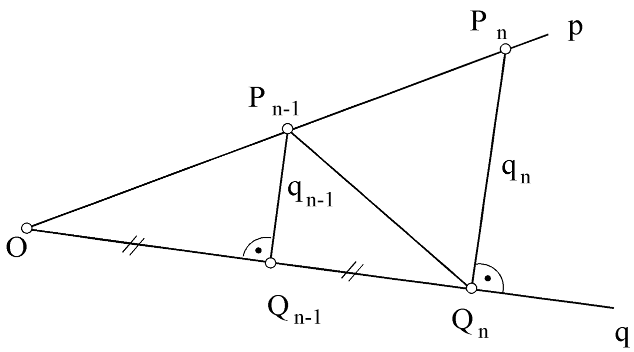
Tada je

$$\Delta OPQ \cong \Delta PP_1S \cong \Delta PQ_1S \cong \Delta PQ_1Q,$$



Slika 3.8.

pa su tačke P_1, S, Q_1 kolinearne i važi $\measuredangle PQ_1Q \cong \measuredangle POQ$ i $\measuredangle P_1Q_1P \cong \measuredangle OPQ$ a kako je još $\measuredangle POQ + \measuredangle OPQ = R$, to je $\measuredangle OQ_1P_1$ prav. Rasuđujući na isti način zaključujemo da je ΔOP_nQ_n pravougli trougao sa pravim uglom kod temena Q_n. Na osnovu Arhimedove aksiome tačku Q_n možemo izabrati tako da je $\mathcal{B}(O, R, Q_n)$. Sada prava n na osnovu Pašovog stava mora seći još jednu stranicu trougla ΔOP_nQ_n u unutrašnjoj tački. Ukoliko bi n sekla stranicu P_nQ_n u unutrašnjoj tački, dobili bi smo trougao sa dva prava ugla, što je nemoguće. Prema tome n mora seći duž OP_n, tj. polupravu p, čime je dokaz završen.



Slika 3.9.

Obratno, neka su Q_n, $n = 1, 2, \ldots$ tačke poluprave q takve da je $\mathcal{B}(O, Q, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, Q_n)$, $OQ_n = 2^n OQ$ i neka svaka prava q_n upravna u tački Q_n na krak q seče krak p oštrog ugla $\measuredangle pOq$ u tački P_n (Slika 3.9). Tada za defekt trougla ΔOP_nQ_n važi

$$\delta(OP_nQ_n) = \delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(P_{n-1}Q_{n-1}Q_n) + \delta(P_{n-1}P_nQ_n),$$

tj.

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1}).$$

Nastavljajući taj postupak posle n koraka dobijamo

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2^n\delta(OPQ).$$

Ako bi bilo $\delta(OPQ) > 0$, broj n možemo izabrati dovoljno veliki da $2^n\delta(OPQ)$ bude veće od bilo kog unapred zadatog ugla, pa i od $2R$. Tada bi bilo

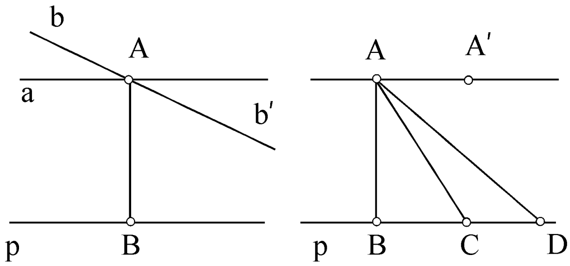
$$\delta(OP_nQ_n) > 2R$$

a to je nemoguće. Dakle, mora biti $\delta(OPQ) = 0$, tj. $\sigma(OPQ) = 2R$. $\square$

Teorema 3.2.5. (Treća Ležandrova teorema) *Postoji trougao Δ kome je zbir $\sigma(\Delta)$ unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla ako i samo ako u ravni π određenoj pravom p i tačkom A van nje postoji samo jedna prava a koja sadrži tačku A i ne seče pravu p.*

Dokaz. Označimo sa B podnožje normale iz tačke A na pravu p, a sa a pravu koja je upravna na AB u tački A (Slika 3.10.). Pretpostavimo da postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla i dokažimo da je prava a jedina koja prolazi kroz tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p. Neka je b još jedna prava u ravni π koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom sa pravom p. Neka je b' ona od polupravih prave b sa početkom u tački A koja sa polupravom BA gradi oštar ugao. Prava p je upravna na krak BA oštrog ugla, pa na osnovu teoreme 3.2.4. ona seče drugi krak b', dakle i pravu b.

Obratno, neka je u ravni π data prava p, tačka A van nje i prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p. Neka je prava a jedinstvena sa tom osobinom. Pokazaćemo da postoji trougao čiji je zbir unutrañjih uglova jednak zbiru dva prava ugla. Obeležimo sa B podnožje upravne iz tačke A na pravu p (Slika 3.10.). Neka je C proizvoljna tačka prave p različita od tačke B i A' tačka prave a sa iste strane prave AB sa koje je i tačka C. Tada je zbir $\sigma(ABC)$ unutrašnjih uglova trougla ΔABC jednak $2R$. Dokažimo to. Na osnovu prve Ležandrove teoreme važi $\sigma(ABC) \leq 2R$, pa je $\measuredangle ACB \leq \measuredangle CAA'$. Ako bi bilo $\measuredangle ACB < \measuredangle CAA'$ onda bi unutar ugla $\measuredangle CAA'$ postojala poluprava b' koja sa AC gradi ugao β podudaran uglu



Slika 3.10.

$\measuredangle ACB$. Ugao $\measuredangle ACB$ je oštar odakle sledi da je i β oštar, tj. poluprava b na osnovu teoreme 3.2.4. seče pravu p u tački D. Tada bi u trouglu ΔACD spoljašnji ugao kod temena C bio jednak unutrašnjem nesusednom uglu $\measuredangle CAD$, što je nemoguće. Prema tome mora biti zbir unutrašnjih uglova u ΔABC jednak $2R$. □

3.3 Ekvivalenti Plejferove aksiome paralelnosti

Teorema 3.3.1. *Tvrđenje: "Zbir unutrašnjih uglova proizvojnog trougla jednak je zbiru dva prava ugla", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Sledi direktno iz druge i treće Ležandrove teoreme. □

Teorema 3.3.2. *Tvrđenje: "Zbir σ unutrašnjih uglova prostog ravnog n-tougla jednak je $\sigma = 2(n-2)R$, pri čemu je R prav ugao", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Direktno sledi iz prethodne teoreme. □

Posledica. *Tvrđenje "Zbir spoljašnjih uglova kod svih temena konveksnog prostog ravnog n- tougla jednak je $4R$" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Definicija 3.1. Četvorougao $ABCD$ je *Sakerijev* ako važi $\measuredangle A = \measuredangle B = R$ i $AD = BC$. Stranica AB je osnovica, CD protivosnovica a AD i BC su visine Sakerijevog četvorougla.

U Euklidskoj geometriji Sakerijev četvorougao je pravougaonik.

Teorema 3.3.3. *U apsolutnoj geometriji uglovi nalegli na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su jednaki.*

Definicija 3.2. *Srednja linija Sakerijevog* četvorougla je duž koja spaja središta osnovice i protivosnovice.

Teorema 3.3.4. *U apsolutnoj geometriji srednja linija Sakerijevog četvorougla je zajednička normala osnovice i protivosnovice.*

Teorema 3.3.5. *Tvrđenje: "Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su pravi" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Definicija 3.3. Četvorougao sa tri prava ugla u apsolutnoj geometriji naziva se *Lambertov.*

Teorema 3.3.6. *Tvrđenje: "Svi uglovi Lambertovog četvorougla su pravi", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Teorema 3.3.7. *Tvrđenje: "Svaka prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jedan krak oštrog ugla seče drugi krak", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Sledi direktno iz Teoreme 3.2.4. i treće Ležandrove teoreme. □

Peti Euklidov postulat. Zbog svog istorijskog značaja, od posebnog je interesa Peti Euklidov postulat kao jedan od mnogih ekvivalenata Plejferove aksiome paralelnosti:

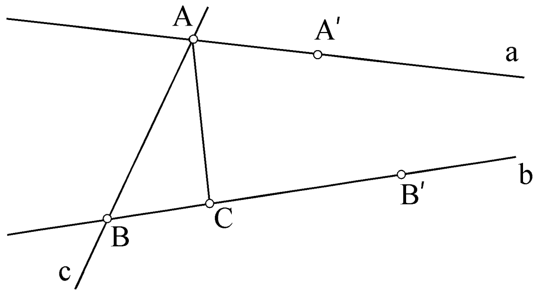
Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.

Teorema 3.3.8. *Peti Euklidov postulat i Plejferova aksioma paralelnosti su ekvivalentna tvrđenja.*

Dokaz. Neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka prava c seče prave a i b redom u tačkama A i B. Označimo sa A' i B' tačke redom pravih a i b takve da je

$$\measuredangle A'AB + \measuredangle B'BA < 2R$$

gde je R prav ugao (Slika 3.11). Tada je bar jedan od uglova $\measuredangle A'AB$ i $\measuredangle B'BA$ oštar. Ne umanjujući opštost dokaza pretpostavimo da je ugao $\measuredangle B'BA$ oštar.

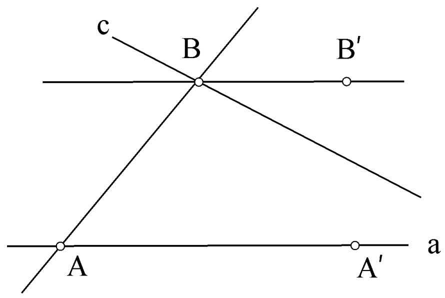


Slika 3.11.

Označimo sa C podnožje upravne iz tačke A na pravu b. Tačke C i B' su sa iste strane tačke B jer bi smo u suprotnom dobili trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova veći od zbira dva prava ugla, što je u suprotnosti sa prvom Ležandrovom teoremom. Tada je i ugao $\measuredangle CAA'$ oštar. Zaista, kako važi Plejferova aksioma paralelnosti to je $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = R$, odakle zaključujemo

$$\begin{aligned}\measuredangle CAA' &= \measuredangle BAA' - \measuredangle BAC = \measuredangle BAA' - (R - \measuredangle ABC)\\ &= \measuredangle BAA' - R + \measuredangle ABC < 2R - R = R\end{aligned}$$

Prava b je normala u tački C na jedan krak oštrog ugla $\measuredangle CAA'$, odakle na osnovu teoreme 3.3.7. seče drugi krak tog ugla. Dakle prave a i b se seku, tj. važi peti Euklidov postulat.



Slika 3.12.

Obratno, neka važi peti Euklidov postulat i neka su dati prava a i tačka B van prve a. Neka su A i A' proizvoljne tačke prave a i neka je B' tačka ravni (a, B) određenoj pravom a i tačkom B tako da je (Slika 3.12)

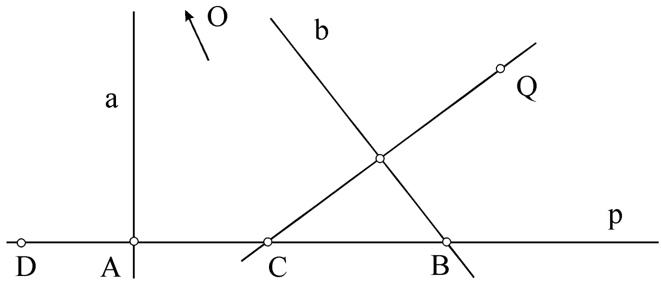
$$A', B' \stackrel{\cdot\cdot}{-} AB \text{ i } \measuredangle A'AB + \measuredangle ABB' = 2R.$$

Prava $b \equiv BB'$ je jedina prava ravni (a, B) koja sadrži tačku B i nema zajedničkih tačaka sa pravom a. Zaista, svaka druga prava c ravni (a, B) koja sadrži tačku B gradi sa pravom AB suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla. Kako važi peti Euklidov postulat prava c mora seći pravu a, a to znači da važi Plejferova aksioma paralelnosti. □

Teorema 3.3.9. *Tvrđenje: "Kroz ma koje tri nekolinearne tačke prolazi krug", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka su A, B i C tri nekolinearne tačke. Medijatrise stranica trougla ΔABC pripadaju istom pramenu pravih. Nije teško zaključiti da se radi o pramenu konkurentnih pravih, tj. da presečna tačka O medijatrisa stranica trougla ΔABC predstavlja središte kruga opisanog oko trougla ΔABC.

Obratno, neka važe aksiome apsolutne geometrije i neka kroz ma koje tri nekolinearne tačke prolazi krug. Neka proizvoljne prave a i b seku neku pravu p tako da je a upravna na p i b nije upravna na p.

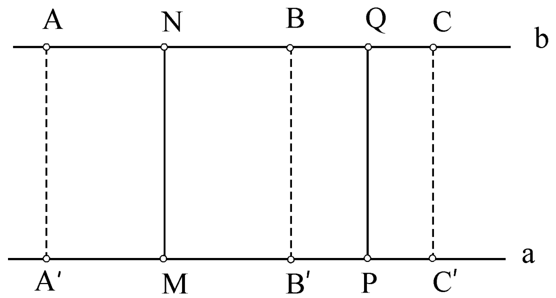


Slika 3.13.

Označimo sa A i B presečne tačke prave p redom sa pravama a i b (Slika 3.13). Neka je C tačka prave p takva da je $\mathcal{B}(A, C, B)$. Neka je D tačka simetrična tački C u odnosu na tačku A, q prava koja je normalna na pravu b i sadrži tačku C i Q tačka prave q simetrična tački C u odnosu na pravu b. Dakle, prave a i b su medijatrise redom duži CD i CQ. Tačke C, D i Q su tri nekolinearne tačke jer bi u suprotnom bilo $b \perp p$. Prema uvedenoj pretpostavci kroz tačke C, D i Q prolazi krug, sa centrom u tački O. Tačka O je podjednako udaljena od temena C, D i Q trougla ΔDCQ, tj. $OC \cong OD \cong OQ$. Tačka O pripada pravoj a, jer je a medijatrisa duži CD. Takođe tačka O pripada i pravoj b, jer je b medijatrisa duži CQ. Dakle, prave a i b seku se u tački O, što na osnovu teoreme 3.2.4. i treće Ležandrove teoreme znači da važi Plejferova aksioma paralelnosti. □

Teorema 3.3.10. *Tvrđenje: "U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljene od date prave", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka su A, B, C tri kolinearne tačke podjednako udaljene od prave a. Dokazaćemo da tada važi Plejferova aksioma paralelnosti. Označimo sa A', B', C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu a.



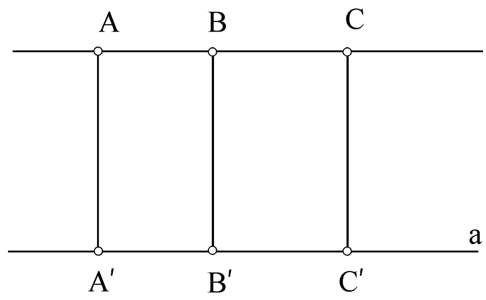
Slika 3.14.

Tada je $AA' \cong BB' \cong CC'$. Dakle četvorougao $AA'B'B$ je Sakerijev. Srednja linija MN tog četvorougla (teorema 3.3.4.) je zajednička normala osnovice i protivosnovice, tj. $MN \perp a$ i $MN \perp b$ (Slika 3.14).

Četvorougao $BB'C'C$ je Sakerijev pa je srednja linija PQ zajednička normala na prave a i b (teorema 3.3.4.). Kako tačke N i Q pripadaju pravoj b i ne pripadaju pravoj a, to tačke M, N, P i Q obrazuju četvorougao sa četiri prava ugla, odakle na osnovu teoreme 3.3.2. važi Plejferova aksioma paralelnosti.

Obratno, neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka su u ravni date prava a i tačke A, B i C sa iste strane prave a, tako da je $AA' \cong BB' \cong CC'$ gde su A', B' i C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu a. Pokazaćemo da su tačke A, B i C kolinearne (Slika 3.15).

Četvorougao $AA'B'B$ je pravougaonik pa je $AB \parallel a$. Takođe, četvorougao $AA'C'C$ je pravougaonik pa je $AC \parallel a$. Kako važi Plejferova aksioma paralelnosti prave AB i AC se poklapaju, tj. tačke A, B i C su kolinearne. □

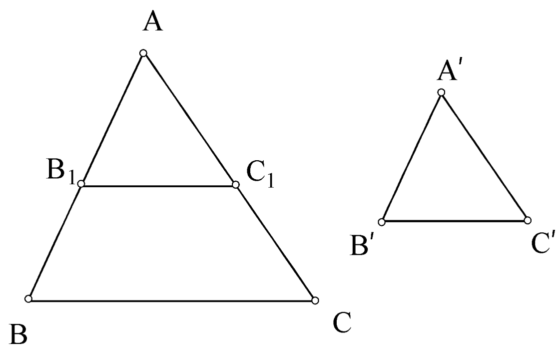


Slika 3.15.

Razmotrićemo još jedan interesantan ekvivalent aksiome paralelnosti:

Teorema 3.3.11. *Tvrđenje: "Postoje dva trougla kojima su odgovarajući uglovi jednaki a odgovarajuće stranice nejednake" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka za trouglove ΔABC i $\Delta A'B'C'$ važi $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$ a odgovarajuće stranice su im nejednake (Slika 3.16). To znači da postoji tačka $B_1 \neq B$ na polupravoj AB takva da je $AB_1 \cong A'B'$ i tačka $C_1 \neq C$ na polupravoj AC takva da je $AC_1 \cong A'C'$.



Slika 3.16.

Trouglovi ΔAB_1C_1 i $\Delta A'B'C'$ su podudarni jer imaju jednake dve stranice i njima zahvaćen ugao, odakle sledi

$$\measuredangle AB_1C_1 \cong \measuredangle A'B'C' \text{ i } \measuredangle AC_1B_1 \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Posmatrajmo četvorougao BCC_1B_1. Tada za zbir unutrašnjih uglova tog četvorougla važi

$$\begin{aligned}\sigma(BCC_1B_1) &= \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle CC_1B_1 + \measuredangle C_1B_1B \\ &= \measuredangle B' + \measuredangle C' + (2R - \measuredangle C') + (2R - \measuredangle B') = 4R.\end{aligned}$$

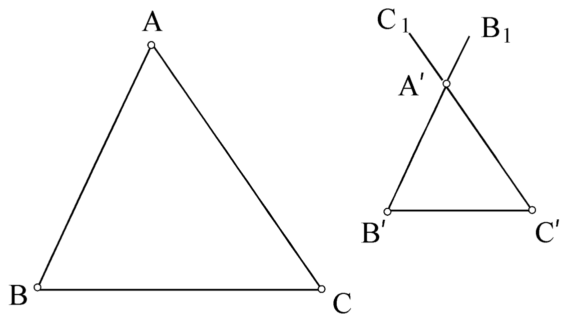
Na osnovu teoreme 3.3.2. važi Plejferova aksioma paralelnosti.

Obratno, neka važi Plejferova aksioma paralelnosti. Neka je dat trougao ΔABC i duž $B'C'$ tako da je $B'C' \neq BC$ (Slika 3.17.).

Neka su $B'B_1$ i $C'C_1$ poluprave takve da je

$$\measuredangle(B'B_1, B'C') = \measuredangle B,\ \ \measuredangle(B'C', C'C_1) = \measuredangle C.$$

Uglovi $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ su uglovi trougla ΔABC , pa važi $\measuredangle B + \measuredangle C < 2R$, odakle sledi $\measuredangle B' + \measuredangle C' < 2R$. Kako smo pretpostavili da važi Plejferova aksioma paralelnosti važiće i Peti Euklidov postulat, tj. poluprave $B'B_1$ i $C'C_1$ će se seći u tački A'. Trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju sva tri odgovarajuća ugla jednaka, dok im odgovarajuće stranice nisu jednake. $\square$



Slika 3.17.

3.4 Neki pokušaji dokazivanja petog euklidovog postulata

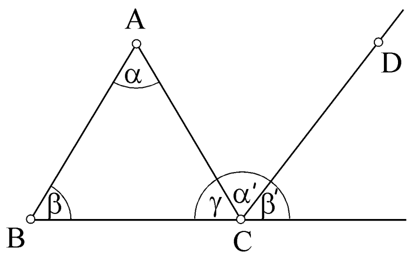
Kad već nisu uspeli dokazati Euklidovu aksiomu o paralelnosti, mnogi matematičari su na razne načine pokušavali da dokažu neki od njenih ekvivalenata. Ukoliko bi takav dokaz uspeo, ne pozivajući se na aksiomu o paralelnosti, zaključili bismo da V Euklidov postulat nije aksioma, nego teorema. Međutim, nijedan od tih pokušaja nije uspeo.

Ovde ćemo izneti jedan od tih prividnih "dokaza" koji je dao Tibo[1]. On

[1] Bernhard Friedrich Thibaut (1775-1832), nemački matematičar

je želeo da dokaže teoremu koja kaže da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla. Kako je to tvrđenje ekvivalentno Plejferovoj aksiomi paralalenosti, a samim tim i V Euklidovom postulatu, sledilo bi da je Tibo na indirektan način dokazao aksiomu paralelnosti.

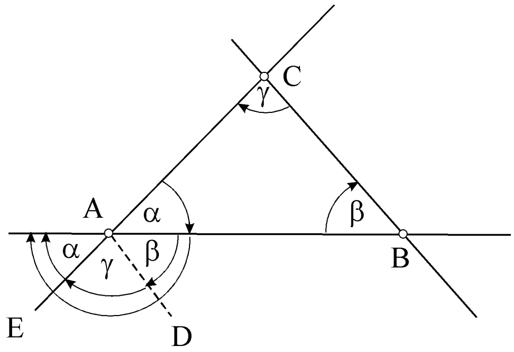
Podsetimo se, najpre, kako uobičajeno dokazujemo da je zbir uglova u nekom trouglu jednak $2R$. Posmatrajmo trougao ΔABC sa uglovima α, β i γ redom kod temena A, B i C (Slika 3.18.). Produžimo stranicu BC ovog trougla preko temena C. U istom temenu konstruišimo paralelu CD sa stranicom AB. Ta paralela deli spoljašnji ugao kod temena C na uglove α' i β'. Kako su β i β' uglovi sa paralelnim kracima, oni su jednaki među sobom, tj. $\beta = \beta'$. Iz istog razloga su i uglovi α i α' jednaki. Tada je $\alpha' + \beta' + \gamma = 2R$, odakle sledi $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.



Slika 3.18.

Na taj način je dokazano da je zbir uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla. Potrebno je istaknuti da je u dokazu ipak korišćena aksioma paralelnosti. Kao što smo mogli videti, dokaz je izveden uz pomoć prave CD paralelne stranici AB. Međutim, da u tački C postoji jedinstvena prava koja je paralelna pravoj AB garantuje upravo aksioma paralelnosti.

Tibo je bio uveren da mu je uspelo dokazati da je zbir uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla bez pozivanja na aksiomu paralelnosti. Svoj dokaz izveo je pomoću triju rotacija prave p u nekoj ravni. Posmatrajmo trougao ΔABC (Slika 3.19.). Prava p neka je određena tačkama A i B i orijentisana udesno. Rotirajmo pravu p oko temena B u smeru kretanja kazaljke na časovniku dok se ne poklopi sa stranicom BC. Prava p se pri tom rotirala za ugao β. Zatim, rotirajmo pravu p dok se ne poklopi sa stranicom CA u istom smeru. Tako je prava p rotirala za ugao γ. Treća rotacija prave p neka bude oko temena A za ugao α. Nakon treće rotacije prava p će se ponovo poklopiti sa pravom AB. Prava p je u toku ovih triju rotacija postepeno menjala svoj smer kako pokazuju strelice na slici i na kraju se ponovo našla u početni položaj samo sa suprotnim smerom. Zbir uglova za



Slika 3.19.

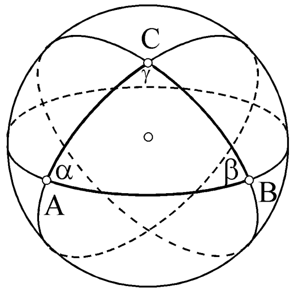
koje je prava p izvršila sve tri rotacije iznosi $\alpha + \beta + \gamma$, a to je upravo zbir uglova u trouglu. S druge strane, prava p bi se mogla naći u istom položaju, kao i kada je izvršila tri uzastopne rotacije redom oko temena B, C i A, ako bi načinila jednu rotaciju oko vrha A za ugao $2R$. Odavde Tibo zaključuje da je zbir uglova u trouglu:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Izgleda da smo uspeli dokazati da zbir uglova u trouglu iznosi $2R$, s tim da u dokazu nismo uopšte koristili aksiomu o paralelnosti. To znači da teorema o zbiru uglova u trouglu ne zavisi od aksiome paralelnosti. No, kako je teorema o zbiru unutrašnjih uglova u trouglu ekvivalentna toj aksiomi, sledi da smo na posredan način dokazali tu aksiomu. Čim se neka aksioma može dokazati, ona odmah u deduktivnom sistemu gubi položaj aksiome i spada u teoreme. Tada nam se na kraju ovog razmatranja pričinjava da je Tibo uspeo da dokaže V Euklidov postulat.

Da je Tiboov dokaz pogrešan ukazuje činjenica da bi se na isti način mogalo dokazati da je zbir uglova sfernog trougla jednak zbiru dva prava ugla (Slika 3.20). Dokaz se izvodi na sličan način, samo što ćemo u ovom slučaju pravu p zameniti glavnim krugom sfere kome pripada taj trougao. Ovde bismo uzeli da glavni krug u početnom položaju prolazi kroz tačke A i B, te bismo ga redom rotirali oko temena B, C i A. Na taj način dobili bismo isto što i u dokazu Tiboa. Tako bismo zaključili da je zbir uglova sfernog trougla jednak $2R$, što nije istina, jer se u sfernoj geometriji dokazuje da je taj zbir uvek veći od $2R$.

Sada je logično postaviti pitanje: Gde je Tibo pogrešio? Greška je u tome što su tri uzastopne rotacije prave p (ili glavnog kruga) oko triju različitih



Slika 3.20.

tačaka B, C i A s uglovima β, γ i α ekvivalentne jednoj rotaciji oko tačke A za ugao $\beta + \gamma + \alpha$ jedino ako je:

$$\measuredangle BAD = \measuredangle ABC \text{ i } \measuredangle DAE = \measuredangle BCA$$

što je moguće samo ako u tački A postoji jedinstvena prava AD paralelna pravoj CB, tj. ako važi V Euklidov postulat. Dakle, i Tibo se kao i mnogi drugi matematičari pokušavajući da dokaže aksiomu paralelnosti neprimetno u toku samog dokaza oslanjao na tu istu aksiomu.

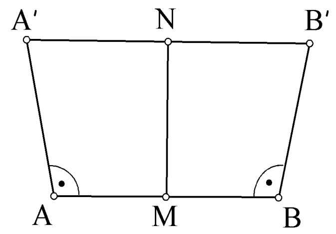
Budući da nikako nije uspevalo direktno dokazivanje Euklidove aksiome o paralelama, dva su matematičara u XVIII veku, Sakeri[2] i Lambert[3], nezavisno jedan od drugog pokušali dati indirektan dokaz. Obojica su pošla od činjenice da je Euklidova aksioma paralelnosti ekvivalentna tvrđenju da postoji četvorougao sa četiri prava ugla.

Sakerijeva proučavanja bila su objavljena 1733. godine u Milanu pod naslovom "Euclides ob omni naevo vindicatus". U tom delu Sakeri pokušava da V postulat dokaže indirektnim putem.

Sakeri polazi od četvorougla $\square ABB'A'$ (Slika 3.21.) koji ima dva prava ugla na osnovici AB i dve jednake bočne strane AA' i BB'. Iz simetričnosti slike u odnosu na normalu MN sledi da su uglovi kod temena A' i B' međusobno jednaki. Ako se usvoji V postulat i, prema tome, Euklidova teorija paralelnih linija, može se odmah utvrditi da su uglovi kod temena A i B pravi, a četvorougao $\square ABB'A'$ - pravougaonik. Obrnuto po Sakeriju, kad bi bar u jednom četvorouglu uglovi na gornjoj osnovici bili pravi, važio bi Euklidov postulat o paralelama. Želeći da dokaže V Euklidov postulat, Sakeri je učinio tri moguće pretpostavke: ili su uglovi $\measuredangle A'$ i $\measuredangle B'$ pravi, ili

[2] Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733), italijanski matematičar

[3] Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), švajcarski matematičar i fizičar



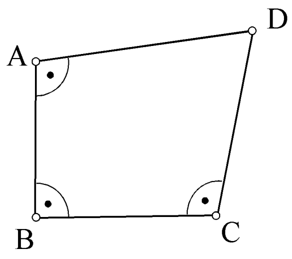
Slika 3.21.

tupi, ili oštri. Ove tri pretpostavke on je nazvao hipotezama pravog, tupog i oštrog ugla. Pošto je hipoteza pravog ugla ekvivalentna V postulatu, to, da bi taj postulat dokazao, treba odbaciti dve druge hipoteze. Potpuno tačnim rasuđivanjem Sakeri najpre dovodi do protivurečnosti hipotezu tupog ugla. Zatim, usvojivši hipotezu oštrog ugla, on izvodi veoma opsežno ispitivanje u cilju da i tu dobije dva uzajamno protivurečna tvrđenja.

Razvijajući to ispitivanje Sakeri izgrađuje složen geometrijski sistem, čija su pojedina tvrđenja toliko protivurečna našim predstavama o položaju pravih u ravni, da bi se mogla smatrati apsurdnim. Na primer, u geomerijskom sistemu koji odgovara hipotezi oštrog ugla dve paralelne prave ili imaju samo jednu zajedničku normalu, od koje se na obe strane neograničeno udaljavaju jedna od druge, ili nemaju nijednu i, približavajući se jedna drugoj asimptotski u jednom smeru, a neograničeno se jedna od druge udaljavaju u drugom smeru.

U samoj protivurečnosti sa uobičajenim prostornim predstavama Sakeri, ispravno, ne vidi logičku nemogućnost tih stavova. Ali posle niza besprekorno tačnih rasuđivanja, Sakeri utvđuje lažnost hipoteze oštrog ugla. Smatrajući da su na taj način hipoteze tupog i oštrog ugla dovedene do protivurečnosti, Sakeri zaključuje da je jedino hipoteza pravog ugla istinita i da je na taj način dat dokaz V postulata. Očigledno, Sakeri pri tom i sam oseća da hipotezu oštrog ugla nije doveo do logičke protivurečnosi i on se ponovo vraća na nju da bi dokazao da je ona "protivurečna samoj sebi". U tom cilju on izračunava na dva načina dužinu neke linije i za nju dobija dve različite vrednosti. Ta okolnost bi odista u sebi sadržala protivurečnost, ali je Sakeri došao do nje učinivši grešku u računanju. Iako Sakeri nije primetio grešku, on je ipak, kako se vidi iz nekih njegovih primedaba, i svojim dopunskim rasuđivanjem bio nezadovoljan.

Ideje koje je Lambert razvio u delu "Teorija paralelnih linija" iz 1766. godine bliske su Sakerijevim shvatanjima. Lambert posmatra četvorougao



Slika 3.22.

$\square ABCD$ koji ima tri prava ugla $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ (Slika 3.22.). Za četvrti ugao mogu se takođe učiniti tri pretpostavke: da je taj ugao oštar, prav ili tup. Na taj način, ovde se opet javljaju tri hipoteze. Pošto je utvrdio ekvivalentnost hipoteze pravog ugla sa V postulatom i doveo do protivurečnosti hipotezu tupog ugla, Lambert je, slično Sakeriju, primoran da se najviše bavi hipotezom oštrog ugla. Hipoteza oštrog ugla dovodi Lamberta, kao i Sakerija, do složenog geometrijskog sistema. Zadatak da se dokaže V postulat bio bi rešen kad bi se u tom sistemu pronašla dva stava koji su logički protivurečni jedan drugom. Međutim, bez obzira na to što je veoma razvio pomenuti sistem, Lambert nije uspeo da u njemu naiđe na dva tvrđenja koja se logički uzajamno isključuju. Kao ni Sakeri, ni on nije zaključke o lažnosti hipoteze oštrog ugla izveo samo na osnovu toga što su te osobine protivurečne našim očiglednim predstavama o osobinama pravih. Ali za razliku od Sakerija, Lambert nije učinio grešku usled koje bi hipotezu oštrog ugla mogao smatrati odbačenom i, prema tome, V postulat dokazanim. Lambert nigde u svom delu ne tvrdi da je dokazao V postulat i dolazi do zaključka da nijedan drugi pokušaj u tom pravcu nije doveo do cilja.

"Dokazi Euklidovog postulata", piše Lambert, "mogu se dovesti tako daleko, da, očigledno, preostaje neznatna sitnica. Ali, pri podrobnoj analizi ispostavlja se da baš u toj prividnoj sitnici leži sva suština pitanja; ona obično sadrži ili stav koji treba dokazati ili njemu ekvivalentan postulat".

Osim toga, razvijajući sistem posledica hipoteze oštrog ugla, Lambert otkriva analogiju toga sistema sa sfernom geometrijom i u tome vidi mogućnost njegovog postojanja.

"Sklon sam čak da poverujem da je treća hipoteza tačna na nekoj imaginarnoj sferi. Mora postojati uzrok usled koga se ona u ravni ni izdaleka ne može oboriti onako lako kako se to može učiniti sa drugom hipotezom".

Lambert je na neobičan način predosetio pravo rešenje pitanja V postulata i on je dalje no iko pre njega išao pravilnim putem.

Glava 4

Uvod u hiperboličku geometriju

Suštinskih promena u geometriji nije bilo još iz vremena Euklida i Arhimeda sve do prve polovine devetnaestog veka. Mnogi pokušaji da se razreši pitanje petog Euklidovog postulata ostali su bezuspešni. Pored Gausa, problemom paralela bavili su se i drugi istaknuti matematičari tog vremena kao npr. Dalamber, Laplas, Lagranž. Problem paralela je rešen, ali u neskladu sa predrasudama koje su vekovima vladale.

Početkom devetnaestog veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidov peti postulat zamene aksiomom koja bi ga negirala. Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija. Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očiglednost i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva. Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon smrti njihovih tvoraca.

4.1 Aksioma Lobačevskog

Ako sistemu aksioma apsolutne geometrije pridružimo aksiomu Lobačevskog umesto Plejferove aksiome paralelnosti, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *geometrijom Lobačevskog* ili *Hiperboličkom geometrijom.* Ova geometrija se ponekad naziva i *geometrijom Boljaj-Lobačevskog* ili geometrijom Gaus-Boljaj-Lobačevskog.

Aksioma Lobačevskog. *Postoje prava a i tačka A van prave a takve da u njima određenoj ravni kroz tačku A prolaze dve različite prave a_1 i a_2 koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.*

Ravan i prostor u kojima važe te aksiome nazivamo respektivno *hiperboličkom ravni* ili *ravni Lobačevskog* i *hiperboličkim prostorom* ili *prostorom Lobačevskog* a označavamo ih redom L^2 i L^3.

Aksioma Lobačevskog omogućava da neposredno ustanovimo niz teorema koje se odnose na zbirove unutrašnjih i spoljašnjih uglova prostih ravnih poligona ili na teoriju koja se odnosi na uzajamni položaj pravih i ravni u prostoru. Sva tvrđenja koja važe u apsolutnoj geometriji se prenose a dobija se i niz tvrđenja koja su posledica aksiome Lobačevskog.

Teorema 4.1.1. *Ako je $\sigma(\Delta)$ zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni L^2 i ako je R prav ugao tada je $\sigma(\Delta) < 2R$.*

Dokaz. Prema prvoj Ležandrovoj teoremi sledi $\sigma(\Delta) \leq 2R$. Ako bi bilo $\sigma(\Delta) = 2R$ tada bi prema drugoj Ležandrovoj teoremi zbir unutrašnjih uglova $\sigma(\Delta)$ svakog trougla bio jednak $2R$ te bi prema trećoj Ležandrovoj teoremi za svaku pravu p i svaku tačku P van prave p postojala jedinstvena prava u ravni određenoj pravom p i tačkom P, koja sadrži tačku P a sa pravom p nema zajedničkih tačaka, što je u suprotnosti sa aksiomom Lobačevskog. □

Teorema 4.1.2. *Svaki spoljašnji ugao trougla u ravni L^2 veći je od zbira dva unutrašnja nesusedna ugla tog trougla.*

Dokaz se dobija neposrednom primenom prethodne teoreme.

Teorema 4.1.3. *Ako je $\sigma(A_1A_2\ldots A_n)$ zbir svih unutrašnjih uglova prostog n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$ u ravni L^2 i R prav ugao tada je*

$$\sigma(A_1A_2\ldots A_n) < (n-2)\,2R.$$

Dokaz se dobija triangulacijom n-tougla i primenom matematičke indukcije. □

Teorema 4.1.4. *Ne prolazi kroz svaku unutrašnju tačku oštrog ugla prava koja seče oba kraka tog ugla.*

Teorema 4.1.5. *Neka u hiperboličkoj ravni prave a i b seku pravu p, tako da je a normalno na p, a prava b nije. Prave a i b se ne seku uvek.*

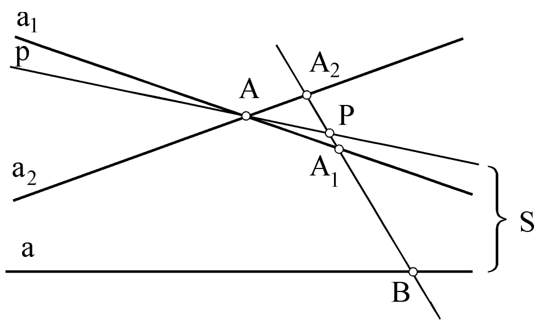
Teorema 4.1.6. *Ne može se oko svakog trougla opisati krug.*

Teorema 4.1.7. *U ravni ne postoje tri kolinearne tačke, koje su podjednako udaljene od date prave.*

Teorema 4.1.8. *Ako u hiperboličkoj ravni dve prave pri preseku sa trećom obrazuju suprotne uglove čiji je zbir manji od zbira dva prava ugla, one se ne seku uvek.*

Teorema 4.1.9. *Dva slična trougla su uvek i podudarna.*

Teorema 4.1.10. *Ako su u hiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u ravni L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.*



Slika 4.1.

Dokaz. Prema aksiomi Lobačevskog postoje dve prave a_1 i a_2 (Slika 4.1.) takve da sadrže tačku A i ne seku pravu a. Ako obeležimo sa A_2 tačku prave a_2 koja se nalazi sa one strane prave a_1 sa koje nije prava a, a sa B bilo koju tačku prave a, biće tačke A_2 i B sa raznih strana prave a_1 te duž A_2B seče pravu a_1 u tački A_1.

Pri tome je tačka A_1 između tačaka A_2 i B , te su A_1 i A_2 različite tačke. Neka je P bilo koja unutrašnja tačka duži A_1A_2 a p prava određena tačkama A i P. Tada prava p sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Zaista, jer ako bi prava p sekla pravu a npr. u nekoj tački S, tada bi važio jedan od raspreda tačaka $\mathcal{B}(A, P, S)$ ili $\mathcal{B}(S, A, P)$. Ako bi bilo $\mathcal{B}(A, P, S)$, onda bi prava a_1 pripadala ravni trougla ΔSPB, ne bi sadržala ni jedno njegovo teme, sekla bi stranicu PB u tački A_1 a produžetak stranice PS u tački A. Prema Pašovom stavu prava a_1 bi morala da seče i stranicu BS tj pravu a što je u suprotnosti s pretpostavkom. Na potpuno isti način se dokazuje da ne može biti $\mathcal{B}(S, A, P)$. Dakle, prava p sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Kako na duži A_1A_2 postoji beskonačno mnogo unutrašnjih tačaka to postoji i neograničeno mnogo pravih sa osobinom da sadrže tačku A i ne seku pravu a, a nalaze se u ravni određenoj tačkom A i pravom a. $\square$

Zaključujemo na osnovu prethodne teoreme da se skup svih pravih koje sadrže tačku A i koje se nalaze u ravni L^2 može razložiti na dva podskupa pravih $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pri čemu je $\mathcal{M}$ skup svih pravih koje sadrže tačku A i seku pravu a, a $\mathcal{N}$ skup svih pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a. Nije teško ustanoviti da ovakvo razlaganje zadovoljava uslove Dedekindovog preseka, te prema tome postoje dve i samo dve granične prave koje razdvajaju skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Nije teško indirektnim postupkom ustanoviti da granične prave ova dva skupa pravih nemaju sa pravom a zajedničkih tačaka, tj. da pripadaju skupu $\mathcal{N}$.

Definicija 4.1. *Razlika između zbira dva prava ugla i zbira uglova trougla:*

$$\delta = 2R - (\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB)$$

naziva se uglovni defekt trougla.

Definicija 4.2. Neka su u hiperboličkoj ravni date prava a i tačka A van nje. Granične prave a_1 i a_2 koje razdvajaju prave pramena $\mathcal{X}_A$ sadržane u ravni L^2 na podskupove pravih koje ne seku pravu a i pravih koje seku pravu a, nazivamo pravama koje su u tački A *paralelne* sa pravom a.

Jednu od tih pravih smatraćemo paralelnom pravoj a u jednom smeru, a drugu paralelnom pravoj a u drugom smeru. Sve ostale prave u toj ravni koje sadrže tačku A i koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka nazivamo *hiperparalelnim* s pravom a. Za paralelnost koristimo uobičajenu oznaku $p \parallel a$ a za hiperparalelnost koristimo oznaku $p \underset{h}{\parallel} a$.

4.2 Paralelne prave u ravni L²

Predhodnom definicijom uvedena je relacija paralelnosti dve prave u L^2. Ta relacija je bila strogo vezana za paralelnost jedne prave prema drugoj pravoj u odnosu na zadatu tačku. Cilj nam je da ustanovimo da paralelnost ne zavisi od tačke u odnosu na koju smo tu paralelnost definisali tj. da pokažemo da je to svojstvo transmisibilno (prenosno).

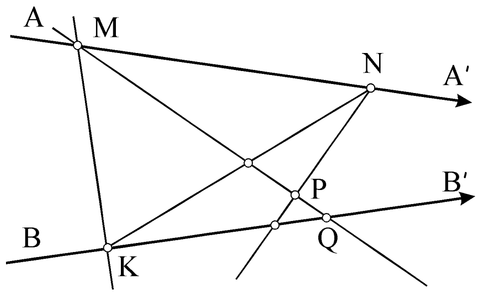
Teorema 4.2.1. *Relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 je transmisibilna.*

Dokaz. Neka je prava AA' paralelna pravoj BB' u nekoj tački M. Dokažimo da je $AA' \parallel BB'$ u proizvoljnoj drugoj tački N prave AA'. Postoje dve mogućnosti:

(i) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru paralelnosti,

(ii) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti.

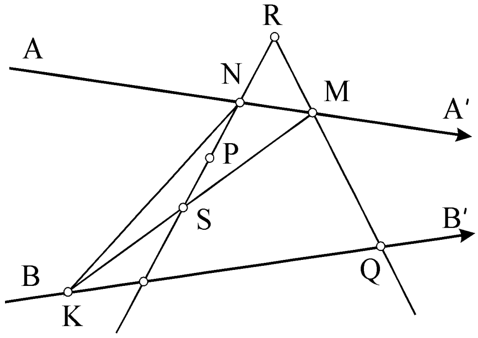
Razmotrimo ponaosob svaki od ova dva slučaja.



Slika 4.2.

(i) Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bi smo dokazali da je $AA' \parallel BB'$ u tački N dovoljno je ustanoviti da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', tj. da svaka prava koja sadrži tačku N i proizvoljnu tačku P unutar ugla $\measuredangle KNA'$ seče pravu BB'.
Ako bi se tačka P nalazila na pravoj BB' ili sa one strane prave BB' sa koje nije tačka N, neposredno bi sledilo da prava NP seče pravu BB'. Neka je tačka P (Slika 4.2.) sa one strane prave BB' sa koje je i N. Kako je $AA' \parallel BB'$ u tački M prava MP seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP je pri tome u ravni trougla ΔMKQ i ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu MQ u tački P, a ne seče stranicu MK, jer u uglu $\measuredangle KNM$ prava NP nema tačaka. Dakle, prema Pašovom stavu prava NP mora seći stranicu KQ tog trougla, te seče i pravu BB'. To znači da je u ovom slučaju prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N.

(ii) Neka se sada tačka N (Slika 4.3.) nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti. Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bi smo dokazali $AA' \parallel BB'$ u tački N dovoljno je ustanoviti da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', tj. da svaka prava koja sadrži tačku N i proizvoljnu tačku P unutar ugla $\measuredangle KNA'$ seče pravu BB'. Ako bi se tačka P nalazila na pravoj BB' ili sa one strane prave BB' sa koje nije tačka N neposredno bi sledilo da prava



Slika 4.3.

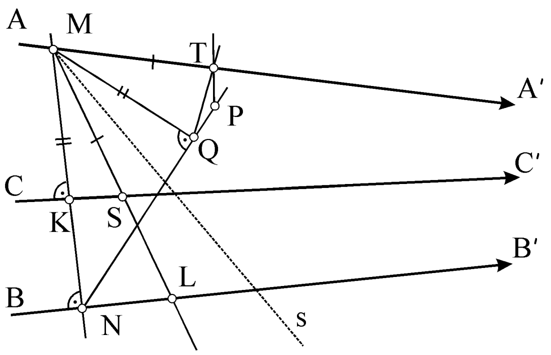
NP seče pravu BB'. Ako je tačka P sa one strane prave BB' sa koje je i N, tada je tačka P unutar ugla $\measuredangle KNA'$. Neka je R proizvoljna tačka prave NP iza tačke N u odnosu na tačku P. Pri tome prava RM sadrži tačku R koja je u uglu naporednom sa uglom $\measuredangle KMA$, te prava RM sadrži neku tačku koja se nalazi u takođe njemu naporednom uglu $\measuredangle KMA'$. Međutim, kako je $AA' \parallel BB'$ prava RM seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP sadrži teme N konveksnog ugla $\measuredangle KNM$ i tačku P unutar tog ugla, te seče duž KM u nekoj tački S. Sada je prava NP u ravni trougla ΔKMQ, ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu MK u tački S, ne seče stranicu MQ jer seče njen produžetak u tački R, te prema Pašovom stavu prava NP seče stranicu KQ, dakle o pravu BB'. Time je dokazano da je prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N. $\square$

Iz ove teoreme sledi da nije potrebno naglašavati u kojoj je tački prava AA' paralelna pravoj BB'. Navedena teorema je jedna od najvažnijih teorema u geometriji Lobačevskog pošto omogućava vrste pramenova pravih u geometriji Lobačevskog.

Teorema 4.2.2. *Relacija paralelnosti definisana na skupu pravih ravni L^2 je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Ako u definisanju paralelnosti pravih u ravni L^2 dopustimo i mogućnost da tačka A pripada pravoj a, tada u tački A neće postojati hiperparalelne prave, a prave a_1 i a_2 će se poklapati i biti suprotnosmerne. Odatle neposredno sledi da je relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 *refleksivna.*

Da bi smo dokazali da je relacija paralelnosti pravih u L^2 *simetrična* treba da dokažemo da iz $AA' \parallel BB'$ sledi $BB' \parallel AA'$. Neka je M proizvoljna tačka prave AA', a N podnožje prave, upravne iz tačke M (Slika 4.4.) na



Slika 4.4.

pravoj BB'. Kako je $AA' \parallel BB'$ svaka prava ravni L^2 koja sadrži tačku M i neku tačku unutar ugla $\measuredangle NMA'$ seče pravu BB'. Da bi smo dokazali da je $BB' \parallel AA'$ dovoljno je ustanoviti da svaka prava koja sadrži tačku N i neku tačku P unutar ugla $\measuredangle MNB'$, seče pravu AA'.

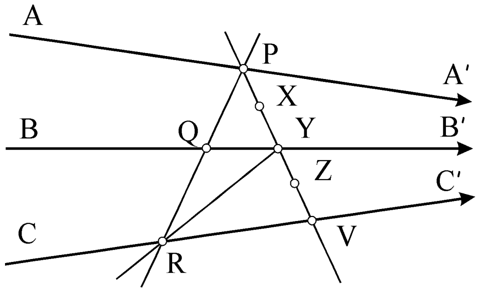
Neka je Q podnožje upravne iz tačke M na pravoj NP. Kako je ugao $\measuredangle MNB'$ prav a tačka P unutar tog ugla, $\measuredangle MNP$ je oštar, pa se podnožje Q, upravne iz tačke M na pravoj NP nalazi na polupravoj NP. Iz pravouglog trougla ΔMNQ sledi $MN > MQ$ te između tačaka M i N postoji tačka K takva da je $MQ \cong MK$. Neka je CC' prava koja je u tački K upravna na pravu MN. Neka je zatim ML prava simetrična sa pravom MQ u odnosu na simetralu ugla $\measuredangle NMA'$. Budući da prava MQ sadrži tačku Q koja se nalazi u uglu $\measuredangle NMA'$ i njoj simetrična prava ML sadrži tačku koja je u istom uglu $\measuredangle NMA'$. No kako je $AA' \parallel BB'$ prava ML koja sadrži tačku koja se nalazi unutar tog ugla seče pravu BB' u nekoj tački L, pri tome su tačke M i L sa raznih strana prave CC' te duž ML seče pravu CC' u nekoj tački S. Neka je T tačka poluprave MA' takva da je $MT \cong MS$. Konstruišimo duž QT. Zaključujemo da je $\Delta MKS \cong \Delta MQT$ jer je $\measuredangle KMS = \measuredangle QMT$, $MK = MQ$, $MS = MT$. Tada je $\measuredangle MKS = \measuredangle MQT$, a kako je $\measuredangle MKS = R$ to je i $\measuredangle MQT = R$ tj. prava je upravna na pravu MQ.Kako u jednoj tački Q na nekoj pravoj MQ može postojati samo jedna normala to će prave QN i QT biti istovetne. To znači da prava $NP = NQ$ seče pravu AA' u tački T. Prema tome $BB' \parallel AA'$ u tački N, a samim tim i u svakoj drugoj tački, pa je relacija paralelnosti pravih u L^2 i simetrična.

Treba pokazati još *tranzitivnost.* Neka je $AA' \parallel BB'$ i $BB' \parallel CC'$. Dokazaćemo da je $AA' \parallel CC'$. Napominjemo da je reč o paralelnosti u istom smeru. Za različite smerove tranzitivnost ne važi.

Mogu nastupiti sledeći slučajevi:

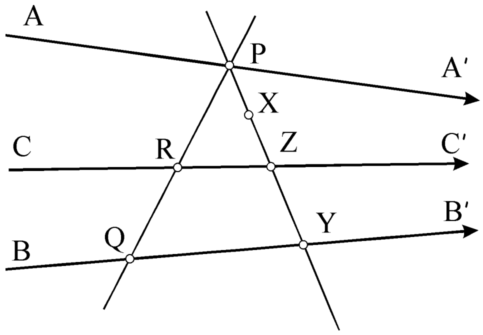
(i) Prava BB' je između pravih AA' i CC',

(ii) Jedna od pravih AA' i CC' je između druge dve prave.



Slika 4.5.

(i) Neka je BB' između AA' i CC'. Označimo sa P, R proizvoljne tačke (Slika 4.5.) redom pravih AA' i CC'. Kako je BB' između AA' i CC' biće tačke P i R sa raznih strana prave BB', te prava PR seče pravu BB' u tački Q. Da bi smo dokazali da je $AA' \parallel CC'$ dovoljno je da dokažemo da svaka prava koja sadrži tačku P i tačku X unutar ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC'. Tačka X je unutar ugla $\measuredangle RPA'$ pa je ona i unutar ugla $\measuredangle QPA'$. $AA' \parallel BB'$ sledi da prava PX seče pravu BB' u nekoj tački Y. Neka je Z proizvoljna tačka prave PX iza tačke Y u odnosu na tačku P. Tačka Z je pri tome unutar ugla $\measuredangle RYB'$ i kako je $BB' \parallel CC'$ prava YZ seče pravu CC' u nekoj tački V, te i prava PX seče pravu CC'. Time je pokazano da je u ovom slučaju $AA' \parallel CC'$.



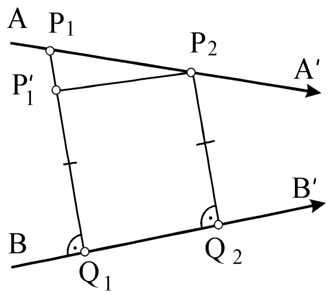
Slika 4.6.

(ii) Neka je sada jedna od pravih AA' i CC' između druge dve prave. Neka je (Slika 4.6.) recimo to prava CC'. Označimo sa P i Q proizvoljne tačke pravih AA' i BB'. Pri tome su tačke P i Q sa raznih strana prave CC' te duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački R. Treba da ustanovimo da je $AA' \parallel CC'$. Za to je dovoljno dokazati da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC'.

Tačka X se nalazi i u uglu $\measuredangle QPA'$ te iz relacije $AA' \parallel BB'$ sledi da PX seče BB' u tački Y. Pri tome su tačke P i Y sa raznih strana prave CC' te duž PY, dakle i prava PY seče pravu CC' u tački Z, čime je dokazano da je i u ovom slučaju $AA' \parallel CC'$. □

Definicija 4.1. Skup svih pravih ravni L^2 paralelnih među sobom nazivamo *paraboličkim pramenom* pravih.

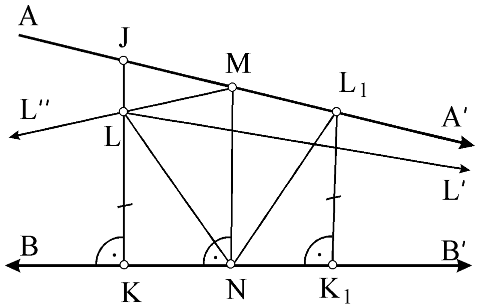
Teorema 4.2.3. *Odstojanje tačke koja se pomera po jednoj od dveju raznih međusobno paralelnih pravih, od druge prave strogo i neograničeno opada kada se tačka pomera u smeru paralelnosti, a strogo i neograničeno raste kada se tačka pomera u smeru suprotnom od smera paralelnosti.*



Slika 4.7.

Dokaz. Neka su AA' i BB' dve razne paralelne prave ravni L^2. Označimo sa P_1 i P_2 dve razne tačke (Slika 4.7.) prave AA' pri čemu se tačka P_2 nalazi od tačke P_1 u smeru paralelnosti prave AA' prema pravoj BB'. Neka su zatim Q_1 i Q_2 podnožja normala redom iz tačaka P_1 i P_2 na pravu BB'. Neka je P_1' tačka poluprave Q_1P_1 takva da je $Q_1P_1{}' \cong Q_2P_2$. Četvorougao $\square Q_1Q_2P_2P_1'$ je Sakerijev jer je kod njega $\measuredangle Q_1 = \measuredangle Q_2 = R$ i $Q_1P_1' \cong Q_2P_2$, pa su mu uglovi $\measuredangle Q_1P_1'P_2$ i $\measuredangle Q_2P_2P_1'$ na protivosnovici $P_1'P_2$ podudarni i oštri. Kako je još ugao $\measuredangle P_1P_2Q_2$ tup, jer je njemu naporedan ugao oštar, to tačka P_1' pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle P_1P_2Q_2$, pa samim tim i unutrašnjosti duži Q_1P_1. Sledi $Q_2P_2 \cong Q_1P_1' < Q_1P_1$. Na taj način ako se neka tačka kreće po AA' u smeru paralelnosti sa BB' tada odstojanje te tačke od prave BB' opada.

Dokažimo da se to odstojanje smanjuje neograničeno. Da bi smo to dokazali dovoljno je da dokažemo da za bilo koju unapred zadatu duž l postoji tačka čije je rastojanje od BB' manje od l. Neka je J proizvoljna tačka (Slika 4.8.) prave AA' i K podnožje upravne iz J na BB'. Neka je zatim L tačka poluprave KJ takva da je $KL = l$. Ako je $L \equiv J$ ili ako je L iza J u odnosu na K tvrđenje neposredno sledi. Neka je tačka L između tačaka K i J. Kako je L van prave BB' postoje dve prave koje sadrže tačku L i paralelne su pravoj BB' odnosno $B'B$.



Slika 4.8.

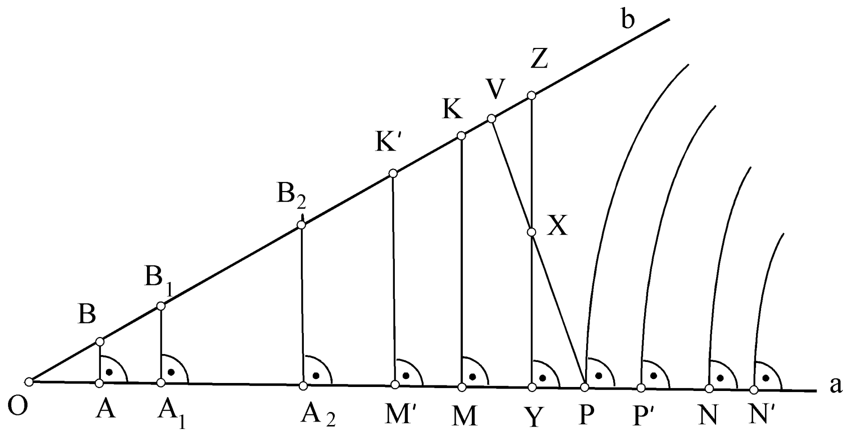
Neka je $LL' \parallel BB'$ i $LL'' \parallel B'B$. Kako je $LL' \parallel BB'$ i $BB' \parallel AA'$ to je i $LL' \parallel AA'$. Prava LL'' ima tačaka koje su u uglu $\measuredangle JLL'$ pa ona seče pravu AA' u tački M. Neka je L_1 tačka prave MA' takva da je $ML \cong ML_1$. Označimo sa N i K_1 podnožja upravnih redom iz tačaka M i L_1 na pravoj BB'. Zbog simetrije u odnosu na MN je $\measuredangle NML = \measuredangle NML_1$, a kako je još $MN \equiv MN$ i $ML \cong ML_1$ biće $\Delta LMN \cong \Delta L_1MN$. Odavde sledi $LN \cong L_1N$ i $\measuredangle MNL = \measuredangle MNL_1$ pa su njima komplementni uglovi jednaki tj. $\measuredangle KNL = \measuredangle K_1NL_1$. Sada je $\Delta KNL \cong \Delta K_1NL_1$ te je $LK \cong L_1K_1$, no kako je duž $LK \cong l$ to je i $L_1K_1 \cong l$. Prema tome na pravoj AA' postoji tačka L_1 čije je odstojanje od prave BB' jednako datoj duži l. Odavde prema dokazanom delu teoreme sledi da postoji i tačka na pravoj AA' čije je odstojanje od prave BB' manje od unapred zadate duži l. Zaključujemo da kada se tačka P kreće po pravoj AA' u smeru paralelnosti sa pravom BB' tada se njeno rastojanje od BB' neograničeno smanjuje.

Slučaj kada se tačka P kreće u smeru suprotnom od smera paralelnosti pravih AA' i BB' dokazuje se analogno. $\square$

Prema tome, na svakoj od dve međusobno paralelne prave postoji tačka čije je odstojanje od druge prave podudarno unapred zadatoj duži, a takođe i tačka čije je odstojanje manje od unapred zadate duži. To je i razlog što kažemo da se paralelne prave u smeru paralelnosti *asimptotski približavaju*, tj. da u smeru paralelnosti imaju zajedničku *beskrajno daleku tačku* O_∞. Kako za svaku tačku van prave postoje dve prave koje su sa njom paralelne, jedna u jednom a druga u drugom smeru, hiperbolička prava ima dve beskrajno daleke tačke.

Teorema 4.2.4. *Ako je ω oštar ugao u ravni L^2 tada postoji jedinstvena prava upravna na jedan krak ugla ω a paralelna drugom kraku tog ugla.*

Dokaz. Neka su poluprave a i b kraci oštrog ugla ω. Treba dokazati da postoji jedinstvena prava upravna na krak a i paralelna kraku b. Ustanovimo najpre da postoji prava upravna na krak a koja sa krakom b nema zajedničkih tačaka.



Slika 4.9.

Pretpostavimo suprotno tj. da sve prave upravne na krak a seku krak b. Neka je $A \in a$ proizvoljna tačka (Slika 4.9.) poluprave a, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tačke poluprave a takve da je

$$\mathcal{B}(O, A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots) \ \&\ OA = AA_1,\ A_1A_2 = OA_1, \ldots$$

Saglasno pretpostavci prave upravne u tačkama $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ na polupravu a seku polupravu b u tačkama $B, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ redom. S obzirom na to da je u L^2 zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla Δ

manji od $2R$ to je *defekt* $\delta(\Delta) = 2R - \sigma(\Delta)$ veći od nule. Ako je neki trougao Δ razložen na trouglove Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tada je defekt

$$\delta(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta(\Delta_i).$$

Posmatrajmo trouglove ΔOA_1B_1, ΔOA_2B_2, ..., ΔOA_nB_n, ... Tada je:

$$\begin{aligned}
\delta(OA_1B_1) &= \delta(OAB) + \delta(A_1AB) + \delta(BA_1B_1) \\
&= 2\delta(OAB) + \delta(BA_1B_1) \\
&\Rightarrow \delta(OA_1B_1) > 2\delta(OAB), \\
\delta(OA_2B_2) &= \delta(OA_1B_1) + \delta(A_2A_1B) + \delta(B_1A_2B_2) \\
&= 2\delta(OA_1B_1) + \delta(B_1A_2B_2) \\
&\Rightarrow \delta(OA_2B_2) > 2^2\delta(OAB), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nakon n koraka dobijamo $\delta(OA_nB_n) > 2^n\delta(OAB)$. Broj n možemo izabrati tako veliki da ugao $2^n\delta(OAB)$ bude veći od bilo kog unapred zadatog ugla, pa samim tim i od zbira dva prava ugla što je nemoguće, jer bi u tom sluăju $\delta(OA_nB_n) > 2R$. Znači sve prave upravne na polupravu a ne mogu seći polupravu b. Prema tome skup svih tačaka poluprave a možemo podeliti na dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pri čemu $\mathcal{M}$ označava skup svih tačaka poluprave a u kojima normala na polupravu a seče polupravu b, a sa $\mathcal{N}$ skup preostalih tačaka poluprave a. Dokazaćemo da ovako definisani skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindovog preseka tj. Dedekindove aksiome. Dovoljno je pokazati:

(i) $(\forall M \in \mathcal{M})(\forall M')\ \mathcal{B}(O, M', M) \Rightarrow M' \in \mathcal{M}$

(ii) $(\forall N \in \mathcal{N})(\forall N')\ \mathcal{B}(O, N, N') \Rightarrow N' \in \mathcal{N}$.

Ako je $M \in \mathcal{M}$ tada upravna u tački M na polupravu a seče polupravu b u nekoj tački K. Prava m' upravna na pravu a u nekoj tački M' takvoj da je $\mathcal{B}(O, M', M)$ pripada ravni trougla ΔOMK ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu OM u tački M', ne seče stranicu MK jer su prave m' i MK upravne na polupravu a, pa ako bi se sekle dobili bi smo trougao sa dva prava ugla. Prema Pašovom stavu prava m' mora seći stranicu OK trougla ΔOMK, pa samim tim i polupravu b u nekoj tački K'. Dakle tačka M' pripada skupu $\mathcal{M}$.

Ako je $N \in \mathcal{N}$ i N' tačka poluprave a takva da je $\mathcal{B}(O, N, N')$. Pokazaćemo da $N' \in \mathcal{N}$. Zaista ako bi naprotiv tačka N' pripadala skupu $\mathcal{M}$ onda bi prema dokazanom tačka N koja je između O i N' pripadala skupu $\mathcal{M}$.

Dakle $N' \in \mathcal{N}$. Iz dokazanog sledi da skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindove aksiome te postoji jedinstvena tačka P koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Nije teško ustanoviti da $P \in \mathcal{N}$. Zaista, jer ako bi bilo $P \in \mathcal{M}$ tada bi upravna u tački P na polupravu a sekla polupravu b u nekoj tački Q. Ako bi Q' bila proizvoljna tačka poluprave b iza tačke Q u odnosu na tačku O, tada bi tačka P' kao podnožje normale iz Q' na polupravu a bila iza tačke P u odnosu na tačku O, što je nemoguće jer je tačka P granična tačka koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Znači $P \in \mathcal{N}$ i normala u P na polupravu a ne seče polupravu b.

Treba dokazati da je normala u tački P na polupravu a paralelna pravoj b. Da bi smo to dokazali dovoljno je da ustanovimo da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\measuredangle OPQ$ seče polupravu b. Kako je $\measuredangle OPQ = R$, a X unutar tog ugla biće $\measuredangle OPX$ oštar. Dakle, podnožje upravne iz tačke X na pravoj OP pripada polupravoj PO. Ako bi tačka X bila sa one strane prave OK sa koje nije tačka P ili na pravoj OK, onda bi neposredno sledilo da poluprava PX seče polupravu b. U ovom slučaju je ugao $\measuredangle XOP$ takođe oštar te podnožje upravne iz tačke X na polupravu OP sadrži tačku Y koja se nalazi između tačaka O i P. Kako je tačka Y između tačaka O i P to je $Y \in \mathcal{M}$ pa poluprava XY seče polupravu b u tački Z.

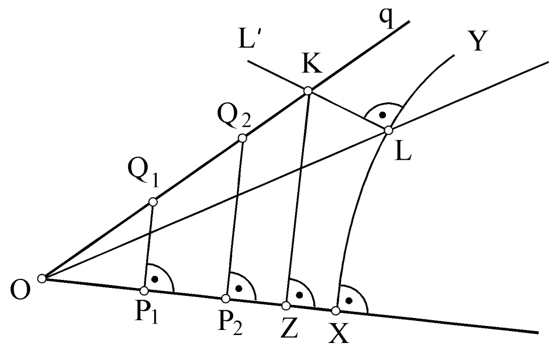
Prava PX je u ravni trougla ΔOYZ, ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče YZ u tački X, ne seče OY jer je seče u produžetku u tački P pa prema Pašovom stavu prava PX seče OZ, te i polupravu b u nekoj tački V. Prema tome $PQ \parallel OZ$, tj. $PQ \parallel b$. Time smo dokazali egzistenciju prave upravne na pravu a i paralelne sa pravom b. Indirektnim postupkom dokazuje se jedinstvenost te prave. $\square$

Teorema 4.2.5. *Odstojanje tačke koja se nalazi na jednom kraku oštrog ugla od drugog kraka neograničeno raste pri neograničenom udaljavanju te tačke od temena tog ugla.*

Dokaz. Neka je $\measuredangle POQ$ dati oštar ugao. Obeležimo sa Q_1 i Q_2 (Slika 4.10.) dve tačke poluprave OQ takve da je $\mathcal{B}(O, Q_1, Q_2)$, zatim obeležimo sa P_1 i P_2 podnožja upravnih iz tačaka Q_1 i Q_2 na polupravu OP. Kako je $\measuredangle POQ$ oštar, tačke P_1 i P_2 su na polupravoj OP. U četvorouglu $P_1P_2Q_2Q_1$ uglovi $\measuredangle Q_1P_1P_2$ i ugao $\measuredangle P_1P_2Q_2$ su pravi, dok je $\measuredangle P_1Q_1Q_2 > \measuredangle Q_1Q_2P_2$ pa je $P_2Q_2 > P_1Q_1$.

Prema tome, kada se tačka Q kreće po polupravoj Oq udaljujući se od tačke O njeno odstojanje od poluprave Op se povećava.

Dokažimo da to rastojanje neograničeno raste. Saglasno prethodnoj teoremi postoji jedinstvena prava XY upravna na polupravu Op i paralelna



Slika 4.10.

sa Oq. Da bi smo dokazali da pomenuto odstojanje neograničeno raste treba da ustanovimo da na kraku Oq postoji tačka K kojoj je odstojanje od poluprave Op veće od bilo koje unapred zadate duži l. Neka je L tačka prave XY unutar ugla $\measuredangle POQ$ takva da je $XL = l$ pri čemu je $\mathcal{B}(X, L, Y)$ i neka je LL' prava upravna na XY u tački L a L' tačka te prave koja se nalazi sa one strane prave XY sa koje je i tačka O. Dokažimo da poluprava LL' seče polupravu OQ. Kako je tačka L u uglu $\measuredangle POQ$, tačka L' je unutar ugla $\measuredangle OLY$ pa kako je $LY \parallel Oq$ svaka prava koja sadrži tačku L i neku tačku L' unutar ugla $\measuredangle OLY$ seče polupravu Oq. Kako je tačka L unutar ugla $\measuredangle POQ$, tačka L' je unutar ugla $\measuredangle OLY$ i $LY \parallel Oq$ to svaka prava koja sadrži tačku L i neku tačku L' unutar ugla $\measuredangle OLY$ seče polupravu OQ u nekoj tački K. Na polupravoj Op obeležimo sa Z podnožje upravne iz tačke K.

U četvorouglu $XLKZ$ tri ugla su prava i to $\measuredangle Z$, $\measuredangle X$ i $\measuredangle L$ pa četvrti ugao $\measuredangle LKZ$ mora biti oštar. Prema tome, imamo $\measuredangle XLK > \measuredangle ZKL$ odakle je $KZ > XL$. Kako je $XL = l$ to je $KZ > l$. Prema tome, za bilo koju unapred zadatu duž l na kraku Oq postoji tačka K čije je odstojanje od kraka Op veće od l, te se odstojanje pokretne tačke Q pri udaljavanju od tačke O neograničeno povećava u odnosu na krak Op. $\square$

4.3 Osobine hiperparalelnih pravih u $\mathbf{L^2}$

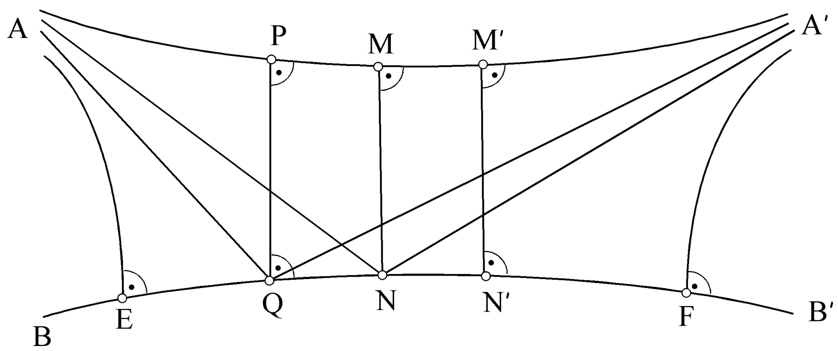
Teorema 4.3.1. *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 je transmisibilna, tj. ako je AA' hiperparalelna sa BB' u nekoj tački M tada je AA' hiperparalelna sa BB' u svakoj svojoj drugoj tački N.*

Dokaz ove teoreme izvodi se indirektnim postupkom. Takođe nije teško zaključiti da važi:

Teorema 4.3.2. *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 je antirefleksivna, simetrična i netranzitivna.*

Teorema 4.3.3. *Dve hiperparalelne prave u L^2 imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*

Dokaz. Neka je $AA' \underset{h}{\parallel} BB'$. Najpre ćemo ustanoviti egzistenciju zajedničke normale hiperparalelnih pravih AA' i BB'. U tom cilju (Slika 4.11.) obeležimo sa P proizvoljnu tačku prave AA' i sa Q podnožje upravne iz tačke P na BB'. Pri tome je Q van prave AA' te postoje dve prave QA' i QA takve da je $QA' \parallel AA'$ i $QA \parallel A'A$ pri čemu paralelne prave imaju zajedničku infinitnu tačku, npr. A' je zajednička infinitna tačka pravih QA' i AA'. Pri tome poluprave QA' i QA zaklapaju sa polupravama QB i QB' uglove $\measuredangle AQB$ i $\measuredangle A'QB'$. Prema dokazanom stavu postoji jedinstvena prava upravna na QB' i paralelna sa QA'. Neka je to prava FA'. Analogno, prava EA je jedina prava u ravni pravih AA' i BB' koja je upravna na polupravu QB i paralelna sa polupravom QA.



Slika 4.11.

Neka, je zatim N središte duži EF i M podnožje upravne iz tačke N na pravoj AA'. Dokažimo da je prava MN upravna i na pravu BB'. U tom cilju konstruišimo prave NA' i NA paralelne redom sa pravama AA' i $A'A$. Na osnovu tranzitivnosti relacije paralelnosti u L^2 zaključujemo da su prave NA' i NA paralelne sa pravama FA' i EA redom. Iz simetričnosti u odnosu na pravu MN nepsredno zaključujemo da je $\measuredangle MNA' = \measuredangle MNA$.

No kako je tačka N središte duži EF biće $NE = NF$. Podudarnim dužima odgovaraju podudarni uglovi paralelnosti te je $\measuredangle ENA = \measuredangle FNA'$. Kako je $\measuredangle MNF = \measuredangle MNA' + \measuredangle FNA'$ i $\measuredangle MNE = \measuredangle MNA + \measuredangle ENA$ to odatle sledi $\measuredangle MNF = \measuredangle MNE$. S obzirom da su ti uglovi podudarni i uporedni oni su i pravi te je prava MN upravna na BB'.

Dokažimo sada jedinstvenost zajedničke normale dveju hiperparalelnih pravih. Pretpostavimo da postoji još jedna zajednička normala $M'N'$ hiperparalelnih pravih AA' i BB'. U tom slučaju postojao bi četvorougao $MNN'M'$ u ravni L^2 čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru četiri prava ugla što je nemoguće u geometriji Lobačevskog. □

Teorema 4.3.4. *Dve razne prave a i b ravnu L^2 koje imaju zajedničku normalu su hiperparalelne.*

Dokaz. Neka su $a = AA'$ i $b = BB'$ dve razne prave ravni L^2 sa osobinom da imaju zajedničku normalu n. Označimo sa M i N presečne tačke prave n redom sa pravama a i b. Za prave a i b ravni L^2 mogu nastupiti sledeća tri slučaja:

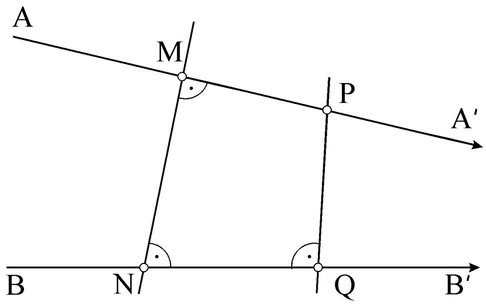
(i) Prave a i b se seku,

(ii) Prave a i b su paralelne i

(iii) Prave a i b su hiperparalelne.

Razmotrimo ponaosob svaki od njih.

(i) Ako bi se prave a i b sekle, dobili bi smo trougao sa dva prava ugla, što je nemoguće.



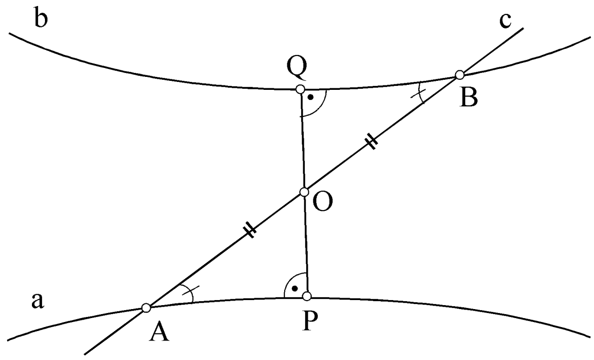
Slika 4.12.

(ii) Pretpostavimo da su prave $a = AA'$ i $b = BB'$ paralelne (Slika 4.12.), i označimo sa P i Q redom tačke pravih AA' i BB', takve da je $PQ \perp BB'$ i $\mathcal{B}(M, P, A')$. Tada mora da važi raspored tačaka $\mathcal{B}(N, Q, B')$, jer bi smo u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla. Četvorougao

$MNQP$ je Lambertov, pa je kod njega $MN < PQ$. Međutim, na osnovu teoreme 4.2.3. paralelne prave se u smeru paralelnosti približavaju, tj. važi $MN > PQ$, što predstavlja kontradikciju.

(iii) Dakle, preostaje da su prave $a = AA'$ i $b = BB'$ hiperparalelne. □

Teorema 4.3.5. *Dve prave koje u preseku sa trećom grade suplementne suprotne uglove su hiperparalelne.*

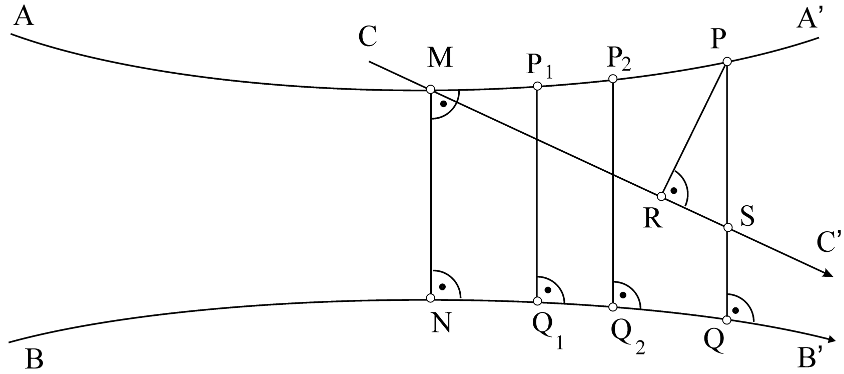


Slika 4.13.

Dokaz. Neka su a i b dve prave i prava c njihova zajednička sečica (Slika 4.13.) i neka su jednaki suprotni uglovi koje prava c gradi sa pravama a i b. Označimo sa A i B presečne tačke prave c redom sa pravama a i b, a O središte duži AB. Označimo sa P i Q podnožja normala iz tačke O redom na prave a i b. Pravougli trouglovi ΔOAP i ΔOBQ su podudarni jer je $OA \cong OB$, $\measuredangle P = \measuredangle Q$ i $\measuredangle A = \measuredangle B$. Iz njihove podudarnosti sledi da je $\measuredangle AOP = \measuredangle BOQ$. Kako su tačke A, O i B kolinearne, biće kolinearne i tačke P, O i Q. Dakle, prava PQ je zajednička normala pravih a i b, odakle na osnovu teoreme 4.3.4. sledi da su prave a i b hiperparalelne. □

Teorema 4.3.6. *Odstojanje tačke koja se pomera po jednoj od dveju međusobno hiperparalelnih pravih od druge prave strogo i neograničeno raste kad se ta tačka udaljuje od zajedničke normale tih hiperparalelnih pravih.*

Dokaz. Neka su AA' i BB' dve hiperparalelne prave. Prema prethodnoj teoremi postoji jedinstvena normala ovih hiperparalelnih pravih. Neka je to prava MN. Obeležimo sa P_1 i P_2 (Slika 4.14.) dve tačke prave AA' takve da je $\mathcal{B}(M, P_1, P_2)$. Neka su Q_1 i Q_2 podnožja upravnih iz tačaka P_1 i P_2



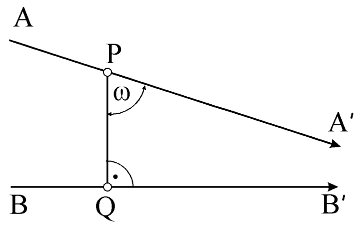
Slika 4.14.

na pravu BB'. Budući da je četvorougao MNQ_1P_1 Lambertov četvorougao jer ima tri prava ugla $\measuredangle M$, $\measuredangle N$, $\measuredangle Q_1$ sledi da je njegov četvrti ugao oštar te je njemu naporedan ugao $\measuredangle Q_1P_1P_2$ tup. Četvorougao MNQ_2P_2 takođe je Lambertov jer su $\measuredangle M$, $\measuredangle N$, $\measuredangle Q_2$ pravi te je ugao $\measuredangle P_2$ tog četvorougla oštar, dakle u četvorouglu $P_1Q_1Q_2P_2$ uglovi kod temena Q_1 i Q_2 su pravi dok je ugao $\measuredangle P_1$ kao tup veći od ugla $\measuredangle P_2$ koji je oštar. Dakle duž P_2Q_2 je veća od duži P_1Q_1. Na taj način za tačke P_1 i P_2 za koje je $\mathcal{B}(M, P_1, P_2)$ imamo da je tačka P_2 na većem ratstojanju od tačke P_1 do prave BB'. Time je dokazano da to rastojanje raste udaljavanjem od zajedničke normale. Dokažimo da se ono povećava neograničeno. U tom cilju konstruišimo pravu CC' koja sadrži tačku M i koja je paralelna sa pravom BB'. Neka je zatim P proizvoljna tačka poluprave MA' a Q podnožje upravne iz tačke P na pravoj BB' i R podnožje upravne iz tačke P na pravoj CC'. U tom slučaju biće tačke P i Q sa raznih strana prave CC' te duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački S. Kako je trougao ΔPRS pravougli biće PR manje od PS. Iz $\mathcal{B}(P, S, Q)$ sledi da je PS manje od PQ. Na taj način ako se tačka P kreće po polupravoj MA' oštrog ugla $\measuredangle A'MC'$, udaljavajući se od njegovog temena, tada se prema ranijem stavu njeno odstojanje od drugog kraka tj. od poluprave MC' neograničeno povećava. No kako je to rastojanje manje od rastojanja tačke P do prave BB' tim pre rastojanje tačke P od prave BB' neograničeno raste. $\square$

4.4 Ugao paralelnosti. Funkcija Lobačevskog

Definicija 4.1. Neka je tačka P izvan prave BB' i Q podnožje upravne iz P (Slika 4.15.) na pravoj BB'. Ako je AA' prava koja sadrži tačku P i paralelna je sa BB', tada oštar ugao $\omega = \measuredangle QPA'$ nazivamo *uglom paralelnosti* prave AA' u tački P sa pravom BB', tj. uglom paralelnosti koji odgovara duži PQ.

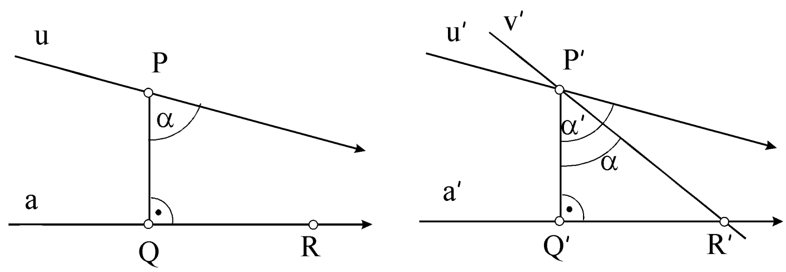
Dokazaćemo da je ugao paralelnosti u potpunosti određen rastojanjem tačke, tj. da važi sledeća teorema:



Slika 4.15.

Teorema 4.4.1. *Jednakim dužima odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti.*

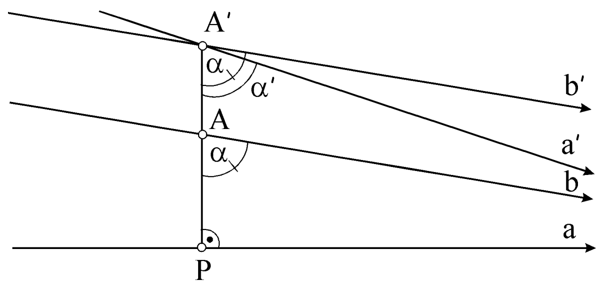
Dokaz. Neka su P i P' dve tačke (Slika 4.16.) koje se nalaze na jednakim rastojanjima redom od pravih a i a'. Kroz tačku P postavimo pravu u paralelnu pravoj a, a kroz tačku P' pravu u' paralelnu pravoj a'. Sa Q i Q' označimo redom podnožja normala iz tačaka P i P' na prave a i a', a sa α i α' uglove paralelnosti u tačkama P i P' redom u odnosu na prave a i a'. Neka je $PQ = P'Q'$. Treba pokazati da je u tom slučaju $\alpha = \alpha'$.



Slika 4.16.

Pretpostavimo da to nije ispunjeno, tj. da je npr. $\alpha < \alpha'$. Kroz tačku P' postavimo pravu v' koja sa duži $P'Q'$ u smeru paralelnosti pravih a' i u', zaklapa ugao jednak uglu α. Iz paralelnosti pravih u' i a' sledi da prava v' mora seći pravu a' u smeru paralelnosti pravih u' i a' od tačke Q'. Označimo sa R' njihovu presečnu tačku. Neka je R tačka prave a u smeru paralelnosti pravih u i a takva da je $QR \cong Q'R'$. Trouglovi ΔPQR i $\Delta P'Q'R'$ su podudarni jer je $PQ \cong P'Q'$, $\measuredangle Q = \measuredangle Q'$ i $QR \cong Q'R'$, odakle sledi da je $\measuredangle QPR = \alpha$. To znači da se prave PR i u poklapaju, tj. da se paralelne prave u i a seku u tački R, što je nemoguće. Dakle ne može biti $\alpha < \alpha'$. Analogno se pokazuje da ne može biti $\alpha > \alpha'$. To znači da preostaje $\alpha = \alpha'$, čime je dokaz završen. $\square$

Teorema 4.4.2. *Većoj duži odgovara manji ugao paralelnosti.*



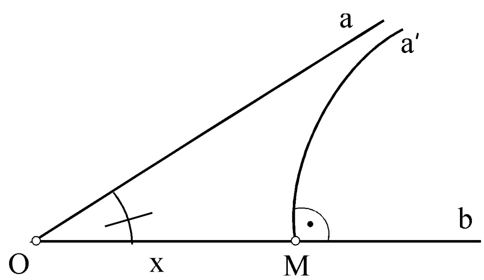
Slika 4.17.

Dokaz. Neka je A proizvoljna tačka van prave a (Slika 4.17.), i neka je P podnožje normale iz tačke A na pravu a. Označimo sa b pravu koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj a. Neka je A' tačka prave AP takva da je $A, A' \ddot{-} P$. Predpostavimo da je $PA' > PA$. Konstruišimo pravu b' koja prolazi kroz tačku A' i u smeru paralelnosti pravih a i b gradi ugao α sa $A'P$. Dve prave b i b' grade jednake suprotne uglove u preseku sa pravom $A'P$, pa su prema Teoremi 4.3.5. prave b i b' hiperparalelne. To znači da prava a' koja sadrži tačku A' i paralelna je pravoj b gradi u smeru paralelnosti ugao α' za koji je $\alpha' < \alpha$. Iz $a' \parallel b$ i $b \parallel a$ sledi da je $a' \parallel a$. Dakle ugao paralelnosti α' koji odgovara duži $A'P$ je manji od ugla paralelnosti α koji odgovara duži AP. $\square$

Iz napred navedenog zaključujemo da veličina ugla paralelnosti neke prave AA' u tački P sa pravom BB' u proizvoljnom sistemu merenja duži predstavlja funkciju odstojanja x tačke P od BB'. Ovu funkciju obeležavamo sa Π i nazivamo je funkcijom Lobačevskog. Sledeća teorema daje osnovne karakteristike funkcije Lobačevskog:

Teorema 4.4.3. *Ako je* Π *funkcija Lobačevskog tada je:*
(i) $dom(\Pi) = (0, +\infty)$,
(ii) $codom(\Pi) = (0, \pi/2)$,
(iii) Π *strogo opada i neprekidna je funkcija,*
(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \Pi(x) = \pi/2$, $\lim\limits_{x\to\infty} \Pi(x) = 0$.

Dokaz. (i) Trivijalno sledi iz definicije.



Slika 4.18.

(ii) Neka je α proizvoljan oštar ugao. Dokazaćemo da je on ugao paralelnosti neke duži x. Neka je O vrh a a i b kraci ugla α (Slika 4.18.). Prema Teoremi 4.2.4. sledi da postoji jedinstvena prava a' normalna na pravu b i paralelna sa pravom a. Označimo sa M presek pravih a' i b. Duž OM zadovoljava relaciju $\Pi(OM) = \alpha$. Znači biće $x = OM$, čime je dokaz završen.
(iii) Direktno sledi iz teoreme 4.4.2.
(iv) Sledi iz iz delova (ii) i (iii) ove teoreme. □

Iz same činjenice da $\Pi(x) \to \pi/2$, kad $x \to 0$ sledi da se u malim delovima prostora geometrija Lobačevskog malo razlikuje od Euklidske geometrije, i da se ta razlika smanjuje sa smanjivanjem posmatranog dela prostora.

Veza između uglova i linearnih veličina data funkcijom $\alpha = \Pi(x)$ uslovljava celokupni karakter geometrije Lobačevskog. Na taj način u geometriji Lobačevskog nema sličnosti figura. To nije teško zaključiti jer su uglovi i stranice trouglova povezani međusobno jednačinama, pa zadavanjem uglova trougla u potpunosti su određene i njegove stranice, pa dva trougla sa podudarnim uglovima imaju podudarne i odgovarajuće stranice, tj. podudarni su među sobom.

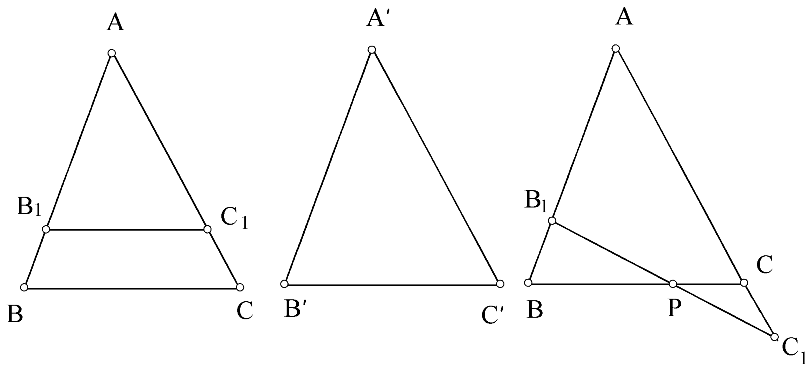
Glava 5

Geometrija trouglova i četvorouglova u ravni L^2

5.1 Podudarnost trouglova u ravni L^2

U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevskog postoji još jedan stav koji nazivamo Šestim stavom o podudarnosti trouglova.

Teorema 5.1.1. (Šesti stav o podudarnosti trouglova) *Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 među sobom podudarni tada su i ti trouglovi među sobom podudarni.*



Slika 5.1.

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dva trougla (Slika 5.1.) u ravni L^2 takva da je $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$. Da bi smo dokazali da je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ i (iii) $AB = A'B'$. Neka je najpre zadovoljen slučaj (i). Tada na duži AB postoji tačka B_1 takva da je $\mathcal{B}(A, B_1, B)$ i $AB_1 = A'B'$. Neka je C_1 tačka poluprave AC takva da je $AC_1 = A'C'$. Tada je $\mathcal{B}(A, C_1, C)$. Zaista, ako bi bilo $\mathcal{B}(A, C, C_1)$ onda bi se prema poznatom stavu iz Apsolutne geometrije duži BC i B_1C_1 sekle u nekoj tački P. Tada bi ugao $\measuredangle PCA$ bio spoljašnji ugao trougla ΔPCC_1 pa bi prema poznatom stavu bio veći od ugla $\measuredangle C$, trougla $\measuredangle PCC_1$. Međutim $\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$ pa je $\measuredangle C_1 = \measuredangle C'$. Kako je još $\measuredangle C = \measuredangle C'$ to je zbog tranzitivnosti relacije podudarnosti uglova $\measuredangle C_1 = \measuredangle C$, tj. kod trougla ΔPCC_1 spoljašnji ugao je jednak unutrašnjem nesusednom što je nemoguće. Dakle, ne može biti $\mathcal{B}(A, C, C_1)$. Takođe se tačke C i C_1 ne mogu poklapati, jer ako bi bilo $C \equiv C_1$ tada bi zbog $\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$ sledilo da je $\measuredangle C' = \measuredangle C$ te bi bilo $\measuredangle ACB_1 = \measuredangle ACB$, što je nemoguće. Dakle, mora biti $\mathcal{B}(A, C_1, C)$. Iz $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB_1C_1$ sledi da su uglovi $\measuredangle B_1$ i $\measuredangle C_1$ trougla ΔAB_1C_1 podudarni uglovima $\measuredangle B'$ i $\measuredangle C'$ trougla $\Delta A'B'C'$, a kako su uglovi $\measuredangle B'$ i $\measuredangle C'$ podudarni uglovima $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ trougla ΔABC to je $\measuredangle B_1 = \measuredangle B$ i $\measuredangle C_1 = \measuredangle C$. Odatle sledi da je zbir unutrašnjih uglova u četvorouglu BCC_1B_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće. Prema tome nije $AB > A'B'$.

Slučaj (ii) analognim postupkom dovodi do kontradikcije. Dakle za duži AB i $A'B'$ preostaje mogućnost (iii), tj. $AB = A'B'$, odakle prema drugom stavu o podudarnosti trouglova sledi da je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Napomena. U geometriji Lobačevskog ne postoje slični likovi pa iz toga sledi suštinska razlika u odnosu na Euklidsku geometriju. Prethodni stavovi o podudaruosti trouglova odnose se na trouglove sa finitnim (svojstvenim) temenima. Osim poligona sa finitnim temenima postoje poligoni kojima sva ili samo neko teme mogu biti infinitne (beskrajno daleke) tačke. U geometriji Lobačevskog poligone bez finitnih temena zvaćemo degenerativnim ili nesvojstvenim poligonima.

5.2 Podudarnost četvorouglova u ravni L^2

Teorema 5.2.1. *Srednja linija Sakerijevog četvorougla je zajednička normala osnovice i protivosnovice.*

Iz Teoreme 5.2.1. sledi da su osnovica i protivosnovica Sakerijevog četvorougla hiperparalelne. Takođe srednja linija Sakerijev četvorougao razbija na dva Lambertova četvorougla.

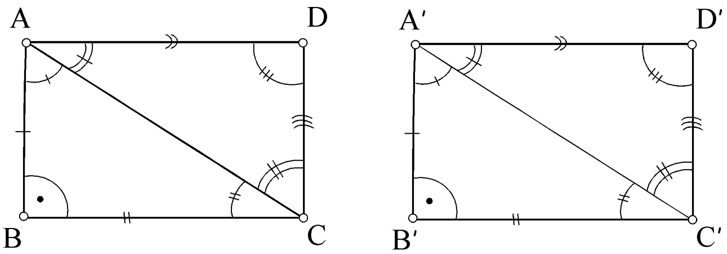
Sledeća teorema daje nam potrebne i dovoljne uslove za podudarnost Lambertovih četvorouglova.

Teorema 5.2.2. *Dva Lambertova četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$, sa oštrim uglom kod temena D odnosno D', su podudarna ako je*

a) $AB = A'B'$ *i* $BC = B'C'$, *b)* $AB = A'B'$ *i* $AD = A'D'$,
c) $AD = A'D'$ *i* $CD = C'D'$, *d)* $AD = A'D'$ *i* $\measuredangle D = \measuredangle D'$,
e) $AB = A'B'$ *i* $\measuredangle D = \measuredangle D'$, *f)* $AD = A'D'$ *i* $BC = B'C'$.

Dokaz. a) Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (Slika 5.2.) Lambertovi četvorouglovi sa oštrim uglovima kod temena D i D' kod kojih je $AB = A'B'$ i $BC = B'C'$. Da bi smo dokazali njihovu podudarnost potrebno je da pokažemo podudarnost preostala dva para odgovarajućih stranica, kao i podudarnost oštrih uglova $\measuredangle D$ i $\measuredangle D'$. Trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćen ugao ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ $\measuredangle B = \measuredangle B' = R$, pa su i oni podudarni. Iz njihove podudarnosti sledi $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'$. Sada je

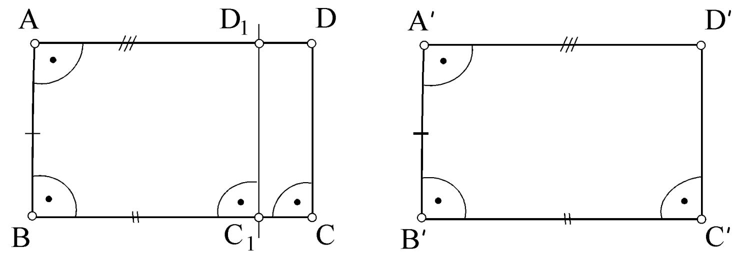
$$\measuredangle CAD = R - \measuredangle BAC = R - \measuredangle B'A'C' = \measuredangle C'A'D' \text{ i}$$
$$\measuredangle ACD = R - \measuredangle ACB = R - \measuredangle A'C'B' = \measuredangle A'C'D'.$$



Slika 5.2.

Sada trouglovi ΔACD i $\Delta A'C'D'$ imaju podudarne stranicu i dva nalegla ugla ($AC = A'C'$, $\measuredangle CAD = \measuredangle C'A'D'$ i $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D'$), odakle sledi njihova podudarnost, a odavde $AD = A'D'$, $CD = C'D'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$.

b) Neka je sada $AB = A'B'$ i $AD = A'D'$. Prema dokazanom delu teoreme pod a) dovoljno je da dokažemo da je $BC = B'C'$. za duži BC i $B'C'$ važi tačno jedna od tri mogućnosti: (i) $BC > B'C'$, (ii) $BC < B'C'$ i $BC = B'C'$.



Slika 5.3.

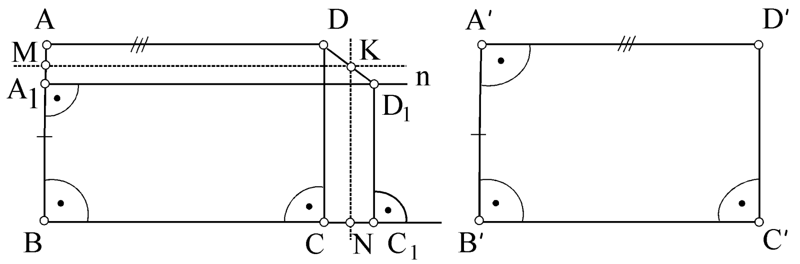
(i) Neka je $BC > B'C'$. Tada postoji tačka C_1 (Slika 5.3.) takva da je $BC_1 = B'C'$ i $\mathcal{B}(B, C_1, C)$. Kroz tačku C_1 konstruišimo normalu n na BC. Prava n ne može imati zajedničkih tačaka niti sa stranicom AB niti CD, jer bi u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla. Dakle n mora seći stranicu AD u tački D_1 takvoj da je $\mathcal{B}(A, D_1, D)$. Lambertovi četvorouglovi ABC_1D_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod a), jer je $AB = A'B'$ i $BC_1 = B'C'$, odakle sledi $AD_1 = A'D'$. Kako je još $AD = A'D'$ dobijamo $AD_1 = AD$, odakle zbog $D, D_1 \mathrel{\ddot{-}} A$ sledi $D \equiv D_1$. Dobili smo trougao ΔCC_1D sa pravim uglovima kod temena C i C_1, što je nemoguće. Dakle ne važi $BC > B'C'$.

(ii) Pretpostavka $BC < B'C'$ analogno dovodi do kontradikcije.

(iii) Dakle, preostaje da mora biti $BC = B'C'$, pa su Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni prema dokazanom delu teoreme pod a).

c) Neka je za Lamberove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $CD = C'D'$. Da bi smo dokazali njihovu podudarnost dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedan od slučajeva: (i) $AB > A'B'$, $AB < A'B'$ i $AB = A'B'$.

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada postoji tačka A_1 (Slika 5.4.) na pravoj AB takva da je $A_1B = A'B'$ i $\mathcal{B}(A, A_1, B)$. Kroz tačku A_1 konstruišimo normalu n na AB. Prava n ne seče niti stranicu BC niti stranicu AD, jer bi u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla, što je nemoguće. Dakle n mora seći stranicu CD. Označimo sa D_1 tačku na normali n takvu da je $A_1D_1 = AD = A'D'$. Tada mogu nastupiti tri slučaja: (1) $A_1, D_1 \mathrel{\ddot{-}} p(C, D)$, (2) $A_1, D_1 \div p(C, D)$ ili $D_1 \in p(C, D)$.



Slika 5.4.

(1) Neka je $A_1, D_1 \overset{\cdot\cdot}{-} p(C, D)$. Označimo sa C_1 normalnu projekciju tačke D_1 na pravu $p(B, C)$. Lambertovi četvorouglovi $A_1BC_1D_1$ i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod b) jer je $A_1B = A'B'$ i $A_1D_1 = A'D'$. Iz njihove podudarnosti je $C_1D_1 = C'D'$ i kako je još $C'D' = CD$ sledi $C_1D_1 = CD$. Za četvorougao CC_1D_1D je zadovoljeno $\measuredangle C = \measuredangle C_1 = R$ i $CD = C_1D_1$ pa je on Sakerijev. Srednja linija KN ovog četvorougla je zajednička normala osnovice CC_1 i protivosnovice DD_1 ovog četvorougla. Takođe, četvorougao AA_1D_1D je Sakerijev jer je $\measuredangle A = \measuredangle A_1 = R$ i $A_1D_1 = AD$, pa njegova srednja linija KM zajednička normala osnovice AA_1 i protivosnovice DD_1. Dakle, dobili smo dve različite normale KN i KM u tački K na pravu $p(D, D_1)$, što je u suprotnosti sa teoremom o jedinstvenosti normale. Prema tome, ne može biti $A_1, D_1 \overset{\cdot\cdot}{-} p(C, D)$.

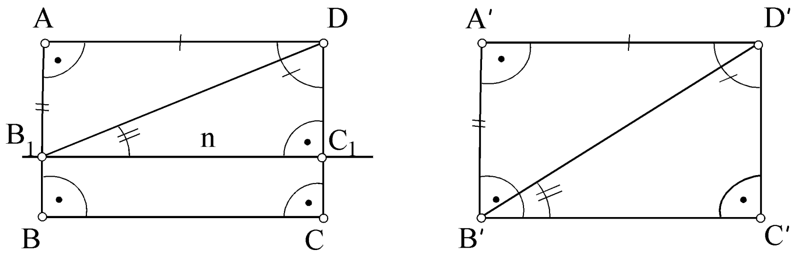
(2) Analogno, i u slučaju $A_1, D_1 \div p(C, D)$ se dobija kontradikcija.

(3) Neka je sada $D_1 \in p(C, D)$. U tom slučaju normalna projekcija tačke D_1 na pravu $p(B, C)$ je tačka C. Lambertovi četvorouglovi A_1BCD_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $A_1B = A'B'$ i $A_1D_1 = A'D'$, odakle sledi $CD_1 = C'D'$. Kako je još $D, D_1 \overset{\cdot\cdot}{-} C$ zaključujemo da se tačke D i D_1 poklapaju. Međutim trougao ΔAA_1D ima prave uglove kod temena A i A_1, što je nemoguće. dakle, u sva tri slučaja dobija se kontradikcija, a to znači da ne može biti $AB > A'B'$.

(ii) Analogno, i u slučaju $AB < A'B'$ dobija se kontradikcija.

(iii) Prema tome, mora biti $AB = A'B'$. Kako je još $AD = A'D'$ Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod b).

d) Neka je za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$. Da bi pomenuti četvorouglovi bili podudarni dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedna od moguńosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili $AB = A'B'$.



Slika 5.5.

(i) Neka je najpre $AB > A'B'$. Tada postoji tačka $B_1 \in AB$ (Slika 5.5.) takva da je $AB_1 = A'B'$ i $\mathcal{B}(A, B_1, B)$. U tački B_1 konstruišimo normalu n na pravu AB. Ona ne može seći niti pravu AB niti pravu CD, jer bi smo dobili trougao sa dva prava ugla. Znači prava n mora seći CD u tački C_1 takvoj da je $\mathcal{B}(C, C_1, D)$. Trouglovi ΔAB_1D i $A'B'D'$ su podudarni jer je $AD = A'D'$, $AB_1 = A'B'$ i $\measuredangle A = \measuredangle A' = R$. Tada su im i ostale odgovarajuće stranice i uglovi podudarni, tj. $B_1D = B'D'$, $\measuredangle AB_1D = \measuredangle A'B'D'$ i $\measuredangle ADB_1 = \measuredangle A'D'B'$. Odavde sledi $\measuredangle DB_1C_1 = \measuredangle D'B'C'$ i $\measuredangle B_1DC_1 = \measuredangle B'D'C'$. Sada je $\Delta DB_1C_1 \cong \Delta D'B'C'$, odakle je $\measuredangle B_1C_1D = \measuredangle B'C'D' = R$. U ovom slučaju četvorougao B_1C_1CB ima sva četiri ugla prava, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.

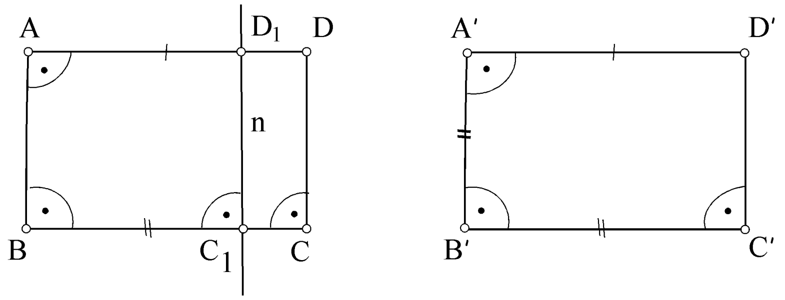
(ii) Analogno, i pretpostavka $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Preostaje $AB = A'B'$, a kako je još $AD = A'D'$ sledi podudarnost Lambertovih četvorouglova $ABCD$ i $A'B'C'D'$, na osnovu dokazanog dela pod b).

e) Neka je sada za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno: $AB = A'B'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$. Pokazaćemo da je $BC = B'C'$. Za duži BC i $B'C'$ može nastupiti jedan odf sledećih slučajeva: (i) $BC > B'C'$, (ii) $BC < B'C'$ ili (iii) $BC = B'C'$.

(i) Neka je $BC > B'C'$. Tada postoji tačka $C_1 \in BC$ (Slika 5.6.) takva da je $BC_1 = B'C'$ i $\mathcal{B}(B, C_1, C)$. Konstruišimo normalu n kroz tačku C_1 na pravu BC. Ona ne seče niti AB niti CD pa mora seći AD. Označimo sa D_1 presečnu tačku pravih n i AD. Tada je $\mathcal{B}(A, D_1, D)$. Lambertovi četvorouglovi ABC_1D_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $AB = A'B'$ i $BC_1 = B'C'$. Odatle sledi da je $\measuredangle AD_1C_1 = \measuredangle D'$. Tada je zbir unutrašnjih uglova četvorougla C_1CDD_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.

(ii) Analogno i pretpostavka $BC < B'C'$ dovodi do kontradikcije.

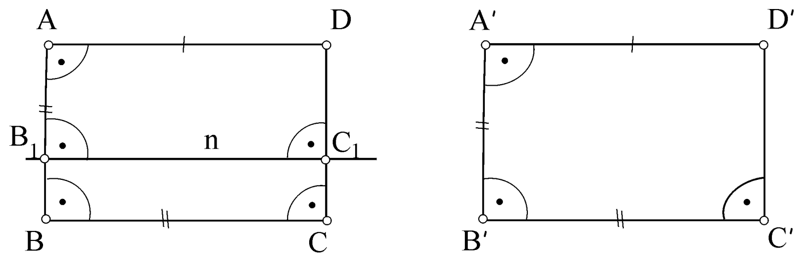


Slika 5.6.

(iii) Prema tome mora biti $BC = B'C'$. Kako je još $AB = A'B'$ to prema dokazanom delu pod a) sledi podudarnost četvorouglova $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

f) Neka je za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $BC = B'C'$. Dovoljno je da dokažemo da važi $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi jedna od tri mogućnosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili (iii) $AB = A'B'$.

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada postoji tačka $B_1 \in AB$ (Slika 5.7.) takva da je $\mathcal{B}(A, B_1, B)$ i $AB_1 = A'B'$. Konstruišimo normalu n u tački B_1 na pravu AB. Prava n ne može seći niti AD niti BC jer bi smo u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla. Dakle n seče CD u tački C_1 takvoj da je $\mathcal{B}(C, C_1, D)$. Lamberovi četvorouglovi AB_1C_1D i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $AD = A'D'$ i $AB_1 = AB$. Sada je $\measuredangle B_1C_1D = \measuredangle C' = R$, pa je zbir unutrašnjih uglova četvorougla BCC_1B_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.



Slika 5.7.

(ii) Analogno, ne može biti $AB < A'B'$.

(iii) Prema tome mora biti $AB = A'B'$. Kako je još $AD = A'D'$, Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ biće podudarni prema dokazanom delu pod b). $\square$

Teorema 5.2.3. *Dva Sakerijeva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$, sa osnovicama AB, $A'B'$ i protivosnovicama CD i CD' redom, su podudarna ako je*
a) $AB = A'B'$ i $BC = B'C'$, b) $AB = A'B'$ i $CD = C'D'$,
c) $BC = B'C'$ i $CD = C'D'$, d) $AB = A'B'$ i $\measuredangle C = \measuredangle C'$,
e) $BC = B'C'$ i $\measuredangle C = \measuredangle C'$, f) $CD = C'D'$ i $\measuredangle C = \measuredangle C'$.

Dokaz. Korišćenjem činjenice da srednja linija Sakerijevog četvorougla razlaže taj četvorougao na dva Lambertova četvorougla, dokaz ove teoreme svodi se na prostu primenu rezultata iz Teoreme 5.2.2. $\square$

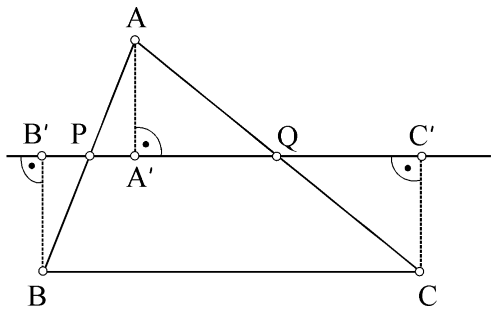
5.3 Srednja linija trougla u ravni $\mathbf{L}^2$

Sada ćemo dokazati teoremu koja se odnosi na srednju liniju trougla u ravni Lobačevskog.

Teorema 5.3.1. *Ako su P i Q sredine stranica AB i AC trougla ΔABC, tada su prave $p(B, C)$ i $p(P, Q)$ hiperparalelne, pri čemu je*

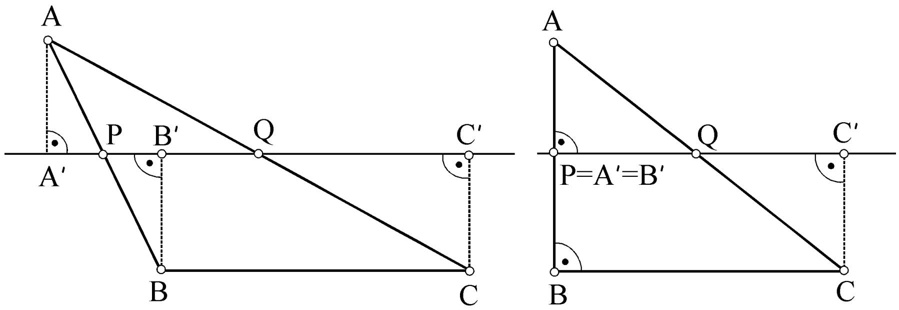
$$PQ < \frac{1}{2}BC.$$

Dokaz. Označimo sa A', B', C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu $p(P, Q)$. Tada mogu nastupiti sledeći rasporedi: (i) $\mathcal{B}(P, A', Q)$, (ii) $P \equiv A'$ ili $Q \equiv A'$, (iii) $P, Q \div A'$.



Slika 5.8.

(i) Neka je najpre $\mathcal{B}(P, A', Q)$ (Slika 5.8.). Trouglovi $\Delta AA'P$ i $\Delta BB'P$ su podudarni jer je $\measuredangle A' = \measuredangle B' = R$, $AP = BP$ i $\measuredangle BPB' = \measuredangle APA'$. Iz njihove podudarnosti sledi $AA' = BB'$ i $B'P = A'P$. Takođe su podudarni i trouglovi $\Delta AA'Q$ i $\Delta CC'Q$ jer je $\measuredangle A' = \measuredangle C' = R$, $\measuredangle AQA' = \measuredangle CQC'$ i $AQ = CQ$. Iz njihove podudarnosti sledi $AA' = CC'$ i $A'Q = C'Q$. Dakle, četvorougao $B'C'CB$ je Sakerijev, sa osnovicom $B'C'$ i protivosnovicom BC pa su prave $p(B, C)$ i $p(B'C') \equiv p(P, Q)$ hiperparalelne.



Slika 5.9.

Takođe su i prave $p(B, B')$ i $p(C, C')$ hiperparalelne jer imaju zajedničku normalu $p(B', C')$. Duž $B'C'$ je odsečak zajedničke normale između ovih dveju hiperparalelnih pravih, pa je prema Teoremi 4.3.6. $B'C' < BC$. Sada iz $\mathcal{B}(P, A', Q)$ dobijamo

$$B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = PA' + PQ + QC' = 2\,PQ.$$

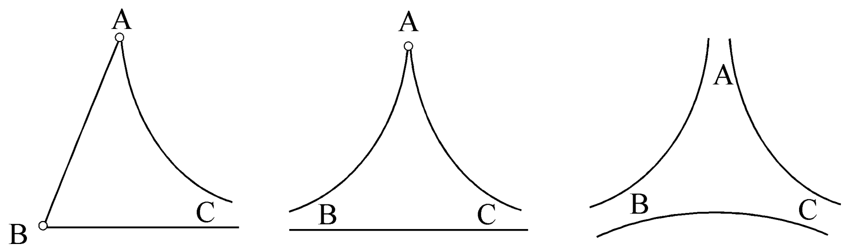
Dakle $2\,PQ < BC$, tj. $PQ < \dfrac{1}{2}BC$.

Slučajevi (ii) i (iii) razmatraju se analogno (Slika 5.9.). □

5.4 Trouglovi sa nesvojstvenim (infinitnim) temenima u ravni $\mathbf{L^2}$

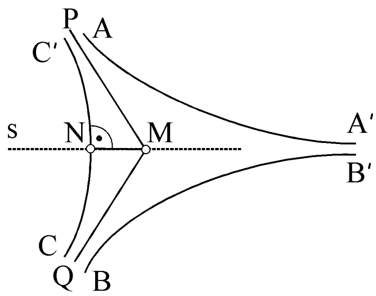
Teorema 5.4.1. *U geometriji ravni L^2 postoji trougao* (Slika 5.10.) *koji ima: (i) jedno, (ii) dva ili (iii) tri nesvojstvena temena.*

Dokaz. (i) Sledi direktno iz teoreme 4.2.4.
(ii) Sledi direktno iz aksiome Lobačevskog.
(iii) Neka su AA' i BB' (Slika 5.11.) paralelne prave, tj. $AA' \parallel BB'$, i neka je M tačka između pravih AA' i BB'. Neka je zatim $MP \parallel A'A$ i



Slika 5.10.

$MQ \parallel B'B$. Označimo sa s medijatrisu ugla $\measuredangle PMQ$. Tada je ugao $\measuredangle PMQ$ pravom s podeljen na dva oštra ugla. Neka je MN duž paralelnosti za taj oštri ugao. Tada za normalu CC' u tački N na simetralu s važi $MP \parallel CC'$ i $MQ \parallel C'C$, tj. $CC' \parallel A'A$ i $C'C \parallel B'B$. Prave AA', BB' i CC' određuju trougao sa tri nesvojstvena temena.



Slika 5.11.

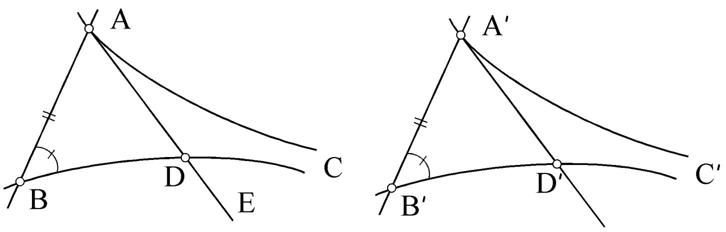
Teorema 5.4.2. *Dve paralelne prave u smeru suprotnom od smera paralelnosti imaju graničnu pravu.*

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 5.4.1. (iii). □

Teorema 5.4.3. *Dva trougla sa po jednim infinitnim temenom su podudarna ako imaju podudarne po jednu konačnu stranicu i po jedan finitni ugao.*

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ (Slika 5.12.) trouglovi sa nesvojstvenim temenima C i C', i neka je $AB \cong A'B'$ i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$. Da bi smo dokazali podudarnost trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dovoljno je da dokažemo da je $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Za uglove $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle B'A'C'$ važi jedna od sledeće tri mogućnosti: (i) $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$, (ii) $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$ i (iii) $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$.

(i) Pretpostavimo najpre da je $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. tada unutar ugla $\measuredangle BAC$ postoji poluprava AE takva da je $\measuredangle BAE = \measuredangle B'A'C'$. Poluprava AE mora seći pravu BC jer je $AC \parallel BC$. Označimo sa D njihovu presečnu tačku. Na polupravoj $B'C'$ odredimo tačku D' takvu da je $BD \cong B'D'$. Trouglovi ΔABD i $\Delta A'B'D'$ su podudarni jer imaju jednake dve odgovarajuće stranice i njima zahvaćen ugao, odakle sledi podudarnost i ostalih odgovarajućih elemenata, tj. $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'D'$. Sada iz $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle BAE = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'D'$ sledi $\measuredangle B'A'D' = \measuredangle B'A'C'$, tj prave $A'D'$ i $A'C'$ se poklapaju, što je nemoguće jer bi u tom slučaju paralelne prave $A'C'$ i $B'C'$ imale zajedničku tačku D'. Prema tome ne važi $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.



Slika 5.12.

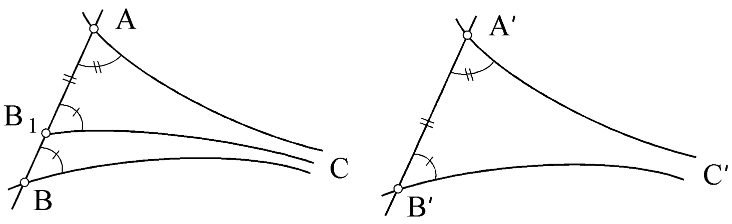
(ii) Analogno i pretpostavka $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, tj. trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su podudarni. $\square$

Teorema 5.4.4. *Dva trougla sa po jednim infinitnim temenom su podudarna ako su im podudarni odgovarajući uglovi kod finitnih temena.*

Dokaz. Neka su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ trouglovi sa infinitnim temenima C i C' pri čemu je $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$. Dovoljno je da dokažemo da je $AB \cong A'B'$ da bi pomenuti trouglovi bili podudarni. Za duži AB i $A'B'$ može nastupiti jedan od sledećih slučajeva: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili (iii) $AB = A'B'$

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada na AB postoji tačka B_1 (Slika 5.13.) takva da je $AB_1 \cong A'B'$ i $\mathcal{B}(A, B_1, B)$. Prava B_1C paralelna je pravoj AC, pa su trouglovi ΔAB_1C i $\Delta A'B'C'$ podudarni prema Teoremi 5.4.3. pa je $\measuredangle AB_1C = \measuredangle A'B'C'$. Sledi $\measuredangle AB_1C = \measuredangle ABC$, tj. suprotni uglovi $\measuredangle AB_1C$ i



Slika 5.13.

$\measuredangle ABC$ paralelnih pravih B_1C i BC su suplementni što je u suprotnosti sa Teoremom 4.3.5. Prema tome nije $AB > A'B'$.

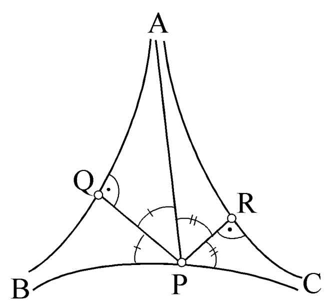
(ii) Analogno, pretpostavka $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Dakle, mora biti $AB = A'B'$, tj. trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su podudarni. □

Teorema 5.4.5. *Dva trougla sa po dva infinitna temena su podudarna ako su im podudarni odgovarajući uglovi kod finitnih temena.*

Teorema 5.4.6. *Svi trouglovi sa tri infinitna temena su među sobom podudarni.*

Teorema 5.4.7. *Ako su sva tri temena nekog trougla infinitna, tada su normale iz bilo koje tačke jedne njegove stranice na drugim dvema stranicama međusobno normalne.*



Slika 5.14.

Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka prave BC (Slika 5.14.) i neka su Q i R podnožja normala iz tačke P redom na AB i AC. Treba pokazati da je $\measuredangle QPR$ prav. iz $BA \parallel CA$ i $\mathcal{B}(B,P,C)$ sledi $PA \parallel BA$ i $PA \parallel CA$. Ugao $\measuredangle BPQ$ je ugao paralelnosti između dveju pravih koji odgovara duži PQ, tj. $\measuredangle BPQ = \Pi(PQ)$. Na isti način, $\measuredangle QPA$ je ugao paralelnosti koji odgovara duži PQ, pa je $\measuredangle QPB = \measuredangle QPA$. Analogno, sledi da je $\measuredangle RPA = \measuredangle RPC$. Sada je $\measuredangle QPR = \measuredangle QPA + \measuredangle RPA = \measuredangle BPQ + \measuredangle CPR$ i $\measuredangle QPR + (\measuredangle BPQ + \measuredangle CPR) = 2R$, odakle je $\measuredangle QPR = \measuredangle BPQ + \measuredangle CPR$ prav ugao. □

5.5 Paralelogrami i hiperparalelogrami u L^2

Klasifikacija četvorouglova u geometriji Lobačevskog se bitno razlikuje od klasifikacije četvorouglova u Euklidskoj ravni. U zavisnosti od toga da li se naspramne stranice četvorougla nalaze na konkurentnim, paralelnim ili hiperparalelnim pravama razlikujemo više vrsta četvorouglova. Naš cilj biće da razmotrimo samo specifične vrste četvorouglova. To su četvorouglovi sa paralelnim ili hiperparalelnim naspramnim stranicama.

Definicija 5.1. *Četvorougao kome svake dve naspramne stranice pripadaju paralelnim pravama zovemo paralelogram.*

Kraci unutrašnjih uglova paralelograma mogu da budu saglasni sa smerovima paralelnosti naspramnih stranica ili ne. Ako su oba kraka unutrašnjeg ugla paralelograma saglasna sa odgovarajućim smerovima teme zovemo osnovnim, a ako oba kraka unutrašnjeg ugla paralelograma nisu saglasna sa odgovarajućim smerovima, dotično teme zovemo protivosnovnim. Ostala dva temena zovemo bočnim temenima. Dijagonalu koja polazi iz osnovnog temena zovemo osnovnom a onu drugu bočnom. Četvorougao kome su dijagonale upravne među sobom zovemo romb.

Definicija 5.2. *Četvorovgao kome svake dve naspramne stvane pripadaju hiperparalelnim pravama nazivamo hiperparalelogramom.*

Hiperparalelogrami mogu biti centralno simetrični, osnosimetrični i asimetrični. Centralno simetrični hiperparalelogram nazivamo hiperromboidom. Hiperromboid kome su dijagonale upravne među sobom zovemo hiperromb. Hiperromboid kome su dijagonale među sobom podudarne zovemo hiperpravougaonikom. Hiperromboid kome su dijagonale među sobom upravne i podudarne zovemo hiperkvadratom.

Glava 6

Karakteristične krive i površi

6.1 Pramenovi pravih u ravni L^2

Definicija 6.1. Skup $\mathcal{L}$ svih pravih neke ravni S^2 nazivamo *pramenom pravih* ako za svake tri prave a, b, c skupa $\mathcal{L}$ kompozicija $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$.

Iz definicije neposredno zaključujemo sledeće:

(i) Ako su a, b, c tri prave jednog pramena i ako $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ tada i d pripada tom pramenu pravih.

(ii) Ako prave a, b, c pripadaju jednom pramenu $\mathcal{L}$ tada i ose refieksija $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ pripadaju pramenu $\mathcal{L}$.

(iii) Za svaku tačku X u ravni S^2 postoji u pramenu pravih $\mathcal{L}$, tačno jedna prava p koja je sadrži.

(iv) Ako su a, b, c tri prave pramena $\mathcal{L}$ tada je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$.

Zaista, neka je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Tada je $\mathcal{S}_d^2 = \varepsilon$, pa je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \varepsilon$ Množenjem sa desne strane redom sa $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ dobijamo $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$.

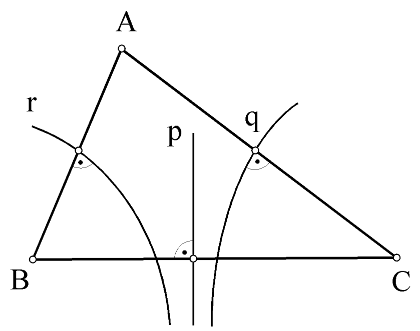
Teorema 6.1.1. *Skup svih konkurentnih pravih jedne ravni predstavlja jedan pramen pravih.*

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{L}$, skup svih konkurentnih pravih posmatrane ravni i sa a, b, c ma koje tri prave tog skupa, a sa O njihovu zajedničku tačku. Tada je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a(O) = O$. S obzirom da je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ indirektna transformacija sa invarijantnom tačkom O, ona predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$, čija osa d sadrži tačku O, te prava d pripada skupu $\mathcal{L}$. Prema definiciji pramena, skup $\mathcal{L}$ tada predstavlja pramen pravih u posmatranoj ravni. $\square$

Takođe nije teško dokazati da važi i sledeća teorema:

Teorema 6.1.2. *Skup svih pravih neke ravni S^2 upravnih na neku pravu s te ravni predstavlja pramen pravih.*

Teorema 6.1.3. *Medijatrise stranica trougla pripadaju jednom pramenu pravih.*



Slika 6.1.

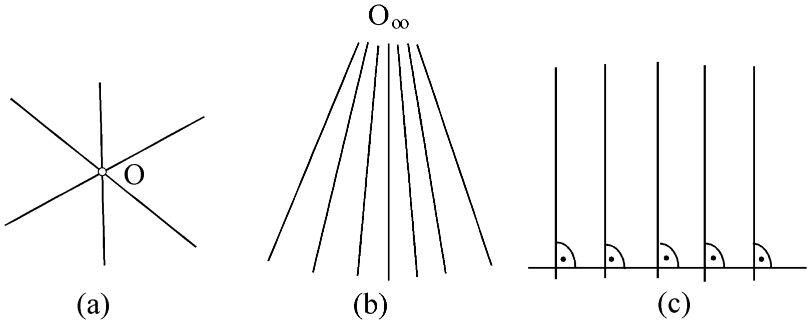
Dokaz. Obeležimo sa p, q i r (Slika 6.1.) medijatrise redom stranica BC, CA i AB trougla ΔABC. U kompoziciji $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p$ tačka B je invarijantna, tj. $\mathcal{I}(B) = B$. S obzirom da je izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ indirektna i ima invarijantnu tačku B to je $\mathcal{I}$ neka osna refleksija. Označimo je sa $\mathcal{S}_s$. Dakle, $\mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Tada $B \in s$ i prave p, q, r po definiciji pripadaju istom pramenu pravih. $\square$

Sve što je do sada izloženo u ovoj sekciji važi u Apsolutnoj geometriji tj. u apsolutnoj ravni S^2. U Euklidskoj geometriji medijatrise stranica trougla se seku u jednoj tački, centru opisanog kruga oko trougla. U geometriji Lobačevskog medijatrise stranica trougla se *ne moraju seći te* ne možemo oko svakog trougla opisati krug.

U nastavku ovog poglavlja razmotrićemo pramenove pravih u ravni L^2. Od toga da li je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih (Slika 6.2. (a)), paralelnih (Slika 6.2. (b)) ili pramen pravih upravnih na nekoj pravoj s (Slika 6.2. (c)) dotični pramen $\mathcal{X}$ nazivamo *eliptički, parabolički* odnosno *hiperbolički pramen.*

Svaki pramen pravih ravni Lobačevskog jednoznačno je određen sa ma koje dve prave tog pramena. Takođe, svakom tačkom ravni osim središtem pramena, prolazi jedna i samo jedna prava tog pramena.

Posmatrajmo u ravni Lobačevskog dva razna pramena pravih $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Razmotrimo sledeće slučajeve:



Slika 6.2.

1. Ako je jedan od tih pramenova eliptički, tada postoji jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih, bez obzira na to da li je drugi pramen eliptički, parabolički ili hiperbolički.

2. Ako je $\mathcal{X}$ hiperbolički, a $\mathcal{X}'$ parabolički pramen pravih, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih ako i samo ako osnovica pramena $\mathcal{X}$ nije paralelna pravama pramena $\mathcal{X}'$, jer postoji jedinstvena prava upravna na datu pravu, a paralelna polupravoj koja nije paralelna toj pravoj.

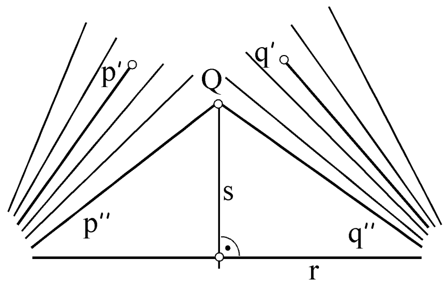
3. Ako su oba pramena hiperbolička, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih ako i samo ako su osnovice tih dvaju pramenova međusobno hiperparalelne prave.

Slučaj kada su zadati pramenovi pravih parabolički malo je složeniji pa ćemo ga formulisati u obliku sledeće teoreme:

Teorema 6.1.4. *Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ dva razna parabolička pramena. Tada postoji jedinstvena prava koja pripada pramenovima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$.*

Dokaz. S obzirom na činjenicu da dva razna pramena mogu imati najviše jednu zajedničku pravu, dovoljno je da pokažemo da postoji prava koja pripada pramenovima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Označimo sa p' i q' (Slika 6.3.) dve poluprave kojima su paralelne prave redom pramenova $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Tada poluprave p' i q' ne sadrže jedna drugu, jer bi se u suprotnom pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ poklapali. Ako bi te dve poluprave pripadale jednoj pravoj, onda bi ta prava bila zajednička prava pomenutih pramenova pravih.

Neka poluprave p' i q' pripadaju dvema različitim pravama p i q i neka je Q tačka koja ne pripada pravama p i q. Neka su p'' i q'' poluprave sa početkom u tački Q paralelne redom polupravama p' i q'. Ako poluprave p'' i q'' pripadaju jednoj pravoj, onda je ta prava zajednička prava pramenova $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$.

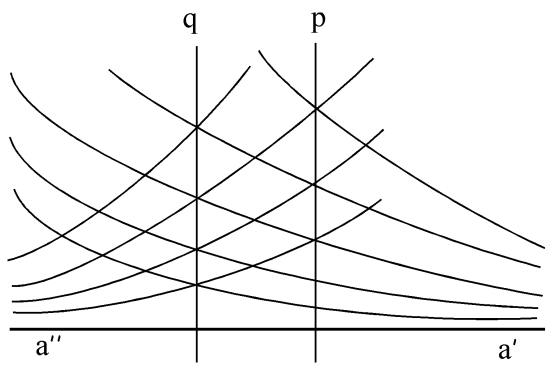


Slika 6.3.

Neka su p'' i q'' kraci nekog konveksnog ugla. U tom slučaju bisektrisa s tog ugla razlaže taj ugao na dva oštra ugla. Tada postoji jedinstvena prava r normalna na pravu s paralelna polupravama p'' i q''. Prava r pripada svakom od pramenova $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ jer je paralelna obema polupravama p' i q'.$\square$

Za paraboličke pramenove pravih interesantna je i sledeća teorema:

Teorema 6.1.5. *Parabolički pramen se preslikava na sebe translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada.*

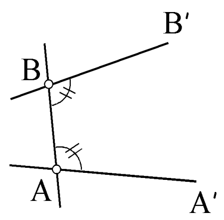


Slika 6.4.

Dokaz. Označimo sa a proizvoljnu pravu zadatog paraboličkog pramena $\mathcal{X}$. Neka je prava a (Slika 6.4.) razložena na poluprave a' i a'' nekom svojom proizvoljnom tačkom pri čemu su prave pramena $\mathcal{X}$ paralelne polupravoj a'. Označimo sa p i q dve različite proizvoljne prave upravne na pravu a. Osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ svaka prava pramena $\mathcal{X}$ preslikava se u pravu paralelnu polupravoj a''. Međutim, osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$ se ta prava preslikava u neku pravu paralelnu pravoj a', tj. u pravu pramena $\mathcal{X}$. Znači, kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ pramen $\mathcal{X}$ preslikava na sebe. □

6.2 Sečica jednakog nagiba

Definicija 6.1. Prava AB je *sečica jednakog nagiba* pravih AA' i BB' ako ona sa iste strane obrazuje sa tim pravama podjednake uglove (Slika 6.5.).



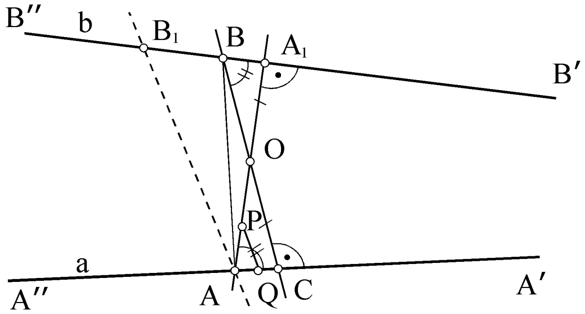
Slika 6.5.

Teorema 6.2.1. *U svakom pramenu pravih, kroz proizvoljnu tačku ma koje prave, prolazi jedna i samo jedna sečica jednakog nagiba ka ma kojoj drugoj pravoj istog pramena.*

Dokaz. Neka su $a \equiv A''A'$ i $b \equiv B''B'$ dve prave prizvoljnog pramena pravih $\mathcal{X}$. Odredimo na pravoj a tačku A, i obeležimo sa A_1 tačku u kojoj normala iz tačke A na pravu b seče pravu b. Uočimo tačku P između tačaka A i A_1 i označimo sa Q podnožje normale iz tačke P na pravu a.

Kada se tačka P kreće po duži AA_1 od A prema A_1, duž PA_1 se stalno i neprekidno smanjuje. S druge strane, $\measuredangle A_1AA'$ je oštar, pa PQ stalno i neprekidno raste. Dakle, postoji tačka O, duži AA_1 takva da je $OA_1 \cong OC$, gde je C podnožje normale iz tačke O na pravu a (Slika 6.6.).

Obeležimo sa B tačku na pravoj b, tako da se ona nalazi sa one strane prave AA_1 sa koje nije tačka C i $BA_1 \cong CA$. Tada su trouglovi ΔOAC i ΔOA_1B podudarni, pa je $OA \cong OB$ i $\measuredangle OBA_1 = \measuredangle OAC$. Iz uslova $OA \cong OB$ sledi da je trougao OAB jednakokrak, što znači da je $\measuredangle OBA = \measuredangle OAB$. Dakle, imamo, $\measuredangle A_1BA = \measuredangle BAC$, a to znači da je prava AB sečica jednakog nagiba pravih a i b.

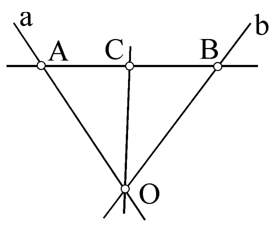


Slika 6.6.

Ostaje nam da pokažemo još *jedinstvenost*, tj. da je AB jedina takva sečica koja prolazi kroz tačku A. Zaista, neka postoji još jedna takva sečica AB_1. Pretpostavimo, ne umanjujući opštost dokaza da je ona takva da je $\measuredangle B_1AC > \measuredangle BAC$. Kako je $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABA_1$ i $\measuredangle B_1AC \cong \measuredangle AB_1A_1$, to je $\measuredangle AB_1A_1 > \measuredangle ABA_1$. Međutim, $\measuredangle ABA_1$ je spoljašnji ugao trougla ΔABB_1 te mora biti veći od unutrašnjeg nesusednog ugla $\measuredangle AB_1B$ tog trougla. Dobijena protivrečnost pokazuje da poluprava AB_1 ne može biti takva da je $\measuredangle B_1AC > \measuredangle BAC$, što znači da se ona mora poklapati sa polupravom AB.

Time je teorema u potpunosti dokazana. □

Definicija 6.2. *Neka tačka A pripada pravoj a, a tačka B pripada pravoj b. Ako je AB sečica jednakog nagiba pravih a i b, za tačke A i B kažemo da su odgovarajuće tačke pravih a i b.*

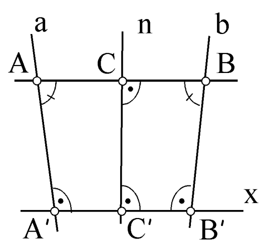


Slika 6.7.

Teorema 6.2.2. *Ako su A i B odgovarajuće tačke pravih a i b nekog pramena pravih $\mathcal{X}$, tada normala na duž AB u njenom središtu C, pripada istom pramenu pravih $\mathcal{X}$.*

Dokaz. Razlikovaćemo tri slučaja, prema tome da li prave a i b pripadaju eliptičkom, hiperboličkom, ili paraboličkom pramenu pravih.

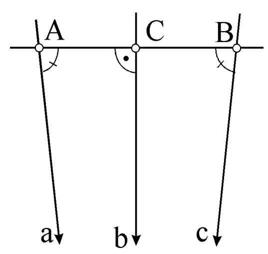
(i) Prave a i b pripadaju eliptičkom pramenu (Slika 6.7.). S obzirom na to da je pramen eliptički, to postoji središte O pramena $\mathcal{X}$, kroz koje prolaze i prave a i b. Trougao ΔOAB je jednakokraki, pa normala na osnovicu AB u njenom središtu C sadrži tačku O. To upravo znači, da i ta normala pripada pramenu pravih $\mathcal{X}$.



Slika 6.8.

(ii) Prave a i b pripadaju hiperboličkom pramenu pravih $\mathcal{X}$ (Slika 6.8.). Obeležimo respektivno sa A' i B' tačke bazisne prave x, koje pripadaju pravama a i b. U četvorouglu $AA'B'B$ su uglovi koji naležu na stranicu $A'B'$ pravi, dok su uglovi koji naležu na stranicu AB podudarni. Ovakav četvorougao je Sakerijev. Kako je srednja linija n Sakerijevog četvorougla zajednička normalna osnovice i protivosnovice tog četvorougla, to je teorema dokazana i u ovom slučaju.

(iii) Prave a i b pripadaju paraboličkom pramenu pravih $\mathcal{X}$ (Slika 6.9.). Normala na duž AB u njenom središtu C ne može seći, zbog podudarnosti uglova sa temenima u tačkama A i B, ni jednu od pravih a i b, pa kako se nalazi između njih, to je ona paralelna sa svakom od njih u istom smeru, tj. i u ovom slučaju pripada istom pramenu $\mathcal{X}$ kome pripadaju i prave a i b. $\square$



Slika 6.9.

Važi i obratno:

Teorema 6.2.3. *Ako tačke A i B pripadaju pravama a i b nekog pramena, a normala c na duž AB u njenom središtu C pripada tom istom pramenu, tada su tačke A i B odgovarajuće tačke pravih a i b.*

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme razlikovaćemo tri slučaja, prema tome da li prave a i b pripadaju eliptičkom, hiperboličkom, ili paraboličkom pramenu pravih.

(i) U slučaju eliptičkog pramena pravih (Slika 6.7.), uslov teoreme izražava činjenicu da simetrala osnovice AB trougla ΔOAB prolazi kroz tačku O, pri čemu je O središte pramena. Dakle, $OA \cong OB$ pa je trougao ΔOAB jednakokrak, a to znači da je AB sečica jednakog nagiba pravih a i b.

(ii) U Slučaju hiperboličkog pramena pravih (Slika 6.8.), obeležimo sa A', B', C' tri razne tačke bazisne prave x, koje pripadaju, redom, pravama a, b i c. Lambertovi[1] čevorougli $ACC'A'$ i $BCC'B'$ imaju zajedničku osnovicu CC' i podudarne visine AC i CB, pa su oni podudarni. Iz njihove podudarnosti, sledi podudarnost ostalih elemenata, pa je $\measuredangle A'AB \cong \measuredangle B'BA$, a to znači da je AB sečica jednakog nagiba pravih a i b.

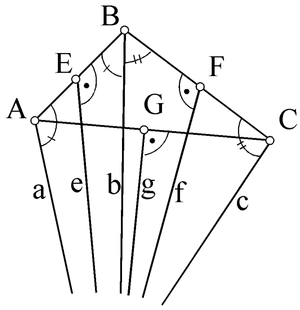
(iii) U slučaju paraboličkog pramenapravih (Slika 6.9.), neka su prave a, b, c paralelne u istom smeru. Tada je $\measuredangle A = \Pi(AC)$ i $\measuredangle B = \Pi(BC)$. Međutim kako je $AC = BC$, tj. $\Pi(BC) = \Pi(AC)$, to su uglovi $\measuredangle A$ i $\measuredangle B$ podudarni. Dakle, AB je sečica jednakog nagiba pravih a i b. □

Teorema 6.2.4. *Ako tačke A i B odgovaraju jedna drugoj na pravama a i b nekog pramena, a tačke B i C odgovaraju jedna drugoj na pravama b i c tog istog pramena, onda tačke A i C odgovaraju jedna drugoj na pravama a i c.*

Dokaz. Prema upravo dokazanoj teoremi, normala e duži AB u njenom središtu E, pripada uočenom pramenu. Tom pramenu pripada i normala f duži BC u njenom središtu F. Međutim, prave e i f su simetrale stranica trougla ΔABC. Kako simetrale stranica trougla pripadaju jednom pramenu pravih, to simetrala g treće stranice AC tog trougla, pripada istom pramenu kome pripadaju i simetrale e i f. Dakle, normala g duži AC u njenom središtu G pripada onom pramenu, kome pripadaju i prave a i c (Slika 6.10.). Na osnovu prethodne teoreme, tačke A i C odgovaraju jedna drugoj na pravama a i c, što je i trebalo dokazati. □

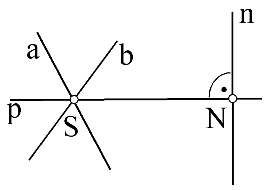
Neka su sada u Hiperboličkoj ravni date tri razne prave a, b i n. Ispitajmo da li postoji prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a, b)$ i koja je normalna na pravoj n.

[1] Johann Heinrich Lambert (1728-1777), švajcarski matematičar, fizičar i astronom



Slika 6.10.

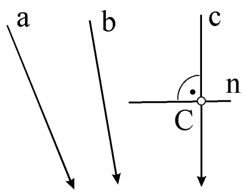
Razlikovaćemo tri slučaja, prema tome da li je $\mathcal{X}(a,b)$ eliptički, parabolički ili hiperbolički pramen pravih.



Slika 6.11.

1° Pretpostavimo da se prave a i b seku u nekoj tački S tj., da one određuju eliptički pramen pravih. Tada postoji jedinstvena prava p, koja sadrži tačku S i normalna je na pravoj n (Slika 6.11.). Prava p, pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n.

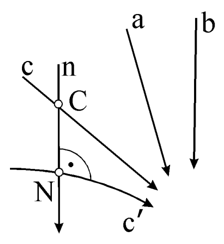
2° Pretpostavimo da su prave a i b paralelne, tj. pretpostavimo da one određuju parabolički pramen pravih.



Slika 6.12.

(a) Pretpostavimo da prava n, ne pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Neka je C proizvoljna tačka prave n. Tada postoji jedinstvena prava c koja sadrži tačku C, i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Razlikujemo dva slučaja:

i) ako je prava c normalna na pravoj n, onda je c prava koja zadovoljava tražena svojstva (Slika 6.12.);

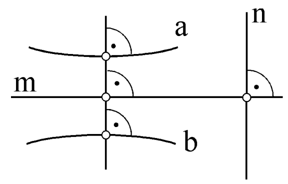


Slika 6.13.

ii) ako prava c nije normalna na pravoj n, onda postoji prava c' koja je normalna na pravoj n i paralelna pravoj c u istom smeru kao i prava a (prava c', dakle, normalna je na pravoj n i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$) (Slika 6.13.).

(b) Pretpostavimo da prava n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Pretpostavimo da postoji prava c koja je normalna na pravoj n i pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Ako je C presečna tačka pravih n i c, onda postoje dve različite prave n i c koje sadrže tačku C i pripadaju pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, što je nemoguće. Dakle, ne postoji prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n.

3° Pretpostavimo da su prave a i b hiperparalelne, tj. da one određuju hiperbolički pramen pravih. Neka je m bazisna prava tog hiperboličkog pramena (Slika 6.14.).



Slika 6.14.

Postoji prava koja pripada tom pramenu i normalna je na pravu n, akko postoji prava koja je normalna i na pravoj m i na pravoj n, tj. akko m i n imaju zajedničku normalu. Prave m i n imaju zajedničku normalu akko su hiperparalelne ili identične. Razlikujemo dva slučaja:

(i) Ako je m hiperparalelna sa n, njihova zajednička normala p pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n.

(ii) Ako su prave m i n identične, svaka prava p normalna na pravoj n, pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$.

Dakle, tražena prava tj. prava koja pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$ i normalna je na pravoj n, postoji uvek, osim ako su prave a i b paralelne i prava n pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, ili ako su prave a i b hiperparalelne i njihova zajednička normala m, nije hiperparalelna niti identična sa pravom n. $\square$

6.3 Epicikli u ravni $\mathbf{L^2}$

Definicija 6.1. Kompoziciju dveju osnih refleksija ravni L^2 nazivamo *epicikličkom rotacijom.*

Teorema 6.3.1. *Neka je $\mathcal{X}$ proizvoljan pramen pravih u ravni L^2. Skup svih epicikličkih transformacija definisanih u odnosu na prave tog pramena predstavlja grupu epicikličkih rotacija definisanih u odnosu na pramen pravih $\mathcal{X}$.*

Definicija 6.2. Neka je $\mathcal{X}$ pramen pravih u ravni L^2 i neka je $P \in L^2$ proizvoljna tačka. Skup, koji se sastoji iz svih tačaka ravni L^2, koje u transformacijama iz grupe epicikličkih rotacija definisanih u odnosu na pramen $\mathcal{X}$ odgovaraju tački P, nazivamo *epiciklom* ili *trajektorijom* tog pramena pravih. Tačka P, koja pripada trajektoriji naziva se *početna tačka* trajektorije.

Prema tome, trajektorija pramena pravih je određena svojom početnom tačkom.

Teorema 6.3.2. *Svaka tačka trajektorije pramena pravih, može se uzeti za početnu tačku trajektorije.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{T}$ trajektorija pramena pravih u odnosu na početnu tačku A, a $\mathcal{T}'$ trajektorija istog pramena u odnosu na početnu tačku B. Ako tačka

B pripada i trajektoriji $\mathcal{T}$, to znači da je B ona tačka elementa b pramena, koja odgovara tački A, elementa a tog pramena. Ali tada i tačka A elementa a odgovara tački B elementa b, tj. ako tačka B pripada trajektoriji $\mathcal{T}$, onda i tačka A pripada trajektoriji $\mathcal{T}'$.

Neka je, zatim, C proizvoljna tačka trajektorije $\mathcal{T}$. To znači da je tačka C, elementa c pramena, odgovarajuća tačka tački A, elementa a. Ali na osnovu Teoreme 6.2.4. sledi da su i tačke B i C odgovarajuće tačke, što znači da tačka C pripada i trajektoriji $\mathcal{T}'$. Jasno je da važi i obratno , tj. da svaka tačka trajektorije $\mathcal{T}'$ pripada i trajektoriji $\mathcal{T}$ tj. trajektorije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ se poklapaju. Dakle, trajektorija pramena pravih je određena ma kojom svojom tačkom. □

Nije teško zaključiti da važe sledeće teoreme:

Teorema 6.3.3. *Svaka tetiva trajektorije pramena pravih je sečica jednakog nagiba onih elemenata pramena, koji prolaze kroz krajnje tačke tetive.*

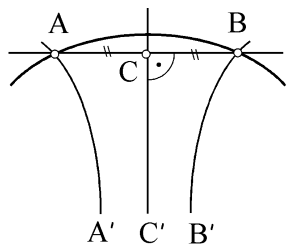
Teorema 6.3.4. *Normala na tetivu trajektorije pramena pravih u njenom središtu, pripada tom pramenu pravih.*

Teorema 6.3.5. *Svaka trajektorija seče pramen pravih ortogonalno.*

Dokaz. Primetimo da ova teorema, u stvari, izražava činjenicu da tangenta trajektorije u svakoj tački stoji normalno na onu pravu pramena, koja prolazi kroz uočenu tačku pramena.

Razmotrimo, posebno slučaj eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog pramena.

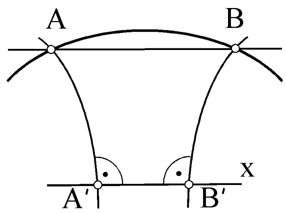
(i) U slučaju eliptičkog pramena, sve tačke trajektorije su podjednako udaljene od središta pramena, tj. ta trajektorija je krug.



Slika 6.15.

(ii) U slučaju paraboličkog pramena, neka je AB tetiva trajektorije, a CC' normala te tetive u njenom središtu C. Tada je $AA' \parallel CC'$, pa je $\measuredangle A'AC = \Pi(AC)$, gde smo sa A' označili tačku prave pramena koja prolazi kroz tačku A, a nalazi se sa one strane prave AB sa koje je smer paralelnosti (Slika 6.15.). Međutim $\Pi(AC)$ teži $\pi/2$, kada se AC smanjuje i teži nuli. S druge strane, kada AC teži nuli, tetiva AB postaje tangenta trajektorije u tački A.

(iii) Ako je pramen hiperbolički, posmatrajmo tetivu AB trajektorije i one prave a i b pramena koji prolaze, redom, kroz tačke A i B. Obeležimo sa A' i B' tačke preseka pravih a i b sa bazisnom pravom pramena x (Slika 6.16.). U Sakerijevom četvorouglu $ABB'A'$, kao i u slučaju paraboličnog pramena, $\measuredangle A'AB$ teži ka $\pi/2$ kada AB teži nuli, a zajedno s tim i $A'B'$ teži nuli. □



Slika 6.16.

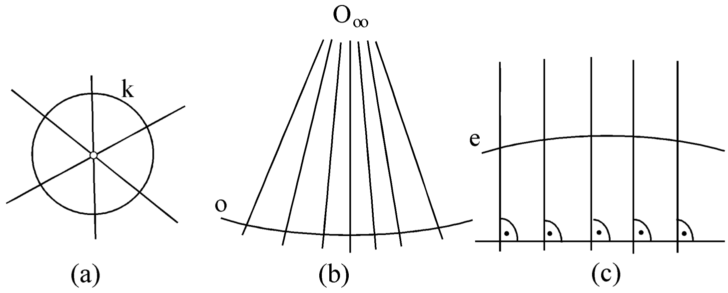
Teorema 6.3.6. *Prava može seći trajektoriju pramena pravih najviše u dve tačke.*

Dokaz. Uočimo tačke A, B i C trajektorije tog pramena. Neka je tačka B između tačaka A i C na toj trajektoriji, i AA', BB' i CC' odgovarajući elementi pramena. Tada su uglovi $\measuredangle ABB'$ i $\measuredangle CBB'$ oštri, odakle sledi da $\measuredangle ABC$ ne može biti opružen, tj. tri tačke trajektorije ne mogu biti kolinearne, što je i trebalo dokazati. □

U ravni Lobačevskog postoje važne krive koje su u uskoj vezi s pramenovima pravih. Zbog svog velikog značaja zovu se *fundamentalne* ili *C-krive.* Takođe se u literaturi sreću pod nazivom - *epicikli.* To su *ortogonalne trajektorije*, tj. takve krive koje presecaju prave posmatranog pramena pod pravim uglom.

Prema tome može se govoriti o ortogonalnoj trajektoriji svakog od spomenuta tri tipa pramena pravih. Prema tome razlikujemo sledeće tri vrste epicikla (fundamentalnih ili C-krivih):

(1) Ortogonalna trajektorija eliptičkog pramena je *krug* ili *cikl.* Svaka tačka kruga podjednako je udaljena od središta eliptičkog pramena pravih O. Tačku O nazivamo *središtem* tog cikla (Slika 6.17. (a)).



Slika 6.17.

(2) Ortogonalna trajektorija paraboličkog pramena naziva se *granični krug* ili *oricikl* (Slika 6.17. (b)). Oricikl se može posmatrati kao granični slučaj kruga. Središte tog kruga bila bi infinitna tačka O_∞ u ravni Lobačevskog, u kojoj se seku prave paraboličkog pramena pravih. Oricikl je kriva koja cela leži s jedne strane svoje tangente, a konkavna strana joj je okrenuta prema onoj tački kojoj paralelne prave konvergiraju.

(3) Ortogonalna trajektorija hiperboličkog pramena naziva se *ekvidistanta* ili *hipercikl* (Slika 6.17. (c)). Naziv "ekvidistanta" ova C-kriva dobila je po tome što ima svojstvo da su sve njene tačke podjednako udaljene od prave n koja je zajednička normala svih pravih toga pramena. Ta prava n naziva se *baza (osnova) ekvidistante.* U ravni Lobačevskog ekvidistanta nije prava, nego kriva. Međutim, u Euklidovoj ravni ekvidistanta je prava (sledi iz V Euklidovog postulata).

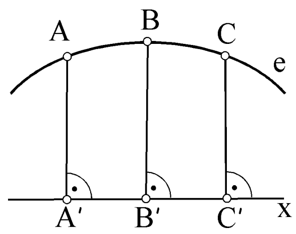
Sve prave pramena u svakom od ova tri slučaja zovu se *ose* odgovarajućeg epicikla (fundamentalne krive). Svaka od pomenutih krivih je simetrična u odnosu na svaku svoju osu.

Krug, ekvidistanta i oricikl imaju zajedničko svojstvo - to su krive stalne krivine u L^2. Šta više, može se dokazati da su to jedine krive konstantne krivine (-1) u ravni Lobačevskog. U Euklidskoj ravni E^2 postoje dve vrste linija konstantne krivine: krug i prava, dobijene kao trajektorije eliptičkog i hiperboličkog pramena pravih.

Fundamentalne krive, pre svega oricikl i ekvidistanta, biće predmet našeg razmatranja u poglavljima koja slede.

6.4 Ekvidistanta

Definicija 6.1. *Trajektorija hiperboličkog pramena pravih zove se ekvidistantna linija ili ekvidistanta, a bazisna prava pramena - bazisna prava ekvidistante. Svaki element pramena u odnosu na koji je ekvidistanta definisana je osa ekvidistante* (Slika 6.18.).



Slika 6.18.

Naravno, definiciju ekvidistante, možemo dati i u terminima sečice jednakog nagiba:

Definicija 6.2. *Neka je a prava hiperboličkog pramena pravih i neka je A proizvoljna tačka prave a. Tada geometrijsko mesto tačaka B, za koje je zadovoljeno $B \in b$, prava b je iz istog pramena i AB je sečica jednakog nagiba, naziva se ekvidistanta.*

Teorema 6.4.1. *Tačke ekvidistante su podjednako udaljene od njene bazisne prave. Obrnuto, geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od te prave je ekvidistantna linija.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su A, B i C tačke ekvidistante e, a A', B' i C' projekcije tih tačkaka na njenu bazisnu pravu (Slika 6.18.). Tačke A i B su, dakle, odgovarajuće tačke na elementima AA' i BB' posmatranog hiperboličkog pramena. Zato je $\measuredangle BAA' \cong \measuredangle ABB'$. Kako je, po konstrukciji, $\measuredangle AA'B' \cong \measuredangle A'B'B = R$, to je četvorougao $AA'B'B$ Sakerijev, tj. $AA' \cong BB'$. Analogno, četvorougao $BB'C'C$ je Sakerijev, pa je $AA' \cong BB' \cong CC'$.

($\Leftarrow$) Posmatrajmo sada normale u tačkama A', B' i C' date prave, i na njima, sa iste strane uočene prave, redom tačke A, B i C, tako da je $AA' \cong BB' \cong CC'$. Tačke A, B i C pripadaju geometrijskom mestu tačaka podjednako udaljenih od date prave. Primetimo, uočene normale su elementi hiperboličnog pramena pravih za koje data prava predstavlja bazisnu pravu. Takođe četvorougli $AA'B'B$ i $BB'C'C$ su Sakerijevi. Dakle $\measuredangle A'AB \cong \measuredangle ABB'$ i $\measuredangle B'BC \cong \measuredangle BCC'$, tj. tačke A, B i C su odgovarajuće tačke na pravama pramena, pa pripadaju trajektoriji tog pramena, što je i trebalo dokazati. □

Definicija 6.3. *Konstantno odstojanje $AA' \cong BB' \cong CC' \cong h$ tačaka ekvidistante od njene bazisne prave, naziva se parametar ekvidistante ili visina ekvidistante.*

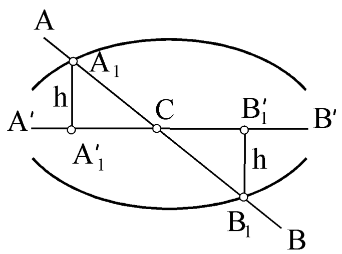
Sa obe strane bazisne prave ekvidistanta ima po jednu granu.

Specijalno, ako je visina ekvidistante jednaka nuli, sledi da je ekvidistanta prava linija. Znači, prave linije možemo smatrati ekvidistantama visine nula.

Za ekvidistantu važi

Teorema 6.4.2. *Prava koja seče bazisnu pravu, seče svaku granu ekvidistante u jednoj tački.*

Dokaz. Pretpostavimo da prava AB seče bazisnu pravu $A'B'$ ekvidistante u tački C. Uočimo oštar ugao $\measuredangle ACA'$. Koristeći se Teoremom 4.2.5. zaključujemo da rastojanja tačaka njegovog kraka AC od drugog kraka CA' neprekidno rastu, ukoliko se po kraku AC udaljavamo od njegovog temena C. Zato na tom kraku postoji tačka A_1 čije je rastojanje od kraka CA', tj. od bazisne prave $A'B'$ jednako visini ekvidistante h (Slika 6.19.). Dakle, tačka A_1 pripada ekvidistanti (ona je presečna tačka prave i ekvidistante). Analogno se pokazuje da druga poluprava CB , date prave, seče drugu granu ekvidistante. □



Slika 6.19.

Teorema 6.4.3. *Prava koja je paralelna sa bazisnom pravom ekvidistante, seče ekvidistantu u jednoj tački.*

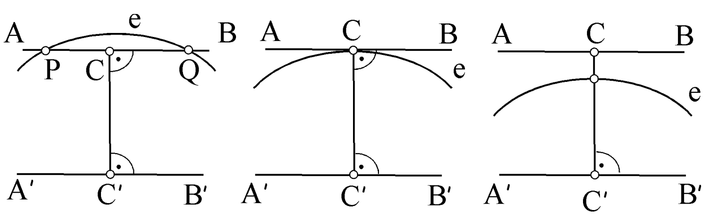
Dokaz. Poznato je da se odstojanje tačke koja se pomera po jednoj od dveju raznih međusobno paralelnih pravih, od druge prave strogo i neograničeno smanjuje kada se tačka pomera u smeru paralelnosti, a strogo i neograničeno povećava kada se tačka pomera u smeru suprotnom od smera paralelnosti. Zato, ako uočimo pravu koja je paralelna bazisnoj pravoj ekvidistante, na njoj postoji jedna i samo jedna tačka, čije je rastojanje od bazisne prave ekvidistante jednako visini ekvidistante h. Ta tačka prave, zbog toga, pripada ekvidistanti, i prema tome, data prava seče ekvidistantu u jednoj tački, što je i trebalo dokazati. □

Teorema 6.4.4. *Prava koja je hiperparalelna sa bazisnom pravom ekvidistante, seče jednu granu ekvidistante u dvema tačkama ako je najkraće rastojanje te dve prave manje od visine ekvidistante, dodiruje je, ako je to rastojanje jednako visini ekvidistante, a nema zajedničkih tačaka sa ekvidistantom, ako je to rastojanje veće od visine ekvidistante.*

Dokaz. Označimo sa AB datu pravu, a sa $A'B'$ bazisnu pravu ekvidistante. Neka su prave AB i $A'B'$ hiperparalelne. Neka je CC' njihova zajednička normala. Duž CC' je najkraće rastojanje te dve prave (jer od svih duži koje spajaju tačke dveju mimoilaznih pravih, najmanja je ona koja spaja podnožja zajedničke normale tih mimoilaznih pravih), i počev od nje mimoilazne prave se neprekidno i neograničeno udaljavaju jedna od druge.

Razmotrimo svaki slučaj ponaosob (Slika 6.20.):

(i) Neka je duž CC' manja od visine ekvidistante. Primetimo, da na pravoj AB sa svake strane tačke C postoji po jedna tačka, čije je odstojanje od bazisne prave jednako duži h. Te dve tačke pripadaju i ekvidistanti (jer ekvidistantna linija se sastoji iz dve grane, od kojih se svaka nalazi sa jedne strane bazisne prave), pa, prema tome, data prava seče jednu granu (onu granu ekvidistante sa koje se nalazi) u dvema tačkama.



Slika 6.20.

(ii) Neka je duž CC' jednaka visini ekvidistante. U tom slučaju tačka C pripada ekvidistanti. Ako se počev od tačke C, sa obe strane te tačke prava

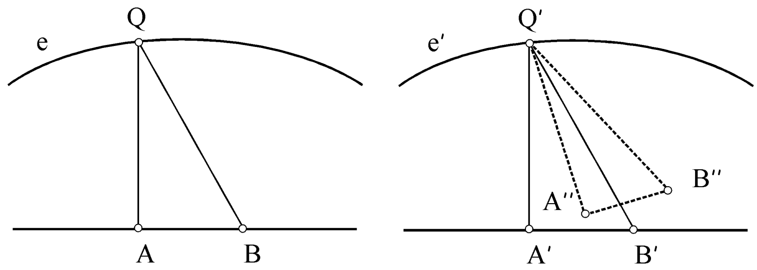
AB udaljuje od prave $A'B'$, onda ta prava nema više zajedničkih tačaka sa ekvidistantom, pa je zato dodiruje samo u tački C.

(iii) Neka je duž CC' veća od visine ekvidistante. U tom slučaju tačka C se nalazi izvan ekvidistante. To važi i za ostale tačke prave AB, jer su i njihova odstojanja od $A'B'$ veća od CC', pa prema tome i od h. Zato, u ovom slučaju, prava AB nema zajedničkih sa ekvidistantom. □

U Euklidskoj geometriji ekvidistanta je prava, pa su svake dve ekvidistante podudarne. U ravni Lobačevskog ekvidistanta je različita od prave i važi sledeća teorema:

Teorema 6.4.5. *Da bi u ravni L^2 dve ekvidistante bile podudarne, potrebno je i dovoljno da im visine budu podudarne.*

Dokaz. Neka su u ravni L^2 date ekvidistante e i e' redom sa osnovama s i s'. Neka su Q i Q' tačke redom ekvidistanti e i e' a A i A' podnožja normala redom iz tačaka Q i Q' na prave s i s'. Neka su još B i B' tačke pravih s i s' redom takve da je $AB \cong A'B'$, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ hiperbolički pramenovi kojima su ekvidistante e i e' definisane.



Slika 6.21.

Pretpostavimo da su visine QA i $Q'A'$ podudarne. Tada u ravni L^2 postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ koja trougao ΔQAB prevodi u $\Delta Q'A'B'$. Izometrija $\mathcal{I}$ pramen $\mathcal{X}$ prevodi na pramen $\mathcal{X}'$ pa samim tim i ekvidistantu e na ekvidistantu e'.

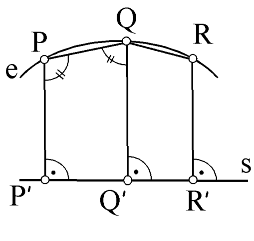
Obratno, neka su ekvidistante e i e' podudarne. Tada postoji izometrija $\mathcal{I}$, takva da je $\mathcal{I}(e) = e'$. Tada je $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}'$, $\mathcal{I}(A) = A''$, $\mathcal{I}(B) = B''$ i $\mathcal{I}(Q) = Q'$ (Slika 6.21.). Ako bi bilo $\mathcal{I}(s) \neq s'$, onda bi svaka prava pramena $\mathcal{X}'$ bila upravna na dvema pravama s' i $A''B''$, što je nemoguće. Prema tome, visine ekvidistanti e i e' su podudarne. □

Teorema 6.4.6. *Ako je visina ekvidistante u Hiperboličkoj ravni L^2 veća od nule, onda ta ekvidistanta nije prava.*

Dokaz. Neka je data ekvidistanta e, i označimo sa s njenu bazisnu pravu. Neka su P, Q i R proizvoljne različite tačke koje pripadaju ekvidistanti, a P', Q' i R' podnožja normala iz tačaka P, Q i R na pravoj s. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti dokaza, da važi raspored $\mathcal{B}(P', Q', R')$ (Slika 6.22.). Po pretpostavci, visina ekvidistante e je različita od nule, pa se tačke P i P' ne poklapaju. Analogno, ne poklapaju se ni tačke Q i Q', a isto važi i za tačke R i R'. Važi $PP' \cong QQ' \cong RR'$. Kako se radi o ekvidistanti, prava s je zajednička normala pravih PP' i QQ'. Dakle, prave PP' i QQ' se ne seku. Analogno, ne seku se prave PP' i RR' i prave QQ' i RR'. Takođe važi, $\measuredangle PP'Q' = \measuredangle QQ'P' = R$ i $\measuredangle QQ'R' = \measuredangle RR'Q' = R$, pa su $PP'Q'Q$ i $QQ'R'R$ Sakerijevi četvorouglovi. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla međusobno su podudarni, tj. $\measuredangle P'PQ = \measuredangle Q'QP$. Zbir uglova u četvorouglu $PP'Q'Q$ manji je od zbira četiri prava ugla, i jednak je:

$$\measuredangle PP'Q' + \measuredangle P'Q'Q + \measuredangle Q'QP + \measuredangle QPP' = 2R + 2\measuredangle Q'QP$$

odakle zaključujemo da je $\measuredangle Q'QP$ oštar. Analogno, se pokazuje da je i ugao $\measuredangle Q'QR$ oštar.



Slika 6.22.

Ugao $\measuredangle PQR$ jednak je zbiru uglova $\measuredangle Q'QR$ i $\measuredangle Q'QP$, odakle zaključujemo da je $\measuredangle PQR$ manji od opruženog, pa sledi da tačke P, Q i R nisu kolinearne. Dakle, ekvidistanta e nije prava. □

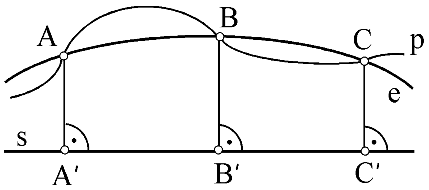
Teorema 6.4.7. *Nikoje tri razne tačke ekvidistante ne pripadaju jednoj pravoj.*

Dokaz. Posmatrajmo u ravni Lobačevskog ekvidistantu e sa bazisnom pravom s i visinom različitom od nule. Pokazaćemo da nikoje tri razne tačke te ekvidistante ne pripadaju jednoj pravoj.

Pretpostavimo da postoji prava p koja sa ekvidistantom e ima tri zajedničke tačke A, B, C. Označimo sa A', B', C' podnožja upravnih iz tačaka

A, B, C redom na pravu s (Slika 6.23.). Četvorougli $A'B'BA$ i $B'C'CB$ su Sakerijevi odakle zaključujemo da je $\measuredangle B'BC = \measuredangle C'CB = \alpha$.

S druge strane imamo da je $\measuredangle B'BC + \measuredangle B'BA = 2R$. Iz jednakosti oštrih uglova Sakerijevih četvorougla $A'B'BA$ i $B'C'CB$ zaključujemo da je $\measuredangle B'BA = \alpha$, pa je $2\alpha = 2R$, odakle zaključujemo da je $\alpha = R$. Dobili smo da je za zbir unutrašnjih uglova četvorougla $\sigma(B'BC'C) = 4R$, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće. □



Slika 6.23.

Teorema 6.4.8. *Ako su e i e' dve ekvidistante koje imaju jednake visine, a nalaze se sa raznih strana njihove zajedničke bazisne prave s, tada prava s sadrži središte duži AB čiji su krajevi na ekvidistantama e i e'.*

Dokaz. Posmatrajmo dve ekvidistante e i e', sa visinama respektivno h i h', pri čemu je $h = h'$. Neka tačka A pripada ekvidistanti e a tačka B ekvidistanti e', i neka su A' i B' podnožja normala, redom iz tačaka A i B na pravu s. Uočimo tačku S duži AB za koju je $AS = SB$. Dovoljno je dokazati da tačka S pripada pravoj s.

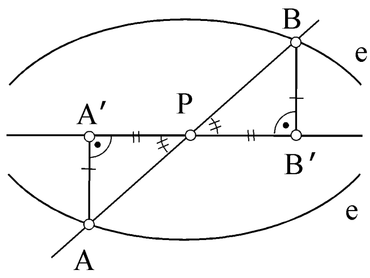
Razlikujemo sledeće slučajeve :

(i) Prava AB upravna na pravu s. Iz $h = h'$ sledi $AS = SB = h = h'$, odakle zaključujemo da je $S \in s$.

(ii) Prava AB nije upravna na pravu s (Slika 6.24.). Označimo sa P presečnu tačku bazisne prave s i duži AB. Posmatrajmo trouglove $\Delta APA'$ i $\Delta PBB'$. Kod njih je: $AA' = BB'$, $\measuredangle AA'P = \measuredangle BB'P = R$ i $\measuredangle A'PA = \measuredangle BPB'$.

Prema petom stavu o podudarnosti trouglova oni su podudarni, pa sledi jednakost ostalih elemenata, tj. $AP = PB$. Duž može imati samo jedno središte, pa je $P \equiv S$, tj. $S \in s$. □

Teorema 6.4.9. *Geometrijsko mesto vrhova svih trouglova koji imaju zajedničku osnovu i nalaze se sa iste strane prave određene tom zajedničkom osnovom i u kojima je zbir unutrašnjih uglova svuda isti, predstavlja ekvidistantu.*



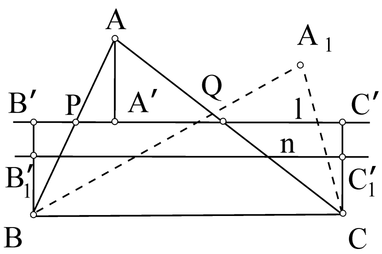
Slika 6.24.

Dokaz. Posmatrajmo u ravni Lobačevskog trougao ΔABC. Tada postoji tačka P sa svojstvom da $P \in AB$, $\mathcal{B}(A,P,B)$ i $AP = PB$. Slično, postoji tačka Q, tako da $Q \in AC$, $\mathcal{B}(A,Q,C)$ i $AQ = QC$ (Slika 6.25.).

Označimo sa l pravu određenu tačkama P i Q. Neka su B', C' i A' podnožja normala iz tačaka B, C i A na pravu l. Primetimo da su prave BB', CC' i AA' jedinstvene sa svojstvom da su normalne na pravu l.

Posmatrajmo trouglove $\Delta AA'P$ i $\Delta BB'P$. Za njih važi : $AP = BP$, $\measuredangle AA'P = \measuredangle BB'P = R$, $\measuredangle A'PA = \measuredangle B'PB$, pa je $\Delta AA'P \cong \Delta BB'P$, prema petom stavu o podudarnosti trouglova. Iz podudarnosti ovih trouglova, sledi jednakost ostalih elemenata, tj. $\measuredangle A'AP = \measuredangle B'BP$ kao i $AA' = BB'$.

Analogno, važi $\Delta AA'Q \cong \Delta CC'Q$, odkle $\measuredangle A'AQ = \measuredangle C'CQ$ kao i $AA' \cong CC'$. Kako je $BB' = AA'$, to imamo $AA' = BB' = CC'$.



Slika 6.25.

Kako je $\measuredangle BB'C' = \measuredangle CC'B' = R$ i $BB' = CC'$, to je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su jednaki, tj. $\measuredangle B'BC = \measuredangle C'CB$.

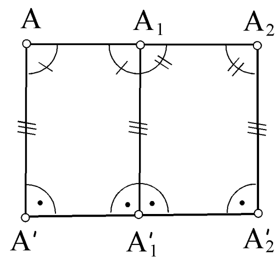
Sada je $\sigma(ABC) = \measuredangle B'BC + \measuredangle C'CB = 2\measuredangle C'CB$.

Uočimo, još jedan trougao iz skupa trouglova sa navedenom osobinom u uslovu teoreme. Neka je to trougao ΔA_1BC i označimo sa n pravu koja je određena sredinama stranica A_1B i A_1C pomenutog trougla. Za uočeni trougao prema dokazanom delu važi:

$$\sigma(A_1BC) = \measuredangle B_1'BC + \measuredangle C_1'CB = 2\measuredangle B_1'BC.$$

Kako je $\sigma(ABC) = \sigma(A_1BC)$ to je $\measuredangle CBB' = \measuredangle B_1'BC$, $\measuredangle BCC' = \measuredangle BCC_1'$. Sakerijevi četvorougli $BCC'B'$ i $BCC_1'B_1'$ imaju i jednu zajedničku stranicu BC, pa koristeći upravo dokazanu jednakost uglova, zaključujemo da su podudarni. Iz dokazane podudarnosti, sledi jednakost ostalih elemenata, tj. $BB' = CC' = BB_1' = CC_1'$, kao i $l \equiv n$.

Dakle $AA' = A_1A_1'$, $AA' \perp l$ i $A_1A_1' \perp n$. Za neki drugi trougao ΔA_2BC važiće: $AA' = A_1A_1' = A_2A_2'$ i $A_2A_2' \perp n$.



Slika 6.26.

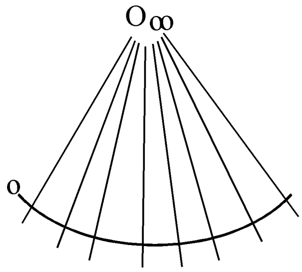
Dakle, četvorougli $AA'A_1'A_1$ i $AA'A_2'A_2$ su Sakerijevi pa su duži AA_1 i AA_2 sečice jednakog nagiba (Slika 6.26.), odakle sledi tvrđenje teoreme. □

6.5 Oricikl

Definicija 6.1. Trajektorija paraboličkog pramena pravih zove se *oricikl*. Svaki element pramena, u odnosu na koji je oricikl definisan naziva se *osa oricikla* (Slika 6.27.).

U nastavku dajemo definiciju oricikla u terminima sečice jednakog nagiba:

Definicija 6.2. *Neka je prava a iz paraboličkog pramena pravih $\mathcal{X}$ i neka je A proizvoljna tačka prave a. Tada geometrijsko mesto tačaka B, pri čemu je $B \in b$, $b \in \mathcal{X}$, i AB je sečica jednakog nagiba, naziva se oricikl.*



Slika 6.27.

Kako se svaka tačka trajektorije može uzeti za početnu tačku trajektorije to sledi da je svaki oricikl određen ma kojom svojom tačkom i osom kroz tu tačku. Međutim može se pokazati da važi opštija teorema:

Teorema 6.5.1. *Oricikl je u potpunosti određen svojom proizvoljnom tačkom i svojom proizvoljnom osom.*

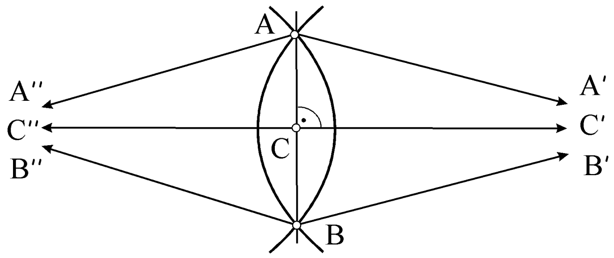
Dokaz. Neka ja A proizvoljna tačka oricikla o i neka je BB' njegova proizvoljna osa. Tada, postoji jedna i samo jedna orijentisana prava AA', koja prolazi kroz tačku A, i paralelna je pravoj BB' u istom smeru. Kako je svaki oricikl određen ma kojom svojom tačkom i osom kroz tu tačku, time je oricikl o jednoznačno određen pravom AA' i tačkom A. □

Kroz svaku tačku P ravni prolazi jedna i samo jedna osa oricikla. Ako se tačka P nalazi sa one strane oricikla, sa koje je smer paralelnosti njegovih osa, kažemo da je P *unutrašnja tačka oricikla.* Ako je, pak, P sa one strane oricikla, sa koje nije smer paralelnosti osa, tačka P je *spoljašnja tačka oricikla.*

Teorema 6.5.2. *Prava koja prolazi kroz unutrašnju tačku oricikla, a nije njegova osa, seče oricikl u dvema tačkama.*

Teorema 6.5.3. *Kroz ma koje dve tačke ravni prolaze dva oricikla koja su simetrična u odnosu na pravu određenu tim dvema tačkama.*

Dokaz. Neka su A i B dve proizvoljne tačke ravni Lobačevskog. Neka je prava CC' normala duži AB u njenom središtu C (Slika 6.28.). Ako prave AA' i BB' prolaze, redom, kroz tačke A i B, tako da je $AA' \parallel BB'$ i $BB' \parallel CC'$, onda je $\measuredangle A'AC \cong \Pi(AC)$ i $\measuredangle B'BC \cong \Pi(BC)$. Obzirom da je tačka C središte duži AB to je $AC \cong BC$, a kako jednakim dužima



Slika 6.28.

odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti to je $\measuredangle A'AC \cong \measuredangle B'BC$. Tačka B pripada oriciklu, koji je određen tačkom A i pramenom paralelnih pravih AA', BB' i CC'.

Primetimo da normalu na duž AB u njenom središtu C možemo orijentisati i u suprotnom smeru CC''. Na taj način dobijamo novi pramen paralelnih pravih. Taj pramen pravih i tačka A određuju još jedan oricikl. Na isti način kao i u prethodnom slučaju se pokazuje da tačka B pripada i tom oriciklu. □

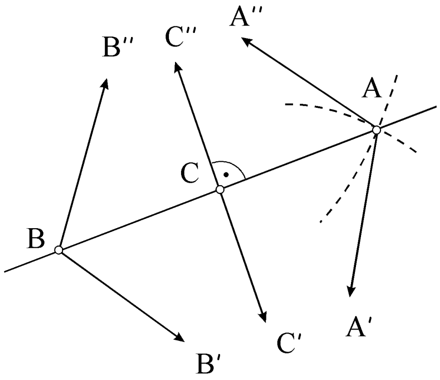
Teorema 6.5.4. *Dva oricikla, koja imaju jednu zajedničku tačku, a ne dodiruju se, imaju još jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Neka su data dva oricikla o i o' koji imaju zajedničku tačku A. Označimo sa AA' i AA'' ose pomenutih oricikala u tački A (Slika 6.29.). Po pretpostavci oricikli o i o' se ne dodiruju, pa su zato ose AA' i AA'' različite, tj. obrazuju neki ugao $\measuredangle A'AA''$. Neka je AC simetrala toga ugla, a duž AC duž paralelnosti za ugao $\measuredangle A'AC$. Neka je $n = C'C''$ normala konstruisana u tački C na pravu AC. Prema konstrukciji ona predstavlja graničnu pravu ugla $\measuredangle A'AA''$, i shodno tome $AA' \parallel CC'$ i $AA'' \parallel CC''$.

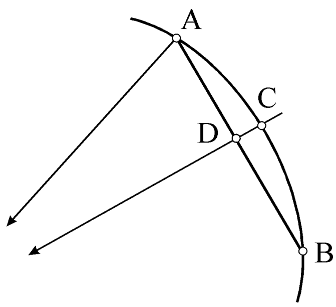
Obeležimo sa B tačku prave AC, tako da je $AC \cong CB$, a sa BB' i BB'' orijentisane prave, tako da je $BB' \parallel CC'$ i $BB'' \parallel CC''$. Tada je $\measuredangle A'AB \cong \measuredangle ABB''$ odakle sledi da tačka B pripada svakom od uočena dva oricikla. □

Definicija 6.3. Uočimo tetivu AC oricikla. Odstojanje AD tačke A od one ose oricikla, koja prolazi kroz drugu krajnju tačku C uočene tetive, zove se *visina luka AC oricikla* (Slika 6.30.).

Teorema 6.5.5. *Luk oricikla određen je u potpunosti tetivom ili visinom.*



Slika 6.29.



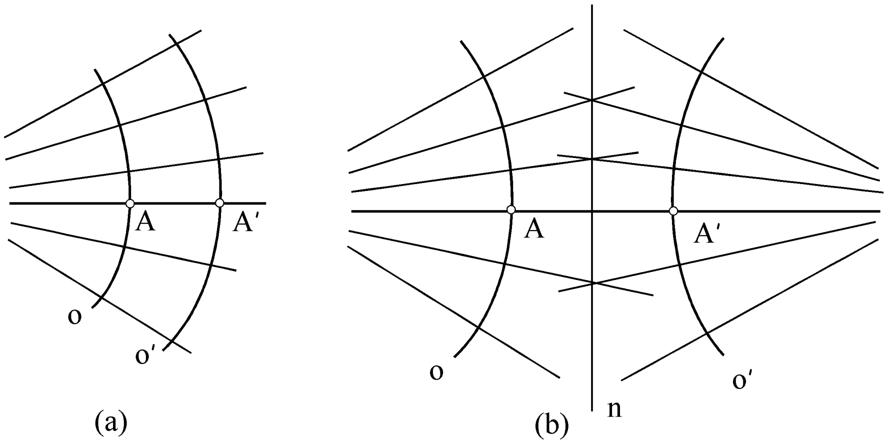
Slika 6.30.

Dokaz. Pokazali smo da kroz ma koje dve tačke ravni prolaze dva oricikla koja su simetrična u odnosu na pravu određenu tim dvema tačkama. Odavde direktno sledi da je luk oricikla određen tetivom. Iz istog razloga, zaključujemo da je luk oricikla određen visinom, pošto udvostručena visina određuje tetivu dvostrukog luka, a shodno tome i sam luk. □

Teorema 6.5.6. *Svaka dva oricikla u ravni L^2 su među sobom podudarna.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ parabolički pramenovi pravih u odnosu na koje su definisani oricikli o i o' i neka je s zajednička prava tih pramenova. Označimo sa A i A' zajedničke tačke prave s redom sa oriciklima o i o'.

Ukoliko se pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ poklapaju (Slika 6.31. (a)), prava s je proizvoljna prava tog pramena. Translacija $\tau_{\overrightarrow{AA'}}$ preslikava pramen $\mathcal{X}$ na



Slika 6.31.

sebe, tačku A oricikla o u tačku A' oricikla o', pa je

$$\tau_{\overrightarrow{AA'}}(o) = o'.$$

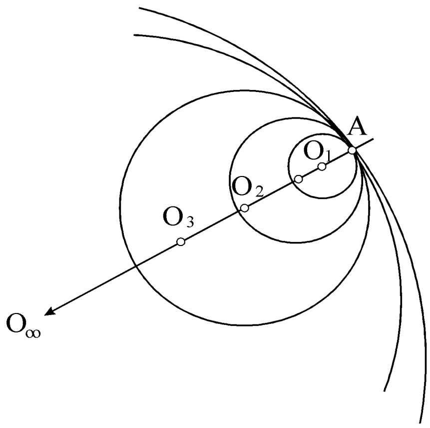
Ukoliko su pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ različiti (Slika 6.31. (b)), onda je prema teoremi 6.1.4. prava s jedinstvena, pa se osnom refleksijom u odnosu na proizvoljnu pravu koja je upravna na pravu s pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ preslikavaju jedan na drugi. Ako se tačke A i A' ne poklapaju, označimo sa n medijatrisu duži AA', a ako se poklapaju sa n ćemo označiti pravu koja sadrži tačku $A \equiv A'$ i upravna je na pravu s. Osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ se preslikavaju jedan na drugi, a tačka A u tačku A', što znači $\mathcal{S}_n(o) = o'$.

Kako se u oba slučaja oricikl o izometrijom preslikava na oricikl o', sledi da su orickli o i o' podudarni. □

Istaknimo još jednom, da se oricikl, može posmatrati kao granični slučaj kruga. Centar tog kruga bila bi infinitna tačka O_∞ u ravni L^2 u kojoj se seku prave nekog pramena. O tome detaljnije govori sledeća teorema:

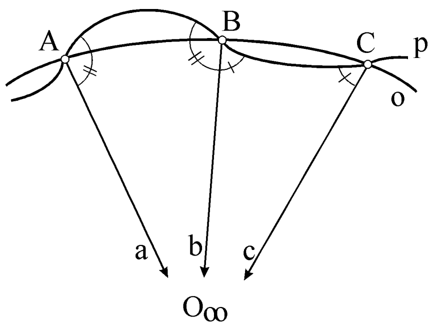
Teorema 6.5.7. *Granični položaj kruga, koji prolazi kroz unapred zadatu tačku A i ima u toj tački određenu tangentu, a čije se središte neograničeno udaljava po pravoj upravnoj na tangentu u zadatoj tački, predstavlja oricikl.*

Dokaz. Posmatrajmo skup krugova koji su međusobno tangentni u tački A, a čija su središta O_1, O_2, O_3, … (Slika 6.32.). Svaki od tih krugova je ortogonalna trajektorija eliptičnog pramena pravih. Središta tih pramenova su, redom, tačke O_1, O_2, O_3, ... U graničnom slučaju kada AO neograničeno raste, eliptički pramen pravih postaje parabolički, a odgovarajući krug, koji je granični svih posmatranih krugova, je ortogonalna trajektorija paraboličkog pramena pravih, tj. oricikl. □



Slika 6.32.

Teorema 6.5.8. *Nikoje tri razne tačke oricikla ne pripadaju jednoj pravoj.*



Slika 6.33.

Dokaz. Ako bi neke tri razne tačke oricikla A, B, C pripadale nekoj pravoj p (Slika 6.33.) tada bi prava AB predstavljala sečicu jednakih nagiba pravih a i b, te bi bočni uglovi kod temena A i B sa svih strana gde su sečice a i

b bili oštri. Isto bi i kod temena B i C uglovi sa one strane sečice gde su b i c bili oštri te bi naporedni uglovi $\measuredangle ABO_\infty$ i $\measuredangle CBO_\infty$ bili oštri što je nemoguće. $\square$

6.6 Teorema o simetralama stranica trougla u $\mathbf{L^2}$

Teorema 6.6.1. *Temena trougla ΔABC pripadaju:*
(i) *krugu, ako simetrale stranica tog trougla pripadaju eliptičkom pramenu pravih;*
(ii) *ekvidistanti, ako simetrale stranica tog trougla pripadaju hiperboličkom pramenu pravih;*
(iii) *oriciklu, ako simetrale stranica tog trougla pripadaju paraboličkom pramenu pravih.*

Dokaz. Simetrale stranica trougla mogu pripadati (Teorema 6.1.3..) svakom od razmatranih pramenova pravih u ovom poglavlju: eliptičkom, hiperboličkom ili paraboličkom.

(i) Ukoliko se simetrale stranica trougla seku, onda se oko datog trougla može opisati krug čije je središte presek simetrala stranica.

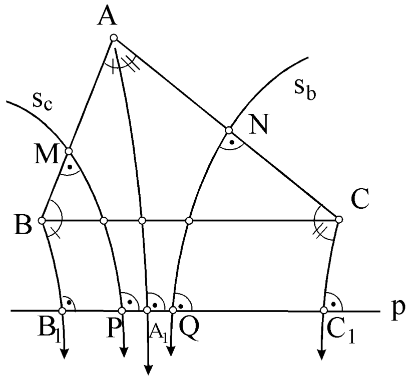
(ii) Neka sada simetrale stranica trougla s_a, s_b i s_c pripadaju hiperboličkom pramenu pravih. Dakle, postoji prava p (bazisna prava posmatranog pramena) koja je zajednička normala pravih s_b i s_c. Takođe, postoje prave AA_1, BB_1, CC_1 sa osobinom da su normalne na pravu p redom u tačkama A_1, B_1 i C_1. Zaključujemo da prave AA_1, BB_1, CC_1, s_b, s_c pripadaju istom hiperboličkom pramenu pravih, jer imaju zajedničku normalu, pravu p.

Označimo sa M i N sredšta stranica AB i AC trougla ΔABC i uočimo Lambertove četvorougle B_1PMB i A_1PMA (Slika 6.34.). Ova dva četvorougla imaju po jednu zajedničku stranicu PM, a prema konstrukciji je $MB = MA$. Na osnovu jednog od stavova o podudarnosti Lambertovih četvorougla zaključujemo da je $B_1PMB \cong A_1PMA$. Iz navedene podudarnosti, sledi jednakost ostalih elemenata, pa je $\measuredangle B_1BM = \measuredangle A_1AM$.

Analogno se dokazuje da je $QC_1CN \cong QA_1AN$, tj. $\measuredangle NAA_1 = \measuredangle NCC_1$.

Dakle, AB i AC su sečice jednakog nagiba, pa temena trougla $\triangle ABC$ pripadaju jednoj ekvidistanti.

(iii) Na kraju, neka su simetrale stranica trougla međusobno paralelne, tj. pripadaju paraboličkom pramenu pravih. Tada prave koje prolaze kroz temena trougla, a paralelne su simetralama u istom smeru, pripadaju istom paraboličkom pramenu pravih. Na osnovu Teoreme 6.1.3., zaključujemo da

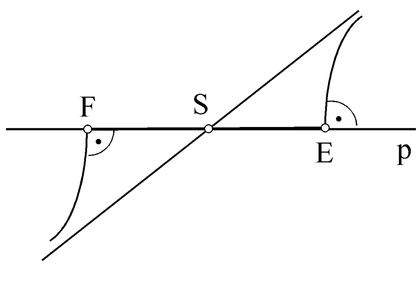


Slika 6.34.

su temena trougla odgovarajuće tačke na pravama tog pramena, što znači da sva tri temena pripadaju istom oriciklu. □

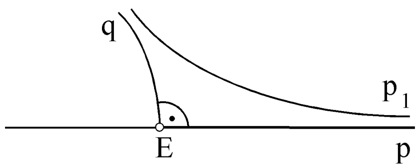
6.7 Prave i ravni u prostoru L^3

Definicija 6.1. Za pravu p kažemo da je *paralelna* ili *hiperparalelna* ravni π prostora L^3 u zavisnosti od toga da li je prava p paralelna ili hiperparalelna pravoj koja sadrži njenu upravnu (ortogonalnu) projekciju.



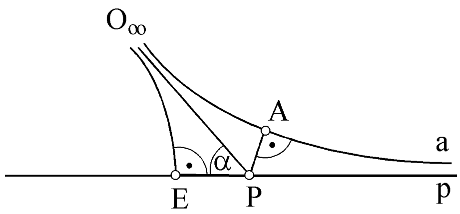
Slika 6.35.

Upravna projekcija prave na pravu pomenuta je još u stavu koji opisuje normalu na jedan krak oštrog ugla koja je paralelna sa drugim krakom. Ako je prava upravna na drugoj pravoj njena upravna projekcija na tu drugu pravu je tačka. Ako prava seče drugu pravu pod oštrim uglom, njena upravna projekcija na tu drugu pravu je otvorena duž.



Slika 6.36.

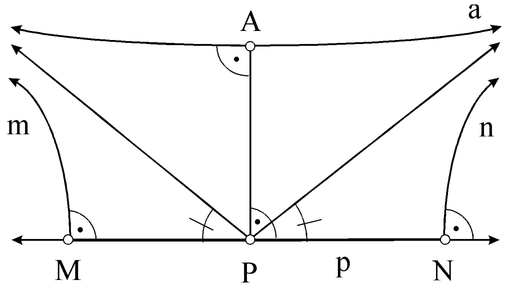
Ako su te prave paralelne i različite (Slika 6.36.) tada je upravna projekcija jedne od njih na onu drugu poluprava. Naime, možemo pokazati da ako je $p \parallel p_1$ tada postoji jedinstvena prava q takva da je upravna na pravoj p i $q \parallel p_1$. Zaista, ako je $A \in a$, konstruišimo upravnu pravu (Slika 6.37.) iz tačke A na pravu a. Ta normala seče pravu p u nekoj tački P. Tačku A možemo izabrati tako da je $\Pi(AP) > R/2$. U tački P konstruišimo još jednu pravu paralelnu sa pravom a u drugom smeru. Tada je ugao α kod tačke P oštar ugao te postoji jedinstvena prava upravna na pravoj p i paralelna sa drugim krakom ugla te je upravna projekcija prave a na pravu p otvorena poluprava EP.



Slika 6.37.

Ako su prave a i p hiperparalelne projekcija (Slika 6.38.) prave a na pravu p je otvorena duž. Zaista, neka je AP zajednička normala hiperparalelnih pravih a i p. Iz tačke P možemo konstruisati dve prave paralelne pravoj a. One zahvataju sa pravom p oštre uglove koji su među sobom jednaki. Dakle, postoje prave m i n upravne na pravoj p u tačkama M i N i paralelne prethodno navedenim dvema pravama koje su u tački P paralelne pravoj a. Otvorena duž MN je upravna projekcija prave a na pravu p. Na sličan način moguće je diskutovati upravnu projekciju prave na ravan.

Teorema 6.7.1. *Ako su a i b dve razne međusobno paralelne prave neke ravni π prostora L^3 i C tačka van ravni π, tada se ravni $\alpha(a, C)$ i $\beta(b, C)$ seku po izvesnoj pravoj c koja sadrži tačku C i paralelna je sa pravama a i*

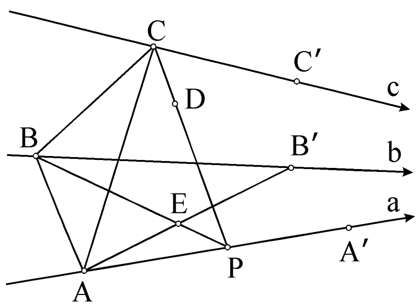


Slika 6.38.

b u istom smeru.

Dokaz. Ravni α i β sadrže tačku C koja se nalazi van ravni π, te su ravni α i β različite od ravni π. Ravni α i β seku ravan π po dvema različitim pravama a i b te su i među sobom razne. Ravni α i β imaju zajedničku tačku C pa samim tim (Slika 6.39.) i zajedničku pravu, označimo je sa c. Dokazaćemo da je prava c paralelna pravama a i b u istom smeru u kome su paralelne prave a i b.

Ustanovimo najpre da prava c nema zajedničkih tačaka sa pravama a i b. Neka prava c seče neku od pravih a i b, recimo pravu a u tački S. Onda tačka S pripada obema ravnima α i β, a kako se nalazi i na pravoj a, to ona pripada i ravni π. Dakle, tačka S pripada ravnima π i β pa i njihovoj presečnoj pravoj b. Prave a i b su dve različite paralelne prave sa zajedničkom tačkom S, a to je nemoguće. Dakle, prava c ne seče ni jednu od pravih a i b.



Slika 6.39.

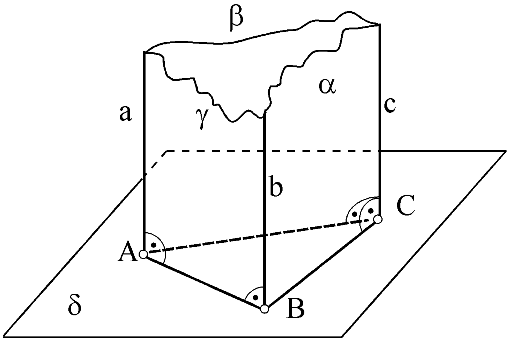
Dokažimo sada da je $c \parallel a$ i $c \parallel b$. Označimo sa A i B proizvoljne tačke redom pravih a i b, sa A' i B' tačke pravih a i b takve da je $AA' \parallel BB'$. Neka je tačka C' sa one strane ravni trougla ABC sa koje su i tačke A' i B'. Da bi smo dokazali da je $CC' \parallel AA'$ dovoljno je da dokažemo da svaka prava koja sadrži tačku C i neku tačku D unutar ugla $\measuredangle ACC'$, seče pravu AA'. Neka je δ ravan određena nekolinearnim tačkama B, C i D. Ta ravan sadrži tačku C izvan ravni π te je $\delta \neq \pi$. Ravni δ i π imaju zajedničku tačku B te se seku po nekoj pravoj BE'. Pri tome su tačke A i B' sa raznih strana ravni δ pa prema tome i sa raznih strana prave BE' po kojoj se seku ravni δ i π, te duž AB' seče pravu BE' u nekoj tački E. Kako je $BB' \parallel AA'$ prava BE' koja sadrži tačku E i koja se nalazi unutar ugla $\measuredangle ABB'$ seče pravu AA' u nekoj tački P. S obzirom da je tačka P na pravoj BE' po kojoj se seku ravni δ i π tačka P pripada ravnima δ i π. S druge strane tačka P pripada i pravoj AA' po kojoj se seku ravni α i π te tačka P pripada svakoj od navedenih ravni α i δ, tj. njihovoj presečnoj pravoj CD. Dakle $P \in CD$. Kako prava CC' ne seče pravu AA', a prava koja sadrži tačku C i neku tačku D koja se nalazi unutar ugla $\measuredangle ACC'$ seče pravu AA' to je $CC' \parallel AA'$. Istim postupkom dokazuje se da je $CC' \parallel BB'$. $\square$

Teorema 6.7.2. *Neka su a, b i c tri prave prostora L^3 koje nisu sadržane u istoj ravni, tako da su svake dve komplanarne. Ako se prave a i b seku u tački S tada i prava c sadži tačku S.*

Dokaz. Neka je ravan α određena pravama a i b, ravan β pravama a i c a ravan γ pravama a i b. Tada važi: $S \in a \subset \beta$ i $S \in b \subset \alpha$ tj. $S \in \alpha \cap \beta = c$. $\square$

Teorema 6.7.3. *Neka su a, b i c tri prave prostora L^3 koje nisu sadržane u istoj ravni, tako da su svake dve komplanarne. Ako se prave prave a i b hiperparalelne, tada je i prava c hiperparalelna i sa pravom a i sa pravom b i sve tri su ortogonalne na istu ravan.*

Dokaz. Označimo sa α (Slika 6.40.) ravan određenu pravama b i c, sa β - pravama a i c i sa γ - pravama a i b. Kako su prave a i b hiperparalelne, to u ravni γ postoji njhova zajednička normala AB, pri čemu $A \in a$ i $B \in b$. Neka je δ ravan koja sadrži pravu AB i ortogonalna je na ravan γ. Tada su prave a i b ortogonalne na ravan δ. Ravan β sadrži pravu a koja je ortogonalna na ravan δ, odakle sledi da je β ortogonalna na δ. Analogno, ravan α je ortogonalna na δ jer sadrži pravu b koja je ortogonalna na δ. Tada je i presečna prava c ravni α i β ortogonalna na δ. Označimo sa C prodornu tačku prave c kroz ravan δ. Tada je AC zajednička normala pravih a i c, a

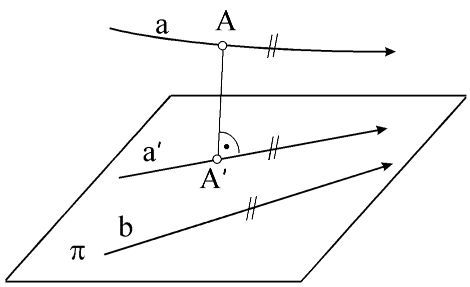


Slika 6.40.

BC zajednička normala pravih b i c. Dakle, prave a i c su hiperparalelne, a takođe i prave b i c. □

Teorema 6.7.4. *Ako su u prostoru L^3 dve komplanarne prave a i b paralelne u istom smeru trećoj pravoj c, tada su one paralelne među sobom u istom smeru.*

Dokaz. Slučaj kada su prave a, b i c komplanarne razmatran je u Teoremi 4.2.2. Ako prava c seče pravu a u tački S onda i prava b prolazi kroz tačku S prema Teoremi 6.7.2. što znači da se prave a i b seku a to nije moguće. Ako bi prava a bila hiperparalelna sa pravom b, onda bi prema Teoremi 6.7.3. prave a i c bile hiperparalelne, što je suprotno pretpostavci da su prave a i b paralelne. Zbog komplanarnosti pravih a i b sledi da moraju biti paralelne. □



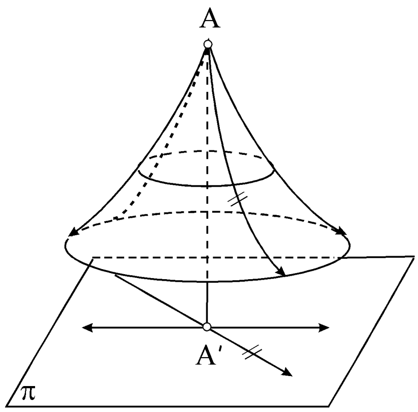
Slika 6.41.

Teorema 6.7.5. *Ako je a prava van ravni π i ako u ravni π postoji prava b paralelna pravoj a, tada je prava a paralelna ravni π.*

Dokaz. Iz paralelnosti pravih a i b sledi da su one komplanarne prave. Označimo sa a' pravu kojoj pripada ortogonalna projekcija prave a na ravan π (Slika 6.41.). Dakle, svake dve od tri prave a, a' i b su komplanarne. Iz paralelnosti pravih a i b sledi prema Teoremi 6.7.4. paralelnost pravih a i a', što prema definiciji znači da je prava a paralelna ravni π. □

Iz Teoreme 6.7.5. sledi

Teorema 6.7.6. *Neka je prava a paralelna ravni π. Tada je svaka prava b koja je paralelna pravoj a paralelna i sa ravni π.*

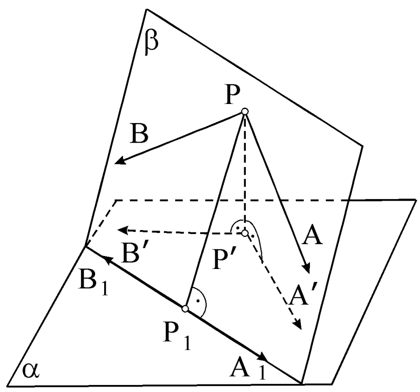


Slika 6.42.

Posmatrajmo sve prave koje sadrže neku tačku A van ravni α i paralelne su sa ravni α. Označimo sa A' normalnu projekciju tačke A na ravan α. U Euklidskoj geometriji sve te prave su normalne na pravu AA'. U hiperboličkoj geometriji sve te prave obrazuju sa AA' uglove (Slika 6.42.) koji su podudarni uglu $\Pi(AA')$, pa sve te prave obrazuju konus. Taj konus nazivamo *konusom paralelnosti za ravan α u tački A*. Ukoliko prava a koja prolazi kroz tačku A sa pravom AA' obrazuje ugao manji od $\Pi(AA')$, onda za nju kažemo da pripada unutrašnjosti konusa paralelnosti. Ta prava seče svoju ortogonalnu projekciju na ravan α pa samim tim seče i ravan α.

Ako pak prava a sa pravom AA' obrazuje ugao koji je veći od ugla $\Pi(AA')$, ona je sadržana u spoljašnjosti konusa paralelnosti. Ta prava je hiperparalelna sa svojom ortogonalnom projekcijom na ravan α pa je hiperparalelna i sa ravni α. Ravan β kroz vrh A konusa paralelnosti ravni α ili seče konus paralelnosti po dvema pravama ili ga dodiruje po jednoj pravoj ili sa njim osim tačke A nema drugih zajedničkih tačaka. U prvom slučaju ravan β sadrži dve prave koje su paralelne sa ravni α, u drugom jednu a u trećem slučaju nijednu.

Teorema 6.7.7. *Ako u jednoj tački ravni β postoje dve prave koje su paralelne drugoj ravni α, onda u svakoj tački ravni β postoje dve prave koje su paralelne ravni α. Ravni α i β se seku a presečna prava je paralelna svakoj od pomenutih dveju pravih.*



Slika 6.43.

Dokaz. Neka su PA i PB dve prave ravni β paralelne sa ravni α. Označimo sa $P'A'$ i $P'B'$ normalne projekcije pravih PA i PB na ravan α tada je $PA \parallel P'A'$ i $PB \parallel P'B'$. Svaka prava ravni β koja sadrži tačku P i ima tačaka u unutrašnjosti ugla $\measuredangle APB$, sadržana je u unutrašnjosti konusa paralelnosti za ravan α u tački P, pa prema tome seče ravan α. Dakle, ravni α i β imaju zajedničkih tačaka pa samim tim i zajedničku pravu. Označimo je A_1B_1. Tada je $PA \parallel B_1A_1$ i $PB \parallel A_1B_1$. Svaku tačku ravni α sadrži jedna prava koja je paralelna sa B_1A_1 i jedna prava koja je paralelna sa A_1B_1. Isto važi i za proizvoljnu tačku ravni β. $\square$

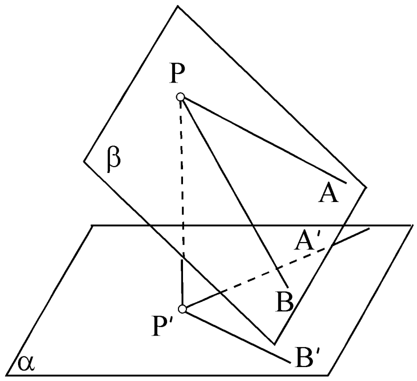
Analogno se dokazuje i sledeća teorema

Teorema 6.7.8. *Ako u jednoj tački ravni β postoji jedna prava koja je paralelna sa ravni α, onda u svakoj tački ravni β postoji jedna prava koja je paralelna sa ravni α.*

Ravni α i β iz prethodne teoreme nemaju zajedničkih tačaka jer bi u suprotnom u svakoj tački ravni α i β postojale dve prave paralelne sa presečnom pravom.

Definicija 6.2. Ako u nekoj tački A ravni α postoji jedinstvena prava koja je paralelna sa ravni β, onda kažemo da je ravan α *paralelna* ravni β.

Teorema 6.7.9. *Neka je prava PA paralelna ravni α. Tada postoji jedna i samo jedna ravan β koja sadrži pravu PA i paralelna je ravni α.*



Slika 6.44.

Dokaz. Označimo sa P' (Slika 6.44.) ortogonalnu projekciju tačke P na ravan α. Neka je π poluravan sa ivicom PP' koja sadrži tačku A. Označimo sa β ravan koja sadrži pravu PA i ortogonalna je na π. Dokazaćemo da je $\beta \parallel \alpha$. Dovoljno je da dokažemo da je u ravni β kroz tačku P prava PA jedina prava paralelna ravni α. Neka je PB još jedna prava ravni β takva da je $PB \parallel \alpha$.

Označimo sa π_1 poluravan sa ivicom PP' koja sadrži tačku B a sa δ simetralnu ravan dijedra koji obrazuju poluravni π i π_1. Pri tome je $\measuredangle APP' \cong \Pi(PP')$ i $\measuredangle BPP' \cong \Pi(PP')$ odakle je $\measuredangle APP' \cong \measuredangle BPP'$. To znači da je pri ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\delta$ u odnosu na ravan δ zadovoljeno $\mathcal{S}_\delta(PA) = PB$ i $\mathcal{S}_\delta(PB) = PA$, tj. refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ravan određenu tačkama P, A i B prevodi u samu sebe. Dakle, $\mathcal{S}_\delta(\beta) = \beta$. Znači dijedar koji obrazuju π i β se preslikava na dijedar koji obrazuju π_1 i β. Kako je $\pi \perp \beta$ to je i $\pi_1 \perp \beta$. Dakle ravni π i π_1 su ortogonalne na ravan β pa je i njihova presečna prava PP' ortogonalna na ravan β. To znači da je $\measuredangle APP' \cong \Pi(PP')$ prav a to je u suprotnosti sa aksiomom Lobačevskog. Prema tome, prava PA je jedina prava u ravni β koja sadrži tačku P i paralelna je sa ravni α.

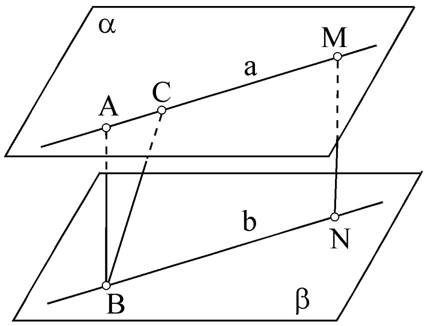
Treba još pokazati da proizvoljna ravan γ koja sadrži PA i nije ortogonalna na π, seče konus paralelnosti po još jednoj izvodnici. Neka je ξ ravan koja je ortogonalna na pravu PP' i seče PP' u tački koja je između tačaka P i P'. Ona seče pravu PA u tački A_1, a konus paralelnosti po krugu k. Ako je $\xi \cap \beta = b$, b je tangenta kruga k u tački A_1. Prava $\xi \cap \gamma$ sadrži tačku A_1 ali nije tangenta kruga k. Prema tome, ona seče k u još jednoj tački. Ta tačka sa tačkom P određuje drugu izvodnicu konusa paralelnosti koja je sadržana u ravni γ. $\square$

Na osnovu dosad rečenog neposredno slede sledeća tvrđenja:

Teorema 6.7.10. *Ako u jednoj tački ravni α ne postoji ni jedna prava koja je paralelna sa ravni β, tada ni u jednoj tački ravni α ne postoji prava koja je paralelna sa ravni β.*

Definicija 6.3. Ako u ravni α postoji tačka A takva da nijedna prava ravni α kroz tačku A nije paralelna sa ravni β tada kažemo da je ravan α *hiperparalelna* sa ravni β.

Teorema 6.7.11. *Dve hiperparalelne ravni u L^3 imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*



Slika 6.45.

Dokaz. Neka su ravni α i β (Slika 6.45.) hiperparalelne. Obeležimo sa A bilo koju tačku ravni α, sa B podnožje upravne iz tačke A na ravan β a sa C podnožje upravne iz tačke B na ravan α. Ako je pri tome $C \equiv A$, AB je zajednička normala tih hiperparalelnih ravni. Neka je $C \neq A$. U tom slučaju su A, B, C tri nekolinearne tačke te određuju neku ravan π. Ravan π sadrži tačku B koja se nalazi van ravni α te je $\pi \neq \alpha$. Tačke A i C pripadaju i ravni π i ravni α te je prava AC presečna prava ravni π i α. Tačka A pripada ravni π i ne pripada ravni β te je $\pi \neq \beta$. Tačka B pripada ravnima π i β te se one seku po nekoj pravoj b koja sadrži tačku B.

Označimo sa a pravu AC i dokažimo da su prave a i b hiperparalelne. Zaista, prave a i b ne mogu imati zajedničkih tačaka jer bi njihova zajednička tačka bila zajednička tačka ravni α i β što je nemoguće. Takođe prave a i b nisu paralelne što sledi iz hiperparalelnosti ravni α i β pa prema tome prave a i b moraju biti hiperparalelne. Prema tome postoji jedinstvena zajednička normala MN pravih a i b. Ravan π sadrži pravu BC koja je upravna na α te je $\pi \perp \alpha$. Kako MN pripada ravni π i $MN \perp a$ biće $MN \perp \alpha$. Istim postupkom dokazujemo da je $MN \perp \beta$, te je MN zajednička normala hiperparalelnih ravni α i β.

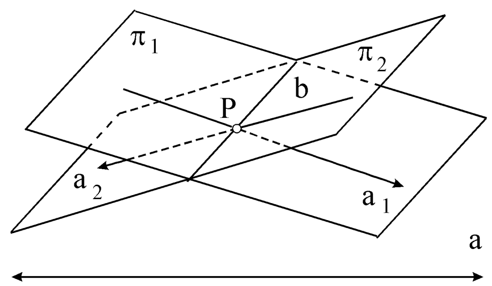
Jedinstvenost zajedničke normale dokazujemo indirektnim postupkom. Neka ravni α i β imaju dve zajedničke normale MN i M_1N_1. U tom slučaju prave MN i M_1N_1 su komplanarne te određuju ravan četvorougao sa sva četiri unutrašnja prava ugla, što je nemoguće. Prema tome, postoji jedinstvena zajednička normala dveju hiperparalelnih ravni. □

Teorema 6.7.12. *Duž koja spaja podnožja zajedničke normale dveju hiperparalelnih ravni je najkraća od svih duži koje spajaju bilo koje dve tačke tih dveju ravni.*

Definicija 6.4. *Mimoilaznim pravama* prostora L^3 nazivamo prave za koje ne postoji ravan koja ih sadrži.

Osobine mimoilaznih pravih prostora L^3 su iste kao osobine mimoilaznih pravih Euklidskog prostora E^3 ali su dokazi drugačiji.

Teorema 6.7.13. *Ako su a i b dve mimoilazne prave u L^3, tada postoje dve i samo dve ravni π_1 i π_2 takve da svaka od ravni π_1 i π_2 sadrži pravu b i paralelna je sa pravom a.*



Slika 6.46.

Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka prave b. Kako su a i b mimoilazne prave to $P \notin a$. Znači, u ravni π određenoj pravom a i tačkom P (Slika 6.46.) postoje dve prave a_1 i a_2 koje sadrže tačku P i paralelne su sa pravom a u raznim smerovima. Pri tome su prave a_1 i a_2 različite od prave b. Prave a_1 i b se seku i određuju neku ravan π_1. Na isti način prave a_2 i b određuju ravan π_2. Prava a je paralelna sa pravom a_1 koja je u ravni π_1, pa je prema tome $a \parallel \pi_1$. Na isti način je $a \parallel \pi_2$ te postoje dve ravni π_1 i π_2 koje sadrže pravu b i paralelne su sa pravom a u raznim smerovima. Jedinstvenost tih ravni dokazuje se indirektnim postupkom. □

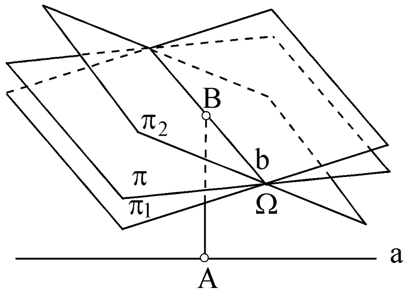
Teorema 6.7.14. *U prostoru L^3 postoji jedinstvena prava n upravna na dvema mimoilaznim pravama a i b tog prostora.*

Dokaz. Neka su prema prethodnoj teoremi π_1 i π_2 ravni u prostoru L^3 takve da je $\pi_1 \parallel a$, $\pi_2 \parallel a$ i $b = \pi_1 \cap \pi_2$. Ravni π_1 i π_2 se seku po pravoj b (Slika 6.47.) pa određuju dva para unakrsnih dijedara. Kako je $a \parallel \pi_1$, $a \parallel \pi_2$ i $a \neq b$ prava a se nalazi u jednom od pomenutih dijedara. Označimo ga sa Ω. Neka je π simetralna ravan onog para unakrsnih dijedara određenih ravnima π_1 i π_2 u kojima se ne nalazi prava a. Neka su zatim α i β ravni koje respektivno sadrže prave a i b i upravne su na ravan π. Pri tome je i ravan β medijalna ravan dijedra Ω u kome se nalazi prava a koja je paralelna sa njegovim pljosnima. Dakle, ravan β seče pravu a u nekoj tački A. Ravni α i β su razne i imaju zajedničku tačku A te se seku po nekoj pravoj n. Prava n seče pravu b u nekoj tački B. Budući da prava b pripada ravni π koja je u tački B upravna na pravoj n biće $n \perp b$. S obzirom da ravan α sadrži pravu n koja se nalazi u medijalnoj ravni dijedra Ω i koja je upravna na ivici b tog dijedra, ravan α seče pljosni tog dijedra po izvesnom uglu kome je prava n simetrala. Pri tome je prava a paralelna sa kracima tog ugla pa je prava n upravna na pravu a. Na taj način prava n je upravna na svaku od dveju mimoilaznih pravih a i b. Jedinstvenost se dokazuje indirektnim postupkom. □

Teorema 6.7.15. *Od svih duži koje spajaju tačke dveju mimoilaznih pravih prostora L^3 najmanja je ona duž koja spaja podnožja zajedničke normale tih mimoilaznih pravih.*

6.8 Klasifikacija izometrijskih transformacija ravni $\mathbf{L^2}$

Još u apsolutnoj geometriji je izvršena kompletna klasifikacija indirektnih izometrijskih transformacija. Kako u apsolutnoj geometriji nije određen



Slika 6.47.

odnos disjunktnih pravih u ravni, to nije ni bilo moguće izvršiti klasifikaciju direktnih izometrijskih transformacija. Kao i u Euklidskoj geometriji, i ovde je moguće izvršiti klasifikaciju direktnih izometrijskih transformacija.

Teorema 6.8.1. *Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^2 \to L^2$ predstavlja cikličnu rotaciju, oricikličnu rotaciju, hipercikličnu rotaciju ili koincidenciju.*

Dokaz. S obzirom da je izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ direktna, ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q$. U zavisnosti od međusobnog položaja pravih p i q mogu nastupiti sledeća četiri slučaja:

(i) Prave p i q seku se u tački O pri čemu je O finitna tačka. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{O,\omega}$, tj. $\mathcal{I}$ je rotacija oko tačke O pri čemu je ω orjentisani dvostruki ugao između pravih p i q.

(ii) Prave p i q su paralelne pri čemu je $p \neq q$. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{H}_{p,q}$ oriciklična rotacija koju definišemo kao kompoziciju dveju osnih refleksija sa osama paralelnim među sobom.

(iii) Prave p i q su hiperparalelne. Tada je $\mathcal{I} = \tau_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija, odnosno hiperciklična rotacija pri čemu je vektor $\overrightarrow{PQ}$ određen zajedničkom normalom hiperparalelnih pravih p i q i predstavlja dvostruki vektor određen rastojanjem po zajedničkoj normali.

(iv) Prave p i q se poklapaju. Tada je $\mathcal{I} = \varepsilon$ koincidencija. □

Klasifikacija indirektnih izometrijskih transformacija prostora L^2 izvršena je u apsolutnoj geometriji, tj. važi

Teorema 6.8.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^2 \to L^2$ predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju.*

Glava 7

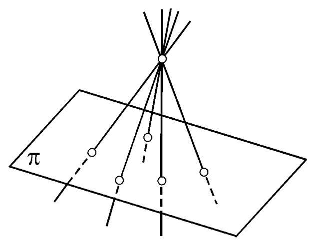
Karakteristične površi prostora $\mathbf{L}^3$

7.1 Snop pravih prostora $\mathbf{L}^3$

Analognim razmatranjem kao u slučaju pramena pravih ravni L^2 dolazimo do pojma snopa pravih prostora L^3, tj. važi sledeća definicija:

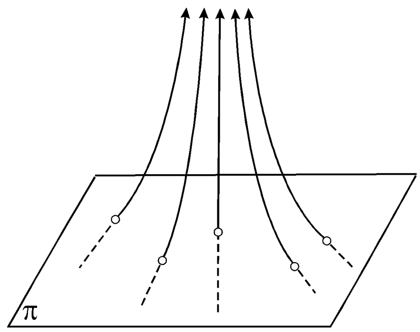
Definicija 7.1. Pod snopom pravih prostora L^3 podrazumevamo skup svih pravih $\mathcal{X}$ prostora L^3, koji ima osobine:
(i) kroz svaku tačku prostora prolazi jedna i samo jedna prava snopa $\mathcal{X}$,
(ii) ma koje dve prave snopa $\mathcal{X}$ su komplanarne.

U Hiperboličkoj geometriji dve disjunktne prave jedne ravni mogu da budu paralelne ili hiperparalelne, pa u Hiperboličkoj geometriji razlikujemo tri vrste snopova pravih:



Slika 7.1.

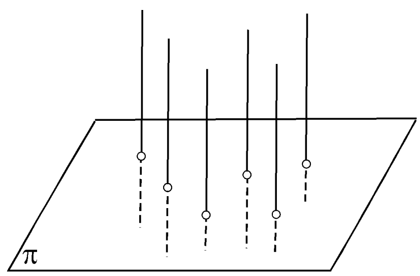
(i) Skup svih pravih prostora koje sadrže jednu konačnu tačku zove se *konvergentni* ili *eliptički snop.* Tu zajedničku tačku svih pravih snopa zovemo *vrh* ili *centar* snopa (Slika 7.1.).



Slika 7.2.

(ii) Skup svih pravih prostora L^3 koje su paralelne sa jednom te istom pravom zove se *parabolički snop* (Slika 7.2.). Prava sa čijim se pravcem paralelnosti upoređuju ostale prave snopa, može biti bilo koja prava tog snopa.

(iii) Skup svih pravih prostora L^3 koje su normalne na istu ravan zovemo *hiperbolički snop* (Slika 7.3.). Ta ravan se naziva *baza* ili *osnova snopa.*



Slika 7.3.

Za neku ravan kažemo da *pripada* snopu ako prolazi jednom njegovom pravom. Primetimo da sve prave nekog snopa, koje leže u ravni koja pripada tom snopu, čine pramen, i to iste vrste koje je i sam snop. To drugim rečima znači da npr. parabolički snop sadrži u nekoj ravni koja mu pripada parabolički pramen pravih. Analogno važi i za ostale vrste snopa pravih.

Posmatrajmo u prostoru Lobačevskog L^3 dva snopa pravih $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Razmotrimo sledeće slučajeve:

(i) Ako je jedan od zadatih snopova pravih eliptički, tada postoji jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima, bez obzira na to da li je drugi snop eliptički, parabolički ili hiperbolički.

(ii) Ako je jedan od zadatih snopova pravih hiperbolički, a drugi parabolički, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima pravih ako i samo ako prave paraboličkog snopa nisu paralelne osnovi hiperboličkog snopa, obzirom da postoji jedinstvena prava upravna na zadatoj ravni, a paralelna polupravoj koja nije paralelna toj ravni.

(iii) Ako su oba snopa hiperbolička, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima pravih ako i samo ako su osnove tih snopova međusobno hiperparalelne ravni.

(iv) Ako su oba snopa parabolička, onda važi tvrđenje koje se potpuno analogno dokazuje kao u slučaju pramena pravih u L^2:

Teorema 7.1.1. *Postoji jedinstvena prava koja pripada dvama raznim paraboličkim snopovima pravih.*

I sledeća teorema se analogno pokazuje kao u slučaju pramena pravih u L^2:

Teorema 7.1.2. *Translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada parabolički snop se preslikava na sebe.*

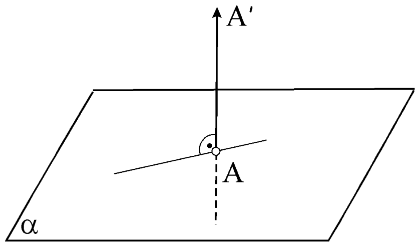
Teorema 7.1.3. *Presek snopa sa ravni koja prolazi kroz jednu pravu snopa predstavlja pramen pravih. Taj pramen pravih je, u zavisnosti od prirode snopa, parabolički, hiperbolički ili eliptički.*

Dokaz. Pokažimo da tvrđenje važi za eliptički snop pravih. Za ostale snopove pravih dokaz je analogan.

Ako se iz eliptičkog snopa pravih izdvoje oni elementi koji pripadaju istoj ravni, ti elementi se i dalje seku u istoj tački O, a kroz svaku tačku ravni prolazi po jedna takva prava. Dakle, u datoj ravni imamo eliptički pramen pravih. $\square$

U slučaju hiperboličkog snopa pravih, bazisna prava pramena pravih je prava preseka ravni α sa bazisnom ravni snopa.

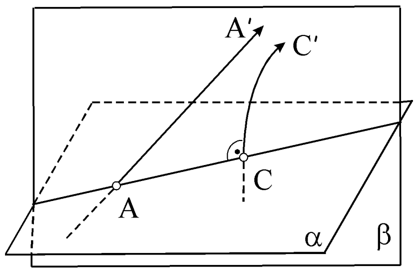
Teorema 7.1.4. *Ako ravan α seče neki element paraboličkog snopa pravih, onda u tom snopu postoji prava koja ravan seče ortogonalno.*



Slika 7.4.

Dokaz. Pretpostavimo da ravan α seče u tački A pravu AA' iz paraboličkog snopa. Razlikujemo dva slučaja:

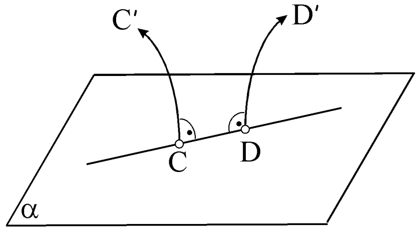
(i) Prava AA' je upravna na ravan α (Slika 7.4.). Tada je dokaz završen.



Slika 7.5.

(ii) Prava AA' nije upravna na ravan α (Slika 7.5.). Tada prava AA' obrazuje sa svojom ortogonalnom projekcijom AB na ravan α sa jedne strane tačke A oštar ugao, a sa druge strane te tačke A tup ugao. Neka je $\measuredangle BAA' < R$. Označimo C tačku na polupravoj AB, takvu da je $\measuredangle A'AB = \Pi(AC)$. U tački C konstruišemo normalu CC' na ravan α. Ona će ujedno biti i normala na AB. Prema konstrukciji sledi da je $CC' \parallel AA'$, tj. da prava CC' pripada posmatranom paraboličkom snopu pravih.

Pokažimo sada da je CC' jedina prava uočenog snopa koja je normalna na ravan α. Pretpostavimo da postoji još jedna takva prava DD'. Kako su CC' i DD' normalne na ravan α, onda su one normalne na svaku pravu te ravni koja prolazi kroz tačku C i tačku D (Slika 7.6.). Odavde je $CD \perp DD'$ i $CD \perp CC'$, pa zaključujemo da prave CC' i DD' imaju zajedničku normalu, te su prema tome hiperparalelne, tj. DD' ne pripada paraboličkom snopu pravih. Dakle, prava CC' je jedinstvena sa navedenim svojstvom. $\square$



Slika 7.6.

Definicija 7.2. Tačka C, koja se pominje u dokazu prethodne teoreme naziva se *središte ravni* u odnosu na posmatrani parabolički snop pravih.

Definicija 7.3. Za tačku $B \in b$ kažemo da je *odgovarajuća* tački $A \in a$ iz istog snopa, ako je duž AB sečica jednakog nagiba za prave a i b.

Kako elementi a i b snopa, uvek pripadaju istoj ravni, to je, takođe tačka A odgovarajuća tački B, tj. tačke A i B su uzajamno odgovarajuće.

Teorema 7.1.5. *U eliptičkom snopu dve odgovarajuće tačke su podjednako udaljene od središta snopa.*

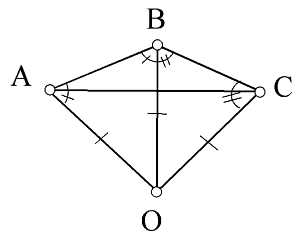
Teorema 7.1.6. *U hiperboličkom snopu dve odgovarajuće tačke su podjednako udaljene od bazisne ravni snopa.*

Teorema 7.1.7. *Ako tačke A i B odgovaraju jedna drugoj na pravama a i b snopa, a tačke B i C odgovaraju jedna drugoj na pravama b i c istog snopa, onda tačke A i C odgovaraju jedna drugoj na pravama a i c.*

Dokaz. Razlikovaćemo tri slučaja, prema tome da li se radi o eliptičkom, paraboličkom ili hiperboličkom snopu pravih.

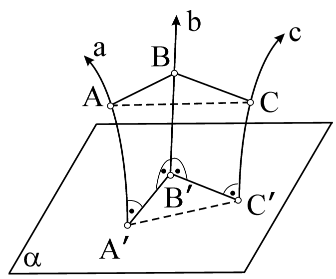
(i) Posmatrajmo eliptički snop sa središtem u tački O. Kako su A i B odgovarajuće tačke na elementima a i b tog snopa, to je trougao ΔAOB jednakokrak, odakle je $AO \cong OB$ (Slika 7.7.). Iz istog razloga, jer su B i C odgovarajuće tačke jedna drugoj na elementima b i c tog snopa, trougao ΔBOC jednakokrak, pa je $OB \cong OC$. Zaključujemo da je $OA \cong OC$. Dakle, ΔOAC je jednakokrak, odakle sledi da je $\measuredangle OAC \cong \measuredangle OCA$, tj. prava AC je sečica jednakog nagiba za prave a i c snopa, odnosno tačke A i C su odgovarajuće tačke tih pravih.

(ii) Neka je sada snop pravih hiperbolički i neka je α njegova bazisna ravan. Neka su A', B' i C' preseci pravih a, b i c sa ravni α (Slika 7.8.).



Slika 7.7.

Kako su A i B odgovarajuće tačke na pravama a i b to je $AA' \cong BB'$. Takođe je $BB' \cong CC'$. Na osnovu navedenih podudarnosti zaključujemo da je $AA' \cong CC'$. Prema tome četvorougao $AA'C'C$ je Sakerijev, pa je $\measuredangle A'AC \cong \measuredangle C'CA$, tj. AC je sečica jednakog nagiba za prave a i c, a tačke A i C su odgovarajuće tačke na elementima a i c snopa.



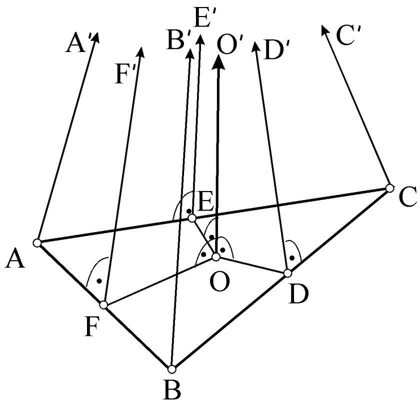
Slika 7.8.

(iii) Na kraju posmatrajmo parabolički snop pravih (Slika 7.9.). Neka su $a \equiv AA'$, $b \equiv BB'$ i $c \equiv CC'$ prave paralelne u istom smeru. Obzirom da prave a, b i c nisu komplanarne, to tačke A, B i C nisu kolinearne. Obeležimo sa O središte ravni trougla ΔABC u odnosu na uočeni parabolički snop i neka je OO' normala te ravni u tački O. Malopre smo pokazali da ako određenu ravan seče neki element paraboličkog snopa, onda u tom snopu postoji prava, koja tu ravan seče ortogonalno. Prema tome važi:

$$OO' \perp \alpha(A, B, C) \quad \text{i} \quad OO' \parallel AA' \parallel BB' \parallel CC'.$$

Konstruišimo iz tačke O normale redom na stranice AB, BC i AC trougla ΔABC. Neka su to tačke F, D i E redom. Dakle $OF \perp AB$, $OD \perp BC$ i $OE \perp AC$.

Ravan $\alpha_1(O', O, F)$ seče ravan $\beta_1(A'A, BB')$ po pravoj FF'. Sada koristeći Teoremu 6.7.1. zaključujemo da su prave, FF', AA', BB' i CC' među sobom paralelne u istom smeru.



Slika 7.9.

Dakle, FF' pripada uočenom paraboličkom snopu. Slično i svaka od pravih DD' i $\overrightarrow{EE'}$ pripadaju istom paraboličkom snopu pravih. Kako je $OO' \perp \alpha(A, B, C)$ to je i svaka ravan koja sadrži OO' normalna na $\alpha(A, B, C)$. Dakle, $\alpha_1(O', O, F) \perp \alpha$, $\alpha_2(O', O, D) \perp \alpha$ i $\alpha_3(O', O, E) \perp \alpha$.

S druge strane je $BC \perp OD$. Takođe $BC \subset \alpha$, $OD \subset \alpha_2$ i $\alpha_2 \perp \alpha$. Dakle, $BC \subset \alpha$ pa je u tački prodora normalna na svaku pravu iz ravni α_2. Zaključujemo da je $BC \perp \alpha_2(O', O, D)$, pa će biti normalna i na svaku pravu te ravni. Specijalno, $BC \perp DD'$. Slično je i $FF' \perp AB$ i $EE' \perp AC$.

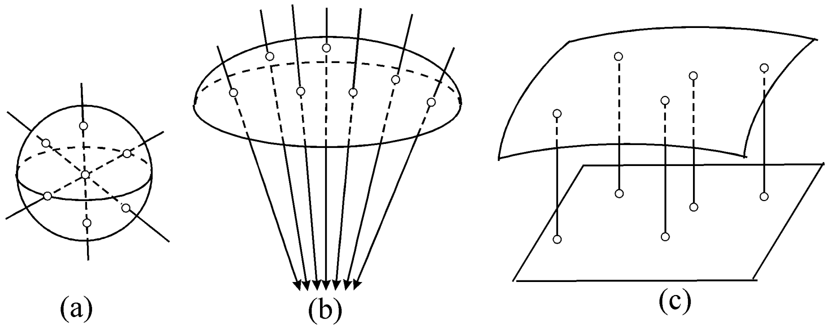
Posmatrajmo prave AA' i FF'. One su paralelne u istom smeru, a prava FF' je normalna na pravu AF. Zato je $\measuredangle A'AF = \Pi(AF)$. Prava FF' je takođe paralelna pravoj BB' u istom smeru, a normalna na pravu BF, pa je $\measuredangle B'BF = \Pi(BF)$. Tačke A i B su odgovarajuće, pa je AB sečica jednakog nagiba za elemente a i b snopa, i zato je $\measuredangle A'AF = \measuredangle B'BF$. Iz poslednje jednakosti je $\Pi(AF) = \Pi(BF)$ što nam zapravo govori da je $AF \cong BF$. Slično je $\Pi(BD) = \Pi(CD)$ odakle sledi $BD = CD$. Znači F i D su središta stranica AB i BC trougla ΔABC.

Prave OD i OF su simetrale dveju stranica trougla ΔABC i seku se u tački O. Kako simetrale stranica trougla pripadaju istom pramenu, to kroz tačku O prolazi i simetrala treće stranice tog trougla i važi $OE \perp AC$. Dakle, tačka E je središte stranice AC trougla ΔABC.

Posmatrajmo sada prave $AA' \parallel EE'$ i $CC' \parallel EE'$. Kako je prava EE' normalna na pravu AC, to je, $\measuredangle A'AE = \Pi(AE)$ i $\measuredangle C'CE = \Pi(CE)$. Obzirom da jednakim dužima odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti, to je $\measuredangle A'AE = \measuredangle C'CE$, što pokazuje da je AC sečica jednakog nagiba pravih a i c snopa, a A i C odgovarajuće tačke tih pravih. $\square$

7.2 Episfere prostora $\mathbf{L}^3$

Definicija 7.1. Neka je u L^3 dat snop pravih i na jednoj pravoj tog snopa tačka A. Skup koji se sastoji iz tačke A i svih tačaka na pravama datog snopa koje odgovaraju u transformacijama grupe epicikličkih rotacija tački A, zovemo *episferom* tog snopa pravih. U zavisnosti od toga da li je posmatrani snop pravih eliptički (Slika 7.10.(a)), parabolički (Slika 7.10.(b)) ili hiperbolički (Slika 7.10.(c)), odgovarajuću episferu zovemo *sferom*, *orisferom* ili *hipersferom*.



Slika 7.10.

Ako je snop parabolički (tj. sve prave snopa su među sobom paralelne) *orisfera* koja se tada dobija može se smatrati graničnim slučajem sfere čije je središte tačka O_∞ (infinitna tačka posmatranog paraboličkog pramena pravih).

Ako je snop hiperbolički (tj. sve prave snopa su upravne na istu ravan) kao rezultat se dobija hipersfera koja predstavlja skup tačaka podjednako udaljenih od bazisne ravni, tj. osnove snopa. Iz tog razloga, hipersferu analogno slučaju hipercikla u L^2, nazivamo i *ekvidistantnom površi.* Osnovu odgovarajućeg snopa pravih nazivamo *osnovom* ekvidistantne površi a duž, tj. udaljenost bilo koje tačke od osnove visinom te ekvidistantne površi.

Teorema 7.2.1. *U prostoru L^3 postoje isključivo tri površi stalne ili konstantne krivine. To su sfera, orisfera i hipersfera (ekvidistantna površ).*

Napomenimo da je ekvidistantnu površ moguće razmatrati i kao dvojnu ekvidistantnu površ, tj. kao dva disjunktna skupa tačaka podjednako udaljenih od zajedničke bazisne ravni pri čemu svaki od ovih skupova tačaka pripada po jednom poluprostoru određenim bazisnom ravni.

Pomenute tri površi se često nazivaju i površima konstantne krivine. Osobina da površ u svakoj svojoj tački ima konstantnu krivinu omogućuje toj površi da se kreće sama po sebi. To svojstvo omogućuje da na svakoj od tih površi izgradimo elementarnu geometriju. Naime Euklidska geometrija može se izgraditi isključivo na površima konstantne krivine.

7.3 Sfera u L^3

Ako je snop eliptički (tj. sve prave snopa prolaze kroz jednu tačku - centar snopa) neposredno se ustanovljuje da su sve tačke sfere podjednako udaljene od središta snopa i obratno da sve tačke prostora podjednako udaljene od centra snopa pripadaju jednoj *sferi*.

Analogno slučaju ravni L^2 i u prostoru L^3 se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 7.3.1. *Dve sfere su podudarne ako i samo ako su im jednaki poluprečnici.*

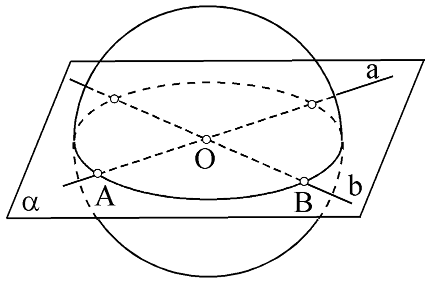
Teorema 7.3.2. *Svaka ravan koja sadrži pravu eliptičkog snopa seče odgovarajuću sferu po krugu.*

Dokaz. Neka je dat eliptički snop $\mathcal{X}$ pravih prostora L^3, sfera $\mathcal{S}$ i ravan α koja sadrži pravu $a \in \mathcal{X}$. Neka je O centar sfere $\mathcal{S}$ (Slika 7.11.). Ravan α mora da sadrži tačku O jer ravan α po pretpostavci sadrži pravu eliptičkog snopa $\mathcal{X}$, a sve prave eliptičkog snopa sadrže tačku O.

Uočimo u ravni α još jednu pravu b koja pripada datom snopu pravih $\mathcal{X}$. Zajedničke prave snopa $\mathcal{X}$ i ravni α čine pramen pravih u α. Označimo sa A i B presečne tačke u kojima prave a i b prodiru sferu $\mathcal{S}$. Tačke A i B nalaze se na sferi $\mathcal{S}$ pa je AB sečica jednakog nagiba za eliptički pramen pravih u ravni α.

Dakle, u preseku ravni α i sfere $\mathcal{S}$ dobija se krug. □

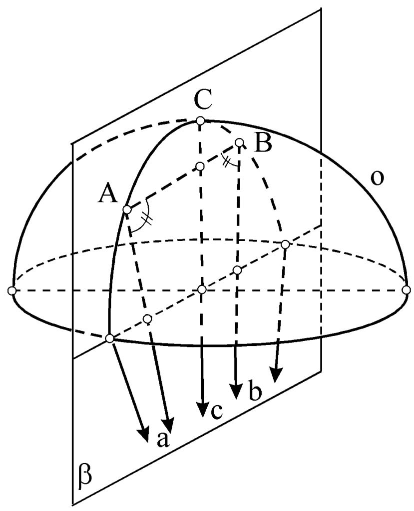
Analogno slučaju ravni L^2 i u prostoru L^3 se lako dokazuje sledeća teorema.



Slika 7.11.

7.4 Orisfera u L^3

Teorema 7.4.1. *Dve orisfere su uvek međusobno podudarne.*



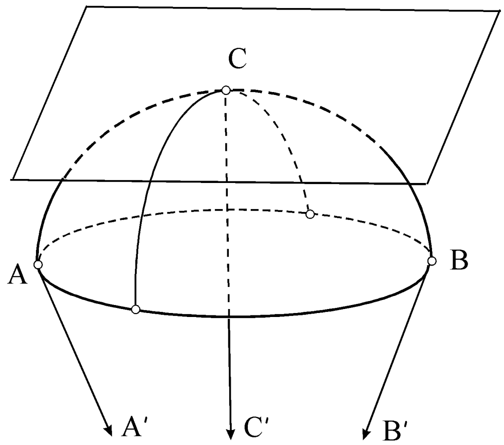
Slika 7.12.

Definicija 7.1. *Ako se tačka A nalazi sa one strane orisfere, sa koje je smer paralelnosti njenih osa kažemo da je A unutrašnja tačka orisfere. Ako je A sa druge strane od smera paralelnost njenih osa kažemo da je A spoljašnja tačka orisfere.*

Teorema 7.4.2. *Ravan koja prolazi kroz osu orisfere, seče orisferu po oriciklu.*

Dokaz. Neka je dat parabolički snop pravih $\mathcal{X}$ prostora L^3, orisfera o i ravan β koja sadrži pravu $c \in \mathcal{X}$. Neka je C tačka u kojoj prava c prodire orisferu o (Slika 7.12.). Ravan β takođe sadrži i tačku C.

Uočimo u ravni β još dve prave a i b paralelne pravoj c. Tada prave a i b pripadaju datom snopu pravih $\mathcal{X}$, sledi da postoje tačke A i B takve da je $a \cap o = A$ i $b \cap o = B$. Dakle AB je tetiva, pa je i sečica jednakog nagiba orisfere. Kako su a i b proizvoljne prave pramena $\mathcal{X} \cap \beta$ sledi da je $o \cap \beta$ oricikl. □



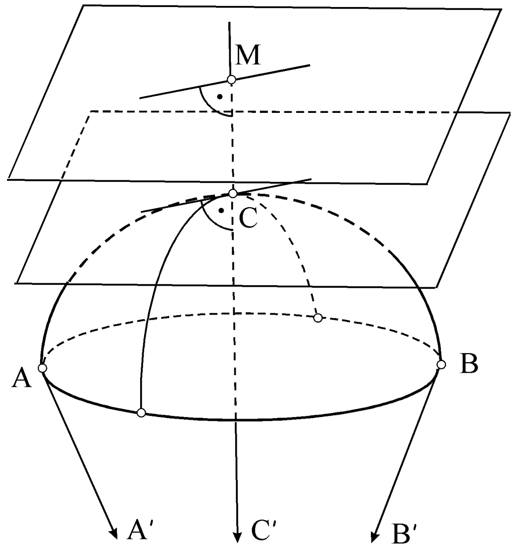
Slika 7.13.

Teorema 7.4.3. *Orisfera je obrtna površ oko svake svoje ose.*

Dokaz. Orisfera je granični slučaj sfere, u slučaju kada poluprečnik sfere neograničeno raste. Iskazana činjenica se pokazuje na isti način na koji smo pokazali da je oricikl granični slučaj kruga, kada poluprečnik kruga neograničeno raste. □

Teorema 7.4.4. *Ako ravan ne prolazi kroz osu orisfere, a njena središnja tačka u odnosu na snop osa pripada spoljašnjosti orisfere, ravan ne seče orisferu. Ako središnja tačka pripada površi ravan dodirije orisferu, a ako središnja tačka pripada unutrašnjosti orisfere, ravan je seče po krugu čiji je centar središnja tačka ravni u odnosu na snop orisfere.*

Dokaz: U dokazu ćemo razlikovati više slučajeva:

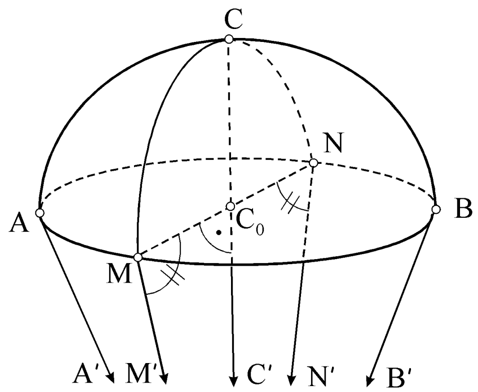


Slika 7.14.

(i) Kada središnja tačka ravni pripada orisferi (Slika 7.13.) tada je ravan normalna na osu orisfere u jednoj njenoj tački. Sve ostale tačke te ravni pripadaju spoljašnjosti orisfere, pa je to tangentna ravan orisfere.

(ii) Pretpostavimo da središnja tačka M ravni α pripada spoljašnjosti orisfere (Slika 7.14.). Neka osa orisfere, koja prolazi kroz tu tačku seče orisferu u tački C. Posmatrajmo sada tangentnu ravan na orisferu u tački C. Tangentna ravan i ravan α imaju zajedničku normalu pa su one hiperparalelne. Dakle, sve tačke ravni α pripadaju spoljašnjosti orisfere, tj. ravan α nema zajedničkih tačaka sa orisferom.

(iii) Neka središnja tačka C_0 date ravni u odnosu na snop orisfere pripada unutrašnosti orisfere (Slika 7.15). Obeležimo sa C presečnu tačku orisfere i njene ose, koja prolazi kroz C_0. Tada će svaka ravan koja prolazi kroz pravu CC_0 seći orisferu po oriciklu, a datu ravan po pravoj koja je normalna na osu CC_0 orisfere i presečnog oricikla. Kako ta prava prolazi kroz unutrašnju tačku C_0 presečnog oricikla ona ga seče u dvema tačkama M i N, koje pripadaju orisferi i to su odgovarajuće tačke paraboličkog snopa pravih, koje pripadaju istom krugu. $\square$



Slika 7.15.

7.5 Ekvidistantna površ - hipersfera prostora L^3

Za ekvidistantnu površ važi sledeća teorema:

Teorema 7.5.1. *Ekvidistantna površ je geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od bazisne ravni površi.*

Definicija 7.1. *Rastojanje tačaka ekvidistantne površi od bazisne ravni površi, zove se parametar ili visina ekvidistantne površi.*

Ekvidistantne površi se među sobom, osim po položaju, razlikuju i po parametru. U specijalnom slučaju kada je parametar nula, ekvidistantna površ je ravan.

Na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da se ekvidistantna površ sastoji iz dva dela, od kojih se svaki nalazi sa po jedne strane bazisne ravni.

Teorema 7.5.2. *Ravan koja je mimoilazna sa bazisnom ravni ekvidistantne površi, ne seče tu površ, ako je najkraće rastojanje između te ravni i bazisne ravni, veće od parametra površi, dodiruje je ako je to rastojanje jednako parametru ekvidistantne površi, a seče je po krugu, ako je to rastojanje manje od parametra površi.*

Dokaz. Slučajevi, kada je najkraće rastojanje između ravni β i bazisne ravni veće odnosno jednako parametru ekvidistantne površi lako se dokazuju.

Neka je sada najkraće rastojanje između ravni β i bazisne ravni π manje od parametra ekvidistantne površi. Ravni π i β su mimoilazne. Označimo sa

MN zajedničku normalu pomenutih ravni. Po pretpostavci, MN je manja od parametra ekvidistantne površi. Kako se, počev od normale MN ravni π i β neprekidno udaljavaju jedna od druge, to postoje tačke ravni β čija su rastojanja od ravni π jednaka parametru površi. Te tačke su tačke preseka ravni β i ekvidistantne površi.

Označimo sa A i B presečne tačke ravni β i ekvidistantne površi, a sa A' i B' podnožja normala redom iz tačaka A i B na bazisnu ravan. U tom slučaju je $AA' \cong BB'$. Lambertovi četvorougli $MNAA'$ i $MNBB'$ imaju zajedničku osnovicu MN, pri čemu su im suprotne visine AA' i BB' podudarne. Prema jednom od stavova za podudarnost Lambertovih četvorougla, sledi podudarnost četvorougla $MNAA'$ i $MNBB'$. Iz njihove podudarnosti sledi $MA \cong MB$.

Dakle, ma koje dve tačke preseka ravni β i ekvidistantne površi podjednako su udaljene od utvrđene tačke ravni β. Odavde zaključujemo da je presek ravni β i ekvidistantne površi, pri datim uslovima, krug. □

Iz predhodne teoreme sledi

Teorema 7.5.3. *Ekvidistantna površ je obrtna površ oko svake svoje ose.*

Dokaz. Navedeno tvrđenje je neposredna posledica prethodne teoreme. Zaista, na svakoj osi ekvidistantne površi, u tački koja je između površi i bazisne ravni, možemo postaviti ravan, koja je normalna na uočenu osu. Ta ravan prema prethodnoj teoremi seče ekvidistantnu površ po krugu. □

Važi i sledeće tvrđenje :

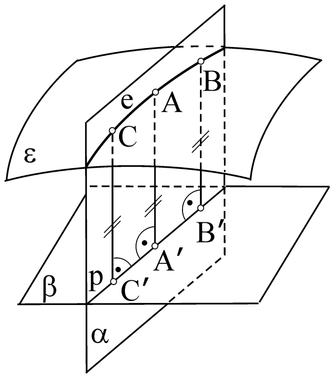
Teorema 7.5.4. *Ravan koja prolazi kroz osu ekvidistantne površi, seče tu površ po ekvidistantnoj liniji.*

Dokaz. Neka je dat hiperbolički snop pravih prostora L^3, ekvidistantna površ $\mathcal{E}$ i ravan α koja sadrži osu a ekvidistantne površi $\mathcal{E}$ (Slika 7.16.).

Označimo sa β bazisnu ravan ekvidistantne površi, a sa $\beta \cap \alpha = p$. Tada je $a \perp p$. Neka je A tačka u kojoj prava a prodire ekvidistantnu površ $\mathcal{E}$.

Uočimo u ravni α prave b i c koje pripadaju datom snopu pravih. Neka su B i C presečne tačke pravih b i c sa ekvidistantnom površi a B' i C' presečne tačke pravih b i c sa ravni β. Tada je četvorougao $B'C'CB$ Sakerijev, pa je BC sečica jednakog nagiba. To znači da je kriva e dobijena u preseku ravni α i ekvidistantne površi $\mathcal{E}$ - ekvidistanta. □

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje šta se dobija u preseku ekvidistantne površi i ravni paralelne njenoj osnovi.



Slika 7.16.

Teorema 7.5.5. *Presek ravni α koja je paralelna osnovi π neke ekvidistantne površi $\mathcal{E}$ i koja pripada poluprostoru sa rubom π kojem pripada i $\mathcal{E}$, je oricikl.*

Takođe važi

Teorema 7.5.6. *Dve ekvidistantne površi su podudarne ako i samo ako su im podudarne visine.*

§

Na kraju, napomenimo još jednom da je ekvidistantnu površ moguće razmatrati i kao dvojnu ekvidistantnu površ, tj. kao dva disjunktna skupa tačaka podjednako udaljenih od zajedničke bazisne ravni pri čemu svaki od ovih skupova tačaka pripada po jednom poluprostoru određenim bazisnom ravni.

§

Presek dveju episfera je epicikl. Takođe je presek episfere i ravni epicikl. Ukoliko presečna ravan sadrži pravu snopa kojom je episfera definisana onda za presek dobijamo krug, oricikl ili ekvidistantu u zavisnosti od toga da li je razmatrana episfera: sfera, orisfera ili ekvidistantna površ. Ukoliko je presečna ravan upravna na nekoj pravoj snopa za presek episfere i ravni dobija se krug ili tačka. S obzirom na to da postoji jedinstvena prava snopa upravna na zadatu ravan, presek proizvoljne ravni koja ne sadrži pravu kojom je ta orisfera definisana i orisfere je krug. Ako ravan seče osnovu ekvidistantne površi, nije teško ustanoviti da je presek ravni i ekvidistantne površi ekvidistanta.

7.6 Površi koje dopuštaju slobodno kretanje po sebi

U glavi o karakterističnim krivama u ravni L^2 videli smo da epicikl dopušta slobodno kretanje po samom sebi. Sada ćemo razmatrati isti problem, ali za episfere. Pokazaćemo da i one dopuštaju slobodno kretanje u sebi, i opisaćemo transformacije podudarnosti kojima se to postiže.

Uočimo u ravni Lobačevskog sledeće elemente: tačku A i pravu a koja prolazi kroz tu tačku, kao i tačku B i pravu b koja prolazi kroz tačku B. Uvek postoji transformacija podudarnosti, koja ravan preslikava na samu sebe, tako da se tačka A preslikava na tačku B , a prava a na pravu b. Sada ćemo opisati kako se ova podudarnost može realizovati.

Najpre, primenimo translaciju za duž AB. Translacija preslikava ravan na samu sebe, tako da se tačka A preslikava na B, dok se prava a preslikava na pravu a', koja prolazi kroz tačku B. Sada primenimo rotaciju ravni oko tačke B. Ona takođe preslikava ravan na samu sebe, i pri tom se tačka B preslikava na samu sebe. Rotacija se uvek može izabrati tako da se prava a' preslikava na pravu b. Konačno, proizvod translacije i ove rotacije je transformacija podudarnosti, sa osobinama koje smo napred naveli.

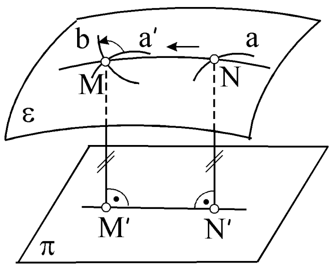
Posmatrajmo sferu. Uočimo na njoj tačku A i veliki krug a, koji prolazi kroz tu tačku. Dalje, uočimo veliki krug b, koji prolazi kroz tačku B. Rotacija oko nekog prečnika sfere preslikava sferu na samu sebe. Ako se radi o prečniku koji je normalan na ravni velikog kruga OAB, gde je O središte sfere, a za ugao rotacije se uzme $\measuredangle AOB$, veliki krug OAB se preslikava na samog sebe, tako da se tačka A preslikava na tačku B, dok se krug a preslikava na veliki krug a', koji prolazi kroz tačku B. Rotacijom sfere oko njenog prečnika OB može se krug a' preslikati na krug b. Proizvod ove dve rotacije je transformacija podudarnosti, koja sferu preslikava na sebe, tako da se tačka A preslikava na tačku B, a krug a koja je u unutrašnjoj geometriji sfere prava - na krug b.

Uvodimo sledeću definiciju :

Definicija 7.1. Za površ koja se može transformacijom podudarnosti preslikati na samu sebe, tako da se tačka i prava kroz tu tačku preslikavaju na proizvoljnu, ali unapred zadatu tačku i proizvoljnu, ali unapred datu pravu kroz tu tačku, kažemo da dopušta *slobodno kretanje u sebi.*

U Euklidskom prostoru jedine površi koje dopuštaju slobodno kretanje u sebi su ravan i sfera. (Proizvoljna obrtna površ, ne dopušta slobodno kretanje u sebi.). Pokazaćemo da u prostoru Lobačevskog pored ravni i sfere, takođe ekvidistantna površ i orisfera dopuštaju slobodno kretanje u sebi.

Posmatrajmo najpre u prostoru Lobačevskog ekvidistantnu površ, i neka su M i N dve proizvoljne tačke te površi. Označimo sa M' i N' njihove projekcije na bazisnu ravan. Neka je a ekvidistantna linija površi, koja ima osobinu da prolazi kroz tačku N i pripada ravni, koja je normalna na bazisnu ravan, a b ekvidistantna linija iste površi, koja prolazi kroz tačku M, i pripada ravni normalnoj na bazisnu ravan (Slika 7.17.).



Slika 7.17.

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti koja bazisnu ravan preslikava na samu sebe. Pri tom se svaka normala na bazisnu ravan preslikava na normalu na bazisnu ravan, pa se prema tome ekvidistantna površ preslikava na samu sebe. Ukoliko se radi o transformaciji podudarnosti, takvoj da se prava $M'N'$ preslikava na samu sebe, i to tako da se tačka N' preslikava na tačku M', ekvidistantna površ se preslikava na samu sebe, tako da se ekvidistanta NM preslikava na samu sebe, a tačka N na tačku M. Ekvidistanta a se preslikava na ekvidistantu a', koja prolazi kroz tačku M. Obrtanjem ekvidistantne površi oko ose MM', transformišemo ekvidistantu a' u b. Dakle, ekvidistantna površ dopušta slobodno kretanje u sebi.

Slično se može pokazati da je i orisfera površ koja dopušta slobodno kretanje u sebi. Tačnije, ako su A i B tačke orisfere, a AA' i BB' odgovarajuće ose, transformišemo osu AA' u BB', a tačku A u B. Zatim obrtanjem orisfere oko njene ose BB' možemo oricikl orisfere koji prolazi kroz tačku B, transformisati u drugi takav oricikl. Odavde sledi da orisfera dopušta slobodno kretanje u sebi.

Kao posledicu poslednjeg razmatranja dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 7.6.1. *Sve orisfere su među sobom podudarne.*

Dokaz. Neka je orisfera $\mathcal{O}$ određena tačkom A i osom AA' a orisfera $\mathcal{L}$

tačkom B i osom BB'. Kretanjem se prava AA' može dovesti do poklapanja sa pravom BB'. Pri tom se tačka A može dovesti do poklapanja sa tačkom B_1 prave BB'. Novim kretanjem, duž prave BB', tačka B_1 se transformiše u tačku B. □

7.7 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora L^3

Teorema 7.7.1. *Svaka direktna izometrijska transformacija prostora L^3 predstavlja koincidenciju, osnu rotaciju, oriciklički rotaciju, hiperciklički rotaciju (translaciju) ili zavojno kretanje.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I}$ direktna izometrijska transformacija prema poznatom stavu iz Apsolutne geometrije ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$. U zavisnosti od uzajamnog položaja pravih m i n razlikujemo pet mogućnosti:

(i) Prave m i n se poklapaju. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m^2 = \varepsilon$ *koincidencija.*

(ii) Prave m i n se seku u nekoj tački O. U tom slučaju prave m i n određuju neku ravan π. Obeležimo sa π_1 i π_2 ravni koje sadrže prave m i n i upravne su na ravni π. U tom slučaju biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$$

pri čemu je $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_n$ jer je $\pi_2 \perp \pi$ i $\pi_2 \cap \pi = n$. Na isti način je $\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_m$ jer je $\pi_1 \perp \pi$ i $\pi_1 \cap \pi = m$. Najzad ravni π_1 i π_2 imaju neku zajedničku tačku O pa imaju i zajedničku pravu s jer je $\pi_1 \neq \pi_2$. Zato je $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ *rotacija* oko ose s pri čemu je ω dvostruki ugao između pravih m i n.

(iii) Prave m i n su paralelne i $m \neq n$. U tom slučaju prave m i n određuju neku ravan π. Obeležimo sa π_1 i π_2 ravni koje sadrže respektivno prave m i n i upravne su na ravni π. Tada će biti

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$$

tj. $\mathcal{I}$ je *oriciklička rotacija* jer su prave m i n međusobno paralelne u nekom smeru, ravni π_1 i π_2 su upravne na π i sadrže redom prave m i n te su i ravni π_1 i π_2 među sobom paralelne.

(iv) Prave m i n su hiperparalelne i $m \neq n$. U tom slučaju prave m i n poseduju jedinstvenu zajedničku normalu MN. Prave m i n određuju izvesnu ravan π i pripadaju respektivno ravnima π_1 i π_2 koje su upravne na ravan π te je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \tau_{MM'}.$$

Prema tome u ovom slučaju kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}$ je *hiperciklička rotacija* (translacija) za vektor MM' gde je M' tačka simetrična tački M u odnosu na pravu n.

(v) Prave m i n su mimoilazne. U tom slučaju postoji zajednička normala s pravih m i n. Označimo $s \cap m = M$ i $s \cap n = N$. Neka su π_1 i π_2 ravni upravne na s u tačkama M i N. Budući da su i prave m i n upravne na s u tačkama M i N to prava m pripada ravni π_1 a prava n ravni π_2. Neka su zatim σ_1 i σ_2 ravni koje sadrže redom parove m, s odnosno n, s. U tom slučaju je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}\tau_{MM'}$$

gde je $\mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ rotacija a $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \tau_{MM'}$. Prava s je presek ravni σ_1 i σ_2, $\omega = 2\measuredangle(\sigma_1, \sigma_2)$ i ravni π_1 i π_2 su upravne na pravu s, a tačke M, M' pripadaju pravoj s, te je u ovom slučaju kompozicija $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$ *zavojno kretanje* $\mathcal{Z}_{MM',\omega}$. □

Teorema 7.7.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^3 \to L^3$ različita od ravanske refleksije predstavlja cikličku, oricikličku ili hipercikličku rotacionu refleksiju.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija različita od ravanske refleksije. Njena optimalna simetrijska reprezentacija sastoji se od tri ravanske refleksije. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\alpha$, pri čemu su α, β, γ osnove pomenutih refleksija. Ravni α, β i γ ne pripadaju jednom pramenu ravni jer bi u protivnom $\mathcal{I}$ bila ravanska refleksija. Prema tome ravni α, β i γ određuju snop ravni $\mathcal{X}$ jer su presečne prave svake dve ravni komplanarne. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija biće $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ pa prema tome postoji tačka $P \in L^3$ takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Neka je Q središte duži PP' a p i q prave koje redom sadrže tačke P i Q i pripadaju snopu pravih koji je induciran snopom $\mathcal{X}$. S obzirom da je kompozicija $\mathcal{S}_q\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija kojoj je svaka tačka prave p invarijantna prema teoremi iz Apsolutne geometrije ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_q\mathcal{I}$ pri čemu prava p pripada ravni μ i prema tome $\mu \in \mathcal{X}$. Iz navedene jednakosti je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q\mathcal{S}_\mu$. Ako obeležimo sa σ ravan koja sadrži pravu q i upravna je na ravan μ, a sa ν ravan koja je upravna na ravan σ biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\sigma\mathcal{S}_n u\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\sigma\mathcal{L}_{\mu,\nu}$$

gde je sa $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$ označena kompozicija $\mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu$ u kojoj su ravni ν i μ upravne na istoj ravni σ. U zavisnosti od toga da li se μ i ν seku, da li su paralelne ili su hiperparalelne ta kompozicija predstavlja osnu, oricikličku ili hipercikličku rotaciju te $\mathcal{I}$ predstavlja rotacionu, tj cikličku, oricikličku ili hipercikličku rotacionu refleksiju. U skladu sa činjenicom da je hiperciklička rotacija - translacija, hiperciklička rotaciona refleksija predstavlja klizajuću refleksiju prostora L^3. □

7.8 Unutrašnja geometrija episfera

Sistem osnovnih pojmova, aksioma kao i njihovih posledica koje karakterišu figure neke površi, kao i međusobne odnose tih figura, zove se *unutrašnja geometrija te površi.* Drugim rečima, pod unutrašnjom geometrijom površi podrazumeva se skup svih onih osobina njenih figura, koje se dobijaju sredstvima same površi, ne pozivajući se na okolni prostor u koji je ta površ smeštena.

Tako, na primer, euklidska planimetrija je unutrašnja geometrija euklidske ravni. Slično, sferna trigonometrija pripada geometriji loptine površi.

Unutrašnja geometrija površi zasniva se i izgrađuje na isti način kao i unutrašnja geometrija ravni. Utvrđuje se izvestan broj osnovnih objekata i između njih uspostavljaju izvesni uzajamni odnosi. Zatim se ispituje kakav je sistem aksioma koje, na toj površi, ti osnovni objekti zadovoljavaju. Napomenimo, da u stvari, taj sistem aksioma i karakteriše unutrašnju geometriju posmatrane površi.

U svakoj od do sada proučavanih episfera može se razviti njena unutrašnja geometrija. Pokazuje se da analogne figure u svakoj od tih površi pokazuju različita svojstva. Pokazaćemo da se ti trouglovi razlikuju po mnogim svojstvima.

U poglavljima koja slede, prelazimo na ispitivanje unutrašnje geometrije svake od episfera.

7.9 Unutrašnja geometrija ekvidistantne površi

Razmotrićemo pitanje unutrašnje geometrije ekvidistantne površi u prostoru L^3. Pri deduktivnoj izgradnji geometrije neke površi sledi se isti put kojim se ide i pri izgradnji Euklidske planimetrije u običnoj ravni. Najpre uspostavljamo osnovne pojmove i osnovne teoreme. Polazeći od pomenutih osnova izvode se raznovrsni zaključci, teoreme i izgrađuje se geometrija.

U običnoj planimetriji među osnovne pojmove ubrajamo tačku i pravu. Analogni osnovni pojmovi uvode se i na ekvidistantnoj površi. Pod *tačkom* ćemo podrazumevati bilo koju tačku ekvidistantne površi. Ulogu *prave* u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi ima kriva koja se naziva *geodezijska ekvidistanta*. Naime, važi sledeća definicija:

Definicija 7.1. *Geodezijska ekvidistanta* je kriva po kojoj ravan koja prolazi kroz osu ekvidistantne površi seče ekvidistantnu površ.

Uvedimo sada relaciju pripadnosti, između i podudarnosti. Za ovako definisane osnovne pojmove kazaćemo da, u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi, *pripadaju* jedan drugom, ako oni pripadaju jedan drugom u običnom smislu.

Za tačku B ekvidistantne površi, kazaćemo da se nalazi između tačaka A i C te površi, ako se projekcija tačke B, u oznaci B' na bazisnu ravan ekvidistantne površi, nalazi između projekcija A' i C' tačaka A i C. Za dve figure ekvidistantne površi kazaćemo da su podudarne među sobom, ako se one kretanjem površi po samoj sebi, mogu dovesti do poklapanja, a takođe i ako su simetrične u odnosu na bilo koju ravan.

U daljem proučavanju unutrašnje geometrije ekvidistantne površi pokazaćemo da ovako izabrani osnovni objekti i njihovi uzajamni odnosi, zadovoljavaju sve zahteve aksioma veze I_{1-3}, aksioma rasporeda II_{1-4}, aksioma podudarnosti III_{1-5}, aksioma neprekidnosti IV_{1-2} Hilbertovog sistema aksioma i aksiomu Lobačevskog $\mathrm{V_L}$.

Proverićemo, redom, aksiome Hilbertovog sistema aksioma.

<u>*Aksiome veze*</u>

<u>*Aksioma* I_1</u>*: Za ma koje dve tačke A i B postoji geodezijska ekvidistanta a kojoj pripadaju tačka A i B.*

Obeležimo sa A' i B' projekcije tačaka A i B na bazisnu ravan α uočene ekvidistantne površi. Kroz prave AA' i BB' uvek prolazi jedna i samo jedna ravan β koja uvek seče ekvidistantnu površ i to po geodezijskoj ekvidistanti. Odavde zaključujemo da je na ekvidistantnoj površi zadovoljena aksioma I_1 ali i aksioma I_2 Hilbertovog sistema aksioma koja glasi:

<u>*Aksioma* I_2</u>*: Za ma koje dve tačke A i B, postoji najviše jedna geodezijska ekvidistanta, koja sadrži tački A i B.*

Ostaje nam da proverimo da li važi aksioma I_3, tj. aksioma:

<u>*Aksioma* I_3</u>*: Geodezijska ekvidistanta sadrži najmanje dve tačke. Postoje najmanje tri tačke koje ne pripadaju istoj geodezijskoj ekvidistanti.*

Neka je a geodezijska ekvidistanta uočene površi. Ravan γ kojoj ona pripada stoji normalno na bazisnu ravan α površi i seče je po pravoj a'. Na pravoj a' postoje najmanje dve tačke A' i B', a takođe u bazisnoj ravni α postoji najmanje još jedna tačka C', koja ne pripada pravoj a'. Podignimo u tačkama A', B' i C' normale na bazisnu ravan. Prve dve normale ujedno su i ose ekvidistantne površi i pripadaju ravni γ. One, dakle, seku površ u tačkama A i B koje pripadaju ekvidistanti a. Prema tome, na proizvoljnoj geodezijskoj ekvidistanti površi postoje najmanje dve tačke, A i B.

Normala u tački C' je osa površi, ali ne pripada ravni γ. Dakle, ta normala seče površ u tački C, koja ne pripada ekvidistanti a. To znači da na ekvidistantnoj površi postoje najmanje tri tačke, koje ne pripadaju istoj geodezijskoj ekvidistanti.

Dakle, na ekvidistantnoj površi su zadovoljene sve tri aksiome prve grupe Hilbertovog sistema aksioma, tj. aksiome I_{1-3}.

Aksiome rasporeda

Aksioma II_1*: Ako se tačka B nalazi između tačaka A i C, onda su A, B i C tri razne tačke jedne iste geodezijske ekvidistante, i tačka B se, takođe nalazi između C i A.*

Posmatrajmo projekciju a' geodezijske ekvidistante a na bazisnu ravan α ekvidistante površi. Tačke A, B i C ekvidistante a, projektuju se na tačke A', B' i C' prave a'. Na pravoj a' Hiperboličke ravni α zadovoljena aksioma II_1. Podignimo u tačkama A', B' i C' normale na bazisnu ravan α. Sve tri normale pripadaju ravni γ , koja stoji normalno na bazisnu ravan α površi i seče je po pravoj a'. Pomenute normale pripadaju ravni γ, a pri tom su i ose ekvidistantne površi. Dakle, one seku ekvidistantnu površ u tačkama A, B i C koje pripadaju geodezijskoj ekvidistanti a, pri čemu se tačka B nalazi između tačaka A i C.

Analogno važe i ostale aksiome rasporeda.

Aksiome podudarnosti

Primetimo da se uspostavlja uzajamno jednoznačna korespondencija, između tačaka površi i bazisne ravni, ukoliko se izvrši ortogonalno projektovanje ekvidistantne površi na njenu bazisnu ravan. Kako ekvidistantna površ i ravan dopuštaju slobodno kretanje u sebi, to ma koje kretanje bazisne ravni α, koje dovodi do poklapanja nekih figura te ravni, indukuje kretanje površi, koje dovodi do poklapanja odgovarajućih figura na površi. Dakle, figure ekvidistantne površi se nalaze u istim odnosima uzajamne podudarnosti, u kakvim se nalaze odgovarajuće figure njene bazisne ravni.

Prema tome, zaključujemo da su u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi zadovoljene sve aksiome podudarnosti Hilbertovog sistema aksioma, jer su te aksiome zadovoljene u geometriji bazisne ravni α.

Aksiome neprekidnosti

Na isti način, kao kod provere da li važe aksiome podudarnosti, ortogonalnim projektovanjem ekvidistantne površi na njenu bazisnu ravan, možemo se uveriti da su u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi, zadovoljene i aksiome neprekidnosti Hilbertovog sistema aksioma.

Naime, važe sledeće dve aksiome:

Aksioma IV_1: *Ako su AB i CD dve proizvoljne "duži", tada na geodezijskoj ekvidistanti AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, ..., A_n$ takvih da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, ..., A_n)$, pri čemu je svaka od "duži" $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ podudarna "duži" CD i $\mathcal{B}(A, A_n, B)$.*

Aksioma IV_2: *Ako je $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ...$ niz zatvorenih "duži" jedne iste geodezijske ekvidistante, takvih da svaka od tih "duži" sadrži sledeću, tada postoji tačka X koja pripada svakoj "duži" tog niza.*

Dakle, prilikom razvijanja geometrije na ekvidistantnoj površi, na njoj važe sve aksiome Apsolutne geometrije, pri čemu ulogu pravih imaju geodezijske ekvidistante. Ostaje još da se pokaže da u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi važi:

Aksioma Lobačevskog

Da bi pokazali da važi Aksioma Lobačevskog, posmatrajmo tačku C koja pripada ekvidistantnoj površi, a ne pripada geodezijskoj ekvidistanti AB te površi. Neka je CD geodezijska ekvidistanta površi, koja prolazi kroz tačku C. Ona seče ekvidistantu AB ako i samo ako njena projekcija $C'D'$ seče projekciju $A'B'$ ekvidistante AB na bazisnu ravan α površi. Kako je u ravni α zadovoljena Aksioma Lobačevskog $\mathrm{V_L}$, tj. kroz tačku C' van prave $A'B'$ prolazi beskonačno mnogo pravih, koje ne seku pravu $A'B'$, to je, zbog uzajamno jednoznačne korespondencije između tačaka površi i bazisne ravni, isti slučaj i na ekvidistantnoj površi, tj. kroz tačku C prolazi beskonačno mnogo geodezijskih ekvidistanti, koje ne seku ekvidistantu AB.

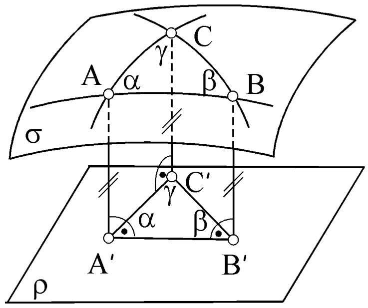
Ovo je jedan od načina da se pokaže da u unutrašnjoj geometriji ekvidistantne površi važi Aksioma Lobačevskog. Sada ćemo navesti još jedan.

Najpre, ugao između dve geodezijske ekvidistante definišimo kao ugao koji grade tangente tih dveju geodezijskih ekvidistanti, u tački njihovog preseka.

Na osnovu tako definisanih uglova između geodezijskih ekvidistanti na ekvidistantnoj površi može se rešiti problem paralela na toj površi. U tom cilju posmatrajmo trougao ΔABC na ekvidistantnoj površi σ i njegovu projekciju trougao $\Delta A'B'C'$ u bazisnoj ravni ρ ekvidistantne površi σ.

Projektovanje je izvedeno pomoću osa AA', BB' i CC' ekvidistantne površi (Slika refpovrs9.). Pomenute ose su normalne na ravan ρ. Zato su uglovi $\measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BAC$ međusobno jednaki, jer se radi o uglovima jednog istog prostornog ugla koji obrazuju ravni $AA'B'B$ i $AA'C'C$. Iz istog razloga je:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle ABC, \quad \measuredangle A'C'B' = \measuredangle ACB.$$



Slika 7.18.

Odavde proizilazi da je zbir uglova trougla $\Delta A'B'C'$ jednak zbiru uglova trougla ΔABC na ekvidistantnoj površi. Zbir unutrašnjih uglova trougla $\Delta A'B'C'$ u ravni Lobačevskog ρ je manji od zbira dva prava ugla, pa je prema tome i zbir uglova trougla na ekvidistantnoj površi manji od zbira dva prava ugla.

Znamo da je teorema o zbiru uglova trougla ekvivalentna aksiomi o paralelama. Zaključujemo da na ekvidistantnoj površi važi aksioma o paralelama geometrije Lobačevskog. Dakle, dokazana je teorema:

Teorema 7.9.1. *Unutrašnja geometrija ekvidistantne površi je Hiperbolička planimetrija, pri čemu ulogu pravih imaju geodezijske ekvidistante.*

7.10 Unutrašnja geometrija orisfere

Za geometriju Lobačevskog kao i za njenu izgradnju veliko značenje ima unutrašnja geometrija orisfere. Osnovni stavovi geometrije na orisferi, koji se ugrađuju u temelje te geometrije, potpuno su analogni aksiomama obične Euklidske planimetrije.

Tako npr. poznatoj aksiomi Euklidske planimetrije, da kroz dve razne tačke ravni prolazi jedna i samo jedna prava, odgovara u geometriji na orisferi osnovna teorema - *kroz dve razne tačke orisfere prolazi jedan i samo* *jedan oricikl.* Pokazaćemo, da se na sličan način uspostavljaju osnovne teoreme geometrije na orisferi analogne aksiomama prve četiri grupe u Euklidskoj ravni. Upoređivanjem analognih osnovnih teorema geometrije jedne i druge površi doći ćemo do sledećeg važnog zaključka: Svi osnovni stavovi geometrije na orisferi dobijaju se iz aksioma Euklidske planimetrije ako se u ovima reč *prava* zameni rečju *oricikl*, a reč *ravan* sa *orisfera*.

Dakle, da bi razvili unutrašnju geometriju orisfere, uvedimo osnovne objekte. Kao osnovne objekte unutrašnje geometrije orisfere posmatrajmo s jedne strane njene *tačke*, a s druge strane *oricikle*, koji se dobijaju presekom orisfere ravnima koje prolaze kroz njene ose. Za navedene osnovne objekte reći ćemo da u unutrašnjoj geometriji orisfere *pripadaju* jedan drugom, ako oni pripadaju jedan drugom u običnom smislu.

Označimo sa o oricikl, koji u unutrašnjoj geometriji orisfere ima ulogu prave, a sa A, B i C tri razne tačke oricikla o. Ose a, b i c orisfere, koje odgovaraju tim tačkama, pripadaju istoj ravni π. Za tačku C kažemo da se nalazi *između* tačaka A i B oricikla o, u oznaci $\mathcal{B}_o(A, B, C)$, ako se odgovarajuća osa c orisfere nalazi, u ravni π između osa a i b.

Za dve figure orisfere kažemo da su *podudarne*, u oznaci $\overset{\circ}{\cong}$, ako se te figure kretanjem orisfere po samoj sebi, mogu dovesti do poklapanja.

Dokažimo da za ovako uvedene pojmove na orisferi važe sve aksiome Apsolutne planimetrije.

Aksiome veze

Neka su A i B dve proizvoljne tačke orisfere, a a i b ose orisfere, koje prolaze kroz te tačke. Obzirom, da ma koje dve ose orisfere pripadaju istoj ravni, to prave a i b uvek određuju jednu i samo jednu ravan π. Međutim, ravan π uvek seče orisferu po jednom oriciklu. Kako tačke A i B pripadaju i ravni π i orisferi, one pripadaju i presečnom oriciklu. Dakle, kroz ma koje dve tačke orisfere uvek prolazi jedan i samo jedan oricikl, što nam govori da važe aksiome I_1 i I_2, tj.

Aksioma I_1*: Za ma koje tačke A i B uvek postoji oricikl o koji ih sadrži.*

Aksioma I_2*: Za ma koje dve tačke A i B, postoji najviše jedan oricikl koji ih sadrži.*

Pokazaćemo da važi i aksioma I_3, tj.

Aksioma I_3*: Na svakom oriciklu postoje najmanje dve tačke. Postoje najmanje tri tačke koje ne pripadaju istom oriciklu.*

Zaista, u svakoj ravni π, koja prolazi kroz neku osu n orisfere, postoji najmanje jedna prava m tako da je $m \parallel n$. Tačka M preseka ose m i orisfere, mora pripadati onom oriciklu, koji je presek orisfere i ravni π. Dakle, na tom oriciklu postoje najmanje dve tačke N i M, gde je N presek ose n i orisfere i za koju se na isti način pokazuje da pripada presečnom oriciklu. Takođe, van ravni π postoji najmanje još jedna osa s orisfere, što sledi iz definicije orisfere, kao površi nivoa snopa paralelnih pravih u prostoru Lobačevskog. Označimo sa S presečnu tačku ose s i orisfere o. Kako tačka S ne pripada ravni π, to ona ne pripada ni oriciklu u toj ravni. Dakle, postoje najmanje tri tačke, koje ne pripadaju istom oriciklu.

Ako tačke koje pripadaju jednom oriciklu nazovemo *o-kolinearnim*, a tačke koje ne pripadaju jednom oriciklu (oricikl ima ulogu prave u unutrašnjoj geometriji orisfere) nazovemo *o-nekolinearnim*, tada *o-ravan* (orisfera ima ulogu ravni u njenoj unutrašnjoj geometriji) sadrži najmanje tri *o-nekolinearne* tačke, jer postoji tačka orisfere koja ne pripada zadatom oriciklu te orisfere. Dakle, zadovoljena je i poslednja planimetrijska aksioma prve grupe, tj.

Aksioma I_4: *Neka su A, B i C tri tačke, koje ne pripadaju istom oriciklu. Tada postoji ravan α koja ih sadrži. Svakoj ravni pripada najmanje jedna tačka.*

Dalje proveravamo da li su na orisferi zadovoljene:

Aksiome rasporeda

Obzirom na uvedenu definiciju pojma između, primetimo da je za tačke na orisferi zadovoljeno prvih pet aksiome rasporeda jer:

(i) ako je $\mathcal{B}_o(A, B, C)$, tada su A, B i C tri *o-kolinearne* tačke,

(ii) ako je $\mathcal{B}_o(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}_o(C, B, A)$,

(iii) ako je $\mathcal{B}_o(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}_o(A, C, B)$,

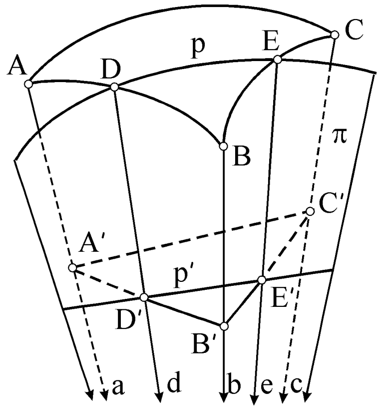
(iv) ako su A i B dve razne tačke na jednom oriciklu o, tada postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}_o(A, B, C)$,

(v) ako su A, B i C tri razne *o-kolinearne* tačke, tada je $\mathcal{B}_o(A, B, C)$ ili $\mathcal{B}_o(B, C, A)$ ili $\mathcal{B}_o(C, A, B)$.

Ostaje da pokažemo da u unutrašnjoj geometriji orisfere važi i Pašova aksioma, tj.

Aksioma II_6 - Pašov stav: *Neka su A, B i C tačke orisfere koje ne pripadaju istom oriciklu i neka je p oricikl orisfere, koji ne prolazi ni kroz jednu od tačaka A, B i C. Ako oricikl p sadrži tačku D koja je između tačaka A i B, onda on, takođe sadrži tačku E koja je između tačaka A i C ili između tačaka B i C.*

Dokaz. Obeležimo sa a, b, c i d ose orisfere koje prolaze kroz tačke A, B, C i D, i izaberimo na njima respektivno, tačke A', B' i C' u smeru paralelnosti pravih a, b i c. Neka je δ ravan koja je određena tačkama A', B' i C', a π ravan koja sadrži oricikl p (Slika 7.19).).



Slika 7.19.

Prava d nalazi se u ravni određenoj osama a i b oricikla, pri čemu je prava d između pravih a i b. Označimo sa D' presečnu tačku pravih d i $A'B'$. Tada tačka D' zadovoljava sledeće uslove: $\mathcal{B}(A', D', B')$, $D' \in \delta$, $D' \in \pi$. Dakle, ravni δ i π imaju zajedničku tačku D' pa samim tim i zajedničku pravu, označimo je sa p'.

Kako je u Hiperboličkoj ravni δ zadovolena Pašova aksioma za trougao $\Delta A'B'C'$ i pravu p' iz uslova $\mathcal{B}(A', D', B')$ sledi da prava p' sadrži tačku E' takvu da je $\mathcal{B}(B', E', C')$ ili $\mathcal{B}(A', E', C')$. Neka je zadovoljena prva od ove dve relacije. Tada tačka E' pripada ravni π i ravni $BCC'B'$. To znači da te dve ravni imaju zajedničku pravu e. Svake dve od tri prave b, e i DD' komplanarne su, pa pripadaju istom pramenu pravih. Kako su prave b i DD' paralelne to je i e paralelna u istom smeru sa njima dvema pa predstavlja osu orisfere. Prema tome, prava e seče orisferu. Označimo sa E presečnu tačku prave e sa orisferom. Tada tačka E pripada oriciklu p. Kako je prava e paralelna sa pravama b i c i sadrži tačku E' koja je između pravih b i c to je i prava e između pravih b i c a to upravo znači da je $\mathcal{B}_o(B, E, C)$. Na potpuno isti način ako pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(A', E', C')$ dobijamo $\mathcal{B}_o(A, E, C)$. $\square$

Aksiome podudarnosti

Definicija 7.1. Za par tačaka (P, Q) reći ćemo da je *podudaran* paru tačaka (P', Q') na orisferi o, ako postoji kretanje te orisfere po samoj sebi, koje prevodi tačke P i Q redom u tačke P' i Q', tj. ako postoji izometrija $\mathcal{I} : L^3 \to L^3$ takva da je $\mathcal{I}(o) = o$, $\mathcal{I}(P) = P'$ i $\mathcal{I}(Q) = Q'$.

Sa tako uvedenom relacijom podudarnosti neposredno se može dokazati važenje svih aksioma podudarnosti a takođe i aksiome neprekidnosti.

Neka su na orisferi date dve tačke A i B, zatim oricikl a' i tačka A' tog oricikla. Kako orisfera dopušta slobodno kretanje u sebi, to se takvim kretanjem, oricikl AB uvek može dovesti do poklapanja sa oriciklom a' i to na taj način da se tačka A poklopi sa tačkom A', a tačka B sa nekom tačkom B' koja je sa unapred određene strane tačke A'. Odavde zaključujemo da su parovi tačaka (A, B) i (A', B') pududarni, tj. u unutrašnjoj geometriji orisfere zadovoljena je aksioma III_1, tj.:

Aksioma III_1*: Ako su A i B dve tačke oricikla o i ako je A' tačka tog istog ili nekog drugog oricikla a', onda se uvek na oriciklu a' sa date strane tačke A' može naći tačka B', takva da je par tačaka (A, B) podudaran paru tačaka (A', B').*

Kretanjem orisfere po samoj sebi možemo pokazati da na orisferi, sa date strane datog oricikla, postoji jedan i samo jedan oricikl, koji sa datim zaklapa ugao, koji je podudaran uglu što ga na orisferi obrazuju neka druga dva oricikla. Drugim rečima, na orisferi je zadovoljena i aksioma III_4.

Na osnovu osobina figura koje se dobijaju jedna iz druge kretanjem, zaključujemo:

(i) ako su A i B bilo koje dve tačke nekog oricikla, tada je $(A, B) \overset{\circ}{\cong} (B, A)$,

(ii) ako su A, B, C, D, E i F tačke nekog oricikla, takve da je $(A, B) \overset{\circ}{\cong} (C, D)$ i $(A, B) \overset{\circ}{\cong} (E, F)$, tada je $(C, D) \overset{\circ}{\cong} (E, F)$,

(iii) ako su C i C' tačke duži AB i $A'B'$ takve da je $(A, C) \overset{\circ}{\cong} (A', C')$ i $(B, C) \overset{\circ}{\cong} (B', C')$, tada je i $(A, B) \overset{\circ}{\cong} (A', B')$

Odavde sledi da su na orisferi zadovoljene i ostale aksiome podudarnosti Hilbertovog sistema aksioma.

Dalje, treba proveriti da li važe aksiome neprekidnosti, tj. treba pokazati da su za oricikle na orisferi zadovoljene Arhimedova i Kantorova aksioma koje u ovom slučaju glase:

Arhimedova aksioma: Ako su AB i CD bilo koje dve duži, tada na polupravoj AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, ..., A_n$ takvih da je

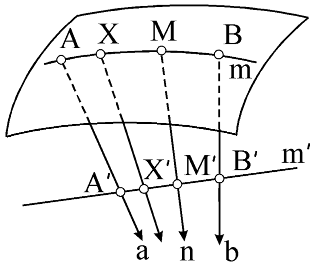
$\mathcal{B}_o(A_1, A_2, ..., A_n)$, pri čemu je svaka od duži AA_1, A_1A_2,...,$A_{n-1}A_n$ podudarna duži CD i $\mathcal{B}_o(A, B, A_n)$.

Kantorova aksioma: *Ako je $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ...$ niz duži na nekom oriciklu, takvih da svaka od tih duži sadrži sledeću, tada postoji tačka X koja pripada svakoj od duži toga niza.*

Poznato je da su ove dve aksiome ekvivalentne Dedekindovom principu, pod uslovom da su prve tri grupe aksioma Apsolutne geometrije zadovoljene. Kako je kod orisfere to slučaj, to će, dakle na orisferi aksiome neprekidnosti biti zadovoljene, ako za svaki oricikl orisfere bude zadovoljen Dedekindov princip.

U tom cilju posmatrajmo oricikl m orisfere. Neka je u skupu tačaka tog oricikla izvršena neka Dedekindova podela na klase. Uzmimo u prvoj klasi tačku A, a u drugoj klasi tačku B. Obeležimo sa a i b ose orisfere, koje prolaze kroz tačke A i B, i izaberimo na njima, respektivno, tačke A' i B'. Prava m' koja je određena tačkama A' i B' i oricikl m, pripadaju istoj ravni π i stoga osa n oricikla, koja prolazi kroz tačku M' prave m' seče orisferu u tački M uočenog oricikla m.

Na taj način je uspostavljena jednoznačna korespondencija između tačaka prave m' i tačaka oricikla m, pa tačke prave m' možemo podeliti u dve klase, tako da tačka pripada prvoj klasi ako njoj odgovarajuća tačka na oriciklu pripada prvoj klasi, a pripada drugoj klasi ako njoj odgovarajuća tačka na oriciklu pripada drugoj klasi. Dakle, sve tačke na pravoj m' podeljene su na dve klase, tako da svaka tačka pripada jednoj i samo jednoj klasi i svaka tačka prve klase stoji ispred svake tačke druge klase, tj. ova podela tačaka na pravoj m' zadovoljava sve uslove Dedekindovog preseka (Slika 7.20.).



Slika 7.20.

Na pravama Hiperboličkog prostora Dedekindov princip je zadovoljen. Znaqi, jedna od dve pomenute klase tačaka na pravoj m' ima krajnji element. Pretpostavimo, određenosti radi, da druga klasa tačaka prave m' ima početnu tačku i obeležimo je sa X'. Ako tačke A' i B' pripadaju raznim klasama, onda je tačka X' između A' i B', ili se u graničnom slučaju, poklapa sa B'. Tačka X, koja na oriciklu odgovara tački X' pripada drugoj klasi tačaka Dedekindovog preseka na oriciklu, i takođe je između A i B, ili se poklapa sa B.

Ako tačka X nije prva tačka druge klase, na oriciklu m postoji tačka Y, koja se nalazi između A i X, a pripada drugoj klasi. Osa y orisfere, koja prolazi kroz tačku Y, je takođe između osa a i x koje odgovaraju tačkama A i X i stoga seče pravu m' u tački Y', koja je između tačaka A' i X'. Dakle, tačka Y' koja odgovara tački Y, je između A' i X', a pripada drugoj klasi na pravoj m', jer tačka Y pripada drugoj klasi. Odavde zaključujemo da na pravoj m' tačka X' nije prva tačka druge klase, a to je u protivrečnosti sa pretpostavkom. Ta protivrečnost nam govori da na uočenom oriciklu tačka X mora biti prva tačka druge klase. Analogno, pokazuje se da je X poslednja tačka prve klase na pravoj m'.

Dakle, ma kakva god bila Dedekindova podela tačaka oricikla m na klase, jedna od klasa te podele ima krajnji element. To znači da u unutrašnjoj geometriji orisfere važi Dedekindov princip, što je ekvivalentno s tim da su zadovoljene obe aksiome neprekidnosti Hilbertovog sistema aksioma.

Do sada smo razmatrali aksiome geometrije na orisferi koje su analogne aksiomama iz Apsolutne planimetrije. Ostaje nam da razjasnimo još pitanje aksiome paralelnosti.

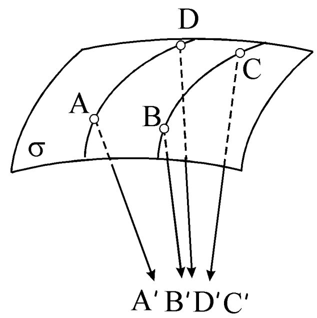
Aksioma paralelnosti

Na orisferi σ uočimo oricikl BC i tačku A koja pripada orisferi, ali ne i uočenom oriciklu. Postavlja se pitanje, da li kroz tačku A prolaze oricikli orisfere koji nemaju zajedničkih tačaka sa oriciklom BC, i ako ih ima, koliko ih je. U tom cilju, u datoj tački A postavimo oricikl AD (Slika 7.21.).

Potrebno je i dovoljno da se oricikli AD i BC ne seku, da se u stvari ne seku dijametralne ravni $AA'D'D$ i $BB'C'C$. Pri tome dijametralna ravan $AA'D'D$ koja sadrži oricikl AD sadrži i osu AA' orisfere, dok dijametralna ravan $BB'C'C$ koja sadrži oricikl BC, sadrži i ose BB' i CC'. Imajmo na umu da su prave AA', BB' i CC' međusobno paralelne jer pripadaju paraboličkom snopu na kome razmatramo orisferu σ.

Znamo da je prava paralelna s nekom ravni ako je paralelna s bilo kojom pravom te ravni. Zbog toga je osa AA' paralelna s ravni $BB'C'C$ jer ta ravan sadrži pravu BB', koja je paralelna s pravom AA'.

Međutim, postoji samo jedna ravan koja ne seče zadatu ravan $BB'C'C$ a sadrži pravu AA'. To je upravo dijametralna ravan $AA'D'D$ koja sadrži



Slika 7.21.

oricikl AD. Dakle, kroz tačku A orisfere koja leži van nekog oricikla BC prolazi jedan i samo jedan oricikl AD koji zadati oricikl ne ceče. Na taj način dolazimo do *osnovne teoreme geometrije na orisferi*:

Teorema 7.10.1. *Unutrašnja geometrija orisfere prostora Lobačevskog je Euklidska geometrija, pri čemu ulogu pravih imaju oni oricikli orisfere, koji pripadaju ravnima koje sadrže ose orisfere.*

Ova teorema je od izvanredne važnosti. S jedne strane zato što ima važnu ulogu u daljem izgrađivanju Hiperboličke geometrije. S druge strane, zato što pokazuje da, iako je pri izgrađivanju Hiperboličkog geometrijskog sistema odbačena Hilbertova aksioma paralelnosti, Euklidska planimetrija je sačuvala svoju egzistenciju; razlika je samo u tome što se ona sada realizuje na jednoj sasvim drugoj površi - na orisferi.

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo da se sve osnovne teoreme geometrije na orisferi mogu dobiti iz aksioma euklidske planimetrije ako se u njima zamene reč *prava* sa *oricikl*, a reč *ravan* sa *orisfera.*

Ova važna činjenica bila je poznata i Lobačevskom i igrala je važnu ulogu pri izgradnji Neeuklidske geometrije. Ako bismo iz bilo kojih razloga utvrdili da Euklidov postulat nije valjan, to još uvek ne bi značilo da je Euklidska geometrija izgubila svoj razlog postojanja. Ona bi i dalje važila ako ne za ravan, onda svakako za orisferu, tj. za jednu površ prostora Lobačevskog.

Na osnovu svega što smo utvrdili za međusobne odnose Euklidske geometrije i geometrije na orisferi, lako je sada izgraditi geometriju na orisferi. Zbog analogije koju smo otkrili možemo se služiti sa već ranije poznatim rezultatima Euklidske geometrije i u njima zameniti reči prava i ravan sa analognim osnovnim pojmovima oricikl i orisfera, pa odmah dobijamo odgovarajuće teoreme geometrije na orisferi.

Navedimo, neke značajnije činjenice do kojih bismo došli izgrađujući na taj način geometriju na orisferi:

(i) Zbir unutrašnjih uglova trougla koga čine tri luka oricikla na orisferi iznosi dva prava ugla.

(ii) Za dva trougla na orisferi kažemo da su slični ako su im odgovarajući uglovi jednaki. Odgovarajuće stranice takvih trouglova su nejednake.

Da na orisferi postoje slični trouglovi, može se zaključiti po tome što analogni stav važi u Euklidskoj ravni.

(iii) Između stranica i uglova trougla na orisferi postoje isti odnosi koji postoje i za trouglove Euklidske ravni. To drugim rečima znači da za trouglove na orisferi važe poznate trigonometrijske relacije trougla Euklidske ravni.

7.11 Unutrašnja geometrija sfere

Prilikom izgradnje unutrašnje geometrije na sferi, dolazi se do sasvim drugačijih rezultata, nego u slučaju unutrašnje geometrije orisfere i ekvidistantne površi.

Ulogu pravih u ovom slučaju imaju *dijametralni preseci sfere*, tj. njeni *najveći* ili *glavni krgovi* - nazivamo ih i *geodezijskim linijama sfere.*

Pokazali smo da na orisferi važi aksioma koja kaže da kroz bilo koje dve tačke orisfere prolazi jedan i samo jedan oricikl. Videli smo da slična aksioma važi i za ekvidistantnu površ. Tačnije, i njene bilo koje dve tačke spaja jedna i samo jedna geodezijska ekvidistanta.

Na trećoj episferi - sferi - ne važi u opštem slučaju navedena aksioma. Naime, dvema dijametralnim tačkama sfere ne prolazi samo jedna, već beskonačno mnogo geodezijskih linija (glavih krugova sfere). Pokazuje se i da neke druge aksiome koje važe za unutrašnju geometriju orisfere i ekvidistantne površi, ne važe na sferi, o čemu će biti reči kasnije. Iz ovakvih razloga, na sferi gube opštost teoreme iz Apsolutne geometrije. Stoga prilikom izgradnje unutrašnje geometrije na sferi ne može se ići istim putem kojim smo izgrađivali ostale geometrije, tako što bi menjali reči *prava* sa *glavni krug*, a *ravan* sa *sfera.*

Nemački matematičar Riman[1] pokazao je da je geometriju na sferi moguće izgraditi aksiomatski na sličan način kao što su aksiomatski izgrađene i geometrije Euklida i Lobačevskog.

Riman je izučavao unutrašnju geometriju sfere u pravcu, da se zamisli takva geometrija u kojoj su sve prave bezgranične, ali same u sebe zatvorene,

[1]George Fridrih Bernhard Riman (1826 - 1866), nemački matematičar

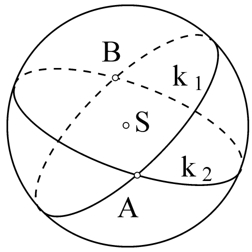
s tim da sve imaju jednu istu, ali konačnu dužinu. Primetimo da slično svojstvo imaju glavni krugovi neke sfere. Oni su bezgranični u smislu što se na njima ne može naći tačka koja bi bila *krajnja*, granična. S druge strane svi glavni krugovi neke sfere imaju konačnu i međusobno jednaku dužinu.

U Rimanovoj ravni ne može se tačkom van prave povući ni jedna prava disjunktna s tom pravom. U toj ravni uopšte ne postoje paralelne prave. Upravo tu se vidi sličnost s glavnim krugovima sfere: na sferi ne postoje dva međusobno paralelna glavna kruga.

Za Rimanovu geometriju karakteristično je da se na njoj realizuje:
Hipoteza tupog ugla: *U četvorouglu s tri prava ugla četvrti ugao je tup.*

Iz tog razloga u Rimanovoj geometriji važe svi rezultati do kojih su došli Sakeri i Lambert uz tu hipotezu. Istaknimo da je zbir uglova u ovoj geometriji veći od dva prava ugla, a površina trougla proporcionalna ekscesu - višku zbira uglova iznad dva prava ugla.

Rimanova geometrija dobila je naziv i *Eliptička geometrija.*



Slika 7.22.

Kako u Rimanovoj geometriji ne postoje paralelne prave, to se bilo koje dve prave Eliptičke geometrije seku. U ovom pogledu, pokazuje se da za dalji razvoj te geometrije postoje dve mogućnosti. U jednom obliku ove Neeuklidske geometrije seku se bilo koje dve prave uvek u istoj tački. U drugoj formi Eliptičke geometrije dve prave seku se uvek u dve tačke koje su međusobno udaljene za polovinu dužine pravih. Zbog analogije ovog oblika Eliptičke geometrije sa geometrijom na sferi sledi naziv *Sferno - eliptička geometrija.*

Na sferi, bilo koja dva glavna kruga k_1 i k_2 seku se uvek u dve tačke A i B koje su međusobno uzdaljene za polovinu dužine celog kruga (Slika 7.22.). Onaj oblik Rimanove geometrije u kojoj se prave seku samo u jednoj tački zove se *Eliptička geometrija.* Što su manji likovi u obe Eliptičke geometrije, to se njihova svojstva manje razlikuju od analognih svojstava odgovarajućih likova Euklidske geometrije. Upravo u tome je Eliptička geometrija slična geometriji Lobačevskog.

Sferno - eliptičku geometriju možemo preslikati na sferu. To nam daje za pravo da je smatramo *unutrašnjom geometrijom sfere.* Pri tom preslikavanju pravama Sferno - eliptičke geometrije odgovaraju veliki krugovi sfere. Svi stavovi Sferno - eliptičke geometrije prelaze pri tom preslikavanju u analogne stavove euklidske Sferne geometrije.

7.12 Unutrašnja geometrija episfera - rezime

Rezimirajmo rezultate dosadašnjih razmatranja o unutrašnjoj geometriji episfera. Videli smo da uz Euklidsku geometriju postoje dve Neeuklidske geometrije. Euklidska geometrija je nazvana i Parabolička geometrija, dok se Rimanova geometrija naziva Eliptička, a geometrija Lobačevskog naziva se Hiperbolička geometrija.

Videli smo da pomenute tri geometrije predstavljaju unutrašnje geometrije triju episfera prostora Lobačevskog. Unutrašnja geometrija sfere je Eliptička, orisfere Parabolička, a ekvidistantne površi Hiperbolička geometrija.

Te tri geometrije bitno se razlikuju po aksiomi o paralelama koje se mogu povući tačkom van prave, odnosno geodezijske linije određene episfere. Tačkom van geodezijske linije ne prolazi nijedna paralela u Eliptičkoj geometriji. U Paraboličkoj geometriji prolazi jedna paralela, a u Hiperboličkoj geometriji mogu se povući kroz jednu tačku van geodezijske linije dve paralele s tom linijom.

Videli smo da se te geometrije razlikuju između ostalog i prema zbiru uglova trougla. U Hiperboličkoj geometriji zbir uglova trougla iznosi manje od $2R$, zbir uglova trougla Paraboličke geometrije jednak je $2R$, dok je u trouglu Eliptičke geometrije zbir uglova veći od $2R$.

Sakeri i Lambert su u svojom istraživanjima postavili, pored navedene hipoteze tupog ugla, i *hipotezu oštrog ugla*: *U četvorouglu s tri prava ugla četvrti ugao je oštar.* Znamo da se njihova hipoteza oštrog ugla realizuje u geometriji Lobačevskog. Razvijajući tu hipotezu, oba istraživača nisu mogla otkriti bilo kakvu neprotivrečnost, što je i jasno jer ni u Hiperboličkoj geometriji, u kojoj se ta hipoteza realizuje, ne postoje protivrečnosti. Inače, Sakeri i Lambert su došli do protivrečnosti pri razvijanju hipoteze tupog ugla. Na protivrečnost se nailazi ako se usvoji pretpostavka koja se u njihovo doba smatrala sama po sebi razumljiva da prave treba shvatiti kao linije beskonačne dužine.

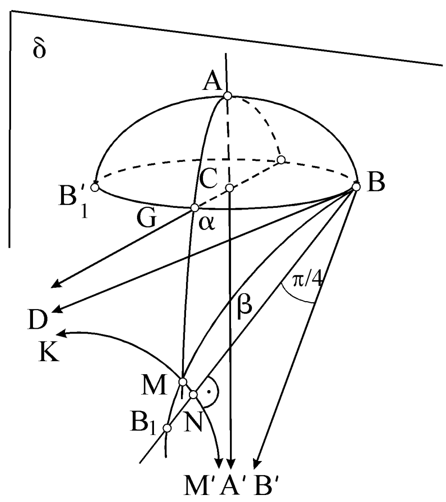
Da su Sakeri i Lambert već tada došli na ideju da odbace takvo svojstvo pravih i zamene ga onim koje je predložio Riman pri razvijanju svoje Eliptičke geometrije, pokazalo bi se da ni u hipotezi tupog ugla ne može biti protivrečnosti. U tom slučaju oni bi već tada, znatno pre Rimana, otkrili Eliptičku geometriju.

Kao što je Lobačevski dao pravi odgovor na pitanje geometrije koja usvaja hipotezu oštrog ugla, tako je Riman našao pravilan odgovor i na problem hipoteze tupog ugla. I jedna i druga hipoteza realizuju se u dve Neeuklidske geometrije, od kojih je svaka u sebi neprotivrečna i logična, kao što je to Euklidska geometrija.

Glava 8

Trigonometrija hiperboličke ravni

8.1 Osnovna formula



Slika 8.1.

U ovom paragrafu ćemo koristiti činjenicu da orisfera poseduje Euklidsku geometriju kao svoju unutrašnju geometriju.

Posmatrajmo orisferu, na njoj tačku A, a zatim i oricikl te orisfere koji prolazi kroz tačku A. Izaberimo na tom oriciklu proizvoljnu tačku B i obeležimo sa δ ravan oricikla AB. Neka je γ ravan koja prolazi kroz tačku B, a normalna je na osu orisfere AA' koja prolazi kroz tačku A. Primenom Teoreme 7.4.4. ravan γ seče orisferu po krugu, čije je središte tačka C, presek ravni γ i ose AA' orisfere. Presek ravni δ i γ je prava CB. Osa BB' orisfere u tački B, pripada ravni δ i paralelna je sa pravom AA' te ravni.

Neka je BD tangenta u tački B na krug koji se dobija u preseku orisfere i ravni γ. Prava BD pripada ravni γ i normalna je na ravan δ. Neka je CG prava ravni γ, koja prolazi kroz tačku C i paralelna je pravoj BD u istom smeru. Prave CG i AA' određuju ravan α, dok prave BD i BB' određuju drugu ravan β. Svaka od ove dve ravni sadrži po dve prave koje se seku, a paralelne su drugoj ravni. Pozivajući se na Teoremu 6.7.7. te dve ravni se seku po nekoj pravoj KM', koja je u jednom smeru paralelna pravama CG i BD, a u drugom smeru je paralelna osama AA' i BB' orisfere. Odavde sledi da je prava KM' osa orisfere. Neka je M tačka u kojoj ona seče orisferu. Ravni α i β seku orisferu po oriciklima AM i BM.

Teorema 8.1.1. *Luk $\overset{\frown}{BM}$ oricikla, koji je određen tačkama B i M, je konstantan, tj. ne zavisi od položaja tačke B na oriciklu AB.*

Dokaz: Ugao $\measuredangle DBB'$ je prav, a prava KM' je granična prava tog ugla. Normala BN konstruisana iz tačke B na pravu KM' sa svakim krakom tog ugla obrazuje ugao $\pi/4$. S druge strane, duž BN je duž paralelnosti za ugao $\measuredangle DBN \cong \measuredangle B'BN$, pa kako je ugao $\measuredangle B'BN$ konstantan to je i duž BN konstantna. Dalje, BN je visina luka $\overset{\frown}{BB_1}$ oricikla BM, gde je B_1 tačka oricikla koja je simetrična sa B u odnosu na M. Kako je luk oricikla određen svojom visinom, to je i njegova polovina, tj. luk $\overset{\frown}{BM}$ određen visinom. $\square$

Definicija 8.1. Konstantni luk $\overset{\frown}{BM}$ oricikla zove se *konstanta hiperboličkog prostora*, ili *poluprečnik krivine hiperboličkog prostora* i obeležava se sa R.

Kako na orisferi važi Euklidska geometrija, iz pravouglog trougla ΔABM na orisferi sledi:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BM} \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle BAM,$$

kako je $\overset{\frown}{BM} = R$, to je

$$\overset{\frown}{AB} = R \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle BAM. \tag{8.1}$$

Uglovi $\measuredangle BAM$ i $\measuredangle BCG$ su podudarni jer je svaki od njih ugao normalnog preseka diedra, kojeg obrazuju ravni α i δ. S druge strane je CB normalno na BD, a prave CG i BD su paralelne u istom smeru, sledi da je ugao

$\measuredangle BCG$ ugao paralelnosti za duž CB. Ako duž CB obeležimo sa a, imamo da je

$$\measuredangle BAM = \Pi(a),$$

iz (8.1) sledi

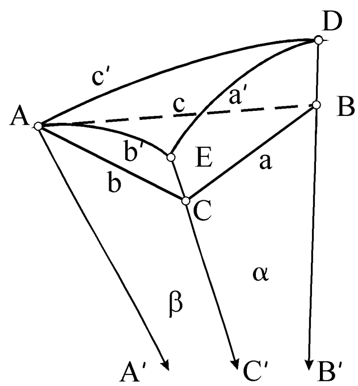
$$\overset{\frown}{AB} = R \cdot \operatorname{ctg} \Pi(a), \tag{8.2}$$

pa je

$$\overset{\frown}{BB'_1} = 2R \cdot \operatorname{ctg} \Pi(a), \tag{8.3}$$

gde je B'_1 ona tačka oricikla AB, koja je simetrična sa B u odnosu na A, tj. $\overset{\frown}{BB'_1} = 2 \cdot \overset{\frown}{AB}$.

8.2 Trigonometrijske formule pravouglog trougla hiperboličke ravni



Slika 8.2.

Neka je $\measuredangle ACB$ ugao trougla ΔABC hiperboličke ravni, i neka je $\measuredangle ACB$ prav ugao. Neka su a i b njegove katete, a c njegova hipotenuza. Konstruišimo pravu koja prolazi kroz tačku B, i koja je normalna na ravan trougla ΔABC (Slika 8.2.). Skup svih pravih u prostoru, koje su paralelne toj pravoj u istom smeru, je parabolički snop pravih. Uočimo orisferu koja prolazi kroz tačku A. Neka orisfera seče svoje ose koje prolaze kroz tačke B i C respektivno u tačkama D i E. Na orisferi dobijamo trougao ΔAED. Dokazaćemo da je njegov $\measuredangle AED$ prav. Obeležimo sa α ravan koju određuju ose BB' i CC' orisfere. Ta ravan prolazi kroz normalu BB' ravni ABC i zato je i normalna na ravan trougla. Prava AC pripada ravni trougla koja je normalna na α, i u toj ravni je normalna na BC. Sledi da je AC normalna na α. Kako ravan β koju određuju ose AA' i CC' orisfere, prolazi kroz pravu AC, onda je i ravan β normalna na ravan α. Diedar koji obrazuju ravni α i β je prav. Ugao normalnog preseka tog diedra je ugao $\measuredangle AED$, pa sledi da je i on prav. Ugao $\measuredangle ADE$ trougla ΔADE na orisferi podudaran je uglu $\measuredangle ABC$ trougla ΔABC. Svaki od tih uglova je ugao normalnog preseka diedra, koji obrazuju ravan α sa ravni ABD.

Kako za unutrašnju geometriju orisfere važi Euklidska geometrija, to za pravougli trougao ΔAED važe sve formule Euklidske trigonometrije: ako su a', b', i c' katete, odnosno hipotenuza trougla ΔAED onda je:

$$b' = c' \cdot \sin \measuredangle ADE,$$

iz (8.2) sledi

$$b' = R \cdot \operatorname{ctg} \Pi(b), \quad c' = R \cdot \operatorname{ctg} \Pi(c),$$

tj.

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \cdot \sin \measuredangle B. \tag{8.4}$$

Slično dobijamo

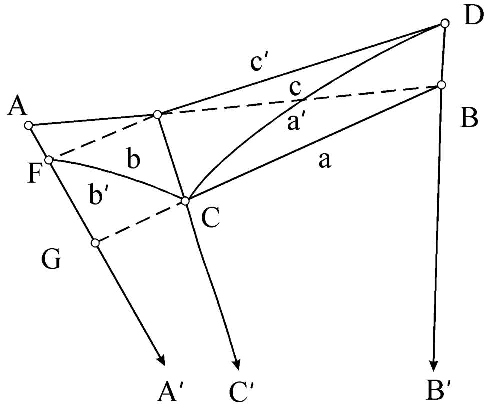
$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \cdot \sin \measuredangle A. \tag{8.5}$$

Relacija (8.4) daje vezu između hipotenuze, katete i naspramnog oštrog ugla pravouglog trougla hiperboličke ravni. Da bi izrazili zavisnost između kateta i jednog oštrog ugla, posmatraćemo pravougli trougao ΔABC sa pravim uglom $\measuredangle ACB$, katetama a i b i hipotenuzom c (Slika 8.3.). Neka je BB' normalna na ravan trougla ΔABC, posmatrajmo parabolički snop pravih čiji su elementi paralelni pravoj BB' u istom smeru. Uočimo i orisferu koja prolazi kroz tačku C i normalna je na dati snop pravih. Neka su D i F tačke u kojima ose BB' i AA' seku orisferu, respektivno. Sada na orisferi dobijamo trougao ΔFCD, kod koga je ugao $\measuredangle FCD$ prav, a da je ugao $\measuredangle FDC \cong \measuredangle ABC$, pokazuje se isto kao i u prethodnom slučaju. Katete trougla ΔFCD obeležićemo sa a' i b', a hipotenuzu sa c'. Za taj trougao važe sve formule Euklidske geometrije pa imamo:

$$b' = a' \cdot \operatorname{tg} \measuredangle CDF. \tag{8.6}$$

Neka je G podnožje normale konstruisane iz tačke C na pravu AA'. Tada je CG visina onog luka oricikla čija je polovina luk $\overset{\frown}{CF} = b'$, te kako važi (8.2) sledi:

$$b' = R \cdot \operatorname{ctg}(CG).$$



Slika 8.3.

Iz pravouglog trougla $\triangle CGA$ na osnovu (8.4) imamo:

$$\operatorname{ctg}\Pi(CG) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\sin\measuredangle A'AC,$$
$$\operatorname{ctg}\Pi(CG) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\sin\Pi(b),$$

jer je zbog normalnosti pravih AC i CC', $\measuredangle A'AC = \Pi(b)$, te onda

$$b' = R\cdot\operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\sin\Pi(b) = R\cdot\cos\Pi(b). \tag{8.7}$$

Kako važi (8.2.), sledi

$$a' = R\cdot\operatorname{ctg}\Pi(a), \tag{8.8}$$

jer je a visina onog oricikla čija je polovina luk $a' = \overset{\frown}{CD}$. Ako (8.7) i (8.8) zamenimo u (8.6) i podsetimo se da je

$$\measuredangle CDF \cong \measuredangle CBA,$$

sledi

$$\cos\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(a)\cdot\operatorname{tg}\measuredangle B. \tag{8.9}$$

Analogno i

$$\cos\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\operatorname{tg}\measuredangle A. \tag{8.10}$$

Na sličan način se mogu izvesti i sledeće formule:

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b), \tag{8.11}$$

$$\cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cdot\cos\measuredangle B, \tag{8.12}$$

$$\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cdot\cos\measuredangle A, \tag{8.13}$$

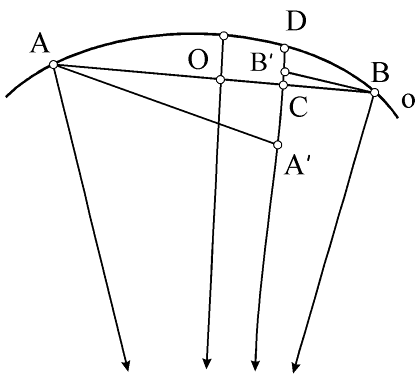
$$\sin\measuredangle A = \sin\Pi(b)\cdot\cos\measuredangle B, \tag{8.14}$$

$$\sin\measuredangle B = \sin\Pi(a)\cdot\cos\measuredangle A, \tag{8.15}$$

$$\sin\Pi(c) = \operatorname{tg}\measuredangle A\cdot\operatorname{tg}\measuredangle B. \tag{8.16}$$

Primetimo da formule (8.14) i (8.15) nemaju svoje analogne formule u Euklidskoj geometriji, jer one izražavaju katetu pravouglog trougla pomoću njegovih oštrih uglova.

8.3 Analitički izraz funkcije Lobačevskog $\Pi(\mathbf{x})$



Slika 8.4.

U svim do sada izvedenim obrascima, koji izražavaju zavisnost između stranica i uglova pravouglog trougla, pojavljuje se i funkcija $\Pi(x)$. Iako su neke osobine te funkcije poznate, još uvek ne znamo njen eksplicitni analitički izraz. Zato su obrasci izvedeni u prethodnom izlaganju samo formalne relacije između elemenata pravouglog trougla. Da bi smo našli eksplicitni izraz funkcije Lobačevskog $\Pi(x)$, izvešćemo prvo obrasce za sabiranje funkcije Lobačevskog $\Pi(x)$. Posmatrajmo duž $AB = 2x$, i neka je tačka O središte te duži, a tačka C tačka duži OB (Slika 8.4.). Označimo sa y duž OC. Uočimo jedan od dva oricikla koji prolaze kroz tačke A i B, i neka je data osa tog oricikla koja prolazi kroz tačku C, a seče oricikl u tački D. Obeležimo sa A' i B' podnožja normala konstruisanih iz tačaka A i B

na osu CD oricikla. Na osnovu (8.2) i (8.3) imamo:

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= 2R \cdot \operatorname{ctg}\Pi(x), \\ \overset{\frown}{AD} &= R \cdot \operatorname{ctg}\Pi(AA'), \\ \overset{\frown}{BD} &= R \cdot \operatorname{ctg}\Pi(BB'). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Kako iz (8.4) važi

$$\operatorname{ctg}\Pi(AA') = \operatorname{ctg}\Pi(AC) \cdot \sin\measuredangle ACA',$$
$$\measuredangle ACA' = \Pi(y), \quad AC = x + y,$$

odavde sledi

$$\operatorname{ctg}\Pi(AA') = \operatorname{ctg}\Pi(x+y) \cdot \sin\Pi(y),$$

tj.

$$\overset{\frown}{AD} = R \cdot \operatorname{ctg}\Pi(x+y) \cdot \sin\Pi(y). \tag{8.18}$$

Analogni je i

$$\operatorname{ctg}\Pi(BB') = \operatorname{ctg}\Pi(BC) \cdot \sin\measuredangle BCB',$$

pa kako je $\measuredangle BCB' \cong \measuredangle ACA' = \Pi(y)$ i $BC = x - y$ to je

$$\operatorname{ctg}\Pi(BB') = \operatorname{ctg}\Pi(x-y) \cdot \sin\Pi(y),$$

tj.

$$\overset{\frown}{BD} = R \cdot \operatorname{ctg}\Pi(x-y) \cdot \sin\Pi(y). \tag{8.19}$$

Ako izraze dobijene za AB, AD, i BD iz (8.17), (8.18), i (8.19) unesemo u

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB},$$

imamo da je:

$$2\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{ctg}\Pi(x+y) \cdot \sin\Pi(y) + \operatorname{ctg}\Pi(x-y) \cdot \sin\Pi(y). \tag{8.20}$$

Posmatrajmo sada duž $AB = 2y$ i neka je O središte te duži, a tačka C tačka na pravoj AB takva da je B između O i C. Ako sa x obeležimo duž OC, slično kao u prethodnom postupku dobijamo:

$$2\operatorname{ctg}\Pi(y) = \operatorname{ctg}\Pi(x+y) \cdot \sin\Pi(x) - \operatorname{ctg}\Pi(x-y) \cdot \sin\Pi(x). \tag{8.21}$$

Iz formula (8.20) i (8.21) dobijamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\Pi(x+y) &= \frac{\operatorname{ctg}\Pi(x)}{\sin\Pi(y)} + \frac{\operatorname{ctg}\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}, \\ \operatorname{ctg}\Pi(x-y) &= \frac{\operatorname{ctg}\Pi(x)}{\sin\Pi(y)} - \frac{\operatorname{ctg}\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Ovo su traženi obrasci za sabiranje funkcije Lobačevskog. Posle izvesnih transformacija se mogu napisati u obliku:

$$\cos\Pi(x \pm y) = \frac{\cos\Pi(x) \pm \cos\Pi(y)}{1 \pm \cos\Pi(x)\cdot\cos\Pi(y)}. \tag{8.23}$$

Iz (8.22) i (8.23) sledi

$$\sin\Pi(x \pm y) = \frac{\sin\Pi(x)\cdot\sin\Pi(y)}{1 \pm \cos\Pi(x)\cdot\cos\Pi(y)}. \tag{8.24}$$

Ako u relaciji (8.23) izaberemo +, možemo pokazati da je

$$\frac{1-\cos\Pi(x+y)}{1+\cos\Pi(x+y)} = \frac{1-\cos\Pi(x)}{1+\cos\Pi(x)}\cdot\frac{1-\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(y)},$$

odakle sada sledi da je:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\Pi(x+y)}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\Pi(x)}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\Pi(y)}{2},$$

tj.

$$\log\operatorname{tg}\frac{\Pi(x+y)}{2} = \log\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} + \log\operatorname{tg}\frac{\Pi(y)}{2},$$

ili

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

gde je $f(x) = \log\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2}$.

Navedimo bez dokaza teoremu koja će nam biti potrebna za dalji rad

Teorema 8.3.1. *Ako je funkcija f(x) definisana i neprekidna za sve vrednosti $x \geq 0$ i ako je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, onda je:*

$$f(x) = ax,$$

gde je a konstanta.

Kako funkcija $f(x) = \log \operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2}$, zadovoljava sve uslove prethodne teoreme, sledi da je:

$$\log \operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = ax,$$

tj.

$$\Pi(x) = 2 \cdot \operatorname{arctg} e^{ax}. \tag{8.25}$$

Ostalo nam je još da odredimo konstantu a. Posmatrajmo luk krive s pri čemu je x tetiva tog luka. Tada važi relacija:

$$\lim_{x \to 0} \frac{s}{x} = 1.$$

Ova relacija važi i za oricikle. Međutim, za luk s oricikla imamo relaciju:

$$s = R \cdot \operatorname{ctg} \Pi(x),$$

sledi

$$\lim_{x \to 0} \frac{s}{x} = R \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} \Pi(x)}{x} = 1.$$

Kako je

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Pi(x)}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2}},$$

a kako je $\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{ax}$, to je

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{1 - e^{2ax}}{2e^{ax}} = \frac{e^{-ax} - e^{ax}}{2} = -\operatorname{sh}(ax) = -ax - \frac{(ax)^3}{3!} - \dots$$

Odavde je

$$R \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} \Pi(x)}{x} = R \cdot \lim_{x \to 0} \{-a - \frac{(ax)^2}{3!} - \dots\} = -R \cdot a = 1,$$

$$\text{tj. } a = -\frac{1}{R}.$$

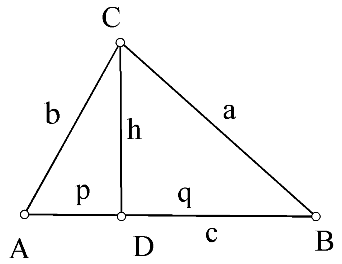
Ako zamenimo ove vrednosti za a u (8.25), za funkciju Lobačevskog dobijamo konačno izraz:

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{R}}. \tag{8.26}$$

$\square$

Iz ovog obrasca sledi da pri konačnom x, kad $R \to \infty$, $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$. Kako je slučaj $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ slučaj Euklidske geometrije, to možemo reći: *Euklidski prostor je granični slučaj hiperboličkog prostora, kada poluprečnik krivine hiperboličkog prostora teži beskonačnosti.* Dakle, apsolutna vrednost broja $K = -\frac{1}{R}$ meri odstupanje hiperboličkog prostora od Euklidskog prostora. To je i bio razlog zbog koga je i veličina K nazvana *krivinom hiperboličkog prostora*, a R *poluprečnik krivine hiperboličkog prostora.*

8.4 Trigonometrijske formule kosouglog trougla hiperboličke ravni



Slika 8.5.

Posmatrajmo trougao ΔABC hiperboličke ravni i obeležimo sa a, b, i c njegove stranice. Neka je D podnožje normale konstruisane iz tačke C na pravu AB, a p, q, i h respektivno duži AD, DB, i CD. Pretpostavimo, recimo za početak, da je tačka D između tačaka A i B tj. da je $c > p$ i $c > q$. Primenimo na trouglove ΔADC i ΔBDC obrazacformulu (8.11) Tada imamo:

$$\begin{aligned} \sin\Pi(b) &= \sin\Pi(h)\cdot\sin\Pi(p), \\ \sin\Pi(a) &= \sin\Pi(h)\cdot\sin\Pi(c-p). \end{aligned} \tag{8.27}$$

Primenom (8.24) sledi

$$\sin\Pi(c-p) = \frac{\sin\Pi(c)\cdot\sin\Pi(p)}{1-\cos\Pi(c)\cdot\cos\Pi(p)},$$

s obzirom na (8.12) sledi

$$\cos\Pi(p) = \cos\Pi(b)\cdot\cos\measuredangle A,$$

$$\sin\Pi(a) = \sin\Pi(h)\cdot\frac{\sin\Pi(c)\cdot\sin\Pi(p)}{1-\cos\Pi(b)\cdot\cos\Pi(c)\cdot\cos\measuredangle A}.$$

Ako ovu jednakost podelimo sa (8.27), imamo:

$$\frac{\sin\Pi(a)}{\sin\Pi(b)} = \frac{\sin\Pi(c)}{1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cdot\cos\measuredangle A},$$

što možemo napisati u obliku

$$\sin\Pi(a) = \sin\Pi(b)\sin\Pi(c) + \sin\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cdot\cos\measuredangle A. \tag{8.28}$$

Ako tačka D nije između tačaka A i B, nego je npr. tačka B između tačaka A i D, onda je $p > c$, primenimo obrazacformulu (8.11) na pravougle trouglove ΔADC i ΔBDC, i imamo:

$$\sin\Pi(a) = \sin\Pi(h)\cdot\sin\Pi(p-c),$$

$$\sin\Pi(b) = \sin\Pi(h)\cdot\sin\Pi(p),$$

odakle analognim postupkom kao u prethodnom slučaju dobijamo relaciju (8.28). Iz relacije (8.28) cikličnom permutacijom dobijamo još i dve analogne jednačine:

$$\sin\Pi(b) = \sin\Pi(c)\sin\Pi(a) + \sin\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\cdot\cos\measuredangle B. \qquad (8.29)$$

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) + \sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cdot\cos\measuredangle C. \qquad (8.30)$$

Ovo su formule koje u hiperboličkoj geometriji odgovaraju kosinusnoj teoremi Euklidske geometrije. Ako na trouglove ΔADC i ΔBDC primenimo formulu (8.4) imamo:

$$\operatorname{ctg}\Pi(h) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\sin\measuredangle A,\ \ \operatorname{ctg}\Pi(h) = \operatorname{ctg}\Pi(a)\cdot\sin\measuredangle B,$$

odavde je

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\measuredangle A} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\measuredangle B},\ \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\measuredangle B} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin\measuredangle C}.$$

Izjednačavajući ove dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\measuredangle A} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\measuredangle B} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin\measuredangle C},$$

što odgovara sinusnoj teoremi u Euklidskoj geometriji. Primetimo da se obrazacformula (8.28) može napisati u obliku:

$$\frac{1}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{1}{\operatorname{tg}\Pi(b)\operatorname{tg}\Pi(c)}\cdot\cos\measuredangle A.$$

S druge strane, iz (8.26) imamo:

$$\sin\Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\frac{x}{R})},\quad \cos\Pi(x) = \operatorname{th}(\frac{x}{R}),\quad \operatorname{tg}\Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\frac{x}{R})}. \qquad (8.31)$$

Ako to zamenimo u (8.31), dobijamo:

$$\operatorname{ch}(\frac{a}{R}) = \operatorname{ch}(\frac{b}{R})\cdot\operatorname{ch}(\frac{c}{R}) - \operatorname{sh}(\frac{b}{R})\operatorname{sh}(\frac{c}{R})\cdot\cos\measuredangle A.$$

Kako je još i

$$\cos\alpha = \mathrm{ch}\,(i\alpha), \quad \sin\alpha = \frac{1}{i}\mathrm{sh}\,(i\alpha),$$

to se prethodna jednačina može napisati u obliku

$$\cos(\frac{a}{Ri}) = \cos(\frac{b}{Ri})\cdot\cos(\frac{c}{Ri}) + \sin(\frac{b}{Ri})\sin(\frac{c}{Ri})\cdot\cos\measuredangle A. \tag{8.32}$$

Cikličnom permutacijom stranica i uglova, dobijaju se još dve jednačine

$$\cos(\frac{b}{Ri}) = \cos(\frac{a}{Ri})\cdot\cos(\frac{c}{Ri}) + \sin(\frac{a}{R})\sin(\frac{c}{Ri})\cdot\cos\measuredangle B.$$

$$\cos(\frac{c}{Ri}) = \cos(\frac{a}{Ri})\cdot\cos(\frac{b}{Ri}) + \sin(\frac{a}{R})\sin(\frac{b}{Ri})\cdot\cos\measuredangle C.$$

Iz sferne trigonometrije, koja pripada apsolutnoj geometriji, poznato je da su stranice a, b i c i naspramni uglovi $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C$ sfernog trougla vezani relacijom:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cdot\cos\measuredangle A, \tag{8.33}$$

kao i dvema sličnim relacijama koje se dobijaju iz ove cikličnom permutacijama, pri čemu je R poluprečnik sfere. Iz ovih formula se mogu izvesti i ostale formule sferne trigonometrije. Upoređivanjem formula (8.32) i (8.33) dolazimo do zaključka da se obrasci hiperboličke trigonometrije mogu dobiti iz formula sferne trigonometrije, ako se realni poluprečnik sfere zameni imaginarnim poluprečnikom Ri. Zato se hiperbolička ravan može smatrati sferom imaginarnog poluprečnika.

8.5 Neke osobine hiperboličke ravni

U ovoj sekciji ćemo navesti neke od osobina koje mogu da se primene na trouglove, krive i površi hiperboličke ravni.

Teorema 8.5.1. *U hiperboličkoj ravni važe sledeće relacije:*

$$\sin\Pi(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{k}},$$

$$\cos\Pi(x) = \mathrm{th}\,\frac{x}{k},$$

$$\mathrm{tg}\,\Pi(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{k}},$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{k},$$

gde je k parametar hiperboličkog prostora.

Dokaz. Funkcija Lobačevskog ima analitički izraz:

$$\Pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}},$$

odakle je

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}.$$

a) Iz relacije

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

imamo da je

$$\sin\Pi(x) = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\Pi(x)}{2}} = \frac{2\cdot e^{-\frac{x}{k}}}{1+e^{-\frac{2x}{k}}} = \frac{2}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}.$$

□

b) Na osnovu relacije:

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

imamo da je:

$$\cos\Pi(x) = \frac{1-e^{-\frac{2x}{k}}}{1+e^{-\frac{2x}{k}}} = \frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}} = \operatorname{th}\frac{x}{k}.$$

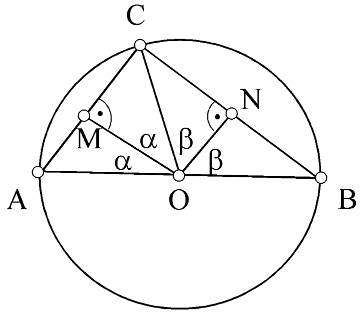
□

c) sledi neposredno iz a) i b)
d) sledi neposredno iz a) i b).

Teorema 8.5.2. *Neka je AB prečnik kruga, a C tačka na tom krugu. Za trougao ΔABC važi:*

$$\operatorname{tg}\measuredangle A\cdot\operatorname{tg}\measuredangle B = \sin^2\Pi(r),$$

gde je r poluprečnik kruga.



Slika 8.6.

Dokaz. Neka su OM i ON normale iz centra O na stranice AC i BC i označimo uglove tih normala sa poluprečnikom OC, sa α i β (Slika 8.6.). Očigledno je $\alpha + \beta = \pi/2$, jer su OM i ON istovremeno i simetrale naporednih uglova $\measuredangle COA$ i $\measuredangle COB$. Primenićemo formulu iz hiperboličke trigonometrije na pravougle trouglove ΔOAM i ΔOBN i imamo:

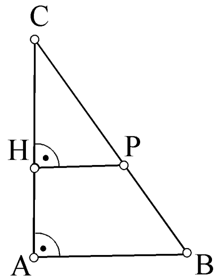
$$\sin \Pi(r) = \operatorname{tg} \measuredangle A \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin \Pi(r) = \operatorname{tg} \measuredangle B \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Kako je $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1$, jer je $\alpha + \beta = \pi/2$, množenjem zadnjih jednakosti dobijamo:

$$\sin^2 \Pi(r) = \operatorname{tg} \measuredangle A \cdot \operatorname{tg} \measuredangle B.$$

□



Slika 8.7.

Teorema 8.5.3. *U pravouglom trouglu je normala konstruisana iz sredine hipotenuze na jednu od kateta, manja od polovine druge katete.*

Dokaz. U hiperboličkoj geometriji za pravougli trougao važe formule:

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c) \cdot \sin\measuredangle A, \tag{8.34}$$

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a) \cdot \sin\Pi(b), \tag{8.35}$$

gde su a i b katete, a c hipotenuza. Primenićemo formulu (8.34) na trouglove ABC i HPC (Slika 8.7.), i imamo:

$$\operatorname{ctg}\Pi(AB) = \operatorname{ctg}\Pi(BC) \cdot \sin\measuredangle C,$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(HP) = \operatorname{ctg}\Pi(PC) \cdot \sin\measuredangle C,$$

odakle sada sledi:

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AB)}{\operatorname{ctg}\Pi(HP)} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(BC)}{\operatorname{ctg}\Pi(PC)},$$

ili

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AB)}{\operatorname{ctg}\Pi(HP)} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(2 \cdot PC)}{\operatorname{ctg}\Pi(PC)}.$$

Koristićemo formulu

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(x)}{\sin\Pi(y)} + \frac{\operatorname{ctg}\Pi(y)}{\sin\Pi(x)},$$

Za $x = y$ je:

$$\operatorname{ctg}\Pi(2x) = \frac{2\operatorname{ctg}\Pi(x)}{\sin\Pi(x)}. \tag{8.36}$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AB)}{\operatorname{ctg}\Pi(HP)} = \frac{2}{\sin\Pi(PC)}. \tag{8.37}$$

Primenićemo formulu (8.35) na trougao ΔCHP, i imamo:

$$\sin\Pi(PC) = \sin\Pi(CH) \cdot \sin\Pi(HP),$$

zamenom u formuli (8.37):

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AB)}{\operatorname{ctg}\Pi(HP)} = \frac{2}{\sin\Pi(CH) \cdot \sin\Pi(HP)},$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(AB) = \frac{2 \cdot \operatorname{ctg}\Pi(HP)}{\sin\Pi(CH) \cdot \sin\Pi(HP)},$$

s obzirom na formulu (8.37)

$$\operatorname{ctg}\Pi(AB) = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(2 \cdot HP)}{\sin\Pi(CH)},$$

Kako je

$$\frac{1}{\sin \Pi(CH)} > 1,$$

imamo:

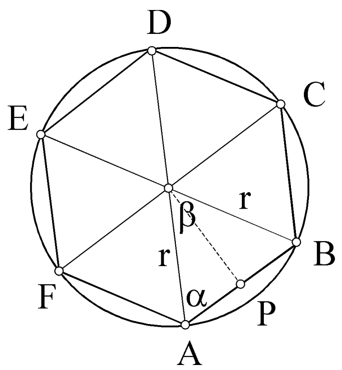
$$\operatorname{ctg} \Pi(AB) > \operatorname{ctg} \Pi(2 \cdot HP).$$

Kako je funkcija $y = \operatorname{ctg} x$ opadajuća funkcija, sledi da je:

$$\Pi(AB) < \Pi(2 \cdot HP),$$

a kako je i $\Pi(x)$ opadajuća funkcija sledi $AB > 2 \cdot HP$. □

Teorema 8.5.4. *Stranica pravilnog šestougla, upisanog u krug, veća je od poluprečnika tog kruga.*



Slika 8.8.

Dokaz. Iz tačke O konstruišimo normalu na AB (Slika 8.8.). Dobijamo dva pravougla trougla: ΔAOP i ΔBOP. Za te trouglove važi

$$\operatorname{ctg} \Pi(\frac{a}{2}) = \operatorname{ctg} \Pi(r) \cdot \sin \frac{\pi}{6},$$

tj.

$$2 \cdot \operatorname{ctg} \Pi(\frac{a}{2}) = \operatorname{ctg} \Pi(r).$$

Odavde je

$$\frac{2 \cdot \operatorname{ctg} \Pi(\frac{a}{2})}{\sin \Pi(\frac{a}{2})} \cdot \sin \Pi(\frac{a}{2}) = \operatorname{ctg} \Pi(r),$$

tj.

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) \cdot \sin \Pi(\frac{a}{2}) = \operatorname{ctg} \Pi(r),$$

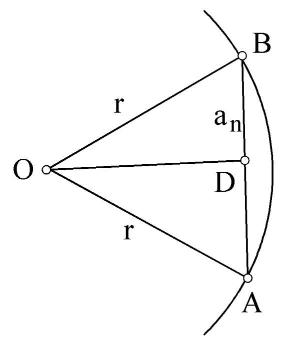
pa kako je $\sin \Pi(\frac{a}{2}) < 1$, sledi $\operatorname{ctg} \Pi(a) > \operatorname{ctg} \Pi(r)$, odakle iz činjenice da su $y = \operatorname{ctg} x$ i $\Pi(x)$ opadajuće funkcije, dobijamo $\Pi(a) < \Pi(r)$ a to znači $a > r$. □

Teorema 8.5.5. *Obim kruga poluprečnika r u hiperboličkoj geometriji je*

$$O = \lim_{n \to \infty} n \cdot a_n = 2k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k},$$

ako je krug granica pravilnih upisanih mnogouglova, kada broj strana mnogougla neograničeno raste, a svaka od njih se neograničeno smanjuje.

Dokaz. Neka je $AB = a_n$ jedna od stranica pravilnog n-tougla upisanog u krug sa centrom O i poluprečnika $OA = r$ (Slika 8.9.). Imamo:



Slika 8.9.

$$\measuredangle AOB = \frac{2\pi}{n}, \quad OD \perp AB.$$

Za pravougli trougao ΔAOD važe formule hiperboličke trigonometrije

$$\operatorname{ctg} \Pi(\frac{a_n}{2}) = \operatorname{ctg} \Pi(r) \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

ili prema Teoremi 8.5.1.

$$\operatorname{sh} \frac{a_n}{2k} = \operatorname{sh} \frac{r}{k} \cdot \sin \frac{\pi}{n}. \tag{8.38}$$

Kada n neograničeno raste, $\operatorname{sh} \frac{a_n}{2k}$ je ekvivalentno sa $\frac{a_n}{2k}$, a $\sin \frac{\pi}{n}$ je ekvivalentno sa $\frac{\pi}{n}$. Zamenom te vrednosti u (8.38), dobijamo:

$$\frac{a_n}{2k} = \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k}.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa $2kn$, na levoj strani se dobija obim mnogougla $n \cdot a_n$, koji kad $n \to \infty$, teži obimu kruga poluprečnika r, a na desnoj strani dobijamo:

$$2k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k}.$$

Dakle obim kruga je:

$$O = \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 2k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k}.$$

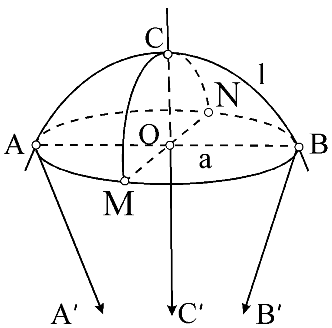
Kad parametar hiperboličkog prostora neograničeno raste, hiperbolički prostor prelazi u Euklidski i obim kruga postaje:

$$O = \lim_{R\to\infty} 2k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k} = 2\pi \lim_{R\to\infty} r \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{r}{k}}{\frac{r}{k}} = 2\pi r.$$

□

Teorema 8.5.6. *Dužina luka oricikla određenog tetivom dužine* $2a$ *je*

$$l = k \cdot \operatorname{ctg} \Pi(a).$$



Slika 8.10.

Dokaz. Krug $AMBN$ na orisferi, može se posmatrati kao krug sa centrom u tački O opisan poluprečnikom, ili kao krug sa centrom u tački C opisan lukom oricikla $l = \overset{\frown}{CB}$ (Slika 8.10.). U oba slučaja obim je isti. Kako na orisferi važi Euklidska geometrija, gde ulogu pravih igraju oricikli, biće obim kruga: $O = 2l\pi$. S obzirom na Teoremu 8.5.5. imamo da je

$$O = 2k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{k},$$

$$l = k \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{k},$$

a na osnovu Teoreme 8.5.1. sledi

$$l = k \cdot \operatorname{ctg} \Pi(a).$$

□

Teorema 8.5.7. *Površina kruga poluprečnika r je*

$$P_r = 4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Dokaz. Površina pravouglog trougla ΔAOD (Slika 8.9.) je

$$P_{\Delta AOD} = k^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \measuredangle A\right) - \frac{\pi}{n}\right]. \tag{8.39}$$

S druge strane iz već poznate formule hiperboličke trigonometrije:

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tg} \measuredangle A \cdot \operatorname{tg} \measuredangle B,$$

gde su $\measuredangle A$ i $\measuredangle B$ oštri uglovi pravouglog trougla, a c hipotenuza, primenom na pravougli trougao ΔAOD dobija se

$$\sin \Pi(r) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \measuredangle A,$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{r}{k}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \measuredangle A,$$

$$\operatorname{ch} \frac{r}{k} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \measuredangle A,$$

$$\operatorname{ctg} \measuredangle A = \operatorname{ch} \frac{r}{k} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

Sledi

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \measuredangle A\right) = \operatorname{ch} \frac{r}{k} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \tag{8.40}$$

Kad $n \to \infty$, tada $A \to \frac{\pi}{2}$, a $\frac{\pi}{2} - \measuredangle A$, kao i $\frac{\pi}{n}$ postaju beskrajno mali. Kako je

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1,$$

tj. $\operatorname{th} x \sim x$, iz (8.40) se dobija:

$$\frac{\pi}{2} - \measuredangle A = \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{k}.$$

Zamenjujemo to u formulu (8.39), dobijamo:

$$P_{\Delta AOD} = k^2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot (\operatorname{ch}\frac{r}{k} - 1).$$

Površina upisanog n-tougla sastoji se iz $2n$ trouglova, jednakih trouglu ΔAOD i zato kad $n \to \infty$, za površinu kruga poluprečnika r dobija se

$$P_r = \lim_{n\to\infty} 2n \cdot k^2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot (\operatorname{ch}\frac{r}{k} - 1) = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2\frac{r}{2k},$$

ili s obzirom na Teoremu 8.5.1. pod d)

$$P_r = 4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2\Pi(\frac{r}{2}).$$

$\square$

Teorema 8.5.8. *Površina kružnog isečka P_s za dužinu luka s je*

$$P_s = k \cdot s \cdot \operatorname{th}\frac{r}{2k}.$$

Dokaz. Površina kružnog isečka proporcionalna je luku isečka. Prema tome, na osnovu teorema 8.5.5. i 8.5.7. imamo:

$$\frac{P_s}{4\pi \cdot k^2 \operatorname{ctg}^2\Pi(\frac{r}{2})} = \frac{s}{2\pi \cdot k \cdot \operatorname{ctg}\Pi(r)},$$

odakle je:

$$P_s = k \cdot s \cdot \frac{2\operatorname{ctg}^2\Pi(\frac{r}{2})}{\operatorname{ctg}\Pi(r)} = k \cdot s \cdot \cos\Pi(\frac{r}{2}),$$

ili s obzirom na Teoremu 8.5.1. pod b) dobijamo:

$$P_s = k \cdot s \cdot \operatorname{th}\frac{r}{2k}.$$

$\square$

Teorema 8.5.9. *Površina P_l oricikličnog isečka, tj. površina dela ravni zahvaćena dvema paralelnim osama oricikla i njegovim lukom dužine l nad tetivom $2a$ iznosi*

$$P_l = 2k^2 \operatorname{ctg}\Pi(a).$$

Dokaz. Ako u formuli prethodnog zadatka stavimo da $r \to \infty$, luk s kruga prelazi u luk l oricikla, a kružni isečak P_s u deo ravni P ograničen lukom l oricikla i njegovim dvema osama AA' i BB'. Na osnovu teorema 8.5.6. i 8.5.8. dobijamo:

$$P_l = k \cdot 2k \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{k} \cdot \operatorname{th} \infty = 2k^2 \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{k},$$

ili

$$P_l = 2k^2 \operatorname{ctg} \Pi(a).$$

□

Teorema 8.5.10. *Okolina tačke u hiperboličkoj ravni sadrži veću površinu nego okolina istog poluprečnika u Euklidskoj ravni.*

Dokaz. Transformisaćemo formulu za površinu kruga. Dobijamo

$$\begin{aligned} P_H &= 4\pi k^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2k} = 4\pi k^2 \{ \frac{r}{2k} + \frac{r^3}{3! \cdot 8k^3} + \dots \}^2 \\ &= 4\pi k^2 \{ \frac{r^2}{4k^2} + \frac{r^4}{3! \cdot 8k^4} + \dots \} \\ &> 4\pi k^2 \cdot \frac{r^2}{4k^2} = r^2\pi = P_E, \end{aligned}$$

gde je P_H površina kruga u hiperboličkoj ravni, a P_E površina kruga u Euklidskoj ravni. □

Glava 9

Merenje površi

9.1 Razloživa i dopunska jednakost površi

Definicija 9.1. Kaže se da je lik Φ prostora L^n *razloživo jednak* sa likom Φ' prostora L^n prostora L^n, što simbolički označavamo $\Phi \stackrel{R}{=} \Phi'$, ako se lik Φ može razložiti na konačan broj likova $\Phi_1, \ldots \Phi_m$ a lik Φ' na konačan broj likova $\Phi'_1, \ldots \Phi'_m$, pri čemu je $\Phi_i \cong \Phi'_i$ za svako $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Definicija 9.2. Lik Φ prostora L^n je *dopunski jednak* liku Φ' prostora L^n, što označavamo $\Phi \stackrel{D}{=} \Phi'$, ako se lik Φ može dopuniti konačnim brojem likova $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, a lik Φ' istim brojem likova $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_m$ pri čemu je $\Phi_i \cong \Phi'_i$ za svako $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ a likovi $\bar{\Phi}$ i $\bar{\Phi}'$ koji se sastoje redom od likova $\Phi, \Phi_1 \cdots \Phi_m$ i $\Phi', \Phi'_1 \cdots \Phi'_m$ su razloživo jednaki, tj. $\bar{\Phi} \stackrel{R}{=} \bar{\Phi}'$.

Dalje važi sledeća teorema:

Teorema 9.1.1. *Ako su dve figure Φ_1 i Φ_2 razloživo jednake nekoj trećoj figuri Φ_3 one su i međusobno razloživo jednake. Ako su dve figure dopunski jednake nekoj trećoj, one su međusobno dopunski jednake.*

Dokaz. Na osnovu pretpostavke može se uočiti po jedno razlaganje figura Φ_1 i Φ_2, tako da svako od ovih razlaganja odgovara razlaganju figure Φ_3 na figure podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_1 i Φ_2. Oba ova razlaganja figure Φ_3 se dodatnim razlaganjima pojedinih figura mogu dovesti do poklapanja. Izvršimo sada dodatna razlaganja figura Φ_1 i Φ_2 tako da odgovaraju poslednjem razlaganju figure Φ_3. To znači da su sve figure razlaganja figura Φ_1 i Φ_2 podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_3.

Zbog tranzitivnosti podudarnosti figura sledi da su sve figure razlaganja Φ_1 podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_2, tj. figure Φ_1 i Φ_2 su razloživo jednake. Dokaz drugog dela obavlja se bez teškoća. □

Korišćenjem prethodne teoreme nije teško dokazati da važe:

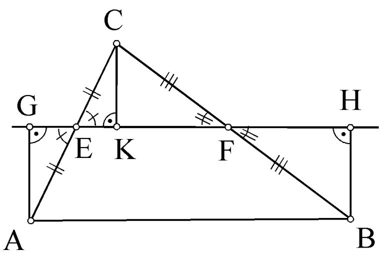
Teorema 9.1.2. *Relacija razložive jednakosti likova prostora L^n je relacija ekvivalencije.*

Teorema 9.1.3. *Relacija dopunske jednakosti likova prostora L^n je relacija ekvivalencije*

Kod trouglova se mora detaljno ispitaiti razloživa i dopunska jednakost površi, s obzirom da se u istoj problematici u euklidskoj geometriji koristi aksioma paralelnosti.

9.2 Razloživa i dopunska jednakost površi trouglova

Posmatrajmo proizvoljan trougao $\triangle ABC$ i neka su tačke E i F središta stranica AC i BC. Neka su tačke G i H podnožja normala konstruisanih iz temena A i B na pravu EF (Slika 9.1.). Potrebno je pokazati da je četvorougao $ABHG$ Sakerijev.



Slika 9.1.

Neka je tačka K podnožje normale konstruisane iz tačke C na pravu EF. Posmatrajmo sada trouglove $\triangle AGE$ i $\triangle CKE$. Imamo da važi:

$$\begin{aligned}
&\measuredangle GEA = \measuredangle CEK, \text{ (unakrsni)}\\
&\measuredangle AGE = \measuredangle CKE = R,\\
&AE = EC.
\end{aligned}$$

Na osnovu petog stava podudarnosti trouglova, sledi da je $\triangle AGE \cong \triangle CKE$. Slično se pokazuje podudarnost trouglova $\triangle CKF$ i $\triangle BHF$. Iz podudarnosti sledi jednakost ostalih elemenata, tj.

$$AG = CK, \quad BH = CK,$$

odnosno

$$AG = BH.$$

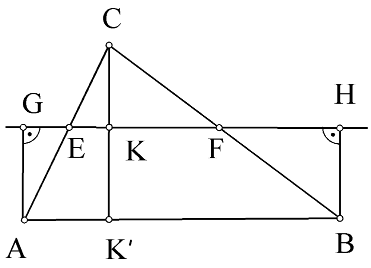
Posmatrajmo sada četvorougao $ABHG$. Kako je $AG = BH$ i $\measuredangle AGH = \measuredangle BHG = R$, te je prema definiciji $ABHG$ Sakerijev četvorougao.

Definicija 9.1. *Sakerijev četvorougao čija je protivosnovica jedna stranica trougla i čija osnovica pripada pravoj određenoj središtima ostale dve stranice trougla zove se Sakerijev četvorougao pridružen tom trouglu.*

Sada ćemo pokazati neke osobine Sakerijevog četvorougla pridruženog nekom trouglu.

Teorema 9.2.1. *Zbir uglova trougla jednak je zbiru oštrih uglova pridruženog Sakerijevog četvorougla.*

Dokaz. Posmatrajmo trougao $\triangle ABC$ i neka je četvorougao $ABHG$ pridružen Sakerijev četvorougao (Slika 9.2.), pri čemu su tačke E i F središta stranica AC i BC, a tačka K podnožje normale konstruisane iz tačke C na pravu EF, dok su tačke G i H podnožja normala konstruisanih iz temena A i B na pravu EF, respektivno.



Slika 9.2.

Pretpostavimo da važi raspored tačaka $\mathcal{B}(G, K, H)$ (Slika 9.2.). Kako su prave AG, CK i BH normale na istu pravu, tj. hiperparalelne međusobno, te prava CK ne može seći ni duž AG ni duž BH. Dakle, prava CK mora seći duž AB. Neka je K' presečna tačka ove dve prave. Poluprava CK' se nalazi u uglu $\measuredangle ACB$, te je tačka K između tačaka E i F. Dakle, važi $\mathcal{B}(E, K, F)$.

Pošto iz podudarnosti važi da je $GE = EK$, onda je raspored tačaka $\mathcal{B}(G, E, K)$. Sada je jasno da važi i raspored $\mathcal{B}(G, K, H)$. Poluprava AE pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle GAB$.

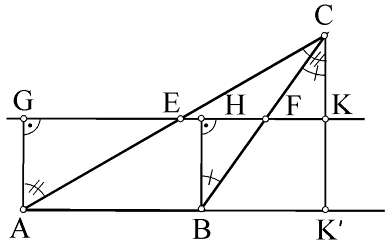
Sada je zbir oštrih uglova Sakerijevog četvorougla jednak

$$\measuredangle GAB + \measuredangle HBA = \measuredangle GAE + \measuredangle EAB + \measuredangle ABF + \measuredangle FBH.$$

Iz podudarnosti trouglova $\triangle AGE \cong \triangle CKE$ i $\triangle CKF \cong \triangle BHF$, imamo da je

$$\measuredangle ACK + \measuredangle EAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCK = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB,$$

tj. zbir uglova trougla $\triangle ABC$ jednak je zbiru oštrih uglova pridruženog Sakerijevog četvorougla.



Slika 9.3.

Razmotrimo sada slučaj kada važi raspored tačka $\mathcal{B}(G, H, K)$ (Slika 9.3.). Kako normala konstruisana iz tačke C na pravu EF ne seče duž GH, kao ni duži GA i HB, to ona ne može seći ni duž AB. Dakle, presek K' pravih CK i AB se ne nalazi na duži AB. Kako je tačka H između tačaka G i K to je i tačka B između tačaka A i K' tj. $\mathcal{B}(A, B, K')$. Poluprava CB se nalazi u uglu $\measuredangle ACK'$, pa je

$$\measuredangle ECK = \measuredangle ECF + \measuredangle FCK.$$

Kako je $HF = FK$ to je $\mathcal{B}(H, F, K)$. Dakle,

$$\measuredangle ABF = \measuredangle ABH + \measuredangle HBF.$$

Iz $GE = EK$ imamo $\mathcal{B}(G, E, K)$, odnosno

$$\measuredangle GAB = \measuredangle GAE + \measuredangle EAB.$$

Sada je zbir oštrih uglova Sakerijevog četvorougla jednak

$$\begin{aligned}\measuredangle GAB + \measuredangle HBA &= \measuredangle GAE + \measuredangle EAB + \measuredangle ABH\\ &= \measuredangle ACK + \measuredangle CAB + \measuredangle ABH\\ &= \measuredangle ACB + \measuredangle BCK + \measuredangle CAB + \measuredangle ABH\\ &= \measuredangle ACB + \measuredangle HBF + \measuredangle CAB + \measuredangle ABH\\ &= \measuredangle ACB + \measuredangle CAB + \measuredangle ABC.\end{aligned}$$

□

Teorema 9.2.2. *Svaki trougao je razloživo ili dopunski jednak pridruženom Sakerijevom četvorouglu.*

Dokaz. U prvom slučaju dokaza prethodne teoreme (Slika 9.2.), duži EF i CK razlažu trougao $\triangle ABC$ na četvorougao $ABFE$ i trouglove $\triangle EKC$ i $\triangle FKC$. Sa druge strane duži AE i BF razlažu pridružen Sakerijev četvorougao $ABHG$ na četvorougao $ABFE$ i trouglove $\triangle AGE$ i $\triangle BHF$. S obzirom da je $\triangle AGE \cong \triangle CKE$ i $\triangle CKF \cong \triangle BHF$, zaključujemo da su trougao $\triangle ABC$ i njemu pridruženi Sakerijev četvorougao $ABHG$ razloživo jednaki.

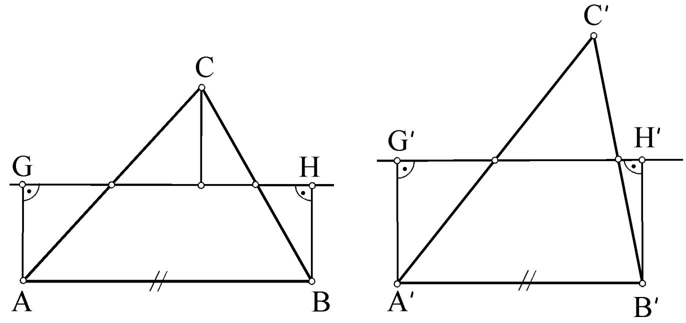
U drugom slučaju, kada tačka K ne pripada duži GH (Slika 9.3.), dopunimo trougao $\triangle ABC$ trouglom $\triangle CKF$, a Sakerijev četvorougao $ABHG$ podudarnim trouglom $\triangle BHF$. U prvom slučaju dobili smo mnogougao $ACKFB$, a u drugom mnogougao $AGFB$. S obzirom da su odgovarajući trouglovi podudarni, ova dva mnogougla su razloživo jednaka. □

Teorema 9.2.3. *Ako dva trougla imaju isti zbir uglova i jedna stranica jednog podudarna je odgovarajućoj stranici drugog, ta dva trougla su razloživo ili dopunski jednaka.*

Dokaz. Neka su dati trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, takvi da je

$$AB = A'B', \quad \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \measuredangle A' + \measuredangle B' + \measuredangle C'.$$

Konstruišimo sada nad stranicom AB Sakerijev četvorougao $ABHG$, koji je pridružen trouglu $\triangle ABC$, a nad stranicom $A'B'$ Sakerijev četvorougao $A'B'H'G'$, koji je pridružen trouglu $\triangle A'B'C'$ (Slika 9.4.). Tada je prema

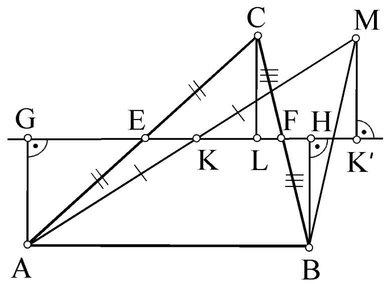


Slika 9.4.

prethodnoj teoremi, $\triangle ABC$ razloživo ili dopunski jednak četvorouglu $ABHG$, a trougao $\triangle A'B'C'$ razloživo ili dopunski jednak četvorouglu $A'B'H'G'$.

Imamo sada da su jednake protivosnovice AB i $A'B'$ Sakerijevih četvorouglova $ABHG$ i $A'B'H'G'$, a takođe i uglovi koji naležu na te protivosnovice, pa prema Teoremi 5.2.3. ovi Sakerijevi četvorouglovi su podudarni, tj. $ABHG \cong A'B'H'G'$. Sada su i trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, kao mnogouglovi razloživo ili dopunski jednaki odgovarajućim pridruženim Sakerijevim četvorouglovima, odnosno razloživo ili dopunski jednaki međusobno. $\square$

Teorema 9.2.4. *Za trougao $\triangle ABC$ postoji razloživo ili dopunski jednak trougao, čiji je zbir uglova isti kao i kod trougla $\triangle ABC$, a čija je jedna stranica unapred data duž, ako polovina te duži nije manja od kraka Sakerijevog četvorougla pridruženog trouglu $\triangle ABC$.*



Slika 9.5.

Dokaz. Neka je $ABHG$ Sakerijev četvorougao preidružen trouglu $\triangle ABC$

(Slika 9.5.). Ako polovina unapred zadate duži nije manja od kraka AG Sakerijevog četvorougla, krug sa središtem u tački A i poluprečnikom podudarnim polovini date duži, seče pravu GH u dvema tačkama. Neka je jedna od njih tačka L, takva da su L i H sa iste strane tačke G. Neka je tačka M na polupravi AL, takva da je $AL = LM$. Pokazaćemo da je $\triangle AMB$ traženi trougao.

Neka je K' podnožje normale konstruisane iz tačke M na GH. Posmatrajmo trouglove $\triangle AGL$ i $\triangle LMK'$. Imamo da je

$$\begin{aligned} &AL = LM \\ &\measuredangle AGL = \measuredangle MK'L = R \\ &\measuredangle GLA = \measuredangle MLK', \quad \text{(unakrsni)}. \end{aligned}$$

Na osnovu petog stava podudarnosti trouglova ova dva trougla su podadarna $\triangle AGL \cong \triangle LMK'$. Iz podudarnosti važi da je $AG = MK'$. S obzirom da je $AG = BH$, sledi da je $BH = MK'$. Neka je P presečna tačka pravih BM i GH. Sada je lako zaključiti da su i pravougli trouglovi $\triangle BHP$ i $MK'P$ podudarni, odakle je $BP = PM$.

Dakle, prava GH sadrži središta L i P stranica AM i BM trougla $\triangle ABM$. Zaključujemo da je Sakerijev četvorougao $ABHG$ pridružen trouglu $\triangle ABM$ i trouglu $\triangle ABC$, te je zbir uglova trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle ABM$ isti.

Prema prethodnoj teoremi, trougao $\triangle AMB$ je razloživo ili dopunski jednak Sakerijevom četvorouglu $ABHG$, odnosno trouglu $\triangle ABC$. □

Teorema 9.2.5. *Trouglovi koji imaju jednak zbir unutrašnjih uglova su razloživo ili dopunski jednaki.*

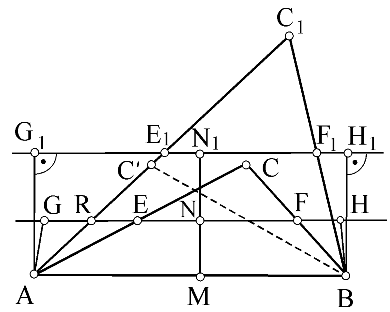
Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trouglovi sa jednakim zbirom unutrašnjih uglova. Prema prethodnoj teoremi za trougao $\triangle ABC$ postoji trougao $\triangle A_1B_1C_1$, čiji je zbir uglova jednak zbiru uglova trougla $\triangle ABC$, a čija je jedna stranica unapred data duž a. Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su razloživo ili dopunski jednaki.

Isto tako i za trougao $\triangle A'B'C'$ postoji trougao $\triangle A_1'B_1'C_1'$, čiji je zbir uglova jednak zbiru uglova trougla $\triangle A'B'C'$ i čija je jedna stranica podudarna duži a. Trouglovi $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ su razloživo ili dopunski jednaki.

Trouglovi $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ imaju jednak zbir uglova i jednu podudarnu stranicu. Sledi da su ta dva trougla razloživo ili dopunski jednaka. Dakle, trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su razloživo ili dopunski jednaki. □

Teorema 9.2.6. *Ako dva trougla nisu ni razloživo ni dopunski jednaki, tj. ako im se uglovni defekti razlikuju, postoje dva trougla koja su im respektivno razloživo ili dopunski jednaka, a koja se dobijaju tako što se jedan iseče od drugog pravom koja spaja teme sa nekom tačkom suprotne stranice drugog trougla.*

Dokaz. Neka je data duž AB i sa iste strane prave AB konstruišemo trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle ABC_1$ koji su respektivno razloživo ili dopunski jednaki polaznim datim trouglovima. Znamo da polazni trouglovi nisu niti dopunski niti razloživo jednaki.



Slika 9.6.

Neka su četvorouglovi $ABHG$ i ABH_1G_1 pridruženi Sakerijevi četvorouglovi (Slika 9.6.) trouglovima $\triangle ABC$ i $\triangle ABC_1$. Neka su E i F redom središta stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, i neka su E_1 i F_1 redom središta stranica AC_1 i BC_1 trougla ABC_1. Znamo, da prava koja prolazi kroz središte M duži AB i normalna je na AB, takođe je normalna i na H_1G_1 i na HG u njihovim središtima, redom N i N_1. Dakle, prave AB i GH su hiperparalelne i prava MN je njihova zajednička normala.

Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da važi raspored tačaka $\mathcal{B}(M,N,N_1)$. Tada je i prava GH između pravih AB i G_1H_1. Kako su tačke A i E_1 sa različitih strana prave GH, onda prava GH seče AE_1 u tački R, tako da važi raspored tačkaka $\mathcal{B}(A,R,E_1)$.

Neka je C' tačka na pravoj AC_1 takva da je $AR = RC'$. Tada zaključujemo da trougao $\triangle ABC'$ ima pridružen Sakerijev četvorougao $ABHG$. Kako je taj četvorougao u isto vreme pridružen i trouglu $\triangle ABC$ to su ta dva trougla razloživo ili dopunski jednaka. Trougao $\triangle ABC'$ je razloživo ili dopunski jednak trouglu $\triangle ABC$, a predstavlja jedan deo trougla $\triangle ABC_1$. Kako je tačka C' na stranici AC_1, teorema je dokazana. □

9.3 Uglovni defekt konveksnog mnogougla

Posmatrajmo konveksni n-tougao $\mathcal{M} = A_1A_2 \ldots A_n$. Poznato je da se on dijagonalama iz jednog temena može razložiti na $n-2$ trougla $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2}$. Ako je σ zbir uglova mnogougla, a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2}$ zbir uglova trouglova $T_1, T_2, \ldots, T_n$, redom, onda je

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-2}.$$

Neka su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-2}$ uglovni defekti trouglova $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2}$, redom, tada je

$$\sigma_1 = 2R - \delta_1, \quad \sigma_2 = 2R - \delta_2, \qquad \ldots \qquad \sigma_{n-2} = 2R - \delta_{n-2}.$$

Dakle,

$$\sigma = 2R(n-2) - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-2}).$$

Primećujemo da je zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog n-tougla u geometriji Lobačevskog manji od $2R(n-2)$, koliko iznosi zbir unutrašnjih uglova u euklidskoj geometriji.

Definicija 9.1. *Razlika*

$$\delta = 2R(n-2) - \sigma,$$

naziva se uglovni defekt konveksnog mnogougla, pri čemu je σ zbir unutrašnjih uglova mnogougla.

U nastavku daćemo neke osobine uglovnog defekta mnogougla.

Teorema 9.3.1. *Neka je dat konveksan mnogougao $\mathcal{M} = A_1A_2 \ldots A_n$, pri čemu je podeljen sa duži PQ na dva konveksna mnogougla, gde su P i Q proizvoljne tačke na stranicama mnogougla. Tada je zbir uglovnih defekata dobijenih mnogouglova jednak uglovnom defektu polaznog mnogougla $A_1A_2 \ldots A_n$.*

Dokaz. Očigledno je da tačke P i Q ne pripadaju istoj stranici polaznog mnogougla.

Neka su $P \equiv A_k$ i $Q \equiv A_s$ dva nesusedna temena datog mnogougla takva da dijagonala A_kA_s deli mnogougao na dva konveksna mnogougla $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$. Sa jedna strane dijagonale A_kA_s nalazi se $|k-s|$ stranica, dok se sa druge strane nalazi $n - |k - s|$ stranica. Za uglovne defekte δ_1 i δ_2 dobijenih konveksnih mnogouglova $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$, imamo:

$$\delta_1 = 2R(|k - s| - 1) - \sigma_1, \quad \delta_2 = 2R(n - |k - s| - 1) - \sigma_2,$$

gde su σ_1 i σ_2 redom zbirovi unutrašnjih uglova mnogouglova $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$.

Sada je

$$\delta_1 + \delta_2 = 2R(n - 2) - \sigma_1 - \sigma_2 = 2R(n - 2) - \sigma = \delta.$$

Neka je $P \equiv A_k$ $(k = 1, \dots, n)$ teme mnogougla $\mathcal{M}$, a Q tačka na stranici mnogougla A_sA_{s+1} $(s = 1, \dots, n)$ $(A_{n+1} \equiv A_1,\ A_0 \equiv A_n)$, pri čemu $s \neq k,\ s \neq k - 1$. Tada mnogouglovi imaju redom $|k - s| + 2$ i $n - |k - s| + 1$ stranica, pa je

$$\delta_1 = 2R(|k - s|) - \sigma_1, \quad \delta_2 = 2R(n - |k - s| - 1) - \sigma_2,$$

tj.

$$\delta_1 + \delta_2 = 2R(n - 1) - (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Kako u tački Q imamo dva ugla čiji je zbir $2R$, a koji nisu uglovi polaznog mnogougla $\mathcal{M}$, to je

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2R(n - 2) - \sigma.$$

Slučaj kada tačke P i Q nisu temena i obe pripadaju različitim stranicama mnogougla prepustamo čitaocu.

Teorema 9.3.2. *Neka je konveksan mnogougao $\mathcal{M}$ proizvoljno razložen na konačan broj konveksnih mnogouglova, tada je zbir uglovnih defekata dobijenih mnogouglova jednak uglovnom defektu polaznog mnogougla $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Neka je sa Φ_1 definisano neko razlaganje datog konveksnog mnogougla $\mathcal{M}$. Uočimo stranicu jednog od mnogouglova te podele, koja nije u isto vreme i stranica mnogougla $\mathcal{M}$. Kako je mnogougao $\mathcal{M}$ konveksan, prava na kojoj leži ta stranica, seče $\mathcal{M}$ u tačkama P_1 i Q_1. Razlaganje Φ_1 i duž P_1Q_1 daju neko novo razlaganje Φ_2. Može da se desi da je $\Phi_1 \equiv \Phi_2$. Prema prethodnoj teoremi, lako se zaključuje da je zbir uglovnih defekata iz razlaganja Φ_1 jednak zbiru uglovnih defekata iz razlaganja Φ_2.

Ako sada nastavimo ovaj postupak sve dok ne iscrpemo sve stranice iz razlaganja Φ_1 koje nisu istovremeno i stranice mnogougla $\mathcal{M}$. Dobićemo neko novo razlaganje Φ' pri čemu je zbir uglovnih defekata mnogouglova iz tog razlaganja jednak uglovnom defektu iz razlaganja Φ_1.

Ako posmatramo sada mnogougao $\mathcal{M}$ i duž P_1Q_1 koja razlaže taj mnogougao na dva konveksna mnogougla, prema prethodnoj teoremi znamo da je uglovni defekt mnogougla $\mathcal{M}$ jednak zbiru uglovnih defekata mnogouglova dobijenih ovim razlaganjem. Ako sada dodamo i drugu duž iz gore navedenog postupka, ponovnom primenom prethodne teoreme, dobijamo da je uglovni defekt mnogougla $\mathcal{M}$ jednak zbiru uglovnih defekata novodobijenih mnogouglova. Ako nastavimo ovaj postupak sve dok iscrpemo duži PQ iz gore navedenog postupka, dobićemo razlaganje Φ', pri čemu je zbir uglovnih defekata mnogouglova iz ovog razlaganja jednak uglovnom defektu mnogougla $\mathcal{M}$.

Dakle, zbir uglovnih defekata razlaganja Φ_1 jednak je uglovnom defektu mnogougla $\mathcal{M}$, što je i trebalo dokazati. □

Specijano važi sledeća teorema

Teorema 9.3.3. *Zbir uglovnih defekata trouglova na koje je razložen konveksan mnogougao jednak je uglovnom defektu tog mnogougla, nezavisno od razlaganja.*

Teorema 9.3.4. *Konveksni mnogouglovi sa jednakim uglovnim defektom, su razloživo ili dopunski jendnaki.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ dva konveksna mnogougla, koji imaju jednake uglovne defekte. Razložimo prvi dijagonalama iz jednog temena na trouglove $T_1, T_2, \ldots, T_n$ i drugi na trouglove $T_1', T_2', \ldots, T_m'$. U slučaju da je $m = n$ i svakom od trouglova T odgovara neki od trouglova T' sa jednakim uglovnim defektom, onda kako su trouglovi sa jednakim uglovnim defektom razloživo i dopunski jednaki sledi tvrđenje teoreme.

U slučaju da je $m \neq n$. Neka su trouglovi T_1 i T_1' trouglovi sa različitim uglovnim defektom tada na osnovu Teoreme 9.2.6. mogu desiti dva slučaja:

1) Kroz polazno teme mnogougla $\mathcal{M}$ može se konstruisati prava koja razlaže trougao T_1 na dva od kojih je jedan $\bar{T}_1$, jednakog uglovnog defekta sa trouglom T_1'. Ako iz mnogouglova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ isključimo trouglove $\bar{T}_1$ i T_1', ostaju konveksni mnogouglovi jednakih uglovnih defekata.

2) Kroz polazno teme mnogougla $\mathcal{M}'$ se može konstruisati prava koja razlaže trougao T_1' na dva trougla od kojih je jedan $\bar{T}_1'$ jednakog uglovnog defekta sa trouglom T_1. Isključivanjem trouglova $\bar{T}'_1$ i T_1, opet ostaju dva konveksna mnogougla jednakih uglovnih defekata, dok se broj trouglova mnogougla $\mathcal{M}$ smanjio za jedan.

Nastavimo ovaj postupak dok ne iscrpemo sve trouglove T i T'. Svaki od mnogouglova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ razložen je na isti broj trouglova koji imaju redom jednake uglovne defekte, čime je dokaz sveden na prvi posmatrani slučaj.

9.4 Površine mnogouglova hiperboličke ravni

Merenje površi se svodi na problem: Dodeliti svakom mnogouglu neki pozitivna broj, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) Podudarnim trouglovima su dodeljeni jednaki brojevi.

2) Ako je neki mnogougao razložen na trouglove, broj koji je dodeljen mnogouglu jednak je zbiru brojeva dodeljenih tim trouglovima.

3) Postoji mnogougao kome je dodeljen broj 1.

Definicija 9.1. *Za skup brojeva koji zadovoljava uslove* 1), 2) *i* 3) *kaže se da obrazuje sistem merenja površi mnogouglova. Broj koji je dodeljen uočenom mnogouglu zove se površinska mera ili površina mnogougla u tom sistemu merenja.*

Odredimo prvo površine trouglova, pa zatim površine mnogouglova. Pretpostavimo da je određena jedinica za merenje uglova, pa dodelimo svakom trouglu broj koji je dodeljen njegovom uglovnom defektu.

Kako su svi trouglovi koji imaju isti zbir uglova razloživo ili dopunski jednaki to razloživo ili dopunski jednaki mnogouglovi imaju iste površine, te je zadovoljen uslov 1). Takođe je zadovoljen i drugi uslov. Prema Teoremi 9.2.6. ako se trougao pravom koja spaja jedno njegovo teme sa nekom tačkom suprotne stranice razloži na dva trougla, uglovni defekt prvog trougla jednak je zbiru uglovnih defekata novodobijenih trouglova.

I obratno, ako su δ, δ_1 i δ_2 uglovni defekti trouglova T, T_1 i T_2 i ako važi da je $\delta = \delta_1 + \delta_2$, prema Teoremi 9.3.4. postoje trouglovi T' i T_1' koji su razloživo ili dopunski jednaki trouglovima T i T_1, pri čemu je T_1' deo trougla T. Ako sa T_2' označimo trougao $T' - T_1'$, njegov uglovni defekt je δ_2 i on je razloživo ili dopunski jednak trouglu T_2. Drugim rečima, ako je površina trougla T jednaka zbiru površina trouglova T_1 i T_2, postoji trougao koji je razloživo ili dopunski jednak trouglu T, a koji je zbir dva trougla razloživo ili dopunski jednaka trouglovima T_1 i T_2.

Uslovi 1) i 2) su zadovoljeni i ako se za površinu trougla uzme uglovni defekt pomnožen nekom konstantom k^2, koja je ista za sve trouglove. Ta konstanta se može izabrati tako da neki određen ili proizvoljno izabran trougao sa poznatim uglovnim defektom ima površinu 1.

Tada je $1 = k^2\delta$, odakle je $k^2 = 1/\delta$. U ovom sistemu merenja površina datog trougla sa uglovnim defektom σ je jednoznačno određena i jednaka σk^2, tj., σ/δ.

Površina trougla $\triangle ABC$ sa unutrašnim uglovima $\measuredangle A, \measuredangle B$ i $\measuredangle C$ se izražava formulom

$$P = k^2(2R - \measuredangle A - \measuredangle B - \measuredangle C).$$

Površina trougla ne može biti veća od $2k^2R$ i tu vrednost dostiže kada se radi o trouglu sa tri beskonačno daleka temena. S tim u vezi kažemo da je površina trougla ograničena.

Sto se tiče površine konveksnih mnogouglova, prema uslovu 2), ona je jednaka zbiru uglovnih defekata onih trouglova na koje je taj mnogougao razložen.

Kako površina mnogougla ne zavisi od načina razlaganja, tj. ona je jednoznačno određena i proporcionalna je uglovnom defektu mnogougla. Na osnovu izloženog zaključujemo da ne samo podudarni mnogouglovi imaju jednake površine, nego i mnogouglovi koji su razloživo ili dopunski jednaki.

Glava 10

Poenkareovi modeli geometrije Lobačevskog

10.1 Neprotivurečnost geometrije Lobačevskog

Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije. To znači, da polazeći od istog sistema polaznih pojmova, možemo izgraditi različite teorije. Dajući apstraktnim pojmovima konkretna značenja i ustanovljavanjem da sa tako uvedenim pojmovima važe određeni sistemi aksioma Euklidske geometrije ili pak geometrije Lobačevskog dolazimo do različitih interpretacija tih teorija. Te interpretacije zovemo *modelima.* Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno određen. To znači da se polazeći od različitih sistema aksioma može izgraditi jedna ista deduktivna teorija. Tako se na primer geometrija Lobačevskog i Euklidska geometrija ne moraju zasnivati na aksiomama od kojih smo mi pošli. Može se na primer poći od Vejlovog sistema aksioma (Herman Vejl) ili neke izmene unutar našeg sistema aksioma, na primer umesto aksioma podudarnosti uvesti aksiome kretanja, a umesto Dedekindove aksiome uvesti dve aksiome: Eudoks-Arhimedovu i Kantorovu aksiomu.

Pri tome se postavljaju tri značajna uslova koji karakterišu svaku deduktivnu teoriju: (i) *neprotivurečnost*, (ii) *potpunost* i (iii) *nezavisnost* sistema aksioma i samih pojmova jedne deduktivne teorije.

Zadržimo se samo na konstrukciji izvesnih modela koji će omogućiti ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije, tj. činjenicu da se unutar same teorije ne mogu izvesti dva stava koja bi bila protivurečna. Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečna. Drugim rečima, neprotivurečnost neke teorije mora počivati na neprotivurečnosti neke druge teorije. Na taj način dolazimo do iste situacije kao i pri konstrukciji deduktivne teorije gde su kao osnova morale biti uzete aksiome - tvrđenja koja se ne dokazuju već se pretpostavlja njihovo važenje. Slično, neprotivurečnost izvesne teorije mora biti pretpostavljena da bi se druge teorije mogle na njoj zasnivati. Neprotivurečnost teorije skupova može se pretpostaviti. Na osnovu nje može se dokazati neprotivurečnost teorije brojeva, na osnovu koje možemo dokazati neprotivurečnost Euklidske geometrije na tzv. aritmetičkom modelu.

Prema definiciji, hiperbolički prostor je prostor čije su tačke, prave i ravni u takvim relacijama da su zadovoljene sve aksiome I, II, III i IV grupe Hilbertovog sistema aksioma i aksioma Lobačevskog. Hiperboličku geometriju čine sve posledice ovakvog sistema aksioma. Među posledicama koje smo do sada upoznali nismo naišli na dve koje su jedna drugoj protivurečne. Cilj nam je da dokažemo da na takve protivurečne posledice nećemo naići ni pri daljem izgrađivanju hiperboličke geometrije. Drugim rečima naš cilj je da dokažemo da je hiperbolička geometrija *neprotivurečna.*

Ako se u hiperboličkoj geometriji mogu dokazati dva tvrđenja koja logički protivureče jedno drugom, uzrok tome leži u aksiomama te geometrije. Drugim rečima, hiperbolička geometrija je neprotivurečna ili protivurečna u zavisnosti od toga da li je njen sistem aksioma neprotivurečan ili protivurečan. To znači da je dovoljno da bi smo dokazali neprotivurečnost hiperboličke geometrije da dokažemo neprotivurečnost njene aksiomatike.

Same aksiome opisuju relacije među polaznim objektima a ništa ne govore o prirodi tih objekata, niti o prirodi polaznih relacija. To znači da se svaki skup objekata koji zadovoljava sve zahteve Hilbertovog sistema aksioma može posmatrati kao skup tačaka, pravih i ravni euklidskog prostora. Svaki skup objekata koji zadovoljava sve zahteve Hilbertovog sistema u kome je jedino aksioma paralelnosti zamenjena aksiomom Lobačevskog, jeste skup objekata hiperboličke geometrije. Od prirode polaznih objekata i polaznih relacija ne zavisi geometrijski sistem, već samo njegov *model*, tj. njegova *realizacija.* Prema tome, možemo imati više modela istog geometrijskog sistema. Tako se na primer hiperbolička geometrija realizuje u hiperboličkoj ravni, ali takođe i na ekvidistantnoj površi. U prvom modelu polazni objekti su tačka i prava a u dugom tačka i geodezijska ekvidistanta. Polazni objekti su u ova dva modela različiti ali je geometrijski sistem isti i sve što se u prvom sistemu može dokazati za tačke i prave, u drugom sistemu se može dokazati za tačke i geodezijske ekvidistante. Dakle, dokaz logičke neprotivurečnosti jednog sistema aksioma sastoji se u konstrukciji bar jednog modela tog sistema aksioma.

Konstruisaćemo takav model u Euklidskoj geometriji na kome će biti realizovani svi pojmovi i sve aksiome geometrije Lobačevskog, pretpostavljajući neprotivurečnost Euklidske geometrije. Pri tome ćemo se ograničiti na pokazivanje neprotivurečnosti planimetrije Lobačevskog. Na sličan način može se pokazati i neprotivurečnost stereometrije Lobačevskog. Ovde ćemo opisati samo jedan, tzv. Poenkareov (H. Poincaré) model hiperboličke geometrije. Tačnije rečeno, opisaćemo Poenkareov model hiperboličke planimetrije koji je nastao 1882. godine. Pri opisu Poenkareovog modela važnu ulogu ima inverzija u odnosu na krug. U sledećoj sekciji ćemo definisati ovu transformaciju euklidske ravni i izvesti neke njene osnovne osobine.

10.2 Inverzija u odnosu na krug

Definišimo najpre proizvod dva paralelna vektora u euklidskoj ravni.

Definicija 10.1. Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ reprezentacije dva paralelna vektora u euklidskoj ravni. Tada:
(i) ako su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ isto orjentisani onda je

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD,$$

(ii) ako su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ suprotno orjentisani onda je

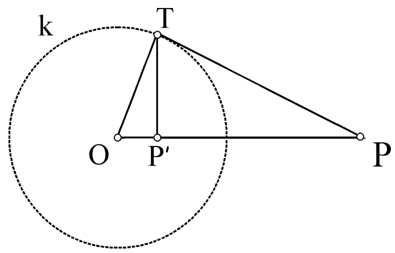
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \cdot CD.$$

Definicija 10.2. Neka je $k(O, r)$ proizvoljan krug ravni E^2 i $E^2_* = E^2 \backslash \{O\}$. Inverzijom u odnosu na krug k nazivamo transformaciju $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ koja svaku tačku $P \in E^2_*$ prevodi u tačku P' poluprave OP, takvu da je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tačku O nazivamo centrom ili središtem inverzije, duž r - poluprečnikom inverzije, veličinu r^2 - stepenim koeficijentom, krug k - krugom inverzije ψ_k a E^2_* - Gausovom ravni.

Iz definicije neposredno sledi da je inverzija u odnosu na krug bijektivna transformacija. To nije transformacija cele ravni E^2 već samo njenog dela E^2_*, jer u njoj nije definisana slika tačke O, niti je tačka O slika neke tačke ravni E^2.

Inverziju u odnosu na krug moguće je razmatrati i u takozvanoj komfornoj ravni, tj. Euklidskoj ravni E^2 proširenoj beskonačno dalekom tačkom ∞. Tada je $\psi_k(\infty) = O$ i $\psi_k(O) = \infty$.

Teorema 10.2.1. *Inverzija u odnosu na krug je involuciona transformacija.*



Slika 10.1.

Dokaz. Neka je $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ inverzija u odnosu na krug $k(O, r)$. Ako je $P \in E^2_*$ proizvoljna tačka, tada tačka $P' = \psi_k(P)$ pripada polupravoj OP (Slika 10.1.) pri čemu je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tada i tačka P pripada polupravoj OP' i važi $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2$, pa je $\psi_k(P') = P$. Dakle, zaista je $\psi_k^2 = \varepsilon$. $\square$

Teorema 10.2.2. *U inverziji $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ tačka X je invarijantna ako i samo ako X pripada krugu k.*

Dokaz. Ako je $X \in E^2_*$ invarijantna imamo da $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$ pa je $OX = r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Obratno, ako $X \in k$, tada tačka $X' = \psi_k(X)$ pripada polupravoj OX i važi $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$. Odavde je $OX' = r$, tj. tačke X i X' se poklapaju. $\square$

Teorema 10.2.3. *U inverziji $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ tački X koja se nalazi u krugu k odgovara tačka X' koja se nalazi izvan kruga k i obratno tački X koja se nalazi izvan kruga k odgovara tačka X'koja se nalazi u krugu k.*

Dokaz. Neka je O središte i r poluprečnik inverzije ψ_k. Ako je X u krugu k tada je $OX < r$ pa iz relacije $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$ sledi da je $OX' > r$, tj. tačka X je izvan kruga k.

Obratno, ako je X izvan kruga k tada je $OX > r$, odakle na isti način kao malopre sledi da je $OX' < r$, odnosno tačka X' je unutar kruga k. $\square$

Teorema 10.2.4. *Kompozicija dveju inverzija ψ_{k_1} i ψ_{k_2} definisanih u odnosu na koncentrične krugove $k_1(O, r_1)$ i $k_2(O, r_2)$ predstavlja homotetiju $\mathcal{H}_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}}$.*

Dokaz. Krugovi k_1 i k_2 su koncentrični pa pripadaju istoj ravni E^2. Neka je $X \in E^2_*$ proizvoljna tačka i $X_1, X_2 \in E^2_*$ tačke takve da je

$$\psi_{k_1}(X) = X_1, \qquad \psi_{k_2}(X_1) = X_2.$$

Tada je

$$(\psi_{k_2}\psi_{k_1})(X) = X_2.$$

Tačke X_1 i X_2 pripadaju redom polupravama OX i OX_1 pa je i tačka X_2 na polupravoj OX. Iz relacija $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX_1} = r_1^2$ i $\overrightarrow{OX_1} \cdot \overrightarrow{OX_2} = r_2^2$ sledi $\overrightarrow{OX_2} : \overrightarrow{OX} = r_2^2 : r_1^2$, tj. u homotetiji sa centrom u tački O i koeficijentom $r_2^2 : r_1^2$ tački X odgovara tačka X_2. Prema tome sledi da je

$$\psi_{k_2}\psi_{k_1} = \mathcal{H}_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}.$$

$\square$

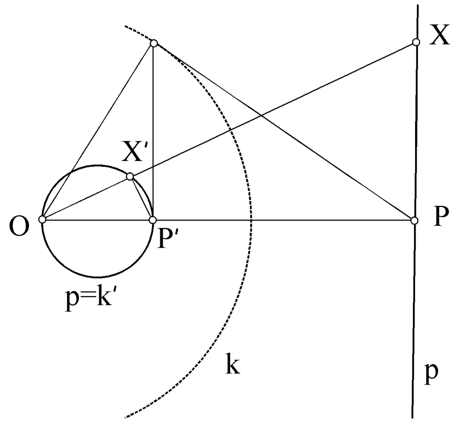
Definicija 10.3. *Lik Ω ravni E^2_* je inverzan liku Ω' ravni E^2_* ako postoji inverzija $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ koja lik Ω prevodi u lik Ω'.*

Teorema 10.2.5. *Neka su u ravni E^2 dati krug $k(O,r)$ i prava p. Tada:*
(i) *Ako prava p sadrži tačku O tada je $\psi_k(p\backslash\{O\}) = p\backslash\{O\}$,*
(ii) *Ako prava p ne sadrži tačku O tada lik $\psi_k(p)$ predstavlja krug bez tačke O.*

Dokaz. (i) Neka prava p sadrži tačku O, i neka je $X \in E^2\backslash\{O\}$ i $X' = \psi_k(X)$. Ako tačka X pripada pravoj $p\backslash\{O\}$, onda tačka X' pripada polupravoj OX pa samim tim i pravoj $p\backslash\{O\}$.

Obratno, neka $X' \in p\backslash\{O\}$. Tada je $X' = \psi_k(X)$ pa tačka X pripada polupravoj OX', pa samim tim $X \in p\backslash\{O\}$.
(ii) Prava p ne sadrži tačku O. Označimo sa P podnožje upravne iz tačke O (Slika 10.2.) na pravoj p, sa X proizvoljnu tačku prave p različitu od tačke P a sa P' i X' tačke koje u inverziji ψ_k odgovaraju redom tačkama P i X. Tada je $\measuredangle POX = \measuredangle X'OP'$ i $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'}$. Odavde sledi da su trouglovi ΔPOX i $\Delta X'OP'$ slični, pa je i $\measuredangle OPX = \measuredangle OX'P'$. Kako je ugao $\measuredangle OPX$ prav to je i ugao $\measuredangle OX'P'$ prav pa tačka X' pripada krugu k' čiji je prečnik duž OP'.

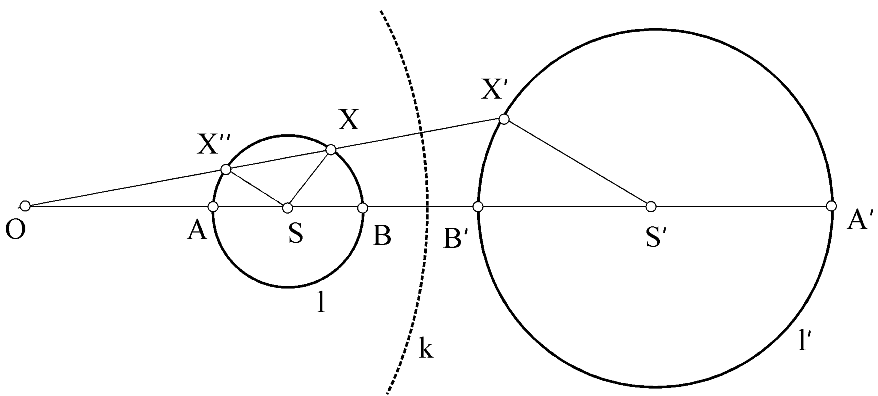
Obratno, neka tačka $X' \neq O$, P' pripada krugu k' nad prečnikom OP'. Tada je $\measuredangle OX'P'$ prav, pa su pravougli trouglovi ΔPOX i $\Delta X'OP'$ slični, odakle sledi $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'}$, tj u inverziji ψ_k tački X odgovara tačka X'. $\square$



Slika 10.2.

Teorema 10.2.6. *Neka su ravni E^2 dati krugovi $k(O,r)$ i $l(S,\rho)$. Tada važe sledeća tvrđenja:*
(i) *Ako tačka O pripada krugu l tada je $\psi_k(l\backslash\{O\})$ prava l'.*
(ii) *Ako tačka O ne pripada krugu l tada u inverziji ψ_k krugu l odgovara neki krug l'.*

Dokaz. (i) Neka je $\psi_k(l\backslash\{O\}) = l'$. Prema prethodnoj teoremi zaključujemo da je l' prava.



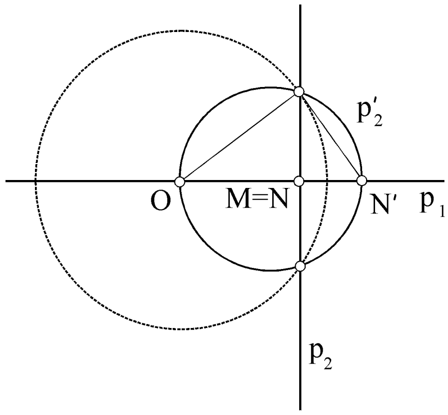
Slika 10.3.

(ii) Neka je X proizvoljna tačka kruga l, X' tačka koja u inverziji ψ_k odgovara tački X a X'' druga zajednička tačka kruga l i prave OX (Slika 10.3.).

Označimo sa t stepen inverzije ψ_k a sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l. Tada je $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ i $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Iz poslednje dve relacije dobijamo da je

$$\frac{\overrightarrow{OX'}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}.$$

Prema tome tačka X' pripada krugu l' koji u homotetiji $\mathcal{H}_{O,\frac{t}{p}}$ odgovara krugu l.



Slika 10.4.

Obratno, neka je X' proizvoljna tačka kruga l', $\mathcal{H}^{-1}_{O,\frac{t}{p}}(X')$ i X zajedničke tačke prave OX' sa krugom l. Označimo kao i malopre sa t stepen inverzije ψ_k a sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l. Tada je $\frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}$ i $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Iz poslednje dve jednakosti sledi $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ a odavde je $X' = \psi_k(X)$. $\square$

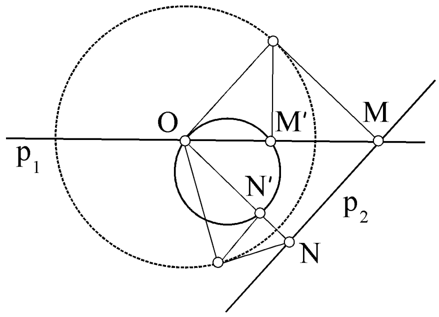
Teorema 10.2.7. (i) *Inverzija ψ_k čuva uglove među pravama, tj. ugao između dve prave jednak je uglu koji zaklapaju njihove slike.*
(ii) *Inverzija ψ_k je konformno preslikavanje, tj. ugao pod kojim se seku dve linije p i q ravni E^2 u presečnoj tački S jednak je uglu pod kojim se seku njima inverzne krive p' i q' u tački S'.*

Dokaz. (i) Neka je $k(O, r)$ krug inverzije i neka su p_1 i p_2 dve prave u ravni kruga inverzije, $p_1' = \psi_k(p_1)$ i $p_2' = \psi_k(p_2)$. Tada mogu nastupiti nekolika slučaja:

a) Prave p_1 i p_2 sadrže centar inverzije. U tom slučaju dokaz je trivijalan.

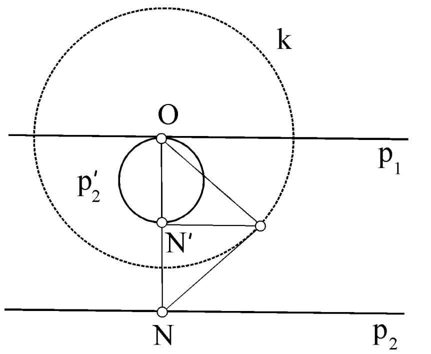
b) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Neka je N podnožje normale iz tačke O na p_2.

Ako je $M = N$ (Slika 10.4.), tada je p_2' krug nad prečnikom ON', $N' = \psi(N)$, pa je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi/2 = \measuredangle(p_1, p_2')$.



Slika 10.5.

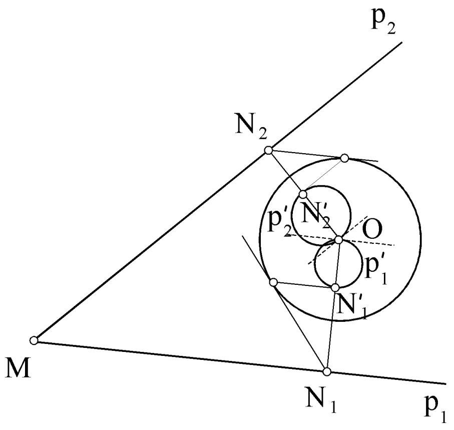
Ako $M \neq N$, tada je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi/2 - \measuredangle MON$ (Slika 10.5.) a $\measuredangle(p_1, p_2')$ kao ugao između tangente i tetive jednak periferijskom uglu nad tetivom, $\measuredangle ON'M' = \pi/2 - \measuredangle M'ON' = \pi/2 - \measuredangle MON$. Imajući u vidu da je i u ovom slučaju $p_1 = p_1'$, zaključujemo da tvrđenje važi.



Slika 10.6.

c) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$ (Slika 10.6.). U tom slučaju je $\measuredangle(p_1, p_2) = 0$. S druge strane p_2' je krug koji dodiruje p_1 u tački O. Prema tome $\measuredangle(p_1, p_2') = 0$.

d) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Neka su N_1 i N_2 (Slika 10.7.) podnožja normala iz tačke O redom na pravama p_1 i p_2.



Slika 10.7.

Ako je $M = N_1$ (Dakle $M \neq N_2$), tada je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi - \measuredangle MON$ i $\measuredangle(p_1', p_2') = \pi - \measuredangle M'ON'$ (Uglovi sa normalnim kracima i osna simetrija u odnosu na simetralu duži OM'). Slučaj $M = N_2$ razmatra se analogno. Neka je sada $M \neq N_1$ i $M \neq N_2$. U tom slučaju je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi - \measuredangle N_1ON_2$. S druge strane je $\measuredangle(p_1', p_2') = \pi - \measuredangle N_1'ON_2'$, odakle sledi $\measuredangle(p_1', p_2') = \measuredangle(p_1, p_2)$.

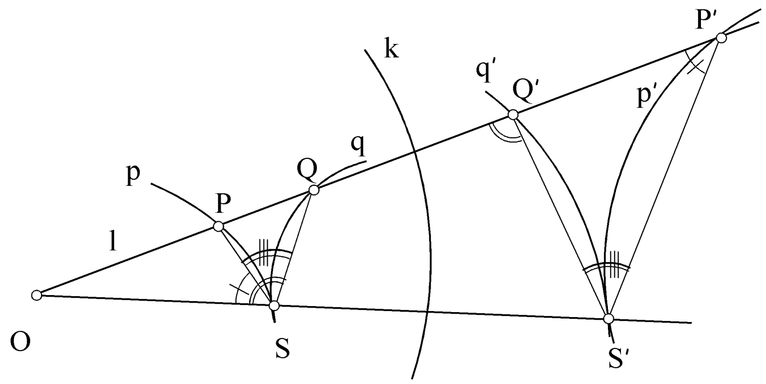
e) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$. Tada je $\measuredangle(p_1, p_2) = 0$, a p_1' i p_2' predstavljaju krugove koji se dodiruju u tački O. Prema tome $\measuredangle(p_1', p_2') = 0$, pa tvrđenje važi i u ovom slučaju.

(ii) Neka je O središte inverzije ψ_k i l prava koja sadrži tačku O i seče linije p i q redom u tačkama P i Q (Slika 10.8.) i neka je S presečna tačka linija p i q. Neka je zatim $P' = \psi_k(P)$, $Q' = \psi_k(Q)$ i $S' = \psi_k(S)$. Iz

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS'},$$

sledi da su četvorouglovi $PP'S'S$ i $QQ'S'S$ tetivni, odakle je $\measuredangle OSP \cong \measuredangle S'P'P$ i $\measuredangle OSQ \cong \measuredangle S'Q'Q$.

Tada je $\measuredangle PSQ \cong P'S'Q'$. Smanjivanjem ugla između pravih l i SS' tačke P i Q kreću se po krivama p i q ka tački S. Istovremeno, tačke P' i Q' se približavaju tački S' krećući se po linijama p' i q'. U graničnom slučaju sečice SP i SQ predstavljaju tangente linija p i q u tački S, dok sečice $S'P'$ i $S'Q'$ predstavljaju tangente linija p' i q' u presečnoj u tački S'. Dakle, ugao koji određuju tangente na linije p i q u presečnoj tački S jednak je uglu koji određuju tangente na linije p' i q' u presečnoj tački S'. $\square$



Slika 10.8.

10.3 Poenkareov disk model

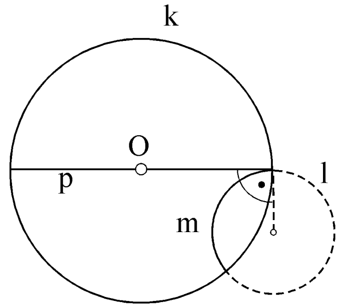
U ovom poglavlju razmatraćemo osobine osnovnih geometrijskih pojmova i relacija u modelu hiperboličke geometrije, konkretno u planimetriji. I ono što je bitno, pokazaćemo da u modelu hiperboličke geometrije važe sve aksiome Hilbertovog sistema aksioma kao i aksioma Lobačevskog.

Uočimo u euklidskoj ravni krug k, koji ćemo često zvati *apsolutni krug* ili prosto samo *apsoluta*. Svaku tačku koja pripada unutrašnjosti tog kruga, ne računajući i tačke samog kruga k, zvaćemo *H-tačkama*. *H-prava* je onaj krug ili prava, koji je ortogonalan na k, tačnije, "prave" u ovom modelu su otvorene tetive koje sadrže centar kruga i otvoreni lukovi krugova normalnog na posmatrani. Preciznije, neka je l krug ortogonalan na krug k. Tada presek kruga l sa unutrašnjosti kruga k daje otvoreni luk m, koji predstavlja "pravu" u Poenkareovom disk modelu, dok je p otvorena tetiva koja sadrži centar posmatranog kruga k i takođe predstavlja "pravu" u Poenkareovom disk modelu (Slika 10.9). Skup svih unutrašnjih tačaka kruga k, bez tačaka samog kruga, zovemo *H-ravan*.

Pre nego što pređemo na dalji opis modela, navešćemo tvrđenje koje nam kaže kako da konstruišemo Poenkareovu pravu.

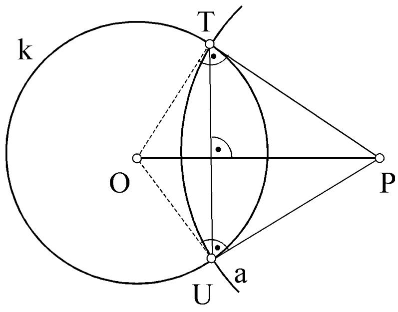
Definicija 10.1. *Pol tetive AB* kruga k je presečna tačka tangenti u tačkama A i B na krug k.

Teorema 10.3.1. *Neka je data apsoluta k i tačke T i U sa apsolute koje nisu dijametralno suprotne i neka je P pol tetive TU. Tada je $PT \cong PU$, $\measuredangle PTU \cong \measuredangle PUT$, $OP \perp TU$ i krug $a(P, PT = PU)$ seče k u tačkama T i U i ortogonalan je na njega.*



Slika 10.9.

Dokaz. Na osnovu definicije pola, ugao $\measuredangle OTP$ i ugao $\measuredangle OUP$ su pravi, pa su ΔOTP i ΔOUP podudarni, a odavde sledi da $PT \cong PU$ i $\measuredangle OTP \cong \measuredangle OPU$. Trougao ΔPTU je jednakokrak, pa je simetrala ugla $\measuredangle TPU$ normalna na njegovu osnovicu TU. Onda je krug a dobro definisan jer je $PU \cong PT$ i a je ortogonalan na k i seče k u tačkama T i U (Slika 10.10.). $\square$

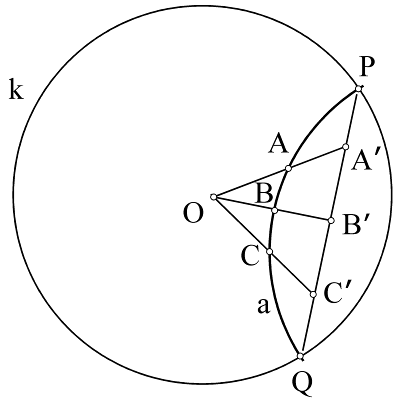


Slika 10.10.

Za ovako definisane H-objekte kažemo da H*-pripadaju* jedan drugom, ako oni pripadaju jedan drugom u euklidskom smislu. Definisaćemo još i relaciju H-između.

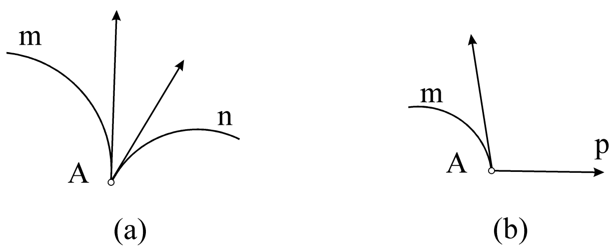
Neka su A, B i C tri H-tačke, koje pripadaju istoj H-pravoj (Slika 10.11). Ako je ta H-prava prečnik apsolute k, kažemo da je B H*-između* tačaka A i C ako je između njih u euklidskom smislu. Ako je, pak, H-prava krug a, obeležimo sa O središte apsolute, a sa P i Q tačke u kojima apsoluta seče krug a i posmatrajmo onaj luk kruga a, koji pripada unutrašnjosti apsolute.

Obeležimo sa A', B' i C' tačke u kojima euklidske prave OA,OB i OC seku euklidsku tetivu PQ. H-tačka B je H*-između* H-tačaka A i C, ako je tačka $B^{'}$ između tačaka $A^{'}$ i $C^{'}$ u euklidskom smislu i to označavamo sa: $\mathcal{B}_H(A, B, C)$.



Slika 10.11.

Dalje, *H-duž* je luk kruga koji je ortogonalan na k ili duž jednog od prečnika apsolute. *H-poluprava* je međutim, takav luk odnosno takva duž, čija jedna krajnja tačka pripada apsoluti. *H-ugao* je skup H-tačke O i dve H-poluprave koje polaze iz tačke O. Dakle, ako se dva luka m i n seku u tački A, ugao koji oni obrazuju je ugao između njihovih tangenti u tački A (Slika 10.12. (a)), odnosno, ugao između luka m i prave p sa početkom u tački A je zapravo ugao između prave p i tangente na luk m u tački A (Slika 10.12. (b)).



Slika 10.12.

Kako smo uveli pojam H-ugla, možemo reći nešto i o trouglu u Poenkareovom disk modelu.

Ako su A, B i C tri H-tačke koje ne pripadaju jednoj H-pravoj, tada skup koji se sastoji iz tačaka H-duži AB, BC i CA nazivamo *H-trouglom.*

I pojmovi *H-poligonske linije* i *H-poligona* mogu se uvesti u analogiji sa odgovarajućim pojmovima apsolutne geometrije.

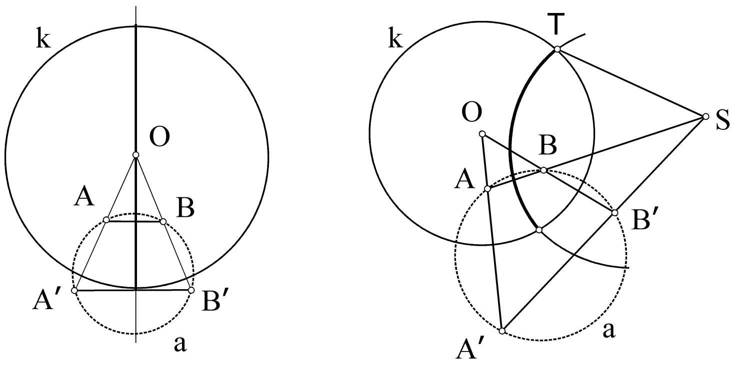
Inverzijom u odnosu na krug k koji je ortogonalan na apsolutu ili refleksijom u odnosu na pravu p ortogonalnu na apsolutu (koja iz tog razloga sadrži središte apsolute), ravan se preslikava na sebe. Restrikciju te inverzije (ili refleksije) na H-ravan zvaćemo *H-refleksijom.* H-pravu koja pripada krugu k zvaćemo *osom H-refleksije.* Svaka poluravan kojoj je rub osa neke H-refleksije tom H-refleksijom se preslikava na njoj komplementnu H-poluravan.

10.3.1 Podudarnost u Poenkareovom disk modelu

Uvođenju pojma H-podudarnosti prethodi nekoliko teorema koje se odnose na H-refleksije.

Teorema 10.3.2. *Za dve razne H-tačke A i B postoji jedinstvena H-refleksija kojom se te dve tačke preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz.



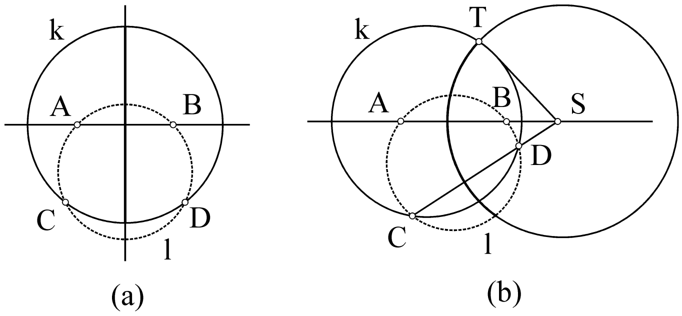
(a) (b)

Slika 10.13.

Neka su A' i B' inverzne tačke tačkama A i B u odnosu na apsolutu k. Postoji jedinstven krug (ili prava) a koji sadrži tačke A, B, A', B', pa stoga postoji jedinstvena H-prava koja sadrži tačke A i B.

Ako su prave AB i $A'B'$ paralelne, H-prava koja pripada medijatrisi duži AB odnosno duži $A'B'$, će biti osa H-refleksije kojom se H-tačke A i B preslikavaju jedna na drugu (Slika 10.13. (a)). Ako se prave AB i $A'B'$

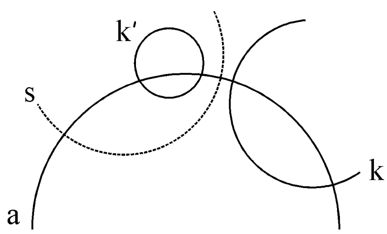
seku, osa H-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće H-prava koja pripada krugu upravnom na apsolutu i na krug a. Središte S kruga koji sadrži pomenutu H-pravu pripadaće pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga a, a poluprečnik tog kruga biće duž ST, gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente iz tačke S (Slika 10.13. (b)).



Slika 10.14.

Ako H-duž AB pripada prečniku apsolute, tada postoji krug l koji sadrži tačke A i B, a seče apsolutu u tačkama C i D. Analogno kao malopre, posmatramo slučajeve. Ako su prave AB i CD paralelne, središte apsolute biće i središte duži AB, pa je tada prečnik apsolute, koji je upravan na AB, osa H-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu (Slika 10.14. (a)). Ako se, pak, prave AB i CD seku u nekoj tački S, osa H-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće H-prava koja pripada krugu upravnom na apsoluti i krugu l. Središte toga kruga biće tačka S koja pripada pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga l, a poluprečnik toga kruga biće duž ST gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente koja sadrži tačku S (Slika 10.14. (b)).

Jedinstvenost tražene ose se, u svim slučajevima, dokazuje neposredno. $\square$

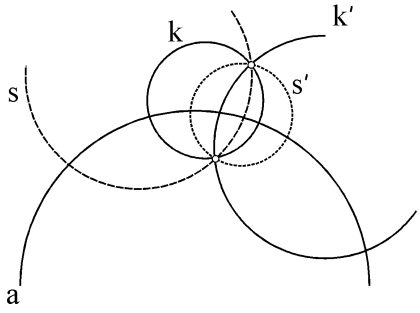


Slika 10.15.

Teorema 10.3.3. *Ako se dve H-prave seku, tada postoje dve H-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena H-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz. Neka su k i k' krugovi koji sadrže zadate H-prave.

Ako su one disjunktne, i krugovi koji ih sadrže su disjunktni ili se dodiruju u tački koja pripada apsoluti, pa iz tog razloga postoji jedinstvena inverzija kojom se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi (Slika 10.15.). Kako krug te inverzije pripada pramenu kojem pripadaju i k i k', on će biti upravan na apsolutu. Dakle, postoji jedinstvena H-refleksija kojom se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa te H-refleksije pripada krugu s upravnom na apsolutu, čije je središte presek zajedničkih spoljašnjih tangenti krugova k i k'.



Slika 10.16.

Ako se krugovi k i k' seku, tada postoje dve inverzije kojima se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi pa će postojati dve H-refleksije kojima se zadate H-prave preslikavaju jedna na drugu (Slika 10.16.). Osa jedne od tih dveju H-refleksija pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presek zajedničkih tangenti krugova k i k', a osa druge H-refleksije pripada krugu s' koji sadrži presečne tačke krugova k i k' i upravan je na krug s. $\square$

Iz dokaza pretodne teoreme neposredno sledi

Teorema 10.3.4. *Postoji jedinstvena H-refleksija kojom se dve H-poluprave sa zajedničkim temenom preslikavaju jedna na drugu.*

Definicija 10.2. Par H-tačaka (A, B) je *H-podudaran* paru H-tačaka (C, D) i pišemo

$$(A, B) \overset{H}{\cong} (C, D)$$

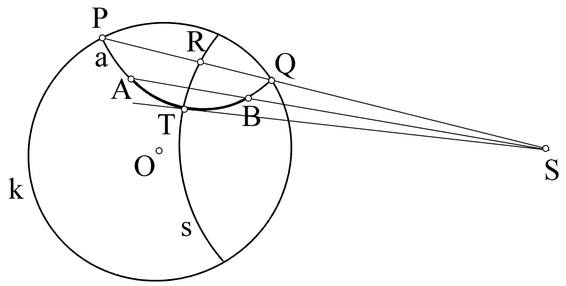
ako postoji niz H-refleksija čiji proizvod preslikava par (A, B) na par (C, D). Proizvod tih H-refleksija zvaćemo *H-podudarnost* ili *H-izometrija H-ravni.*

Kažemo da su H-figure H-podudarne ako se one mogu preslikati jedna na drugu H-podudarnom transformacijom. U daljem izlaganju pod inverzijom ćemo podrazumevati samo onu inverziju koja je H-podudarnost. Specijalno, definišu se *H-translacija* i *H-rotacija.*

Definicija 10.3. H-izometrija koja je kompozicija dve H-refleksije, prve u odnosu na H-pravu normalnu na datu H-duž AB u početnoj H-tački A i druge u odnosu na H-simetralu date H-duži naziva se *H-translacija za H-duž AB.*

Definicija 10.4. Kompozicija dve H-refleksije u odnosu na H-prave koje sadrže datu H-tačku O i zahvataju dati orjentisani ugao $\alpha/2$, naziva se *H-rotacija oko H-tačke O za orjentisani ugao α.*

H-podudarnost koja preslikava datu H-tačku A na datu H-tačku B, može se realizovati i na sledeći način:



Slika 10.17.

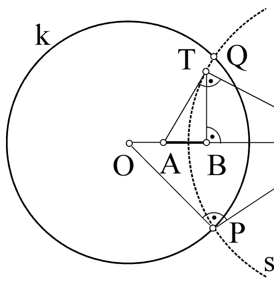
Obeležimo sa a H-pravu AB. Neka ona seče apsolutu u tačkama P i Q. Obeležimo sa S presek pravih AB i PQ, a sa T tačku dodira tangente iz S na krug a (Slika 10.17.). Najzad, obeležimo sa s krug sa središtem S i poluprečnikom ST. On je ortogonalan i na apsolutu i na krug a. Prema tome, inverzija u odnosu na s je H-podudarno preslikavanje. Ono preslikava krug a na samog sebe, tako da tačku A preslikava na B, a B na A.

Pored toga, pri inverziji u odnosu na s, svaka tačka kruga s ostaje invarijantna, pa je invarijantna i tačka T tog kruga. Drugim rečima, H-duž AT

preslikava se na H-duž BT, tj. te dve duži su H-podudarne i T je H-središte H-duži AB. Kako je s ortogonalno na a, s je H-*simetrala* H-duži AB.

Ukoliko su euklidske prave AB i PQ paralelne, tačka S je beskrajno daleka i krug s je *euklidska simetrala* duži AB i PQ, tj. ona prolazi kroz centar O apsolute.

Opisani postupak se ne može primeniti u slučaju kada je H-prava AB prečnik apsolute k, jer je tada S neodređena. Da bismo u tom slučaju odredili krug s, primetimo da on mora zadovoljavati sledeće uslove (Slika 10.18.):



Slika 10.18.

(i) Ako je P presečna tačka krugova k i s, a S središte kruga s, tada je $\measuredangle OPS$ prav, pa je

$$SP^2 = OS^2 - OP^2.$$

(ii) Tačke A i B treba da budu inverzne u odnosu na na krug s. To znači da tačka S mora pripadati pravoj OA i

$$SA \cdot SB = ST^2 = SP^2,$$

pri čemu je T dodirna tačka tangente iz A na s sa krugom s. Prema tome,

$$SA \cdot SB = OS^2 - r^2,$$

gde smo sa r obeležili poluprečnik apsolute. Kako je $SA = OS - OA$ i $SB = OS - OB$, to je

$$(OS - OA)(OS - OB) = OS^2 - r^2,$$

tj.

$$OS = \frac{r^2 + OA \cdot OB}{OA + OB}.$$

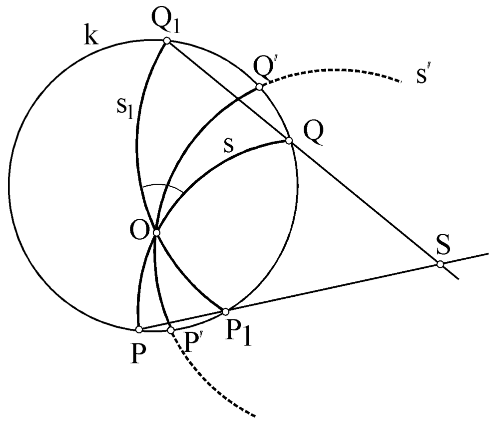
Na taj način određena je tačka S pa, samim tim, i krug sa središtem u tački S i poluprečnikom SP. Taj krug je H-*simetrala* H-duži AB.

Iz svega izloženog sledi da svaka H-duž ima svoju H-simetralu. Isto važi i za H-uglove.

Neka je $\measuredangle QOQ_1$ dati H-*ugao* sa temenom O gde su Q i Q_1 tačke na apsoluti. Sada ćemo opisati *postupak konstrukcije* H-*simetrale ovog ugla* (Slika 10.19.).

Obeležimo sa P i P_1 druge dve tačke na apsoluti pravih OQ i OQ_1 redom. Obeležimo dalje sa s i s_1 krugove (ili u specijalnom slučaju prave) koje su nosači krakova OQ i OQ_1, redom. Ozničimo sa S presek euklidskih pravih PP_1 i QQ_1. Konstruišimo krug s' sa centrom u S koji sadrži teme O i normalan je na apsolutu. Luk kruga s' koji leži unutar apsolute je tražena H-simetrala.

Ako su euklidske prave PP_1 i QQ_1 paralelne, konstruišemo pravu s' - zajedničku simetralu duži PP_1 i QQ_1. Tada je prečnik apsolute koji leži na pravoj s' tražena H-simetrala.

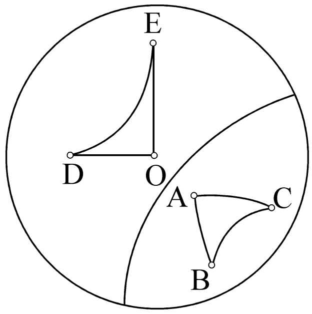


Slika 10.19.

Da to dokažemo, posmatrajmo inverziju ψ u odnosu na krug s'. Očigledno je $\psi(P) = P_1$, $\psi(Q) = Q_1$ i $\psi(k) = k$. Kako kroz dve tačke datog kruga prolazi tačno jedan krug koji je na njega normalan, to je $\psi(s) = s_1$. Otuda su H-uglovi $\measuredangle QOQ'$ i $\measuredangle Q_1OQ'$ H-podudarni, a H-prava s' njihova H-*simetrala*, pri čemu smo sa P' i Q' označili presečne tačke kruga s' i apsolute. Ako je s' poluprava onda se umesto inverzije posmatra simetrija u odnosu na pravu s'.

Navedimo još jedno tvrđenje pre no što krenemo da dokazujemo da uvedeni H-pojmovi zadovoljavaju aksiome hiperboličke geometrije.

Teorema 10.3.5. *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog H-trougla je manji od zbira dva prava ugla.*



Slika 10.20.

Dokaz. Ako je ΔABC H-trougao i O središte apsolute k, tada postoji H-refleksija kojom se tačka A preslikava u O, a tačke B i C, redom u tačke D i E. Tom refleksijom se uglovi H-trogula ΔABC preslikavaju na njima podudarne uglove H-trougla ΔODE, a H-duži AB i AC se preslikavaju na H-duži OD i OE koje pripadaju prečnicima apsolute (Slika 10.20.). Kako su uglovi kod temena D i E H-trougla ΔODE manji od uglova kod istih temena euklidskog trougla ΔODE, sledi da je zbir unutrašnjih uglova H-trougla ΔODE manji od zbira dva prava ugla. To znači da će i zbir unutrašnjih uglova H-trougla ΔABC biti manji od zbira dva prava ugla. □

Prema tome, zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog H-četvorougla biće manji od $4R$ dok će zbir unutrašnjih uglova H-poligonske površi koja ima n ivica biti manji od $2(n-2)R$.

Ovako definisani osnovni objekti i uzajamni odnosi tih objekata, čine jedan *geometrijski model.* Sada ćemo pokazati da su u ovako konstruisanom geometrijskom modelu zadovoljene sve aksiome Hilbertovog sistema aksioma, sem aksiome paralelnosti.

Aksiome incidencije

Neka su A i B dve proizvoljne H-tačke. Iz osobina inverzije je poznato da svaki krug koji prolazi kroz tačku A, a ortogonalan je na apsolutu k, prolazi kroz još jednu utvrđenu tačku A'. Svi ti krugovi čine eliptični pramen krugova koji je ortogonalan na k. Kako kroz tačku euklidske ravni koja je različita od A i A' uvek prolazi tačno jedan takav krug to važi sledeća teorema:

Teorema 10.3.6. *Za proizvoljne dve H-tačke A i B, uvek postoji jedna i samo jedna H-prava koja ih sadrži.*

To, u stvari, znači da su u posmatranom modelu zadovoljene *Aksioma* I_1 i *Aksioma* I_2 Hilbertovog sistema. Kako svakom krugu koji je ortogonalan na apsolutu k pripada beskonačno mnogo tačaka koje su istovremeno i unutrašnje tačke apsolute k i kako pored tih tačaka u unutrašnjosti apsolute ima beskonačno mnogo drugih tačaka, to je zadovoljena i *Aksioma* I_3. U posmatranom modelu su, dakle, zadovoljeni svi zahtevi prve grupe aksioma Hilbertovog sistema.

Aksiome poretka

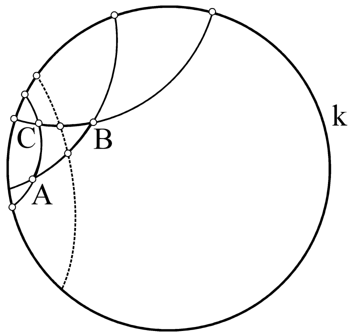
Neka H-tačke A, B i C pripadaju istoj H-pravoj. Ukoliko je ta H-prava prečnik apsolute, prve tri aksiome druge grupe Hilbertovog sistema aksioma su zadovoljene, jer su one zadovoljene na svakoj otvorenoj euklidskoj duži. Ako je, pak, H-prava luk kruga a, prema definiciji relacije H-između, na euklidskoj tetivi PQ tačka B' je euklidski između tačaka A' i C'. Pošto su na otvorenoj euklidskoj duži PQ zadovoljene sve Hilbertove aksiome rasporeda, A', B' i C' su tri razne tačke. Stoga su i OA', OB' i OC' tri razne poluprave koje luk kruga a seku u tri razne tačke. Drugim rečima A, B i C su tri razne tačke. Dalje, ako je tačka B' euklidski između A' i C', onda je ona i između C' i A', a to prema utvrđenoj definiciji znači da je tačka B H-između tačaka C i A. Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema 10.3.7. *Ako je tačka B H-između tačaka A i C, tada A, B i C su tri razne tačke i B je takođe H-između tačaka C i A.*

U posmatranom modelu su, znači, *Aksioma* II_1 i *Aksioma* II_2 Hilbertovog sistema zadovoljene. Analogno se pokazuje da su zadovoljene i *Aksioma* II_3, *Aksioma* II_4 i *Aksioma* II_5.

Aksioma II_6, tj. Pašova aksioma je, u posmatranom modelu, ekvivalentna sledećoj teoremi euklidske geometrije:

Teorema 10.3.8. *U unutrašnjosti kruga k date su tri tačke A, B i C pri čemu kroz njih prolaze tri kruga ortogonalno na k. Onaj luk četvrtog kruga ortogonalnog na k, koji pripada unutrašnjosti kruga k, i koji seče jedan od*



Slika 10.21.

unutrašnjih lukova AB, AC ili BC, seče jedan i samo još jedan od tih lukova, ako taj četvrti krug ne prolazi ni kroz jednu oa tačaka A, B ili C.

Aksiome podudarnosti

U posmatranom modelu najsloženija je verifikacija treće grupe aksioma. Zato ćemo im posvetiti i malo više pažnje..

Lako se proverava da su *Aksioma III_1* i *Aksioma III_2* zadovoljene u ovom modelu, tj. da je za dve H-tačke A i B trivijalno zadovoljeno: H-duž AA je H-podudarna sa H-duži BB i H-duž AB je H-podudarna sa H- duži BA.

Aksioma III_3 - *Ako je svaka od H-duži $A'B'$ i $A''B''$ H-podudarna istoj H-duži AB, onda je i H-duž $A'B'$ H-podudarna H-duži $A''B''$.*

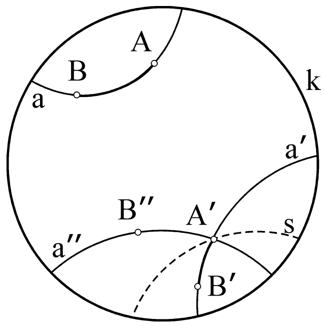
Prema definiciji H-podudarnosti, postoji proizvod f inverznih preslikavanja koji preslikava $A'B'$ na AB i postoji proizvod inverznih preslikavanja, koji $A''B''$ preslikava na AB. Pri transformaciji $\varphi^{-1} \circ f$, $A'B'$ se preslikava na $A''B''$ pri čemu je $\varphi^{-1} \circ f$ proizvod inverzija, tj. predstavlja jedno H-podudarno preslikavanje. Time je pokazano da i Aksioma III_3 važi u ovom modelu.

Aksioma III_4 - *Neka su AB i BC dve H-duži H-prave a, koje nemaju zajedničkih tačaka, a $A'B'$ i $B'C'$ H-duži te iste ili neke druge H-prave koje takođe nemaju zajedničkih tačaka. Ako je AB H-podudarno sa $A'B'$, a BC H-podudarno sa $B'C'$, onda je i AC H-podudarno sa $A'C'$.*

Kako je AB H-podudarno sa $A'B'$, to postoji proizvod inverzija koje AB preslikavaju na $A'B'$. Pri tom se H-tačka C preslikava na H-tačku C_1

H-prave $A'B'$ i to sa one strane tačke B' sa koje je tačka C'. Sledi da je H-duž AC H-podudarna H-duži $A'C_1$. Po pretpostavci je AC H-podudarno sa $A'C'$, pa je, prema Aksiomi III_3, $A'C'$ H-podudarno sa $A'C_1$. Kako se tačke C' i C_1 nalaze na pravoj $A'B'$ sa iste strane tačke A', to se one moraju poklapati. Postoji, dakle, H-podudarnost koja AC preslikava na $A'C'$ (to je ona koja AB preslikava na $A'B'$), a to i dokazuje da su H-duži AC i $A'C'$ H-podudarne.

Aksioma III_5 - *Neka su A i B dve razne H-tačke H-prave a, a A' tačka te iste ili neke druge H-prave a'. Na H-pravoj a' sa date strane H-tačke A' uvek postoji H-tačka B' takva da je H-duž AB H-podudarna H-duži $A'B'$.*



Slika 10.22.

Pokazali smo da uvek postoji H-podudarnost koja tačku A preslikava na tačku A'. Pritom se H-prava a preslikava na H-pravu a'', koja prolazi kroz tačku A', a tačka B na neku tačku B'' H-prave a''. Tačkom A' kao početnom tačkom i tačkom B'' određena je H-poluprava koja sa unapred datom polupravom H-prave a' određuje H-ugao. Obeležimo sa s H-simetralu tog ugla. Inverzija u odnosu na krug s je H-podudarnost pri kojoj se kraci pomenutog ugla preslikavaju jedan na drugi. Tačka B'' preslikava se na tačku B' unapred date poluprave H-prave a', dok tačka A' ostaje nepromenjena. Proizvod dva posmatrana H-podudarna preslikavanja preslikavaju H-duž AB na H-duž $A'B'$, pri čemu je tačka A' unapred data, a tačka B' pripada unapred datoj H-pravoj i nalazi se sa date strane tačke A'. Kako je taj proizvod opet H-podudarna transformacija, to su H-duži AB i $A'B'$ H-podudarne. Drugim rečima, u ovom modelu je zadovoljena Aksioma III_5.

Analogno se dokazuje da u ovom modelu važe *Aksioma III_6* i *Aksioma III_7*.

Dokažimo sada sledeće teoreme:

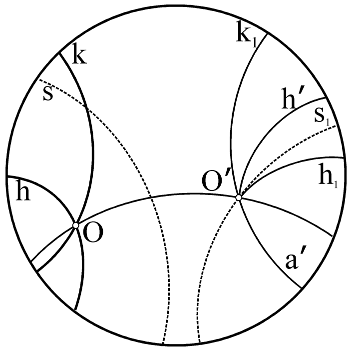
Teorema 10.3.9. *Tačka koja se pominje u Aksiomi III_5 je jedina takva tačka na uočenoj H-polupravoj H-prave a'.*

Dokaz. Pretpostavimo da pored tačke B' na uočenoj polupravoj H-prave a' postoji još jedna tačka B_1, tako da su duži AB i $A'B_1$ H-podudarne. To znači da postoji proizvod f inverznih preslikavanja koji H-duž AB preslikava na H-duž $A'B'$, i proizvod φ inverznih preslikavanja koji H-duž AB preslikava na H-duž $A'B_1$.

Obeležimo sa P i Q beskonačno daleke tačke H-prave a, tj.preseke kruga a sa apsolutom k, a sa P' i Q' beskonačno daleke tačke H-prave a'. I pri transformaciji f i pri transformaciji φ tačke P i Q se preslikavaju, redom, na tačke P' i Q'. Dakle, pri transformaciji $\varphi \circ f^{-1}$ tačke P', Q' i A' preslikavaju na sebe same, dok se tačka B' preslikava na B_1. S druge strane, kako je $\varphi \circ f^{-1}$ proizvod konačnog broja inverznih transformacija i kako ona ostavlja invarijantnim tri različite tačke, to su i sve tačke kruga, koji prolazi kroz te tri tačke - invarijantne. To znači da je i tačka B' tog kruga invarijantna, tj. tačke B' i B_1 se poklapaju, što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 10.3.10. *Neka je u H-ravni dat H-ugao $\measuredangle hk$ i H-prava a'. Neka je, dalje, u odnosu na pravu a' zadata H-poluravan α'. Obeležimo sa h' H-polupravu H-prave a' koja polazi iz tačke O'. Tada kroz O' u H-poluravni α', postoji jedna i samo jedna H-poluprava k', takva da je H-ugao $\measuredangle hk$ H-podudaran H-uglu $\measuredangle h'k'$. Važi još i da je svaki H-ugao podudaran samom sebi.*

Dokaz. Ako je O teme H-ugla $\measuredangle hk$, obeležimo sa s H-simetralu H-duži OO' (Slika 10.23.). Inverzija u odnosu na s preslikava tačku O na O', a $\measuredangle hk$ na H-ugao $\measuredangle h_1k_1$. Posmatrajmo H-ugao $\measuredangle h_1h'$ i obeležimo sa s_1 njegovu H-simetralu. Inverzija u odnosu na s_1 preslikava h_1 na h' a k_1 na H-polupravu k_2. Ukoliko k_2 pripada uočenoj H-poluravni α', obeležimo je sa k'. Ukoliko to nije slučaj, primenimo inverziju u odnosu na krug a'. Tada se H-poluprava h' preslikava na samu sebe, a k_2 na H-polupravu k'. U svakom slučaju $\measuredangle h'k'$ je dobijen iz $\measuredangle hk$ kao proizvod konačnog broja inverzija, što znači da su ta dva H-ugla H-podudarna. Pri tome je H-poluprava h' unapred data, a H-poluprava k' pripada unapred uočenoj H-poluravni α'. Ovim je pokazan prvi deo Aksiome III_4.



Slika 10.23.

Dokažimo da važi drugi deo tvrđenja. Označimo sa s_3 H-simetralu H-ugla $\measuredangle hk$. Kako inverzija u odnosu na s_3 preslikava $\measuredangle hk$ na samog sebe, to je H-ugao H-podudaran samom sebi. □

Teorema 10.3.11. *Neka su A, B i C tri H-tačke koje ne pripadaju istoj H-pravoj, a A', B' i C' takođe tri H-tačke koje ne pripadaju istoj H-pravoj. Ako su tada H-duži AB i AC H-podudarne H-dužima $A'B'$ i $A'C'$, a H-ugao $\measuredangle BAC$ podudaran H-uglu $\measuredangle B'A'C'$, onda je i H-ugao $\measuredangle ABC$ H-podudaran H-uglu $\measuredangle A'B'C'$.*

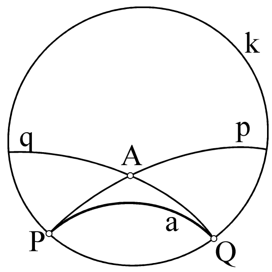
Dokaz. Kako je H-ugao $\measuredangle BAC$ H-podudaran H-uglu $\measuredangle B'A'C'$ to postoji proizvod inverznih preslikavanja koji prvi ugao preslikava na drugi, pri čemu se tačka A preslikava na A', H-tačka B na H-tačku B_1, H-poluprave $A'B'$, a C na tačku C_1 H-poluprave $A'C'$, tj. H-duž AC je H-podudarna sa H-duži $A'C_1$, a AB sa $A'B_1$. Ali po pretpostavci je AC H-podudarno sa H-duži $A'C'$, i tačke C' i C_1 pripadaju istoj H-pravoj i nalaze se sa iste strane tačke A'. Na osnovu već dokazane teoreme te dve tačke se poklapaju. Iz istih razloga se poklapaju i tačke B' i B_1. Dakle, pri onom proizvodu inverznih preslikavanja koji $\measuredangle BAC$ preslikava na $\measuredangle B'A'C'$, H-ugao $\measuredangle ABC$ se preslikava na H-ugao $\measuredangle A'B'C'$, tj. ti uglovi su H-podudarni, što je i trebalo pokazati. □

Aksiome neprekidnosti

Na početku ovog odeljka definisali smo relaciju H-između, tako što smo uspostavili uzajamno-jednoznačnu korespodenciju između tačaka H-prave a i tačaka otvorene euklidske duži PQ, gde su P i Q beskrajno daleke tačke prave a. Međutim, u skupu tačaka otvorene euklidske duži zadovoljen je Dedekindov princip. Zbog pomenute uzajamno jednoznačne korespodencije on je zadovoljen i u skupu tačaka H-prave a. U posmatranom modelu je, dakle, zadovoljen Dedekindov princip.

Aksioma paralelnosti

Ostaje još da utvrdimo da li važi aksioma paralelnosti.



Slika 10.24.

Aksioma paralelnosti - Uočimo H-pravu a i van nje H-tačku A. Tačke u kojima krug a seče apsolutu k označimo sa P i Q, pri čemu te tačke nisu H-tačke i ne pripadaju pravoj a. Kroz tačke A i P uvek prolazi krug p koja je uz to i ortogonalan na apsolutu, dok, kroz tačke A i Q takođe prolazi krug q koji je ortogonalan na apsolutu. Svi ostali krugovi koji prolaze kroz A, a ortogonalni su na apsolutu, pripadaju jednom od dva para unakrsnih uglova koje obrazuju krugovi p i q. Svi krugovi iz jednog od tih uglova seku a, dok, krugovi iz drugog para ne seku a. U terminologiji posmatranog modela ta činjenica se izražava na sledeći način:

U H-ravni, kroz tačku van prave, prolazi beskonačno mnogo H-pravih koje datu H-pravu seku, a takođe i beskonačno mnogo H-pravih koje je ne seku.

Prema tome, u posmatranom modelu zadovoljena je aksioma paralelnosti Lobačevskog, tj. posmatrani model je model hiperboličke geometrije i naziva se *Poenkareov model hiperboličke geometrije* tj. *Poenkareov disk model*, koji ćemo označavati sa $\mathcal{P}$. Ovaj model je smešten u deo euklidske ravni. Osnovni objekti tog modela kao i relacije su objekti i relacije euklidske geometrije. Drugim rečima, cela H-geometrija posmatranog modela je jedan deo geometrije Euklida. Svakoj teoremi hiperboličke geometrije odgovara jedna teorema u ovom modelu, a ova je, opet, teorema euklidske geometrije. Dakle, ako bi u hiperboličkoj geometriji postojala neka protivurečnost, ona bi se pojavila i u Poenkareovom modelu, pa, dakle, i u geometriji Euklida. Otuda sledeća osnovna teorema:

Teorema 10.3.12. *Ako je euklidska geometrija neprotivurečna, tada je neprotivurečna i hiperbolička geometrija.*

Napomenimo da, pored *Poenkareovog disk modela* postoji i *Poenkareov poluravanski model*, o kome će biti reči kasnije.

Sada ćemo predstaviti postupak konstrukcije normale n na datu H-pravu a kroz datu H-tačku A u Poenkareovom disk modelu.

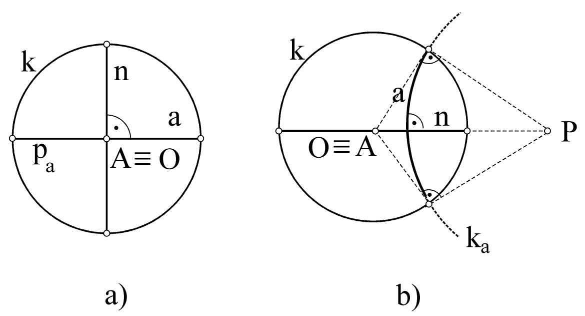
Poželjno je najpre da znamo šta prava n predstavlja u H-ravni. Odgovor je sadržan u sledećim tvrđenjima:

Lema 10.3.1 *Ako se u inverziji u odnosu na krug k tačka X koja ne pripada krugu k preslikava u X', onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X' normalan na krug k.*

Lema 10.3.2 *Ako se u osnoj refleksiji u odnosu na pravu p tačka X koja ne pripada pravoj p preslikava u tačku X', onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X' normalan na pravoj p.*

Pređimo sada na konstrukciju H-normale. Razmotrimo sve moguće slučajeve.

(i) Tačka A je središte apsolute. Ako je H-prava a u euklidskom smislu duž koja pripada prečniku apsolute p_a, onda je tražena H-prava n određena pravom koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj p_a (Slika 10.25. a)).

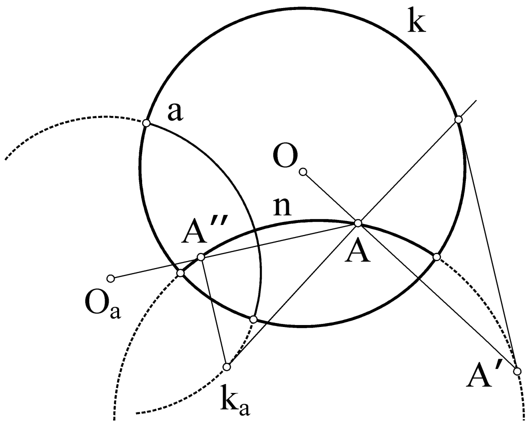


Slika 10.25.

Ako je H-prava a u euklidskom smislu luk kruga k_a, onda je tražena H-prava n određena pravom koja sadrži tačku A i središte kruga k_a (Slika 10.25. b)).

(ii) Pretpostavimo da tačka A nije središte apsolute i da ne pripada pravoj a .

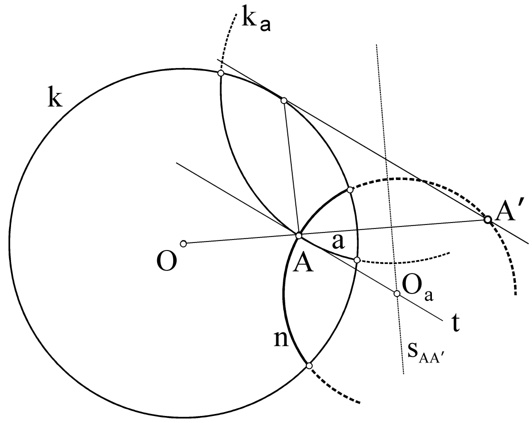
Ako je H-prava a u euklidskom smislu segment nekog kruga k_a (Slika 10.26.), potrebno je odrediti krug (ili pravu) koji je normalan i na k_a i na apsolutu i pri tom sadrži tačku A. Neka je $A^{'}$ slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je $A^{''}$ slika tačke A u inverziji u odnosu na krug k_a. Ako su tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$ kolinearne, onda je tražena H-prava n određena pravom koja sadrži tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$. Ako tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$ nisu kolinearne, onda je tražena H-prava n segment euklidskog kruga k_n opisanog oko trougla $\Delta AA^{'}A^{''}$.



Slika 10.26.

Ako je H-prava a u euklidskom smislu duž koja pripada pravoj p_a, potrebno je odrediti krug (ili pravu) koji je normalan kako na p_a, tako i na apsolutu i pri tom sadrži tačku A. Neka je $A^{'}$ slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu i neka je $A^{''}$ slika tačke A u osnoj refleksiji u odnosu na pravu p_a. Ako su tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$ kolinearne, onda je tražena H-prava n određena tom pravom koja sadrži tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$. Ako tačke $A, A^{'}$ i $A^{''}$ nisu kolinearne, onda je tražena H-prava n segment euklidskog kruga k_n opisanog oko trougla $\Delta AA^{'}A^{''}$.

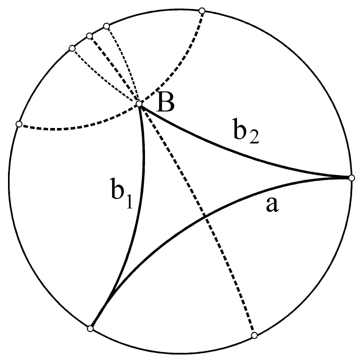
(iii) Pretpostavimo da tačka A nije središte apsolute i da pripada H-pravoj a.



Slika 10.27.

Neka je H-prava a u euklidskom smislu segment nekog kruga k_a. Neka je zatim A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu, i $s_{AA'}$ simetrala duži AA' a t tangenta u tački A na krug k_a. Ako se prave $s_{AA'}$ i t seku u nekoj tački O_a, onda je tražena H-prava određena krugom čije je središte tačka O_a i koji sadrži tačku A. Ako se prave $s_{AA'}$ i t ne seku, onda je tražena H-prava određena pravom koja sadrži tačku A i središte kruga k_a.

Pretpostavimo da je H-prava a u euklidskom smislu duž koja pripada nekoj pravoj p_a. Neka je A' slika tačke A u inverziji u odnosu na apsolutu. Tražena H-prava n je luk kruga sa središtem u središtu duži AA' a koji sadrži tačku A. □



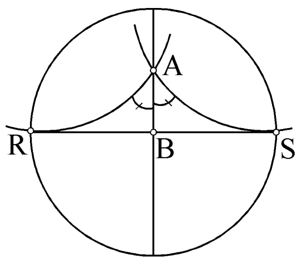
Slika 10.28.

10.3.2 Paralelnost u Poenkareovom disk modelu

Ako dve H-poluprave sa zajedničkim početkom u H-tački B imaju iste krajeve kao i neka H-prava a, koja ne sadrži B, tada će proizvoljna H-poluprava sa temenom B seći H-pravu a ako i samo ako pripada onom od H-uglova na koje zadate H-poluprave razlažu H-ravan, kojem pripada i H-prava a (Slika 10.28.). Iz tog razloga, za te dve H-poluprave možemo reći da su *H-paralelne H-pravoj a*. Za dve H-prave možemo reći da su *međusobno H-paralelne* ako imaju jedan zajednički kraj.

Primer 10.3.1. *Konstruisati H-ugao paralelnosti u Poenkareovom disk modelu za datu H-duž AB.*

Rešenje: Posmatrajmo sledeće slučajeve:
(1) Ako H-duž AB pripada prečniku apsolute.

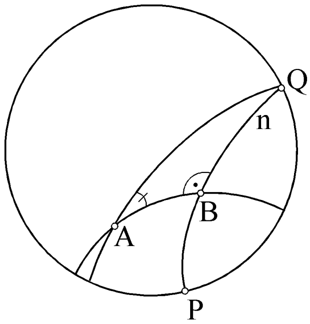


Slika 10.29.

Najpre konstruišemo normalu u jednoj od tačaka A i B. Bez gubljenja opštosti možemo konstruisati normalu n na H-pravu AB (Slika 10.29.) u tački B. Zatim konstruišemo pravu p paralelnu sa n, koja sadrži tačku A, na sledeći način: Označimo sa P i Q presečne tačke prave n i apsolute zatim konstruišemo u tački Q (analogno za P) tangentu na apsolutu (tangenta u dodirnoj tački sadrži centre svih krugova koji su nosači pravih koje su paralelne sa n). Zatim konstruišemo simetralu euklidske duži AQ (analogno za AP). Presečnu tačku simetrale i tangente u Q označimo sa S. Deo kruga, sa centrom u S i poluprečnikom $SA \equiv SQ$, koji se nalazi u H-ravni je tražena H-prava paralelna sa n koja sadrži A. Ovako konstruisana prava, koja polazi iz tačke Q, je paralelna sa n u jednom smeru pa je u tom slučaju traženi ugao paralelnosti baš H-ugao $\measuredangle BAQ$, dok je prava konstruisana kroz P paralelna sa n u drugom smeru i tako dobijeni ugao paralelnosti je H-ugao $\measuredangle BAP$.

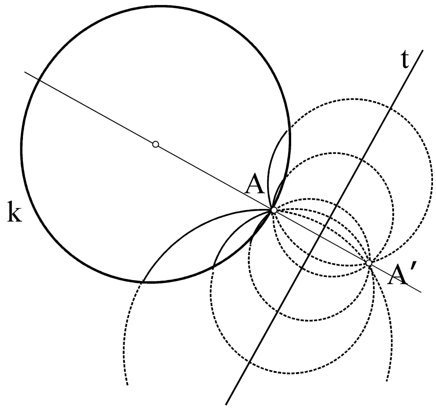
Ukoliko je neka od tačaka A, B centar apsolute (Slika 10.29.), onda je traženi ugao paralelnosti $\measuredangle BAS$ ili $\measuredangle BAR$.

(2) Ako duž AB pripada krugu a, onda konstruišemo H-normalu u jednoj od tačaka, npr. B, pa onda, kroz tačku A konstruišimo H-pravu H-paralelnu normali . Konstrukcijom H-pravih H-paralelnih sa H-normalom u oba smera dobijamo dva ugla paralelnosti. □



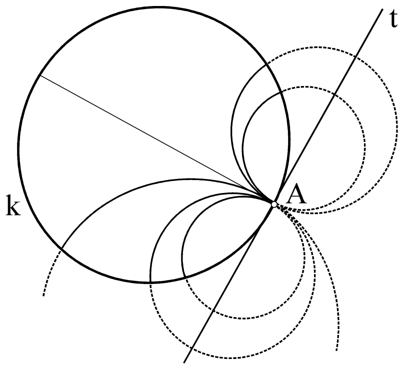
Slika 10.30.

10.4 Epicikli u Poenkareovom disk modelu



Slika 10.31.

Imali smo prilike da vidimo šta pramenovi pravih predstavljaju u ravni Lobačevskog, u zavisnosti od toga da li je pramen konkurentnih (eliptički), paralelnih (parabolički) ili pravih upravnih na neku datu pravu (hiperbolički). Trajektorije ovih pramenova nazivaju se cikl (krug), oricikl i ekvidistanta (hipercikl), redom. U ovoj sekciji ćemo pokazati čime je u Poenkareovom disk modelu reprezentovan eliptički, parabolički i hiperbolički pramen pravih.

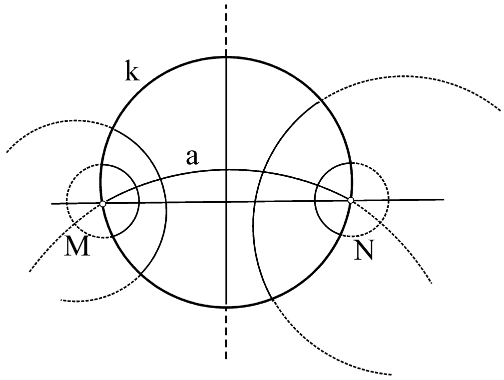


Slika 10.32.

Eliptički pramen H-pravih će biti skup svih H-pravih koje prolaze kroz neku H-tačku A. U euklidskom smislu to su lukovi krugova koji prolaze kroz tačku A, normalni su na krug k i pripadaju unutrašnjosti kruga k. Međutim, svi krugovi koji su normalni na krug k i prolaze kroz tačku A, prolaze i kroz tačku A', koja je inverzna tački A u odnosu na krug k. Dakle, oni obrazuju eliptički pramen krugova sa karakterističnim tačkama A i A'. Prema tome eliptički pramen H-pravih, sa H-centrom u H-tački A, predstavljen je lukovima krugova eliptičkog pramena $\{A, A'\}$ koji pripadaju unutrašnjosti apsolute k, uključujući i prečnik apsolute koji prolazi kroz tačku A (Slika 10.31.).

Parabolički pramen H-pravih će biti skup svih H-pravih sa zajedničkim krajem koje su predstavljene lukovima krugova normalnih na apsolutu i sve prolaze kroz istu tačku A apsolute. Budući da središta krugova koji sadrže H-prave jednog paraboličkog pramena pripadaju tangenti apsolute u zajedničkom kraju A zadatog pramena H-pravih, H-prave nekog paraboličkog pramena pripadaju krugovima nekog paraboličkog pramena krugova (Slika 10.32.).

Neka luk kruga a predstavlja bazisnu pravu pramena i neka su M i N presečne tačke krugova k i a. Elementi *hiperboličkog pramena pravih*, sa bazisnom pravom a, su predstavljeni lukovima krugova koji su normalni, kako na krug k, tako i na krug a. Linija centara toga pramena je

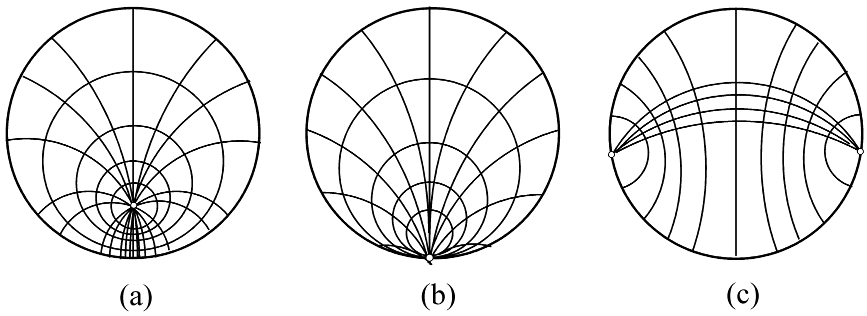


Slika 10.33.

prava MN (Slika 10.33.).

S obzirom na to da je skup svih slika proizvoljne tačke ravni u inverzijama u odnosu na krugove nekog pramena, krug koji je upravan na svim krugovima zadatog pramena krugova, H-*epicikl* će biti (euklidski) krug ili deo tog kruga. On neće biti upravan na apsolutu osim u slučaju kada je taj H-epicikl osnova neke H-ekvidistante.

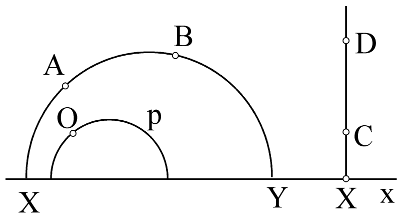
Ako je zadat pramen konkurentnih H-pravih (Slika 10.34. (a)), njemu odgovarajući H-*krug* će biti (euklidski) krug koji pripada H-ravni. Kako je H-*oricikl* upravan na parabolički pramen H-pravih, on će biti (euklidski) krug kome nedostaje zajednički kraj H-pravih zadatog paraboličkog pramena (Slika 10.34. (b)). Ako je zadat hiperbolički pramen H-pravih, njemu odgovarajuća H-*ekvidistanta* je deo (euklidskog) kruga koji je upravan na zadati pramen krugova (Slika 10.34. (c)).



Slika 10.34.

10.5 Poenkareov poluravanski model

Neka je u ravni E^2 data prava x. Neka je π jedna od poluravni čija je granica prava x. Saglasimo se da su prave u poluravanskom modelu: poluprave upravne na x-osu i polukrugovi sa centrom na x-osi i nazovimo te prave *H-pravama* (Slika 10.35.).



Slika 10.35. Prava i duž u Poenkareovom poluravanskom modelu

Osu x koja sadrži centar polukruga i podnožje prave upravne na nju zvaćemo takođe *apsolutom* neeuklidske ravni (H-ravni) tj. otvorene euklidske poluravni π, a duž CD poluprave upravne na x-osu predstavljaće *H-duž*, kao i deo luka XY od tačke A do tačke B.

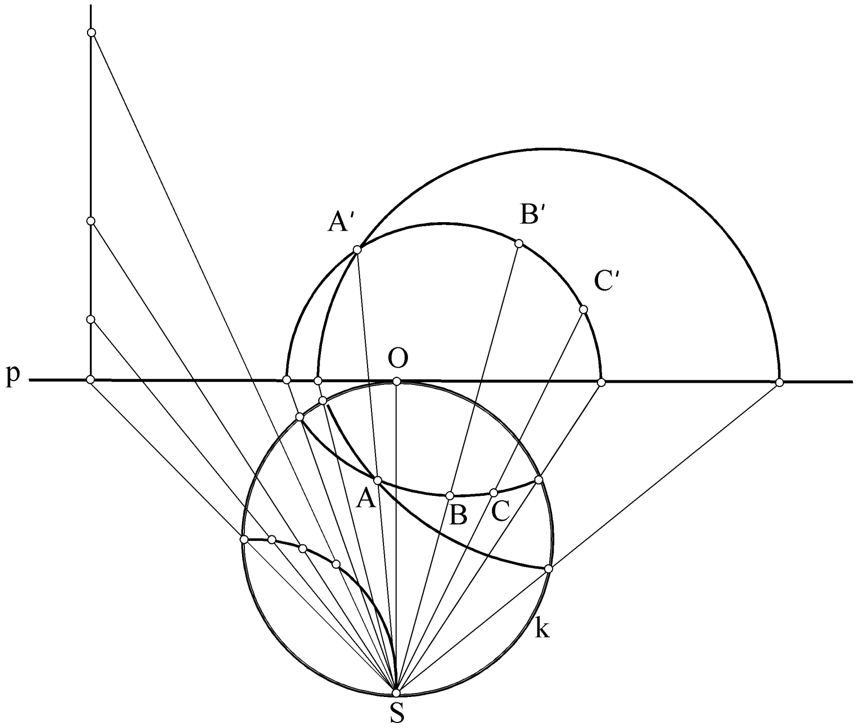
Pre nego da opišemo osnovne pojmove i relacije u poluravanskom modelu pogledajmo šta geometrijski predstavlja inverzija između diska $\mathcal{P}$ i gornje poluravni $\mathcal{H}$.

Neka su zadati krug k i prava p koja krug k dodiruje u nekoj tački O. Ako je S tačka kruga k dijametralno suprotna tački O, inverzijom ψ u odnosu na krug sa centrom u S i poluprečnikom SO, krug k se preslikava na pravu p, a unutrašnjost σ toga kruga na otvorenu poluravan π sa rubom p (Slika 10.36.). Neposredno se proverava da je to preslikavanje bijekcija.

Poluravan π je H-ravan a svaka njena tačka je H-tačka. Kako inverzija čuva uglove, H-prave unutrašnjosti σ kruga k se preslikavaju na polukrugove i poluprave poluravni π upravne na rub (apsolutu) te poluravni. Definišimo sada relacije i *H-između* i *H-podudarnosti* u poluravanskom modelu.

Ako je tačka B ravni σ između tačaka A i C, tada ćemo za sliku B' tačke B (koja pripada H-ravni π) reći da je *H-između* A' i C', slika tačaka A i C (koje takođe pripadaju H-ravni π) u inverziji ψ i pisaćemo $\mathcal{B}_H(A', B', C')$.

Sa tako ustanovljenim pojmovima: H-tačka, H-prava i relacija H-između, nije teško ustanoviti da na zasnovanom skupu H-tačaka i H-pravih *važe sve aksiome incidencije i poretka.* Da bismo ustanovili aksiome podudarnosti



Slika 10.36.

neophodno je da uvedemo relaciju podudarnosti neeuklidskih parova tačaka na takvom modelu.

Kazaćemo da je par H-tačaka (A, B), *H-podudaran* paru H-tačaka (A', B') ako postoji konačan niz inverzija pomenute poluravni koji H-duž AB prevodi u H-duž $A'B'$. To označavamo:

$$(A', B') \overset{H}{\cong} (A, B).$$

H-duž AB je skup svih tačaka H-prave koje su H-između datih H-tačaka A i B. Tačkom O H-prava p je razložena na dve H-poluprave. Sada se može ustanoviti da na ovakvom modelu važe i sve aksiome podudarnosti.

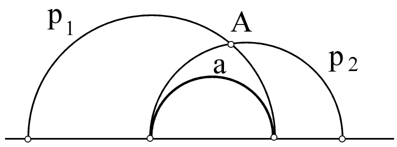
Značajno je rešavanje pitanja sledećeg problema:

Ako je na H-pravoj p data H-duž AB a na H-pravoj p' H-tačka A', kako na H-pravoj p' sa određene strane H-tačke A' konstruisati H-tačku B' takvu da je $(A, B) \overset{H}{\cong} (A', B')$?

Konstruišimo H-pravu određenu H-tačkama A i A'. Zatim konstruišimo H-medijatrisu n duži AA' na sledeći način: Konstruišimo Euklidsku pravu AA' i označimo sa O njen presek sa x. Označimo sa T dodirnu tačku tangente iz tačke O i euklidskog polukruga p. Tražena medijatrisa n H-duži AA' je polukrug sa centrom u tački O i poluprečnikom OT. Konstruišimo zatim H-normalu iz H-tačke B na H-medijatrisu n. Postoji jedinstven polukrug sa središtem na x koji sadrži tačku B i upravan je na polukrug n. Zatim se konstruiše tačka inverzna tački B u odnosu na polukrug n (simetrična tački B u odnosu na medijatrisu n). Označimo je sa B''. Tačke A' i B'' određuju H-pravu p'' koja je simetrična sa pravom p u odnosu na pravu n. Tada se H-prave p i p'' seku u tački A'. Prave p' i $A'B''$ određuju jedan ugao. Kako je inverzija konformno preslikavanje to ugao pri tom preslikavanju ne menja svoju veličinu. Može se konstruisati simetrala a zatim normala u tački A' na toj simetrali. U odnosu na tu simetralu n' može se konstruisati tačka B' na p' simetrična tački A' tako što iz tačke B'' konstruišemo pravu upravnu na n' i u preseku sa p' dobijamo tačku B'. $\square$

Ostale aksiome H-podudarnosti se lako izvode. Neposredno se dokazuje da važi i Dedekindova aksioma neprekidnosti.

Na ovom modelu je bitno ustanoviti koja aksioma paralelnosti važi: Plejferova ili aksioma Lobačevskog. Ispostavlja se da važi aksioma Lobačevskog.



Slika 10.37.

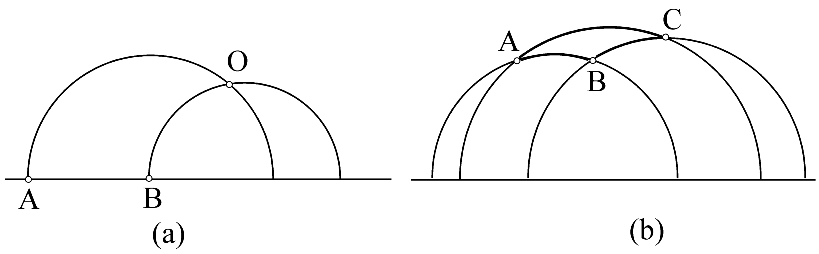
Neka je a H-prava i A H-tačka van a. Tada postoje bar dve H-prave koje sadrže H-tačku A i sa H-pravom a nemaju zajedničkih H-tačaka. Granične H-prave koje ne seku pravu a i sadrže tačku A (Slika 10.37.) su H-paralelne prave sa pravom a, jedna u jednom a druga u drugom smeru. Označimo ih sa p_1 i p_2.

Na taj način je ustanovljen *model planimetrije Lobačevskog.*

Iz tog razloga će i H-ravan π biti model hiperboličke planimetrije koju nazivamo *Poenkareovim poluravanskim modelom.*

Uvedimo još pojmove H-ugla i H-trougla u poluravanskom modelu.

Na Slici 10.38. je predstavljen *H-ugao* $\measuredangle AOB$ kao i *H-trougao* ΔABC u poluravanskom modelu.

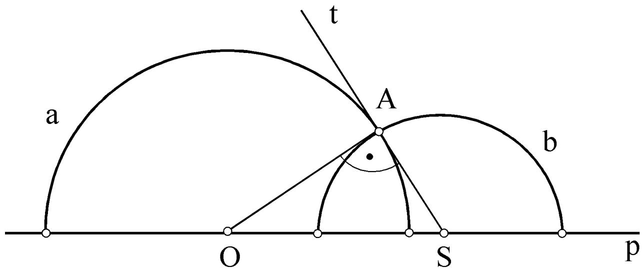


Slika 10.38. H-ugao i H-trougao

Daćemo primer kako konstruisati ugao paralelnosti u Poenkareovom poluravanskom modelu za datu duž. Pre toga, daćemo kratak opis konstrukcije *normale* i *paralele* u odnosu na neku pravu u modelu.

Primer 10.5.1. *U Poenkareovom poluravanskom modelu, konstruisati H-normalu na datu H-pravu a kroz datu H-tačku A.*

Rešenje: Mogu nastupiti dva slučaja. Razmotrimo svaki od njih ponaosob.

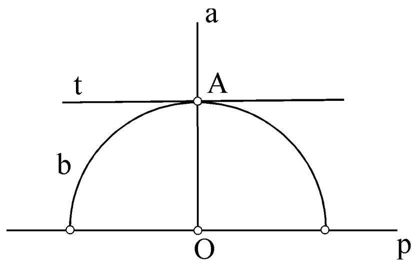


Slika 10.39.

(1) H-prava a je polukrug. Iz tačke A konstruišemo tangentu t na a i presečnu tačku te tangete i apsolute označimo sa S a dodirnu tačku tangente i a označimo sa T. Deo kruga b, sa centrom S i poluprečnikom ST, koji se nalazi u H-ravni je tražena H-normala (Slika 10.39.).

(2) Prava a je H-poluprava. Označimo sa O podnožje prave a na apsoluti. Krug sa centrom u O i poluprečnikom OA je tražena normala (Slika 10.40.). □

Primer 10.5.2. *Neka su u Poenkareovom poluravanskom modelu date H-prava a i H-tačka A van nje. Konstruisati H-pravu koja je H-paralelna sa a i sadrži A.*

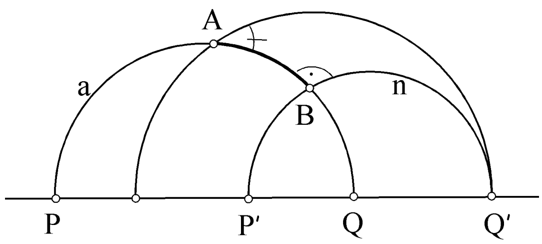


Slika 10.40.

Rešenje: Opet razmatramo dva slučaja:

(1) Neka je H-prava a polukrug sa centrom S na apsoluti i neka su P i Q tačke u kojima ona seče apsolutu. Konstruišimo euklidsku simetralu duži AP i njenu presečnu tačku sa apsolutom označimo sa $S^{'}$. Deo kruga $k(S^{'}, \overline{SA} \equiv \overline{SP})$, koji se nalazi u H-ravni, predstavlja traženu H-pravu H-paralelnu sa a u jednom smeru. Ponavljanjem postupka za tačku Q analogno se dobija H-prava paralelna sa a u drugom smeru.

(2) Ako je H-prava a poluprava, označimo sa O podnožje prave a na apsolutu. Konstruišimo euklidsku simetralu duži OA i označimo sa S tačku u kojoj ona seče apsolutu. Deo kruga $k(S, \overline{SA} \equiv \overline{SO})$, koji se nalazi u H-ravni, predstavlja traženu H-pravu paralelnu sa a koja sadrži tačku A. $\square$



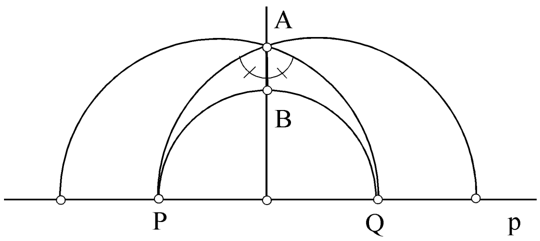
Slika 10.41.

Primer 10.5.3. *Konstruisati H-ugao pralelnosti u Poenkareovom poluravanskom modelu za datu H-duž AB.*

Rešenje: Mogu nastupiti dva slučaja.

(1) Neka je je H-duž data na H-pravoj koja je polukrug. Neka je a dati polukrug u Poenkareovom poluravanskom modelu koji sadrži H-duž AB i

neka su P i Q tačke u kojima ona seče apsolutu (Slika 10.41.). Konstruišemo u tački B H-normalu n na H-pravu a, kao u Primeru 10.5.1., i sa P' i Q' označimo njene presečne tačke sa apsolutom. Zatim konstruišimo u tački A H-pravu koja je H-paralelna sa n u jednom smeru, kao što je opisano u Primeru 10.5.2., i jedan zajednički kraj im je, recimo, tačka Q'. U tom slučaju dobijamo da je ugao $\measuredangle BAQ'$ traženi ugao paralelnosti u Poenkareovom ravanskom modelu.



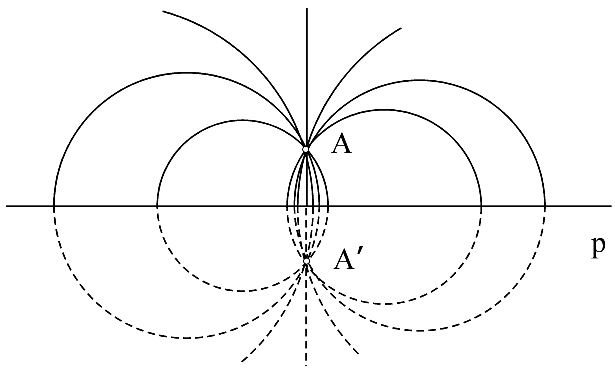
Slika 10.42.

(2) Neka je sada H-duž data na pravoj koja je upravna na apsolutu. Analogno kao u prethodnom slučaju, konstruišimo normalu u tački B kao u Primeru 10.5.1. i označimo njene preseke sa apsolutom sa P i Q (Slika 10.42.). Zatim, u tački A konstruišimo paralelu, sa zajedničkim krajem Q u jednom smeru pa je traženi ugao, u smeru paralelnosti, upravo ugao $\measuredangle BAQ$.

10.6 Epicikli u Poenkareovom poluravanskom modelu

Invezijom ψ se eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi H-pravih H-ravni σ preslikavaju, redom, na eliptičke, paraboličke, i hiperboličke pramenove H-pravih H-ravni π. Budući da H-prave nekog pramena H-pravih H-ravni σ pripadaju krugovima nekog pramena krugova, to i H-prave pramena H-pravih H-ravni π pripadaju krugovima nekog pramena krugova.

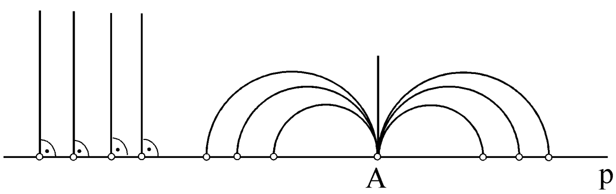
Primer 10.6.1. *Ispitati čime je u Poenkareovom poluravanskom modelu reprezentovan:*
(a) *eliptički,*
(b) *parabolički i*
(c) *hiperbolički pramen pravih.*



Slika 10.43.

Rešenje: (a) Posmatrajmo sve H-prave koje prolaze kroz tačku A. To su u euklidskom smislu polukrugovi, čiji centri leže na pravoj p i koje prolaze kroz tačku A. Tom skupu pripada i normala na pravu p koja prolazi kroz tačku A. Odgovarajući krugovi, nosači uočenih polukrugova, prolaze i kroz tačku A' koja je simetrična tački A u odnosu na apsolutu p. Tako one obrazuju eliptički pramen sa karakterističnim tačkama A i A' (Slika 10.43.).

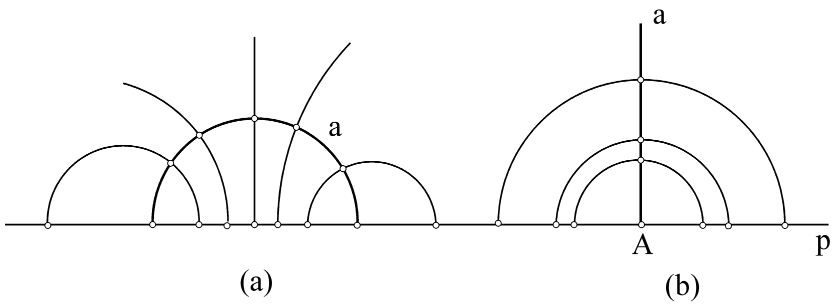
Prema tome, eliptički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu predstavljen je delovima elemenata eliptičkog pramena krugova, koji leže sa uočene strane apsolute p, uključujući i odgovarajući deo potencijalne ose tog pramena. Linija centara toga pramena krugova je apsoluta p a karakteristična tačka pramena koja leži u H-ravni je H-centar eliptičkog pramena H-pravih.



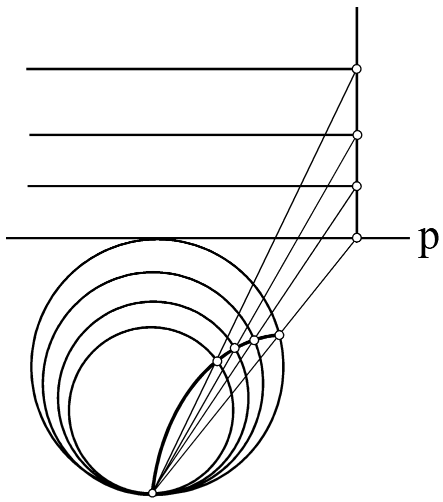
Slika 10.44.

(b) U slučaju paraboličkog pramena, slično se pokazuje da je to skup svih polukrugova sa centrima na apsoluti p koje imaju jednu zajedničku tačku na apsoluti, uključujući i polupravu koja je u toj tački normalna na apsolutu. Tako je parabolički pramen H-pravih reprezentovan delom paraboličkog pramena krugova koji leži u H-ravni.

Parabolički pramen H-pravih je takođe reprezentovan i skupom svih polupravih sa početnom tačkom na apsoluti, a koje su normalne na apsolutu (Slika 10.44.).



Slika 10.45.



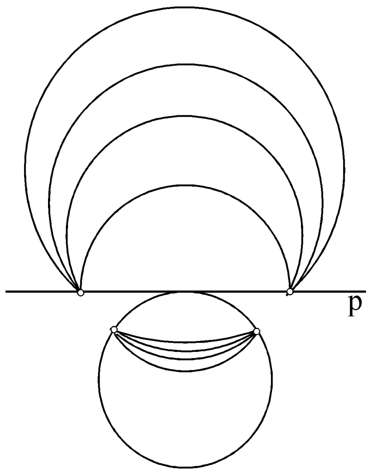
Slika 10.46.

(c) Neka je bazisna H-prava pramena euklidski polukrug a. Prave hiperboličkog pramena pravih reprezentovane su polukrugovima sa centrima na apsoluti koji su normalni na krug a. Na osnovu primera koji opisuje konstrukciju normale na datu pravu (Primer 10.5.1.) možemo ovde opisati hiperbolički pramen pravih (Slika 10.45. (a)).

Ako je bazisna prava poluprava a upravna na apsolutu u tački A, tada je hiperbolički pramen reprezentovan sistemom koncentričnih polukrugova sa zajedničkim centrom A (Slika 10.45. (b)). □

Inverzijom ψ H*-krugovi* H-ravni σ se preslikavaju na euklidske krugove H-ravni π, koji, iz tog razloga, predstavljaju H*-krugove* H-ravni π.

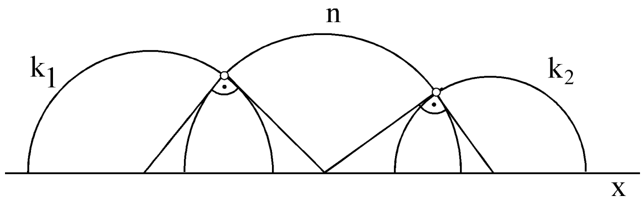
Tom inverzijom H-oricikli H-ravni σ koji sadrže središte S date inverzije, preslikavaju se na euklidske prave H-ravni π koje su euklidski paralelne rubu p poluravni π, a ostali H-oricikli se preslikavaju na euklidske krugove poluravni π koji dodiruju pravu p. Stoga se skup H*-oricikala* H-ravni π sastoji iz euklidskih pravih poluravni π koje su paralelne pravoj p i krugova te poluravni koji dodiruju p (Slika 10.46.). Inverzijom ψ H*-ekvidistante*



Slika 10.47.

H-ravni σ koje sadrže središte S te inverzije, preslikavaju se na euklidske poluprave sa temenima na pravoj p, a ostale H-ekvidistante na lukove krugova čija temena pripadaju pravoj p. Stoga se skup H*-ekvidistanti* H-ravni π sastoji iz euklidskih H-polupravih kojima su temena na rubu p poluravni π i lukova krugova čija temena pripadaju pravoj p (Slika 10.47.).

Rešavajući zadatke u Euklidskoj geometriji možemo dobiti i rešenje odgovarajućeg problema u geometriji Lobačevskog, te probleme geometrije Lobačevskog svodimo preko modela na probleme Euklidske geometrije. Postavlja se problem ustanovljavanja *jedinstvene zajedničke normale* dveju hiperparalelnih pravih na modelu planimetrije Lobačevskog. U tom cilju konstruiše se polukrug (Slika 10.48.) sa centrom na apsoluti x upravan na datim polukrugovima. Taj polukrug biće rešenje postavljenog problema u planimetriji Lobačevskog u okviru Poenkareovog modela.



Slika 10.48.

Za *model stereometrije Lobačevskog* (u Poenkareovom smislu) posmatrali bismo polusferu u Euklidskom otvorenom poluprostoru koja je dobijena iz sfere čiji centar pripada granici poluprostora. Granicu poluprostora, tj. odgovarajuću ravan nazivamo *apsolutom.* Pomenuta polusfera, kao i poluravan ortogonalna na apsoluti predstavljale bi model ravni u prostoru Lobačevskog. Posebno u svakoj ovakvoj ravni Lobačevskog realizovala bi se planimetrija Lobačevskog.

Glava 11

Eliptička geometrija

11.1 Uvod

Kao što smo videli, euklidska geometrija je geometrijski sistem koji se zasniva na Hilbertovom sistemu aksioma. U tom sistemu, aksioma paralelnosti zahteva da u ravni, kroz tačku van prave prolazi tačno jedna prava koja sa njom nema zajedničkih tačaka. U geomeriji Lobačevskog, tj. hiperboličkoj geometriji aksioma paralelnosti je zamenjena aksiomom Lobačevskog koja kaže da u ravni kroz tačku van prave prolaze najmanje dve prave koje sa njom nemaju zajedničkih tačaka. U poslednjem slučaju kroz tačku van prave u ravni prolazi beskonačno mnogo pravih koje sa njom nemaju zajedničkih tačaka. U odnosu na broj pravih u ravni, koje prolaze kroz datu tačku van date prave, postoji još jedna mogućnost, a to je *da ne postoji ni jedna prava koja prolazi kroz datu tačku a sa datom pravom nema zajedničkih tačaka.*

Geometrijski sistem, kod koga se ma koje dve komplanarne prave seku, naziva se *Rimanova geometrija.* Razlikujemo dve vrste Rimanovih geometrija. U jednoj od njih se dve prave seku u dvema tačkama. Takva geometrija se između ostalog realizuje i na sferi, pa se ona naziva još i *sferna geometrija.* U drugoj se svake dve prave seku, ali samo u jednoj tački. U tom slučaju posmatrani geometrijski sistem nazivamo *eliptička geometrija.*

Međutim, prilikom proučavanja prve tri grupe aksioma Hilbertovog sistema, zaključili smo da u ravni postoje prave koje se ne seku. To znači da je pretpostavka da se u ravni ma koje dve prave seku, protivurečna sa prve tri grupe aksioma Hilbertovog sistema. To dalje znači da se svaka od Rimanovih geometrija zasniva na sistemu aksioma koji je od Hilbertovog sistena različit ne samo u aksiomi paralelnosti, što je slučaj sa hiperboličkom geometrijom, već i u aksiomama prve tri grupe. Ta razlika je naročito velika kod aksioma rasporeda, jer je prava u Rimanovoj geometriji zatvorena linija, pa je od tri kolinearne tačke svaka između ostale dve. To znači da relacija "između" ne reguliše raspored tačaka na pravoj. To je razlog što se menja formulacija i *aksioma neprekidnosti.* Što se *aksioma podudarnosti* tiče, one pored činjenica sadržanih u Hilbertovom sistemu sadrže i aksiome specifične za Rimanovu geometriju.

U daljem radu ćemo se ograničiti samo na ispitivanje eliptičke geometrije.

U eliptičkoj geometriji, kao i u euklidskoj geometriji ili pak kao u hiperboličkoj geometriji, osnovni objekti su *tačka*, *prava* i *ravan.* Međutim osnovne relacije su: relacije pripadanja, relacija razdvojenosti parova tačaka i relacija podudarnosti. Aksiome koje opisuju međusobne odnose osnovnih pojmova raspoređene su u četiri grupe, i to

I *aksiome veze* (*pripadanja, incidencije*)
II *aksiome rasporeda*
III *aksiome neprekidnosti*
IV *aksiome podudarnosti.*

11.2 Aksiome veze

Prvu grupu čine deset aksioma *veze* (*incidencije, pripadanja*). Razlika od odgovarajućih aksioma Hilbertovog sistema jeste u prvoj aksiomi, s tim što je dodata i deseta aksioma. Prva aksioma sada glasi:

$\mathbf{I_1}$ *Svaka prava sadrži najmanje tri tačke A, B i C. Postoje najmanje tri tačke koje ne pripadaju istoj pravoj.*

Deseta aksioma incidencije je:

$\mathbf{I_{10}}$ *Za svake dve prave iste ravni postoji tačka koja im pripada.*

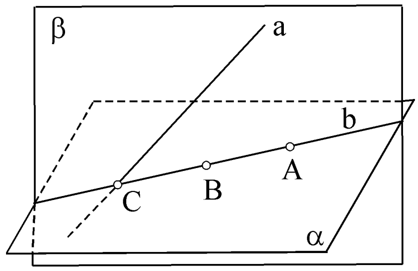
To u stvari znači da za proizvoljne dve prave iste ravni postoji njihova zajednička tačka, tj. svake dve prave u ravni se seku.

Ova aksioma predstavlja glavnu osobenost eliptičke geometrije po kojoj se ona razlikuje i od euklidske i od hiperboličke geometrije.

Navešćemo sada neke posledice prve grupe aksioma eliptičke geometrije.

Teorema 11.2.1. *Prava koja ne pripada ravni, ima sa tom ravni jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Neka je a prava koja ne pripada ravni α i tačka A u ravni α (Slika 11.1.). Označimo sa β ravan određenu tačkom A i pravom a. Tačka A je zajednička za ravni α i β, pa prema aksiomi I_8 one imaju još jednu zajedničku



Slika 11.1.

tačku B, pa samim tim i zajedničku pravu b. Prave a i b su komplanarne, pa prema aksiomi I_{10} imaju zajedničku tačku C koja pripada ravni α jer pripada pravoj b. Dakle, prava a i ravan α imaju zajedničku tačku C. Sem tačke C, prava a i ravan α ne mogu imati drugih zajedničkih tačaka, jer bi u tom slučaju na osnovu aksiome I_7, prava a pripadala ravni α. $\square$

Teorema 11.2.2. *Svakoj ravni pripada najmanje jedna prava.*

Dokaz. Prema aksiomi I_4 svakoj ravni pripada najmanje jedna tačka A, a na osnovu aksiome I_9 postoji najmanje jedna tačka B koja ne pripada ravni α. Tačke A i B određuju pravu a. Prema aksiomi I_1 postoji još jedna tačka C koja ne pripada pravoj a. Ako tačka C pripada ravni α, prava AC je tražena prava. Ako pak C ne pripada ravni α, prava BC, na osnovu teoreme 11.2.1., ima sa ravni α zajedničku tačku D, pa je u ovom slučaju prava AD tražena prava.

Teorema 11.2.3. *Dve ravni se uvek seku.*

Dokaz. Uočimo ravni α i β. Prema Teoremi 11.2.2., uvek postoji prava a koja pripada ravni α. Ta prava a prema Teoremi 11.2.1., uvek sa ravni β ima zajedničku tačku P. Dakle, ravni α i β uvek imaju zajedničku tačku, pa prema aksiomi I_8 imaju i zajedničku pravu. $\square$

Dakle, u eliptičkoj geometriji, nema ne samo paralelnih pravih već nema ni paralelnih ravni.

11.3 Aksiome rasporeda eliptičke geometrije

Pri uspostavljanju rasporeda tačaka koje pripadaju istoj pravoj, u eliptičkoj geometriji se uvodi *relacija razdvojenosti parova tačaka.* Ta relacija okarakterisana je sledećom grupom aksioma:

II₁ *Za tri proizvoljne tačke A, B i C neke prave prave p, postoji takva tačka D prave p da par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D.*

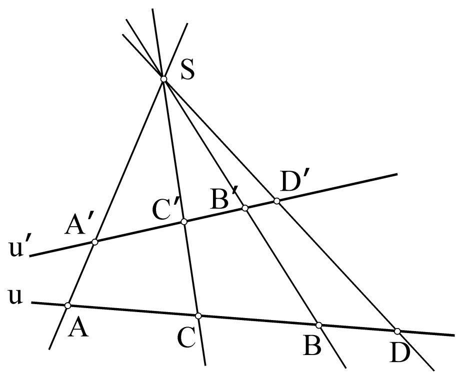
II₂ *Ako par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D, onda su A, B, C i D četiri razne kolinearne tačke. Štaviše, razdvojenost parova tačaka je uzajamna i ne zavisi od redosleda tačaka u svakom paru.*

II₃ *Ako su A, B, C i D četiri razne kolinearne tačke, tada ili par A, B razdvaja par C, D ili par A, C razdvaja par B, D ili par A, D razdvaja par B, C.*

II₄ *Ako su A, B, C, D i E pet kolinearnih tačaka i svaki od parova C, D i C, E razdvaja par A, B, tada par D, E ne razdvaja par A, B.*

II₅ *Ako su A, B, C, D i E pet kolinearnih tačaka i svaki od parova C, D i C, E ne razdvaja par A, B, tada ni par D, E ne razdvaja par A, B.*

II₆ *Neka su u i u' dve komplanarne prave, A, B, C i D tačke prave u, a A', B', C' i D' tačke prave u' (Slika 11.2.) tako da su prave AA', BB', CC' i DD' konkurentne. Tada, ako par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D, onda i par tačaka A', B' razdvaja par tačaka C', D'.*



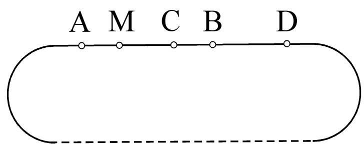
Slika 11.2.

Na osnovu aksioma rasporeda može se definisati *duž, ugao, trougao.* Pre no što pređemo na uvođenje tih definicija primetimo da , ako su A i B dve razne tačke, na osnovu aksiome I_1 na pravoj AB postoji još jedna tačka C, a na osnovu aksiome II_1 na toj pravoj postoji još jedna tačka D, takva da par tačaka B, D razdvaja par tačaka A, C. Prema istoj aksiomi II_1 sledi da na toj pravoj postoji i tačka E, takva da par A, D razdvaja par B, E. Iz prvog uslova i aksiome II_3 sledi da par A, B ne razdvaja par C, D, a iz drugog uslova i aksiome II_3 sledi da par A, B ne razdvaja par E, D. Iz poslednja dva zaključka na osnovu aksiome II_5 imamo da par E, C ne razdvaja par A, B. Ponavljajući ovakav postupak dolazimo do sledeće teoreme:

Teorema 11.3.1. *Za proizvoljne tri kolinearne tačke A, B i C, postoji beskonačno mnogo tačaka M, takvih da par A, B ne razdvaja par C, M.*

Sada možemo preći na definiciju duži:

Definicija 11.1. *Duž* je skup tri kolinearne tačke A, B i C i svih tačaka M takvih da par A, B ne razdvaja par C, M. Tačke A i B su *krajnje* tačke duži, a sve ostale tačke su *unutrašnje tačke duži.*



Slika 11.3.

Neka je D takva tačka da par A, B razdvaja C, D (Slika 11.3.). Ponovimo opisani postupak, menjajući tačku C, tačkom D. Posmatrajući skup tačaka koji čine tačke A, B, D i sve tačke N takve da par A, B ne razdvaja par D, N, dobijamo još jednu duž sa istim krajnjim tačkama A i B. Pokazaćemo da ni jedna tačka prve duži ne može pripadati drugoj duži. Dovoljno je dakle dokazati da par M, D uvek razdvaja par A, B. U stvari, ako M, D ne razdvaja par A, B, a po definiciji unutrašnjih tačaka prve duži par M, C ne razdvaja par A, B, primenom aksiome II_5 dobijamo da par A, B ne razdvaja ni par C, D, što je u protivurečnosti sa pretpostavkom o rasporedu tačaka A, B, C i D. Dakle, par A, B uvek razdvaja par M, D, što znači da tačka M ne pripada drugoj duži. Potpuno analogno se dokazuje da tačka N druge duži ne može pripadati i prvoj duži. Dakle, ove dve duži nemaju unutrašnjih zajedničkih tačaka. Na taj način je dokazana sledeća teorema:

Teorema 11.3.2. *Dve tačke prave određuju na njoj dve duži koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.*

Definicija 11.2. Za dve duži određene dvema tačkama jedne prave kažemo da *dopunjuju jedna drugu.*

Da bi duž razlikovali od njene dopunske duži pored krajnjih tačaka uvek navodimo i jednu unutrašnju tačku te duži. Tako npr. ako par C, D razdvaja par A, B, tada duži ABC i ADC dopunjuju jedna drugu.

Neka su A, B i M tri tačke neke eliptičke prave. Tačka M pripada samo jednoj od dve duži AB. Otuda sledi teorema:

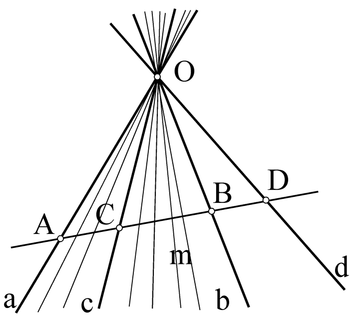
Teorema 11.3.3. *Tačka eliptičke prave ne određuje na toj pravoj dve poluprave.*

Teorema 11.3.4. *Prava eliptičke ravni ne određuje u toj ravni dve poluravni.*

Dokaz. Neka je a prava ravni α i A i B dve proizvoljne tačke ravni α van prave a. Prave AB i a uvek imaju zajedničku tačku P. Ali na pravoj AB uvek postoji duž AB koja ne seče pravu a. To upravo znači da prava a u ravni α ne određuje dve poluravni. □

Teoreme 11.3.3. i 11.3.4. pokazuju da se u eliptičkoj geometriji ugao ne može definisati kao skup dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom, jer u eliptičkoj geometriji nema polupravih u onom smislu u kome se pojavljuju u euklidskoj i hiperboličkoj geometriji. Iz istih razloga se ne može ni diedar definisati kao skup dve poluravni sa zajedničkom graničnom pravom.

Posmatrajmo u ravni α prave a, b, c i d koje prolaze kroz istu tačku S i pravu u koja ne prolazi kroz tačku S. Označimo sa A, B, C i D presečne tačke redom pravih a, b, c i d sa pravom u.



Slika 11.4.

Definicija 11.3. Ako posmatrani par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D, tada kažemo da *par pravih a, b razdvaja par pravih c, d.*

Prema aksiomi II_6 sledi da razdvojenost parova pravih ne zavisi od izbora prave u.

Neka su a i b dve prave eliptičke ravni i O njihova zajednička tačka. Nije teško pokazati da kroz tačku O prolaze druge dve prave c i d, takve da par a, b razdvaja par c, d i beskonačno mnogo pravih m, takvih da par a, b ne razdvaja par c, m (Slika 11.4.).

Definicija 11.4. *Ugao* u eliptičkoj ravni je unija pravih a, b, c koje prolaze kroz tačku O te ravni i svih pravih m koje prolaze kroz tačku O, pri čemu par pravih c, m ne razdvaja par pravih a, b. Prave a i b su *kraci ugla.* Prava m je *unutrašnja prava ugla.* Tačka O je *teme ugla.* Tačke sa unutrašnjih pravih su *unutrašnje tačke ugla.*

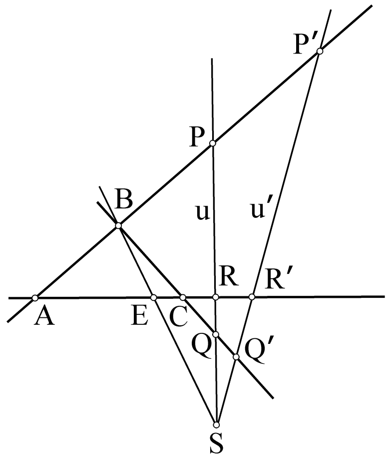
Ako je d prava iste eliptičke ravni, pri čemu i ona prolazi kroz tačku O, tako da par pravih a, b razdvaja par pravih c, d, pored ugla sa kracima a, b i unutrašnjom pravom c, može se posmatrati i ugao sa kracima a, b i unutrašnjom pravom d. Ta dva ugla nemaju zajedničkih tačaka van pravih a i b.

Definicija 11.5. Za gore posmatrana dva ugla acb i adb sa kracima a i b kažemo da se *dopunjuju*

Svaka prava ravni α kroz tačku O, različita od pravih a i b pripada ili uglu acb ili uglu adb. Dakle, svaka prava koja ne pripada kracima a i b je unutrašnja tačka jednog od ta dva ugla.

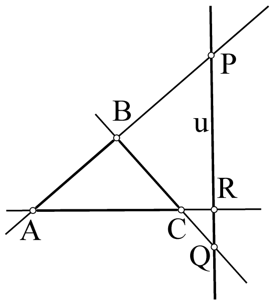
Teorema 11.3.5. *Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke, u i u' dve prave koje ne prolaze ni kroz jednu od tih tačaka. Neka su P, P'; Q, Q' i R, R' tačke u kojima prave u i u' seku redom prave AB, BC i AC. Tada, ako par P, P' ne razdvaja par A, B a par Q, Q' ne razdvaja B, C, tada ni par R, R' ne razdvaja par A, C.*

Dokaz. Prave u i u' se seku u tački S. Označimo sa E presečnu tačku pravih SB i AC (Slika 11.5.). Tačke A, B, P, P' i A, E, R, R' zadovoljavaju uslove aksiome II_6, pa kako P, P' ne razdvaja A, B to ni R, R' ne razdvaja A, E. Aksiomu II_6 sada primenimo na tačke B, C, Q, Q' i E, C, R, R'. Par tačaka Q, Q' ne razdvaja par B, C sledi da par R, R' ne razdvaja E, C. Dobili smo da par R, R' ne razdvaja niti A, E, niti E, C pa prema aksiomi II_5, par R, R' ne razdvaja ni par A, C, a to je i trebalo dokazati. $\square$



Slika 11.5.

Par tačaka P, P' ne razdvaja par A, B pa tačke P, P' pripadaju istoj duži AB. Analogno, tačke Q, Q' pripadaju istoj duži BC, a tačke R, R' istoj duži AC. Drugim rečima, kada tačka P određuje duž AB i tačka Q određuje duž BC, tada presečna tačka R pravih PQ i AC određuje duž AC.



Slika 11.6.

U euklidskoj i hiperboličkoj geometriji trougao je skup tri nekolinearne tačke i tri duži koje su određene tim trima tačkama. U eliptičkoj geometriji tri nekolinearne tačke određuju šest duži. Ako je i u eliptičkoj geometriji trougao skup od tri nekolinearne tačke i tri duži od ukupno šest, koliko je određeno sa tri tačke, treba odrediti tri duži koje će imati ulogu strana trougla. Njih ćemo odrediti tako da i u eliptičkoj geometriji bude zadovoljen zahtev Pašove aksiome (Slika 11.6.). To znači da prava koja seče jednu stranu trougla mora seći još samo jednu stranu tog trougla. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da izbor treće strane trougla ne zavisi od izbora pomenute prave, ako su dve strane trougla već utvrđene.

Definicija 11.6. *Unutrašnji ugao trougla* je onaj od dva ugla sa vrhom u temenu trougla, čije unutrašnje prave seku suprotnu stranicu trougla.

Definicija 11.7. *Unutrašnja tačka trougla* je ona tačka ravni u kojoj se seku unutrašnje prave dva unutrašnja ugla trougla.

Dakle, izborom stranica trougla određeni su njegovi uglovi i njegova unutrašnja oblast.

11.4 Aksioma neprekidnosti eliptičke geometrije

Grupa aksioma neprekidnosti eliptičke geometrije sastoji se od samo jedne aksiome.

III$_1$ *Neka su sve unutrašnje tačke duži AB podeljene na dve klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tako da važi*
(*i*) $\mathcal{M} \neq \emptyset$ *i* $\mathcal{N} \neq \emptyset$,
(*ii*) *Za proizvoljne tačke $P \in \mathcal{M}$ i $Q \in \mathcal{N}$ par A, Q razdvaja par P, B.*
Tada u jednoj od klasa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ postoji tačka X, takva da par A, X razdvaja par P, B, a par X, B razdvaja par A, Q.

Nije teško dokazati analogno tvrđenje za uglove: Ako se skup svix unutrašnjih pravih nekog ugla podeli na dve klase, tada u jednoj od te dve klase postoji prava koja zadovoljava analogne uslove kao tačka X iz aksiome III$_1$.

11.5 Aksiome podudarnosti eliptičke geometrije

Sledeća grupa aksioma opisuje relaciju podudarnosti duži eliptičke geometrije. Označavamo je sa $\cong$.

IV$_1$ *Svaka duž AB podudarna je sama sebi, tj. $AB \cong AB$ i $AB \cong BA$.*

IV$_2$ *Ako je duž AB podudarna duži $A'B'$ tada je i duž $A'B'$ podudarna duži AB.*

IV$_3$ *Ako je duž $A'B'$ podudarna duži AB i duž $A''B''$ podudarna duži AB, tada je duž $A'B'$ podudarna duži $A''B''$.*

IV$_4$ *Ako je C unurašnja tačka duži AB, tada ni jedna od duži AC i BC nije podudarna duži AB.*

IV$_5$ *Ako je duž AB podudarna duži $A'B'$, a C je unutrašnja tačka duži AB, tada postoji unutrašnja tačka C' duži $A'B'$ takva da je*

$$AC \cong A'C' \quad i \quad BC \cong B'C'.$$

IV$_6$ *Dopune podudarnih duži su podudarne.*

IV$_7$ *Za svaku tačku A prave a postoji tačka B prave a takva da su dve duži AB koje se međusobno dopunjuju, podudarne.*

Definicija 11.1. Tačke A i B iz aksiome IV$_7$ su *suprotne tačke prave*, a svaka od dve duži AB predstavlja *polupravu* te prave.

Dakle, kao posledica aksiome IV$_7$ sledi tvrđenje: *poluprave iste prave su među sobom podudarne.* Sledeća aksioma zahteva da su i poluprave raznih pravih među sobom podudarne.

IV$_8$ *Proizvoljne dve poluprave su podudarne među sobom.*

Definicija 11.2. Neka je tačka O teme nekog ugla, a O_1 i O_2 tačke na kracima tog ugla suprotne tački O. Ona od duži O_1O_2, čije su unutrašnje tačke istovremeno i unutrašnje tačke posmatranog ugla je *presečna duž.* Dva ugla su *podudarna*, ako su presečne duži tih uglova podudarne.

IV$_9$ *Ako za trouglove ABC i $A'B'C'$ važi*

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C' \quad i \quad \measuredangle A \cong \measuredangle A',$$

tada je i $BC \cong B'C'$. A ako je

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C' \quad \text{i} \quad BC \cong B'C',$$

tada je $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$.

Teorema 11.5.1. *Ako je duž AB različita od poluprave, i A' proizvoljna tačka neke prave a', tada na pravoj a' postoje tačno dve tačke B' i B'', takve da je jedna od duži $A'B'$ i jedna od duži $A'B''$ podudarna datoj duži AB.*

Dokaz. Označimo sa A_1 tačku prave AB suprotnu tački A, sa A_1' tačku prave a' suprotnu tački A'. Prema aksiomi IV$_8$, poluprava AA_1B je podudarna svakoj od dve poluprave $A'A_1'$. Tačka B je unutrašnja tačka duži AA_1B, pa prema aksiomi IV$_5$, svaka od duži $A'A_1'$ ima po jednu unutrašnju tačku B', tj. B'' takve da je $AB \cong A'B'$ i $AB \cong A'B''$, a to je i trebalo dokazati. $\square$

11.6 Polaritet u eliptičkoj geometriji

11.6.1 Polaritet u eliptičkoj ravni

Definicija 11.1. Ugao podudaran svom naporednom uglu je *prav.*

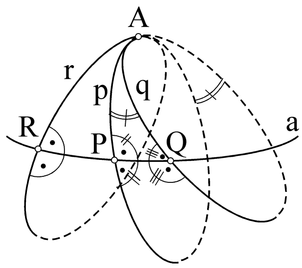
Označimo sa O teme pravog ugla, a sa O_1 i O_2 tačke suprotne tački O na kracima tog ugla. Jedna od dve duži O_1O_2 karakteriše jedan a druga onaj drugi ugao u temenu O. Ove dve duži O_1O_2 su podudarne jer odgovaraju podudarnim uglovima. Dakle, dokazana je teorema:

Teorema 11.6.1. *Presečna duž pravog ugla je poluprava.*

Na osnovu aksiome IV_8 i teoreme 11.6.1. dobijamo da važi

Teorema 11.6.2. *Dva proizvoljna prava ugla su podudarna među sobom.*

Teorema 11.6.3. *Sve tačke ravni α koje su suprotne datoj tački $A \in \alpha$ pripadaju istoj pravoj, pri čemu je ta prava ortogonalna na svaku pravu koja prolazi kroz tačku A.*



Slika 11.7.

Dokaz. Neka su eliptičkoj ravni α date dve prave p i q koje prolaze kroz tačku A ravni α. Označimo sa P i Q proizvoljne tačke redom pravih p i q različite od tačke A (Slika 11.7.). Posmatrajmo ona dva trougla APQ čija je zajednička strana jedna od duži PQ. Strane jednog od tih trouglova podudarne su strannama drugog pa su na osnovu aksiome IV_9 uglovi tih trouglova podudarni. Jedan par takvih uglova je npr. onaj sa temenom u tački P. Kako se oni međusobno dopunjuju, to je svaki od njih prav. To znači da prava PQ seče ortogonalno pravu p. Analogno, prava PQ seče ortogonalno i pravu q.

Označimo sa R proizvoljnu tačku prave PQ različitu i od P i od Q. Uočimo ona dva trougla AQR čija je jedna zajednička strana jedna od duži QR. Duž QR je podudarna sama sebi na osnovu aksiome IV_2. Takođe i dve duži AQ su podudarne među sobom, jer je svaka od njih poluprava. Kako su i dva prava ugla kod temena Q podudarna , na osnovu aksiome IV_9 sledi da je i treći par AR pomenutih strana podudaran, tj. duži AR su poluprave. To znači da je na pravoj r tačka R suprotna tački A. Odavde zaključujemo i da su uglovi kod temena R pravi.

S obzirom na to da je R proizvoljna tačka prave PQ, to znači da svaka prava ravni α, koja prolazi kroz tačku A seče ortogonalno pravu PQ i to u tački suprotnoj tački A. Na taj način je teorema dokazana. □

Definicija 11.2. Prava koja se pominje u Teoremi 11.6.3. naziva se *polara tačke* A.

Teorema 11.6.4. *Kroz tačku* P *na pravoj* p *prolazi tačno jedna normala na pravu* p.

Teorema 11.6.5. *Sve normale na pravu* a *ravni* α*, koje pripadaju ravni* α*, seku se u jednoj tački. Njeno odstojanje od podnožja svake normale podudarno je polupravoj.*

Dokaz. Označimo sa P tačku prave a, a sa p normalu u tački P na pravu a. Označimo dalje sa A tačku suprotnu tački P. Tada je prava a polara tačke P. Ako je Q još jedna tačka te polare, onda je prava AQ normala na tu polaru i tačka Q je suprotna tački A. Dakle, normale u tačkama P i Q na pravu a prolaze kroz istu tačku A, pri čemu je duž AP podudarna polupravoj. Kako je Q proizvoljna tačka sa navedenim osobinama sledi tvrđenje teoreme. □

Definicija 11.3. *Pol prave* a jeste tačka u kojoj se seku sve normale na pravu a ravni α.

Na osnovu teorema 11.6.4. i 11.6.5. imamo:

Teorema 11.6.6. *Tačka* A *je pol prave* a *ako i samo ako je prava* a *polara tačke* A.

Teorema 11.6.7. *Ako polara tačke* A *prolazi kroz tačku* B*, tada i polara tačke* B *prolazi kroz tačku* A.

Dokaz. Neka tačka B pripada polari tačke A. Tada je duž AB poluprava. S druge strane, sve tačke čija su rastojanja od tačke B podudarna polupravoj čine polaru tačke B. To znači da da tačka A pripada polari tačke B. □

11.6.2 Polaritet u eliptičkom prostoru

Definicija 11.4. Prava n je *normalna na ravan* α, ako je normalna na svaku pravu koja prolazi kroz presečnu tačku prave n i ravni α.

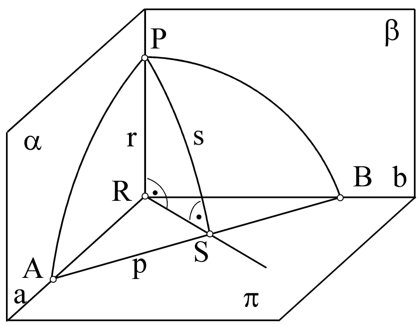
Teorema 11.6.8. *Ako je prava n normalna na dve prave ravni α koje prolaze kroz presečnu tačku prave n i ravni α, onda je prava n normalna na ravan α.*

Ova teorema se pokazuje analogno odgovarajućoj teoremi u apsolutnoj geometriji.

Teorema 11.6.9. *Sve tačke eliptičkog prostora koje su suprotne tački P pripadaju istoj ravni. Ta ravan je normalna na sve prave koje prolaze kroz tačku P.*

Dokaz. Označimo sa r proizvoljnu pravu koja sadrži tačku P, a sa α i β dve razne ravni koje sadrže pravu r. Sa a i b označim polare tačke P redom u ravnima α i β. Svaka od pravih a i b seče pravu r u tački R, tako da je duž PR poluprava. Prema Teoremi 11.6.8. ravan π određena pravama a i b je normalna na pravu r.

Označimo sa s proizvoljnu pravu koja sadrži tačku P. Ona uvek prodire ravan π. Označimo sa S zajedničku tačku prave s i ravni π. Prava RS pripada ravni π, koja je normalna na pravu r, pa sledi da je prava RS normalna na pravu r. Po konstrukciji, PR je polupravа, pa je u ravni PRS prava RS polara tačke P. Prema tome, i duž PS je polupravа i prava s je normalna na pravu RS ravni π (Slika 11.8.).



Slika 11.8.

Da bismo dokazali da je prava s normalna na ravan π dovoljno je da dokažemo da je prava s normalna na još jednu pravu ravni π kroz tačku S različitu od prave RS.

Označimo sa p, pravu ravni π koja prolazi kroz tačku S. Označimo zatim sa A i B presečne tačke prave p redom sa pravama a i b. Prave a i b su polare tačke P redom u ravnima α i β. Dakle, tačke A i B pripadaju redom dvema polarama tačke P. To znači da je prava p, koja je određena ovim dvema tačkama, polara tačke P u ravni PAB i pritom je prava s normalna na p.

Dakle, prava s je normalna na dve prave RS i p ravni π, pa je prava s normalna na ravan π, a to je i trebalo dokazati. □

Definicija 11.5. Ravan iz Teoreme 11.6.9. naziva se *polarna ravan tačke P*

Teorema 11.6.10. *U eliptičkom prostoru se sve normale ravni seku u jednoj tački. Odstojanje te tačke od podnožja svake normale podudarno je polupravoj.*

Dokaz. Neka je u eliptičkom prostoru data ravan π i tačka A ravni π. Označimo sa a pravu koja prolazi kroz tačku A i normalna je naravan π. Neka je P tačka suprotna tački A i neka je B proizvoljna tačka ravni π. Prema Teoremi 11.6.9. važi da je PB normalna na π i PB je poluprava.

To znači da sve normale na π prolaze kroz istu tačku P i odstojanje te tačke od ravni π, duž svake normale, podudarno je polupravoj eliptičkog prostora. □

Definicija 11.6. Tačka čija je egzistencija pokazana u teoremi 11.6.10. naziva se *pol* posmatrane ravni.

Na osnovu izloženog važi teorema:

Teorema 11.6.11. *Ako je u eliptičkom prostoru tačka P pol ravni π, tada je ravan π polarna ravan tačke P.*

Teorema 11.6.12. *Ako u eliptičkom prostoru polarna ravan tačke P sadrži tačku Q, tada i polarna ravan tačke Q sadrži tačku P.*

Dokaz. Neka tačka Q pripada polarnoj ravni tačke P. Tada je duž PQ poluprava normalna na ravan π, a to upravo znači da tačka P pripada polarnoj ravni tačke Q. □

11.7 Konjugovane prave

U eliptičkom prostoru posmatrajmo pravu g i dve tačke A i B prave g. Označim sa α i β redom polarne ravni tačaka A i B. U eliptičkoj geometriji dve ravni se uvek seku. Označimo sa g' presečnu pravu ravni α i β.

Tada *pol ravni γ koja sadrži pravu g pripada pravoj g'*. Dokažimo to. Ravan γ sadrži tačku A pa na osnovu Teoreme 11.6.12. sledi da njen pol pripada ravni α. Na isti način on pripada i ravni β, pa mora pripadati i presečnoj pravoj g' ravni α i β. Važi i obratno: *polarna ravan proizvoljne tačke G' prave g' sadrži pravu g*. Dokažimo to. Tačka G' pripada istovremeno ravnima α i β, što znači da polarna ravan tačke G' prolazi kroz tačke A i B. Dakle, svaka tačka prave g pripada polarnoj ravnineke tačke prave g'. Na osnovu Teoreme 11.6.12. to znači da polarna ravan svake tačke prave g sadrži pravu g'.

Dakle, prave g i g' imaju osobinu da *polarna ravan svake tačke jedne od njih sadrži drugu i da pol svake ravni koja sadrži jednu od tih dveju pravih, pripada drugoj.*

Definicija 11.1. Za dve prave kažemo da su *konjugovane* ako imaju osobinu da polarna ravan svake tačke jedne od njih sadrži drugu i da pol svake ravni koja sadrži jednu od tih dveju pravih, pripada drugoj.

Teorema 11.7.1. *Svaka ravan koja sadrži jednu od dve konjugovane prave, normalna je na drugu. Važi i obrnuto, ravan koja je normalna na jednu od dve konjugovane prave sadrži drugu.*

Dokaz. Neka su g i g' dve konjugovane prave a γ ravan koja sadrži pravu g. Pol svake ravni koja sadrži pravu g' prpada pravoj g. Kako je svaka prava koja prolazi kroz pol ravni normalna na tu ravan, zaključujemo da je prava g' normalna na ravan γ.

Obratno, neka je ravan γ normalna na jednu od dve konjugovane prave g i g'. Neka je to prava g. S obzirom na to da pol proizvoljne ravni pripada svim normalama na tu ravan, zaključujemo da pol ravni γ pripada pravoj g, odakle, prema definiciji konjugovanih pravih sledi da ravan γ sadrži pravu g'. □

Iz Teoreme 11.7.1. neposredno sledi:

Teorema 11.7.2. *Dve konjugovane prave nisu komlanarne.*

Teorema 11.7.3. *Prava koja seče dve konjugovane prave je normalna na svaku od njih.*

Dokaz. Označimo sa g i g' dve konjugovane prave a sa p pravu koja ih seče. Prema Teoremi 11.7.1. prava g je normalna na svaku ravan koja koja sadrži pravu g', pa i na ravan određenu pravama P i g'. Prava g je normalna na sve prave te ravni pa i na pravu p. Analogno dokazujemo da je i prava g' normalna na p. □

Teorema 11.7.4. *Prva koja seče ortogonalno jednu od dve konjugovane prave, seče ortogonalno i drugu pravu.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 11.7.3. dovoljno je da dokažemo da prava koja seče ortogonalno jednu od dve konjugovane prave, seče i drugu. Neka su g i g' dve konjugovane prave, a prave p i g se seku u tački P, pri čemu je g normalna na p. Prema Teoremi 11.7.1. ravan koja je u tački P normalna na pravu g sadrži pravu g' konjugovanu pravoj g. To znači da se prave g' i p seku. □

Teorema 11.7.5. *Dve tačke, od kojih jedna pripada jednoj a druga drugoj od dve konjugovane prave, su suprotne, tj. određuju polupravu.*

Dokaz. Označimo sa G i G' proizvoljne tačke redom dveju konjugovanih pravih g i g'. Polarna ravan tačke G sadrži pravu g', a prava GG' je normalna na tu ravan. To znači da je GG' polupravа. □

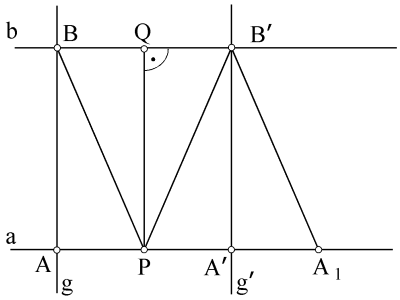
Teorema 11.7.6. *Tačka čije je odstojanje od tačaka jedne od dveju konjugovanih pravih podudarno polupravoj, pripada drugoj od tih pravih.*

Dokaz. Neka su g i g' dve konjugovane prave. Prema Teoremi 11.7.5. je odstojanje svake tačke prave g' od prave g podudarno polupravoj. Treba još pokazati da svaka tačka čije je odstojanje od prave g podudarno polupravoj, pripada pravoj g'. Ako je G' jedna takva tačka, a G podnožje normale iz tačke G' na pravu g, duž GG' je podudarna polupravoj. Ravan koja je u tački G normalna na pravu GG' sadrži pravu g. Lako se uočava da je pol te ravni upravo tačka G'. □

11.8 Klifordove paralele

Neka su g i g' dve konjugovane prave, A i B tačke na pravoj g, dok su A' i B' tačke na pravoj g', takve da su duži AB i $A'B'$ podudarne, ali različite od poluprave. Obeležimo sa a pravu AA', a sa b pravu BB'.

Uočimo proizvoljnu tačku P prave a, i označimo sa Q podnožje normale iz tačke P na pravu b (Slika 11.9.). Pokazaćemo da je duž PQ podudarna sa



Slika 11.9.

dužima AB i $A'B'$. Na odsečku AA', koji ne sadrži tačku P, uočimo tačku A_1 takvu da važi $A'A_1 \cong AP$. Prema konstrukciji je $AB \cong A'B'$ i kako je prava a, kao prava koja spaja tačke konjugovanih pravih g i g', normalna na svaku od njih, to su trouglovi ΔAPB i $\Delta A'A_1B'$ podudarni. Iz podudarnosti sledi da je $PB \cong A_1B'$. Kako kranje tačke duži BB' i AA' pripadaju dvema konjugovanim pravama i kako je $AA' \cong AP + PA' \cong A'A_1 + A'P \cong PA_1$, to su duži BB' i AA' podudarne. Dakle, trouglovi $\Delta BPB'$ i $\Delta PB'A_1$ su podudarni. Pošto su PQ i $B'A'$ visine ovih trouglova, one su među sobom podudarne.

Na isti način se pokazuje da je odstojanje ma koje tačke prave b od prave a podudarno dužima AB i $A'B'$.

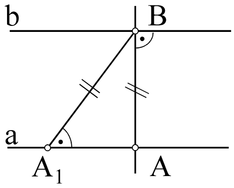
Kako su duži AB i $A'B'$ podudarne, ali različite od poluprave, prave a i b nisu konjugovane. Na taj način smo dokazali *egzistenciju pravih koje nisu konjugovane, a koje imaju osobinu da su odstojanja tačaka jedne od njih do druge, podudarna među sobom.*

Definicija 11.1. Prave koje imaju osobinu da su odsojanja tačaka jedne od njih do druge podudarna među sobom, a nisu konjugovane prave nazivaju se *Klifordove paralele.*

Klifordove paralele postaju konjugovane prave kada je odstojanje tačaka jedne prave od druge jednako polupravoj.

Kako smo pokazali da je prava koja seče dve konjugovane prave, normalna na svakoj od njih, za par Klifordovih paralela ova teorema nije zadovoljena. Međutim, važi teorema oblika:

Teorema 11.8.1. *Normala konstruisana iz tačke jedne od Klifordovih paralela na drugu, normalna je i na prvoj paraleli.*



Slika 11.10.

Dokaz. Neka su a i b Klifordove paralele i neka je B podnožje normale konstruisane iz tačke A prave a na pravu b (Slika 11.10.). Ako prava AB nije normalna i na pravu a, neka je A_1 podnožje normale konstruisane iz tačke B na pravu a. S obzirom na definiciju Klifordovih paralela, duži AB i BA_1 su podudarne, Dakle, trougao ΔBAA_1 je jednakokrak.

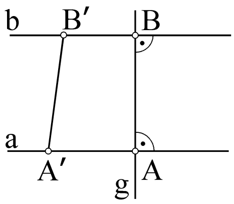
Kako su kod trougla uglovi naspram podudarnih stranica podudarni, posmatrani trougao ima dva prava ugla. Tada je svaka od duži AB i A_1B poluprava, tj. prave a i b su konjugovane.

Dakle, prava AB je u svakom slučaju normalna i na pravu a. □

Ako se tačke A i A_1 ne poklapaju, prave a i b su konjugovane prave, pa tome važi:

Teorema 11.8.2. *Kroz svaku tačku jedne od Klifordovih paralela, koje nisu istovremeno konjugovane prave, prolazi jedna i samo jedna zajednička normala tih paralela.*

Teorema 11.8.3. *Ako je g zajednička normala dveju Klifordovih paralela, tada njoj konjugovana prava g' seče svaku od paralela pod pravim uglom.*

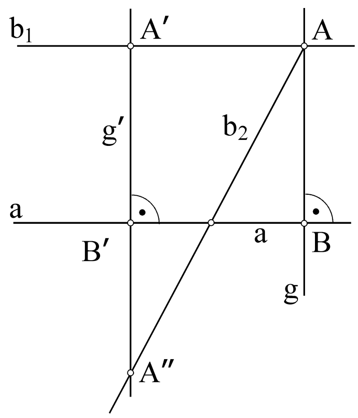


Slika 11.11.

Dokaz. Označimo sa A i B zajedničke tačke normale g redom sa svakom od Klifordovih paralela a i b (Slika 11.11.). Neka je A' tačka prave a koja je suprotna tački A, a B' tačka prave b, koja je suprotna tački B. Prava $A'B'$ je konjugovana pravoj g. Kako g ima samo jednu konjugovanu pravu, to treba pokazati da je prava $A'B'$ normalna na svakoj od pravih a i b. Međutim, to je direktna posledica Teoreme 11.7.4. □

Pokazaćemo i sledeću osobinu:

Teorema 11.8.4. *Ako tačka A ne pripada konjugovanoj pravoj prave a, tada kroz tu tačku prolaze uvek dve i samo dve Klifordove paralele prave a.*



Slika 11.12.

Dokaz. Neka je B podnožje normale konstruisane iz tačke A na pravu a. Obeležimo sa g' pravu koja je konjugovana pravoj $g \equiv AB$ (Slika 11.12). Ona seče pravu a ortogonalno. Neka je B' tačka preseka. Ako su A' i A'' tačke prave g' tako da je $B'A' \cong B'A'' \cong AB$, prave AA' i AA'' su Klifordove paralele prave a.

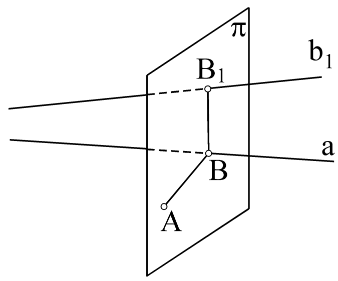
Ako tačka A pripada pravoj koja je konjugovana pravoj a, onda je AB poluprava $A'A = 2d$, odakle sledi da se tačke A' i A poklapaju. Dakle, prave AA' i AA'' se poklapaju i to je prava koja je konjugovana pravoj a, jer se dve njene tačke A i $A' \equiv A''$ nalaze na odstojanju d od prave a.

Potrebno je pokazati da kroz tačku A prolazi najviše dve Klifordove paralele prave a. Pretpostavimo da pored $AA' \equiv b_1$ i $AA'' \equiv b_2$, kroz tačku A prolazi još jedna Klifordova paralela c, različita i od b_1 i od b_2. Duž AB je zajednička normala pravih a i c. Na osnovu prethodne teoreme, njoj konjugovana prava g' seče ortogonalno pravu c. Neka je C' tačka preseka. Tada, zbog paralelnosi pravih a i c mora važiti da je $AB \cong B'C'$. Dakle, tačka C' se poklapa sa A' ili sa A'', tj. prava c se poklapa sa jednom od već posmatranih Klifordovih paralela prave a. $\square$

11.9 Klifordove površi

Ispitajmo geometrijsko mesto Klifordovih paralela prave a. Neka ostanu oznake iz prethodne teoreme i pretpostavimo da tačka A opisuje pravu g, kreúći se po njoj. Svaka od dve paralele seče pravu g' ortogonalno i to tako da je $B'A' \cong B'A'' \cong AB$. Dakle, kad A opisuje pravu g, paralele, ostajući normalne na g, rotiraju oko g i to jedna na jednu a druga na drugu stranu. Površ koja se na taj način dobija, podseća na helikoidu u euklidskom prostoru.

Ispitajmo i geometrijsko mesto Klifordovih pravih, koje se nalaze na jednakom, unapred zadatom rastojanju $\overline{d}$ od uočene prave a. Tada svaka od paralela b_1 i b_2 opisuje po jednu rotacionu površ koja podseća na jednograni hiperboloid. Te dve površi imaju zajeničku osu pravu a. Lako je pokazati da se te dve površi poklapaju. Dakle, potrebno je pokazati da svaka tačka u prostoru, koja se nalazi na odstojanju $\overline{d}$ od prave a, pripada ma kojoj od te dve površi, npr. onoj koju generiše paralela b_1.



Slika 11.13.

Neka je A jedna takva tačka, B podnožje normale konstruisane iz tačke A na pravu a. Tada je $AB \cong \overline{d}$. Obeležimo sa π ravan koja prolazi kroz AB, a normalna je na pravu a (Slika 11.13.). Ta ravan seče pravu b_1 u tački B_1, tako da je $BB_1 \cong \overline{d}$. Ako prava b_1 u prostoru rotira oko prave a, tačka B_1 u ravni opisuje krug sa središtem u tački B, a u izvesnom momentu će se poklopiti sa tačkom A. Prema tome, tačka A pripada površi koju opisuje paralela b_1. Kako je A proizvoljna tačka, to sledi da se površi generisane paralelama b_1 i b_2 poklapaju.

Definicija 11.1. Površ koja nastaje kao geometrijsko mesto Klifordovih pravih, koje se nalaze na jednakom, unapred zadatom rastojanju $\overline{d}$ od uočene prave a, naziva se *Klifordova površ.*

Iz prethodnog zaključujemo da je Klifordova površ rotaciona površ sa osom rotacije a. Lako se može pokazati da ona ima još jednu osu rotacije, pravu a' konjugovanu pravoj a.

Kako prava AB seče ortogonalno pravu a, onda prema Teoremi 11.7.4. ona seče ortogonalno i njoj konjugovanu pravu a'. Obeležimo sa B' taj presek. Kako je $BB' \cong d$, to je $AB' \cong d + \overline{d}$ (ili $d - \overline{d}$, zavisnosti od smera). Dakle, posmatrana Klifordova površ je geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od prave a'. Ponavljajući napred opisani postuak, zaključujemo da je ona rotaciona površ sa osom rotacije pravom a'.

Kako je svaka Klifordova površ rotaciona površ u odnosu na dve ose, ona može da se interpretira na još jedna način. Posmatrajmo ravan π koja sadrži pravu a. Ona seče pod pravim uglom pravu a'. Kako je Klifordova površ rotaciona oko prave a', to je ravan π seče po krugu čije je središte tačka A' koj se nalazi u preseku prave a' i ravni π. Kad ravan π rotira oko prave a i taj krug rotira oko prave a, a njegovo središte ostaje na konstantnom rastojanju od prave a, jer ono opisuje pravu a'.

To rastojanje je jednako d, pa je u svakoj ravni π, prava a polara središta A' tog kruga. Slična razmatranja se mogu primeniti i na pravu a'.

Literatura

[1] T. Anđelić, *Elementarna geometrija*, Tehnička knjiga, Beograd, 1965.

[2] H. J. Бакельман, *Высшая геометрия,* Просвещение, Москва, 1967.

[3] R. Bonola, *Non-euklidean geometry*, Dover, 1955.

[4] K. Borsuk and W. Szmielew, *Fondations of Geometry*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1960.

[5] N. Čepinac, *Geometrija za više razrede gimnazije, Stereometrija*, Znanje, Beograd, 1951.

[6] Б. Н. Делоне, *Елементарное доказателыство непротиворечивостипланиметрии Лобачевского,* Наука, Москва, 1978.

[7] Н. В. Ефимов, *Высшая геометрия,* Москва, 1956.

[8] Euklid, *Euklidovi elementi*, Prva knjiga, prevod A. Bilimović, Naučna knjiga, Beograd, 1949.

[9] Euklid, *Euklidovi elementi*, Druga knjiga, prevod A. Bilimović, Naučna knjiga, Beograd, 1950.

[10] A. I. Fetisov, *O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[11] H. W. Guggenheimer, *Plane geometry and its groups*, Holden-Day, San Francisko, 1967.

[12] D. Hilbert, *Osnove geometrije*, Prevod osmog nemačkog izdanja - Ž. Garašanin, Klasični naučni spisi, Knjiga XIV, Matematički institut SANU, Beograd, 1957.

[13] D. Lopandić, *Osnovi i elementi geometrije Lobačevskog sa zbirkom rešenih zadataka,* Skripta, Beograd, 1970.

[14] N. V. Jefimov, *Viša geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1948.

[15] В. Ф. Каган, *Лобачевский и его геометрия: общедоступны очерки*, Гостехизд, Москва, 1955.

[16] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Toronto-New York, 1967.

[17] Б. В. Кутузов, *Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии*, Гостехизд, Москва, 1955.

[18] N. I. Lobačevski, *Geometrijska ispitivanja iz teorije paralelnih linija*, Prevod B. Petronijevića, Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[19] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Grafiti i Matematički fakultet Beograd, 1994.

[20] H. Meschowski, *Noneuklidean geometry*, Academic pres. New York and London, 1964.

[21] J. Milnor, *Hiperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 9-24.

[22] S. Mintaković, *Aksiomatska izgradnja geometrije*, Školska knjiga, Zagreb, 1962.

[23] S. Mintaković, *Neeuklidska geometrija Lobačevskog*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[24] M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija za I razred Matematičke gimnazije,* Krug, Beograd, 1998.

[25] L. Mlodinov, *Euklidov prozor,* Beograd, Laguna, 2005.

[26] Н. М. Несторович, *Геометрические построении в плоскости Лобачевского* Москва-Ленинград, 1951.

[27] V. Niče, *Uvod u sintetičku geometriju*, Zagreb,1956.

[28] А. П. Норден, *Елементарное введение в геометрию Лобачевского,* Москва, Гостехизд, 1953.

[29] M. Prvanović, *Neeuklidske geometrije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1974.

[30] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[31] I. Pucelj, *Neevklidične geometrije*, Ljubljana, 1969.

[32] M. Radojčić, *Elementarna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1961.

[33] R. Tošić, *Zbirka rešenih zadataka iz neeuklidske geometrije,* Univerzitet u Novom Sadu, 1971.

[34] Б. А. Розенфелыд, *Неевклидовы пространства,* Наука, Москва, 1969.

[35] Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич , *Теория параллельних линий на средневековом востоке,* IX–XIV вв. Издательство Наука, Москва, 1983.

[36] M. Stanković, *Osnovi geometrije*, Prirodno matematički fakultet, Niš, 2006.

[37] R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.

[38] R. Tošić, V. Petrović, *Problemi iz geometrije - metodička zbirka zadataka,* Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 1995.

[39] Л. К. Тутаев, *Геометрия Лобачевского: проектиная модель*, Минск: Белгоуниверзитета им. В. И. Ленина, 1959.

[40] J. Ulčar, *Projektivna i diferencijalna geometrija-Zbirka problema,* Naučna knjiga, Beograd 1969.

[41] V. Varićak, *Prvi osnivači neeuklidske geometrije,* Rad. Jugoslav. Akad. Znan. Umj. 169 (1907), 110–194.

[42] S. Vukmirović, *Modeli geometrije Lobačevskog,* Skripta, 2005.

Indeks Pojmova