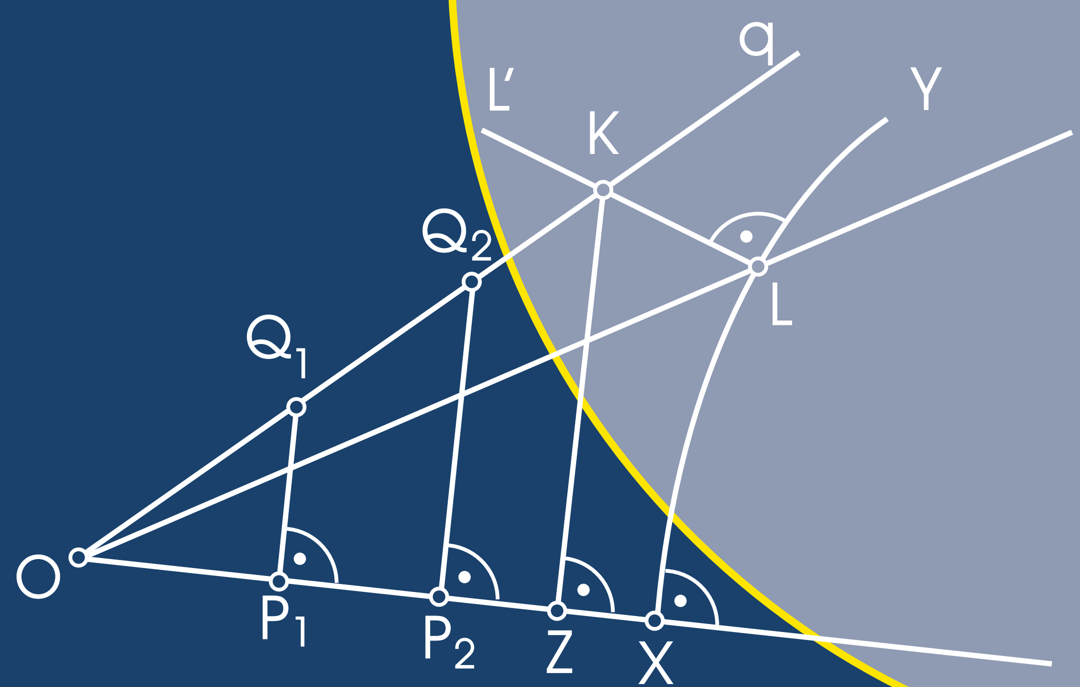
UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

OSNOVI GEOMETRIJE

Mića Stanković

Niš, 2006

Mića Stanković
OSNOVI GEOMETRIJE



U N I V E R Z I T E T U N I Š U

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

MIĆA STANKOVIĆ

OSNOVI GEOMETRIJE

Niš, 2006

OSNOVI GEOMETRIJE

Dr Mića Stanković, Prirodno matematički fakultet, Niš

Izdavač:
Prirodno matematički fakultet

Recenzenti:
Dr Ljubica Velimirović, vanr. prof. PMF-a u Nišu
Dr Svetislav Minčić, red. prof. u penziji

Štampa:
Kolorpres,
Leskovac

Tiraž: 300
ISBN 86-83481-33-6

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno matematičkog fakulteta u Nišu, broj 336/2-01 od 31.5.2006. godine, rukopis je odobren kao udžbenik za studente matematike.

PREDGOVOR

Ova knjiga nastala je iz predavanja koja su više godina unazad držana na Prirodno matematikom fakultetu u Nišu na odseku za matematiku iz predmeta *Osnovi geometrije*. Delimičnim proširivanjem tih predavanja nastojao sam da u ovoj knjizi izložim materiju koja se u okviru kursa *Osnovi geometrije* predaje studentima i na drugim univerzitetima u Srbiji. Prema tome ona predstavlja osnovni udžbenik za ovaj predmet. Osnovna ideja programa, a samim tim i ovog kursa sastoji se u prezentaciji aksiomatske metode u geometriji kojom se prilazi ustanovljavanju i razmatranju elementarnih geometrijskih transformacija ravni i prostora. Ovde nije bio cilj da se iz navedenog sistema aksioma izvedu sva tvrđenja koja iz njih proističu, već da se izvedu neposredne teoreme i ukaže na bitne karakteristike koje proističu iz odgovarajućih grupa aksioma.

Udžbenik je podeljen na osamnaest glava. Prva glava je uvodnog karaktera. Obrađuje deduktivnu metodu i istorijat geometrije. U drugoj glavi uvode se osnovni pojmovi i grupe aksioma u geometriji, aksiome incidencije (veze), aksiome poretka kao i njihove prve posledice. Obrađeni su: duž, poluprava, orjentacija prave, definicija i osobine poluravni, ugaona linija i ugao, orjentacija ravni, poluprostori i razlaganje prostora pomoću ravni, diedarska površ i diedar, Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora, jednostruko povezane poligonske površi, višestruko povezane poligonske površi, rogljaste površi i rogljevi. U trećoj glavi su razmatrane poliedarske površi, poliedri, topološke osobine poliedara, topološki pravilni poliedri. Dokazana je Ojlerova teorema za poliedarske površi nultog roda. U četvrtoj glavi su uvedene aksiome podudarnosti i dokazane njihove prve posledice. Razmatrane su izometrijske transformacije prostora S^n $(n = 1, 2, 3)$, podudarnost likova, podudarnost duži i podudarnost uglova. Definisan je prav ugao. Dokazani su stavovi o podudarnosti trouglova. Razmatrani su četvorouglovi u apsolutnoj geometriji, a takođe upravnost pravih i ravni. Peta glava pre svega razmatra podudarnost diedara, ortogonalnost ravni, triedar i podudarnost triedara. Šesta glava posvećena je izometrijskim transformacijama ravni S^2. U ovoj glavi su obrađena specifična svojstva izometrijskih transformacija, a posebno se razmatra osna refleksija ravni S^2 i predstavljanje izometrijskih transformacija ravni S^2 pomoću osnih refleksija. Takođe je obrađena centralna rotacija ravni S^2, centralna simetrija reda n u ravni S^2, translacija ravni S^2, translatorna (klizajuća) refleksija ravni S^2. U sedmoj glavi obrađene su izometrijske transformacije prostora S^3. Takođe obrađene su specifične vrste izometrijskih transformacija prostora S^3: osna rotacija prostora S^3, osna simetrija reda n prostora S^3, translacija prostora S^3, rotaciona refleksija prostora S^3, centralna refleksija prostora S^3, klizajuća refleksija prostora S^3, zavojno kretanje prostora S^3. Neprekidnost u geometriji uvedena je u osmoj glavi. Navodi se Dedekindova aksioma neprekidnosti i izvode neke njene posledice. Takođe razmatra se merenje duži i merenje uglova u apsolutnoj geometriji. Deveta glava posvećena je ekvivalentima petog Euklidovog postulata. Navedena je Plejferova aksioma paralelnosti, dokazane Ležandrove teoreme, i obrađen niz tvrđenja ekvivalentih Plejferovoj aksiomi paralelnosti. Dodavanjem Plejferove aksiome paralelnosti sistemu aksioma apsolutne geometrije u desetoj glavi dobija se Euklidska geometrija. Takođe razmatraju se pojmovi Euklidskog prostora, paralelnosti u E^n, $(n = 1, 2, 3)$, paralelno projektovanje i Talesova teorema u prostoru E^n, kao i pojmovi paralelograma, srednje linije trougla i značajne tačke trougla. Izometrijske transformacije ravni E^2 obrađene su u jedanaestoj glavi. Takođe izvršena je klasifikacija izometrijskih transformacija ravni E^2 i prostora E^3. U dvanaestoj glavi uvedene su i obrađene transformacije sličnosti i homotetije prostora E^n, predstavljanje transformacija sličnosti ravni E^2 u kanonskom obliku, sličnost likova u prostoru E^n, neke primene sličnosti, harmonijske četvorke tačaka, pravih i ravni. Geometrija kruga i sfere obrađena je u trinaestoj glavi. Ovde su obrađeni tangentni i tetivni četvorougao, potencija tačke u odnosu na krug i sferu, inverzija u odnosu na krug i sferu, kao i Apolonijevi problemi o dodiru krugova. U četrnaestoj glavi uvedena je razloživa i dopunska jednakost likova u geometriji. Takođe obrađeno je merenje figura u ravni E^2 i prostoru E^3. Dodavanjem aksiome Lobačevskog sistemu aksioma apsolutne geometrije u petnaestoj glavi dobija se hiperbolička ili geometrija Lobačevskog. Razmatrane su paralelne i hiperparalelne prave u ravni L^2 kao i njihove osobine. Uveden je ugao paralelnosti i funkcija Lobačevskog. Sesnaesta glava posvećena je geometriji trouglova i četvorouglova u ravni L^2. U sedamnaestoj glavi obrađene su karakteristične krive i površi u ravni L^2 i prostoru L^3. Posebno su obrađeni epicikli u ravni L^2, prave i ravni u prostoru L^3, klasifikacija izometrijskih transformacija prostora L^2 i L^3, episfere prostora L^3 kao i unutrašnja geometrija orisfere. U glavi 18 predstavljen je Poenkareov model geometrije Lobačevskog. Takođe dat je osvrt na neprotivurečnost geometrije Lobačevskog.

Tematski, sadržaj knjige je podeljen na tri celine. Prvu celinu čine glave 2-9 i ona je posvećena apsolutnoj geometriji. Nakon uvođenja aksiome paralelnosti u zavisnosti od toga da li je uvedena Plejferova aksioma paralelnosti ili aksioma Lobačevskog, apsolutna geometrija se razvija u dva smera tako da se dobijaju dve potpuno različite geometrije: Euklidska i geometrija Lobačevskog. Glave 10-14 čine drugu celinu i obrađuju problematiku Euklidske geometrije. Ostatak knjige obrađuje problematiku geometrije Lobačevskog.

Recenzentima, dr Svetislavu Minčiću i dr Ljubici Velimirović se ovom prilikom najsrdačnije zahvaljujem za pomoć koju su mi pružili, svojim primedbama i sugestijama, u pripremi ovog udžbenika. Oni su na taj način doprineli da pojedini delovi u knjizi budu tačnije i preciznije izloženi. Zahvaljujem se i svima onima koji su na bilo koji način doprineli da ova knjiga ugleda svetlost dana. Naravno biću zahvalan i svima onima koji će svojim sugestijama, predlozima i primedbama doprineti poboljšanju ovog udžbenika.

Niš, juna 2006. godine Autor

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 O deduktivnoj metodi

U izgradnji bilo koje valjano zasnovane teorije nije moguće dokazati sve stavove i definisati sve pojmove. Naime, prilikom uvođenja nekog novog pojma moramo koristiti neki pojam za čije je uvođenje pak korišćen opet neki pojam itd. Da bismo izbegli ciklično definisanje ili beskonačni niz definicija moramo se u jednom trenutku opredeliti da nam neki pojmovi budu početni i te pojmove ćemo prihvatiti bez definisanja. Njih ćemo zvati *osnovnim* ili *nedefinisanim* pojmovima, dok ćemo sve ostale pojmove čiji je sadržaj dobijen korišćenjem osnovnih pojmova zvati *definisanim* ili *izvedenim* pojmovima. Iskaze kojima se određuje sadržaj izvedenih pojmova nazivamo *definicijama*.

Takođe, prilikom utvrđivanja istinitosti nekog tvrđenja neophodno je pozivanje na druge stavove za koje je takođe potrebno utvrditi istinitost uz pomoć nekih drugih tvrđenja i stavova itd. I ovde, ukoliko želimo da izbegnemo cirkularno dokazivanje, upadamo u beskonačnu regresiju. Radi toga proces dokazivanja moramo započeti nekim stavovima čija se istinitost pretpostavlja da važi bez dokazivanja. Te početne stavove zvaćemo *aksiomama* ili *osnovnim stavovima teorije.* Ostale stavove čiju istinitost izvodimo zvaćemo *teoremama* ili *izvedenim stavovima.*

Jedna od važnih naučnih disciplina koja se može zasnovati u skladu sa navedenim principima jeste logika. Svaka druga naučna teorija koja se zasniva na navedenim principima obično je utemeljena na već postojećoj logici. U tom slučaju logika se pretpostavlja. Na taj način pojmove logike upotrebljavamo u formulacijama aksioma, teorema i definicija bez nekog bližeg određenja, a logičke stavove primenjujemo bez posebnog dokazivanja. U izgradnji neke matematičke discipline ponekad je pored logike potrebno koristiti i neku drugu već zasnovanu matematičku disciplinu. Te naučne discipline koje zajedno sa logikom prethode zasnivanju neke matematičke teorije nazivamo pretpostavljenim disciplinama. Za izgradnju geometrije pored logike potrebno je pretpostaviti teoriju skupova, a takođe i aritmetiku sa teorijom realnih brojeva.

Napred opisana metoda izgradnje neke matematičke teorije naziva se *deduktivna* ili *aksiomatska metoda*, a na taj način zasnovane discipline aksiomatskim ili deduktivnim teorijama.

Ako osnovne pojmove neke deduktivne teorije zamenimo odgovarajućim promenljivim $x, y, z, \ldots$, onda aksiome i teoreme te teorije postaju valjane formule $P(x, y, z, \ldots)$, $Q(x, y, z, \ldots)$, $\ldots$ koje $x, y, z, \ldots$ sadrže kao slobodne promenljive. U tom slučaju za proizvoljno izabrane objekte $X, Y, Z, \ldots$ možemo ustanoviti da li zadovoljavaju aksiome, tj. da li su formule $P, Q, \ldots$ istinite kada promenljive $x, y, z, \ldots$ zamenimo sa $X, Y, Z, \ldots$. Tada za objekte $X, Y, Z, \ldots$ kažemo da predstavljaju *model* ili *realizaciju* deduktivne teorije. U suprotnom, oni nisu model posmatrane teorije. Prilikom izgradnje neke matematičke teorije u velikoj meri postoji sloboda izbora kako osnovnih pojmova tako i sistema aksioma. Za dva aksiomatska sistema smatraćemo da su ekvivalentna ako se svaki pojam jednog od njih može opisati preko pojmova onog drugog i ako se svaka aksioma jednog može dokazati kao teorema u onom drugom aksiomatskom sistemu. Pored čisto teorijskih razloga za izbor jednog a ne nekog drugog aksiomatskog sistema značajnu ulogu imaju i neki praktični, didaktički pa u velikoj meri i estetski razlozi.

Bez obzira na postojanje velike slobode u izboru aksioma, to ne znači i odsustvo bilo kakvih zahteva u izboru sistema aksioma neke deduktivne teorije. Najpre, sistem aksioma mora da bude *neprotivurečan*, tj. da se iz njega ne mogu istovremeno dedukovati neki stav i negacija tog stava. Neprotivurečnost je bezuslovan zahtev bilo koje deduktivno zasnovane teorije, jer u suprotnom ona ne bi imala smisla. Takođe, sistem aksioma mora da bude *potpun*. To znači da se od svaka dva protivurečna stava bar jedan može dokazati. Za stav, čija se negacija u datoj teoriji može dokazati kažemo da se može oboriti u datoj teoriji. To znači da je sistem aksioma potpun ako se svaki stav u datoj deduktivnoj teoriji može ili dokazati ili oboriti. Potpunost i neprotivurečnost su osobine koje nisu od istog značaja za dati sistem aksioma. Naime, ako je neki aksiomatski sistem neprotivurečan, on će u istoj meri biti logički vredan bez obzira na to što nije potpun. Nedostatak nepotpunog aksiomatskog sistema jeste što se neki stavovi kod njega ne mogu niti dokazati niti oboriti. Kod nepotpunog sistema se dodavanjem nekih aksioma mogu dokazati ili oboriti odgovarajuća tvrđenja formulisana u toj teoriji, za koja ranije nije postojala takva mogućnost. Sistem aksioma, a takođe i sistem pojmova mora da bude *nezavisan*. To znači da se ni jedna od aksioma date teorije ne može dokazati uz pomoć nekih drugih aksioma te teorije i da se ni jedan od osnovnih pojmova ne može definisati pomoću drugih osnovnih pojmova te teorije. S obzirom na to da insistiranje na činjenici da sistem aksioma bude *minimalan*, može imati za posledicu da dokazi pojedinih tvrđenja mogu biti glomazni i zamorni, može se odustati od principa minimalnosti, što je uobičajeno na primer u srednjoškolskim kursevima.

1.2 O istorijatu geometrije

Geometrija kao nauka je ponikla iz svakodnevne prakse. Ljudi su od davnina bili u situaciju da moraju da grade domove i zgrade, da trasiraju puteve da određuju granice svojih poseda i njihove dimenzije. Takođe, postojala je umetnička potreba za ukrašavanjem kuća i odeće stvaranjem slika iz života i okruženja. Sve to je iziskivalo potrebu za upoznavanjem prostornih osobina objekata na koje su u okruženju nailazili. Ne jednom, te su zakonitosti proveravane i potvrđivane, tokom vremena, kako opažajno, tako i eksperimentima. Saznanja do kojih se je dolazilo prenošena su sa generacije na generaciju najpre usmeno a zatim i pismeno.

Nekoliko vekova pre naše ere, kulturni narodi su raspolagali podacima o prostornim osobinama predmeta iz okruženja. Moramo napomenuti da ta znanja nisu bila sistematizovana tj. bila su formulisana u obliku pravila i recepata. Na formiranje geometrije kao nauke veliki uticaj su imali starogrčki filozofi i mislioci. Oni su prvi formulisali osnovne stavove nauke o zakonima pravilnog mišljenja, tj. logike. Među njima najistaknutiji iz tog vremena je Aristotel, koji je živeo od 384. do 322. godine pre naše ere.

Reč geometrija izvedena je od dve grčke reči: $\gamma\acute{\eta}$ - zemlja i $\mu\varepsilon\tau\rho\grave{\varepsilon}\omega$ - meriti. Dakle u bukvalnom prevodu sama reč geometrija znači merenje zemlje.

Postavljanje aksioma geometrije i ispitivanje njihovih uzajamnih odnosa jeste zadatak koji je još od davnina bio predmet mnogobrojnih izvrsnih rasprava matematičke literature. Ovaj zadatak svodi se na logičku analizu naših prostornih opažaja.

Prve korake u sistematizaciji geometrije načinio je *Hipokrat sa Hiosa* u svom delu *Elementi* pre dve i po hiljade godina. Nažalost, njegovo delo nije sačuvano. Nakon njega, *Leon* je pod uticajem *Platona* sastavio nove Elemente oko 370. godine stare ere. Potpunije Elemente napisao je *Teudije iz Male Azije*, koje je dopunio *Hermotim iz Kolofona*. I ova dela su izgubljena tokom istorije. Njihov značaj za istoriju matematike je u uticaju koji su izvršila na *Euklida* i njegovo naučno stvaralaštvo. Daleko najčuvenije i najčitanije delo iz tog vremena jesu *Elementi* koje je *Euklid* napisao oko 300. godine stare ere, a koje se sastoji od trinaest knjiga. Značaj Euklidovih Elemenata ogleda se u tome što je više od dva milenijuma to delo bilo osnov svakog obrazovanja. Ono je bilo prevedeno na jezike svih kulturnih naroda sveta. Zahvaljujući delu kakvo je Euklidovi elementi, geometrija je vekovima doživljavana kao savršenstvo, a sva ostala sistematizovana znanja ravnala su se prema njoj i sa njom upoređivala.

Na osnovu prevoda Euklidovih Elemenata koji je uradio Anton Bilimović, u nastavku ćemo izložiti osnovne definicije, aksiome i postulate iz ovog dela.

Osnovne definicije koje je Euklid uveo u svojim Elementima su sledeće:

1. *Tačka je ono što nema delova.*

2. *Linija je dužina bez širine.*

3. *Krajevi linije su tačke.*

4. *Prava je linija ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.*

5. *Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.*

6. *Krajevi površine su linije.*

7. *Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.*

8. *Ugao u ravni je uzajamni nagib dveju linija u ravni koje se seku i koje ne leže u istoj pravoj.*

9. *Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.*

10. *Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom dva susedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji.*

11. *Tup ugao je onaj koji je veći od pravog.*

12. *Oštar ugao je onaj koji je manji od pravog.*

13. *Granica je ono što je kraj ma čega.*

14. *Figura je ono što je omeđeno ili jednom ili sa više granica.*

15. *Krug je ravna figura omeđena takvom jednom linijom, koja se zove periferija, da su sve prave povučene od jedne tačke, koja se nalazi u samoj figuri, prema toj liniji međusobno jednake.*

16. *Ova tačka zove se središte kruga.*

17. *Prečnik kruga je svaka prava što prolazi kroz središte kruga a ograničena je sa svake strane periferijom kruga. On polovi krug.*

18. *Polukrug je figura ograničena prečnikom i njime odvojenom periferijom kruga. Središte polukruga je isto kao i središte kruga.*

19. *Pravolinijske figure su one koje su ograničene pravama; trostrane su ograničene sa tri, četvorostrane sa četiri, mnogostrane sa više od četiri prave.*

20. *Od trostranih figura jednakostrani trougao ima tri jednake strane, jednakokraki ima samo dve jednake strane, a raznostrani ima tri nejednake strane.*

21. *Dalje, od trostranih je pravougli trougao onaj koji ima prav ugao, tupougli onaj koji ima tup ugao, a oštrougli onaj koji ima tri oštra ugla.*

22. *Od četvorostranih figura kvadrat je jednakostran i sa pravim uglovima; pravougaonik je sa pravim uglovima ali nije sa jednakim stranama; romb je sa jednakim stranama ali nije sa pravim uglovima; romboid je sa jednakim naspramnim stranama, ali nije jednakostran ni sa pravim uglovima. Ostale četvorostrane figure neka se zovu trapezi.*

23. *Paralelne su one prave, koje se nalaze u istoj ravni i koje se produžene u beskrajnost na obe strane ne seku jedna sa drugom.*

U svojim Elementima osnovne stavove geometrije Euklid je podelio na *aksiome* i *postulate*. U različitim prepisima Elemenata broj postulata i aksioma nije isti, ali se obično prihvata da je on zasnovao geometriju na devet aksioma i pet postulata. I mi ćemo navesti najpre postulate, kao što je Euklid to učinio u Elementima:

"Neka se pretpostavi:

1. *Da se može povući od svake tačke ka svakoj drugoj tački prava linija.*
2. *I da ograničena prava može biti produžena u svom pravcu neprekidno.*
3. *I da se može opisati od svakog središta svakim rastojanjem krug.*
4. *I da su svi pravi uglovi jednaki međusobno.*
5. *I da će se, ako jedna prava u preseku sa drugim dvema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave beskrajno produžene, seći i to sa one strane sa koje su ovi uglovi manji od dva prava ugla.*"

Nije teško videti da postulati predstavljaju neke geometrijske istine. Interesantno je da je peti postulat zbog svoje složenosti izazivao pažnju matematičara i nagonio ih da pokušavaju da ga izvode iz ostalih aksioma geometrije.

I aksiome kao i postulati predstavljaju neka osnovna tvrđenja, ali s tom razlikom što se ne odnose striktno na geometrijske objekte. Aksiome su:

1. *Oni koji su jednaki istom jednaki su međusobno.*
2. *I ako se jednakim dodaju jednaki celine su jednake.*
3. *I ako se od jednakih oduzmu jednaki ostaci su jednaki.*
4. *I ako se nejednakim dodaju jednaki celine su nejednake.*

5. *I udvostručeni jednaki jednaki su međusobno.*
6. *I polovine od jednakih jednake su međusobno.*
7. *I oni koji se mogu poklopiti jednaki su međusobno.*
8. *I celina je veća od dela.*
9. *I dve prave ne ograničavaju oblast.*

Samo su sedma i deveta aksioma geometrijskog karaktera. U nekim prepisima se sedma aksioma javlja kao šesti postulat što pokazuje da su prepisivači kroz vekove davali sebi određenu slobodu.

U daljem izlaganju u Elementima Euklid koristi *propozicije* - *teoreme* ($\vartheta\varepsilon\omega\rho\grave{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ - od glagola $\vartheta\varepsilon\omega\rho\grave{\eta}\mu\omega$ - razmišljam), koje dalje izvodi uz pomoć propozicija za koje je već ustanovio da važe.

Od antičkih vremena razvoj geometrije je išao u dva pravca. Sistem aksioma je proširivan tako da bi se mogao dokazati što veći broj tvrđenja, dok se je sa druge strane uporno pokušavalo dokazivanje petog Euklidovog postulata iz spiska postojećih aksioma. Nastavljajući Euklidov rad, na samom startu su antički matematičari uočili da se ne mogu dokazati ili oboriti sva tvrđenja koja su u geometriji mogla biti formulisana. Tako je *Arhimed* (od -287 do -212 god.) u svom delu *O sferi i cilindru*, postojeći sistem aksioma proširio sa pet novih aksioma. I nakon Arhimeda se je pokušavalo da se sistem aksioma geometrije upotpuni. Usavršavanjem Euklidovog dela pored Arhimeda, bavili su se *Apolonije* (3. vek pre nove ere), *Geminus, Nikomah* (1. vek pre nove ere), *Papos* (3. vek nove ere), *Teon i Proklo* (5. vek nove ere). Tokom niza vekova, bez obzira na napore koji su činjeni, niko nije uspeo da suštinski unapredi geometriju kao nauku u odnosu na ono što je bilo izneto u Euklidovim elementima. Bilo je tu sjajnih otkrića koja su omogućila i rešavanje mnogih geometrijskih problema. Ipak, suštinskih promena u geometriji nije bilo još iz vremena Euklida i Arhimeda.

Propašću grčke kulture u Evropi počinje mračno doba srednjeg veka. U to vreme centar svetske civilizacije postaje arapski istok. Euklidovi Elementi su prevedeni na arapski jezik. I arapski mislioci su pokušavali da dokažu peti postulat. Arapski matematičar *Nasir-Eddinu* (1201-1274) je najpoznatiji iz tog vremena. Međutim ni njegova interesantna i originalna istraživanja nisu dovela do dokaza petog Euklidovog postulata.

U doba renesanse se u Evropu vraća interesovanje za geometriju. U petnaestom veku Euklidovi Elementi su prevedeni sa arapskog na latinski jezik, a u šesnaestom je pronađen i reprodukovan originalan tekst na grčkom jeziku.

Pokušaji rešavanja problema paralelnih pravih vezanih za dokazivanje petog Euklidovog postulata predstavljaju jedan interesantan pogled na geometriju. Generacije i generacije nastavljača Euklidovog učenja su tokom vekova bile opsednute pokušajima da dokažu peti Euklidov postulat korišćenjem postojećeg sistema aksioma. Razlog za to je činjenica da je Euklid dokazivao tvrđenja koja su imala znatno prostiji oblik od petog postulata. Pokušaji dokazivanja Euklidovog petog postulata išli su najčešće indirektim postupkom. Polazilo se od negacije petog postulata ili nekog njegovog ekvivalentnog tvrđenja. Pokušaji su išli u smeru da se korišćenjem postojećih aksioma na taj način dođe do dva protivrečna tvrđenja. Na taj način je dobijen čitav niz tvrđenja ekvivalentnih petom Euklidovom postulatu, ali do dokaza petog Euklidovog postulata se nije došlo. Mnogi matematičari su bili u zabludi da su dokazali peti Euklidov postulat ne primećujući da su u dokazu načinili grešku tako što su iskoristili neki od ekvivalenata petog postulata.

Posebno su interesantni radovi italijanskog matematičara *I. Sakerija* (1667-1733), koji je pokušao da polazeći od tvrеđenja suprotnog petom postulatu, izgradi geometrijsku teoriju različitu od Euklidove. Sakeri je bio ubeđen da će u takvoj teoriji doći do protivurečnosti, čime bi bila dokazana valjanost petog postulata. Međutim Sakerijeve nade nisu se ispunile, protivurečnost do koje je došao bila je prividna a pitanje postojanja takve protivurečnosti ostalo je otvoreno. Veliki uticaj na kasnje generacije matematičara iz tog vremena imali su radovi francuskog matematičara *Ležandra* (1752-1833) koji je dokazao čitav niz interesantnih stavova koji su u vezi sa petim postulatom, kao što su na primer:

1) Zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od dva prava ugla.

2) Ako je u nekom trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak dva prava ugla, onda je zbir unutrašnjih uglova u svakom trouglu jednak dva prava ugla.

Preostalo mu je da dokaže da zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti manji od dva prava ugla. Međutim i njegov dokaz je sadržao grešku jer je koristio nedokazana tvrđenja.

Nakon velikog broja pokušaja da se izvede dokaz petog postulata, problem je razrešen tek u devetnaestom veku. Dokazano je da peti Euklidov postulat ne zavisi od ostalih aksioma geometrije. To je bio prvi značajan rezultat koji je znatno unapredio pogled na geometriju još od vremena Euklida. Kroz rad *Nikolaja Ivanoviča Lobačevskog* (1792-1856) i *Janoša Boljaja* (1802-1860) prvi put je izražena misao da peti Euklidov postulat ne zavisi[1] od ostalih aksioma geometrije i da se samim tim ne može izvesti njegov dokaz.

[1] Postoje indikacije da je na tu pomisao prvi došao jedan od najvećih matematičara tog vremena K.F. Gaus (1777-1855). Međutim Gaus nikada nije ništa o tome objavio.

U početku su prvi radovi osnivača neeuklidske geometrije dočekani sa nevericom i ruganjem. Rezultati Lobačevskog i Boljaja postali su sasvim jasni tek krajem devetnaestog veka sa konačnim formiranjem logičkog pogleda na geometriju. Tada je geometrija prvi put logički korektno bila utemeljena. Šta više, došlo se do zaključka da osim Euklidove geometrije postoji i geometrija bitno različita od nje. Tu novootkrivenu geometriju danas nazivamo *geometrijom Lobačevskog-Boljaja* ili *hiperboličkom geometrijom.*

Nemački matematičar *Bernard Riman* (1826-1866) u svom radu *O hipotezama koje leže u osnovi geometrije* dolazi do još jedne neeuklidske geometrije koja je danas poznata pod nazivom *rimanska geomerija u užem smislu* ili *eliptička geometrija.* Otkriće Euklidske geometrije, pored geometrije imalo je uticaja na zasnivanje bilo koje deduktivne teorije. Došlo se do saznanja da osnovna geometrijska tvrđena, odnosno aksiome i postulati, važe ne samo na skupu tačaka pravih i ravni shvaćenih u klasičnom Euklidovom smislu već na skupu tačaka pravih i ravni shvaćenih u mnogo širem smislu. Došlo je do proširivanja i apstrakcije geometrijskih pojmova u skoro svim geometrijskim tvrđenjima. Dajući tako apstrahovanim pojmovima konkretna značenja dolazi se do modela na kojima se može izvesti realizacija Euklidove geometrije, geometrije Lobačevskog ili Rimanove geometrije. Interesantni su modeli koje su sačinili *Eugenio Beltrami* (1835-1900), *Feliks Klajn* (1849-1925), *Anri Poenkare* (1854-1912).

Došlo je do novih stremljenja i podsticaja u aksiomatskom zasnivanju geometrije, što je dovelo do suptilnije analize osnovnih geometrijskih pojmova i tvrđenja. Tako su *Rihard Dedekind* (1872) i *Georg Kantor* (1873), nezavisno jedan od drugog, na različite načine razvili učenje o neprekidnosti. Oni su otklonili jedan znatan nedostatak aksiomatike Euklida uvođenjem aksioma neprekidnosti. Nemački matematičar *Moric Paš* (1882) uvodi aksiome poredka u svom delu *Predavanja iz novije geometrije* i na taj način otklanja još jedan od nedostataka Euklidove aksiomatike.

Nastavljajući rad italijanskih matematičara *Đuzepe Peana* (1889), *Đuzepe Veronezea* (1891) i *Maria Pieria* (1899), tek je nemački matematičar *David Hilbert* (1862-1943) zasnovao geometriju na neprotivurečnom, potpunom, i nezavisnom sistemu aksioma u svom delu *Osnove geometrije* iz 1899 godine. Za razliku od Euklida, Hilbert ne pokušava da opisuje osnovne geometrijske pojmove: tačke, prave, ravni, već ih posredno određuje preko aksioma. Za razliku od Euklidove aksiomatike koja se odnosila na konkretne geometrijske objekte koji su imali potpuno određeno značenje, Hilbertova aksiomatika odnosi se na geometrijske objekte koji mogu da imaju raznovrsna značenja. To je i razlog što se kaže da je Euklidova aksiomatika sadržajnog, a Hilbertova poluformalnog karaktera.

Hilbert u Osnovama geometrije uvodi dvadeset aksioma koje razvrstava u pet grupa na sledeći način:

I. *Aksiome veze (pripadanja, incidencije)* (osam aksioma),

II. *Aksiome poretka* (četiri aksiome),

III. *Aksiome podudarnosti* (pet aksioma),

IV. *Aksiome neprekidnosti* (dve aksiome),

V. *Aksiome paralelnosti* (jedna aksioma).

I danas, kada je prošlo više od sto godina značaj Hilbertovih Osnova geometrije ogleda se u tome, što je stvoren preduslov za izražavanja kao što su *potpunost*, *nezavisnost* i *neprotivurečnost* sistema aksioma.

U ovoj knjizi koristićemo nešto modifikovan Hilbertov sistem aksioma, tj. aksiome geometrije biće razvrstane na sledeći način:

I. *Aksiome incidencije* (devet aksioma),

II. *Aksiome poretka* (šest aksioma),

III. *Aksiome podudarnosti* (sedam aksioma),

IV. *Aksiome neprekidnosti* (jedna aksioma),

V. *Aksiome paralelnosti* (jedna aksioma).

Glava 2

Aksiome incidencije, aksiome poretka i posledice

2.1 Osnovni pojmovi i grupe aksioma u geometriji

Kao što smo videli u uvodu, još je Euklid u svojim Elementima pokušao da uvede definicije pojmova kao što su tačka prava i ravan. To i nisu neke stroge definicije, već objašnjenja tih elementarnih geometrijskih pojmova. I mnogo kasnije, matematičari kao npr. Ležandr i Peano, pokušavali su da daju definicije osnovnih geometrijskih pojmova.

Tek je Hilbert u svojim Osnovama geometrije tačke, prave i ravni svrstao u pojmove koji se ne definišu, tj. predstavljaju osnovne, odnosno polazne pojmove u geometriji.

U zasnivanju geometrije polazimo od proizvoljnog skupa S, dveju klasa C_l i C_π podskupova skupa S i dveju relacija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nad skupom S, od kojih je prva troelementna, a druga četvoroelementna.

Skup S nazivamo *prostorom* a njegove elemente tačkama koje obeležavamo velikim slovima latinice $A, B, C, \ldots$

Elemente klase C_l nazivamo *pravama* i obeležavamo ih malim slovima latinice $a, b, c, \ldots$

Elemente klase C_π nazivamo *ravnima* i obeležavamo ih malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Troelementnu relaciju $\mathcal{B}$ nazivamo relacijom *između.* Upotrebljeni simbol $\mathcal{B}$ je prvo slovo engleske reči *between* (između). Tom relacijom izražavamo činjenicu prema kojoj se jedna tačka C nalazi između tačaka A i B, i to simbolički obeležavamo $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Četvoroelementnu relaciju $\mathcal{C}$ nad skupom S nazivamo relacijom *podu-*

darnosti. Upotrebljeni simbol $\mathcal{C}$ je prvo slovo latinske reči *congruentia*, što znači podudarnost. Ako je na primer uređen par tačaka (A, B) podudaran sa uređenim parom tačaka (C, D), pisaćemo $\mathcal{C}(A, B; C, D)$ ili $(A, B) \cong (C, D)$.

Svaki neprazan skup tačaka prostora S nazivamo *geometrijskim likom, geometrijskim objektom ili geometrijskom figurom.* Prema tome, osnovne pojmove u geometriji sačinjavaju tri vrste objekata, to su *tačke, prave i ravni* i dve relacije $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Pretpostavljamo da osnovni geometrijski pojmovi imaju izvesne osobine, koje ne dokazujemo, već ih usvajamo bez dokaza. Te osobine su iskazane tvrđenjima koja zovemo osnovnim geometrijskim tvrđenjima ili *aksiomama geometrije*. Prema prirodi tih osobina, aksiome geometrije razvrstavamo u pet grupa i to su :

I *Aksiome incidencije* (devet aksioma),

II *Aksiome poretka* (šest aksioma),

III *Aksiome podudarnosti* (sedam aksioma),

IV. *Aksiome neprekidnosti* (jedna aksioma),

V. *Aksiome paralelnosti* (jedna aksioma).

Aksiomatika prve četiri grupe sačinjava aksiomatiku *apsolutne geometrije*. Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaija i Lobačevskog.[1] Do uvođenja aksiome paralelnosti prostor S ćemo označavati sa S^3 a odgovarajuću ravan S^2.

2.2 Aksiome incidencije (veze)

Aksiomatika incidencije obuhvata aksiome zasnovane na osnovnim relacijama *pripada* i *sadrži se* ($\in$, $\subset$) prihvaćenim iz teorije skupova koje jednim imenom nazivamo *relacijama incidencije (veze).*

Definicija 2.2.1. *Za tri ili više tačaka $A, B, C, \ldots$ kaže se da su kolinearne ako postoji prava koja ih sadrži; u protivnom su nekolinearne. Analogno, za četiri ili više tačaka $A, B, C, D, \ldots$ kaže se da su komplanarne ako postoji ravan koja ih sadrži, u protivnom su nekomplanarne.*

Grupu aksioma incidencije sačinjava sledećih devet aksioma:

I1. *Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.*

I2. *Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B.*

[1]Interesantno je napomenuti da je još Euklid u svojim Elementima dugo izbegavao da u dokazima koristi peti postulat. Na taj način je dobio čitav niz tvrđenja za čije dokazivanje nije bio potreban peti postulat, pa se Euklid može smatrati utemeljivačem apsolutne geometrije.

I3. *Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.*
I4. *Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A, B i C.*
I5. *Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A,B i C.*
I6. *Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B i C.*
I7. *Ako dve razne tačke A i B neke prave p pripadaju nekoj ravni π, tada sve tačke prave p pripadaju ravni π.*
I8. *Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.*
I9. *Postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C i D.*

Prve četiri aksiome odnose se na geometriju ravni dok se ostalih pet aksioma odnosi na geometriju prostora. To je i razlog što prve četiri aksiome nazivamo planimetrijskim, a ostalih pet aksoma stereometrijskim aksiomama incidencije. U literaturi se aksiome incidencije nazivaju još i aksiomama veze. Kod nekih autora ova grupa aksioma satoji se od osam aksioma, pričemu su druga i treć aksioma spojene u jednu.

2.3 Posledice aksioma incidencije

Od posledica aksioma incidencije pomenućemo sledeće:

Teorema 2.3.1. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke tada su svake dve od njih međusobno razne.*

Dokaz. Ovo tvrđenje se lako dokazuje svođenjem na protivurečnost. □

Teorema 2.3.2. *Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke tada su svake dve od njih međusobno razne.*

Dokaz. Analogno dokazu prethodne teoreme. □

Posledica 2.3.1. *Postoje tri nekolinearne tačke.*

Teorema 2.3.3. *Dve razne prave mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Neka prave p i q imaju dve razne zajedničke tačke A i B. Na osnovu aksiome I3 sledi da se prave p i q poklapaju. □

Teorema 2.3.4. *Postoji jedna i samo jedna prava p koja sadrži dve razne tačke A i B.*

Dokaz. Sledi iz aksioma I2 i I3. □

Teorema 2.3.5. *Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B, C.*

Dokaz. Sledi iz aksioma I5 i I6. □

Teorema 2.3.6. *Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu p i datu tačku A izvan nje.*

Dokaz. Prema aksiomi I1 prava p sadrži bar dve razne tačke B i C. Tačke A, B i C su nekolinearne, jer bi u suprotnom tačka A pripadala pravoj p što je iskazom teoreme isključeno. Dakle, nekolinearne tačke A, B i C, na osnovu prethodne teoreme, određuju tačno jednu ravan α. Tačke B i C prave p pripadaju ravni α odakle na osnovu aksiome I7 sledi da sve tačke prave p pripadaju ravni α. Prema tome, tačka A i prava p pripadaju ravni α. Treba još dokazati jedinstvenost takve ravni. Ako neka ravan β sadrži tačku A i pravu p, tada ona sadrži nekolinearne tačke A, B i C. Na osnovu teoreme 2.3.6. sledi da se ravni α i β poklapaju. □

Teorema 2.3.7. *Postoji tačno jedna ravan koja sadrži dve prave p i q koje se seku u jednoj tački.*

Dokaz. Neka je A presečna tačka pravih p i q. Tada, prema aksiomi I1 na pravama p i q postoje tačke B i C redom različite od tačke A. Tačke A, B i C određuju tačno jednu ravan α. Take A i B prave p pripadaju ravni α odakle sledi da sve tačke prave p pripadaju ravni α. Na isti način tačke A i C prave q pripadaju ravni α odakle sledi da sve tačke prave q pripadaju ravni α. Treba još dokazati jedinstvenost takve ravni. Ako neka ravan β sadrži prave p i q, tada ona sadrži nekolinearne tačke A, B i C, odakle na osnovu teoreme 2.3.6. sledi da se ravni α i β poklapaju. □

Teorema 2.3.8. *Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, tada je njihov presek prava.*

Dokaz. Neka ravni α i β imaju zajedničku tačku A. Tada prema aksiomi I8 ravni α i β imaju bar još jednu zajedničku tačku B. Na osnovu aksioma I2 i I3 tačke A i B određuju pravu $p = AB$, čije sve tačke prema aksiomi I7 pripadaju ravnima α i β pa samim tim i njihovom preseku. Dokažimo još da van prave p ravni α i β nemaju drugih zajedničkih tačaka. Zaista, ako bi van prave p postojala zajednička tačka P ravni α i β van prave p, onda na osnovu teoreme 2.3.6. postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačku P i pravu p. To nije moguće, jer su α i β po pretpostavci različite ravni. Dakle, presek ravni *alpha* i *beta* je prava p. □

Definicija 2.3.1. *Zajedničku pravu dveju raznih ravni zvaćemo presečnom pravom tih ravni.*

Teorema 2.3.9. *Ako prava p ne pripada ravni π, onda prava p može sa ravni π imati najviše jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Ako bi prava p imala dve zajedničke tačke sa ravni π onda bi prema aksiomi I7 sve tačke prave p pripadale ravni π što je u suprotnosti sa uslovom teoreme. □

Definicija 2.3.2. *Dve prave koje ne pripadaju jednoj ravni su mimoilazne.*

Sledeća teorema opravdava uvođenje pojma mimoilaznih pravih.

Teorema 2.3.10. *Postoje mimoilazne prave.*

Dokaz. Prema aksiomi I9 postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C i D. Prave $p = AB$ i $q = CD$ su mimoilazne jer bi u suprotnom tačke A, B, C i D bile komplanarne, što je u suprotnosti sa načinom na koji smo ih izabrali. □

2.4 Aksiome poretka

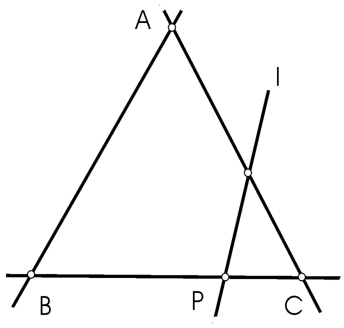
Euklid u svojim Elementima poredak tačaka na pravoj nije nigde specijalno izdvojio. Razlog za to je bio što je poredak na pravoj intuitivno bio veoma jasan. Upoređivanjem rastojanja tačaka vršen je i poredak na pravoj. Prvi koji je uvideo neophodnost aksioma poretka za dokazivanje nekih prostijih stavova o poretku tačaka na pravoj, i strogo uvođenje relacije *između*, bio je nemački matematičar Gaus.[2] Tek je M. Paš[3] uveo pojam rasporeda tačaka bez pojma merenja duži. Kasnije su njegov sistem aksioma upotpunili Peano u svom delu *Načela geometrije* i Hilbert u *Osnovama geometrije*. Potpun opis relacije između, kao jedne od osnovnih relacija u geometriji, Hilbert je dao drugom grupom aksioma.

[2] C.F. Gaus (1777-1855).

[3] M. Paš (1843-1930). U svojim *Predavanjima o novijoj geometriji* iz 1882 on je aksiomatski uveo raspored tačaka na pravoj bez pojma merenja

Ova grupa aksioma opisuje *relaciju između* koja je već uvedena kao osnovni pojam. Grupu aksioma poretka čine sledećih šest aksioma:

II1. *Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$,*[4] *tada su tačke A, B, C međusobno različite.*
II2. *Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ tada je $\mathcal{B}(C, B, A)$.*
II3. *Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ tada nije $\mathcal{B}(A, C, B)$.*
II4. *Ako su A, B dve razne tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, B, C)$.*
II5. *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.*
II6. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π i prava l pripada ravni π, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P (slika 2.1) takvoj da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, tada prava l seče pravu AC u tački Q koja je između tačaka A i C ili pravu AB u tački R koja je između tačaka A i B.*



Slika 2.1.

Aksioma II6. naziva se Pašova aksioma. Prvih pet aksioma poretka odnose se na geometriju prave, pa je to razlog što ih nazivamo linearnim aksiomama. Pašova aksioma se očigledno odnosi na geometriju ravni. Napomenimo da nije moguće uvesti u potpunosti poredak na pravoj bez primene Pašove aksiome poretka. Ukoliko bismo izbacili Pašovu aksiomu, u cilju izgrađivanja geometrije poretka na pravoj uz pomoć samo linearnih aksioma,

[4] Oznaku $\mathcal{B}$ za troelementnu relaciju između prvi su uveli u svojim *Osnovima geometrije* iz 1955. godine *K. Borsuk* i *W. Šmielova* kao početno slovo engleske reči between, što znači između

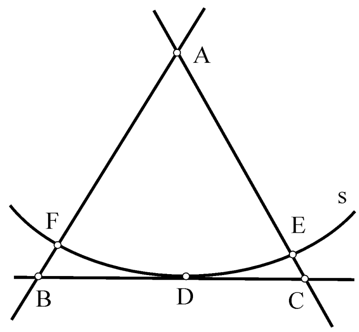
morali bismo da dodamo nove aksiome. To su teoreme 2.5.3., 2.5.5. i 2.5.6., koje ćemo dokazati kao posledice Pašove aksiome.

2.5 Posledice aksioma poretka

Teorema 2.5.1. *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada važi jedna i samo jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.*

Dokaz. Prema Aksiomi II5. važi bar jedna od navedenih triju relacija jer su po pretpostavci A, B, C tri razne kolinearne tačke. Bez gubitka opštosti dokaza pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(A, B, C)$. Treba pokazati da ne važe relacije $\mathcal{B}(A, C, B)$ i $\mathcal{B}(C, A, B)$. Prema Aksiomi II3. iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ sledi da nije $\mathcal{B}(A, C, B)$. Iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ prema Aksiomi II2 važi $\mathcal{B}(C, B, A)$, a odavde na osnovu Aksiome II3 sledi da nije $\mathcal{B}(C, A, B)$. □

Teorema 2.5.2. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, a D, E, F tačke pravih BC, CA, AB takvih da je $\mathcal{B}(B, D, C)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$, $\mathcal{B}(A, F, B)$, tada tačke D, E, F ne pripadaju jednoj pravoj.*

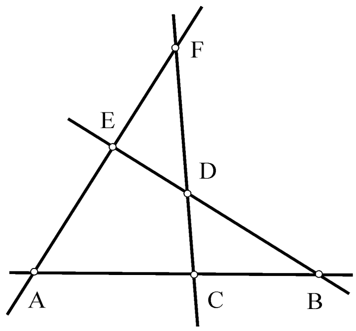


Slika 2.2.

Dokaz. Kako je $\mathcal{B}(C, E, A)$ i $\mathcal{B}(A, F, B)$ tačke E i F su različite od tačke A. Budući da su AB i AC različite među sobom sa zajedničkom tačkom A, tačke E i F su različite međusobom. Takođe će biti tačke F i D a takođe D i E različite među sobom te su tačke D, E, F različite među sobom (slika 2.2). Pretpostavimo da su one kolinearne tj. da pripadaju pravoj s. Kako su D, E, F tri razne kolinearne tačke, tada prema prethodnoj teoremi važi tačno jedna od relacija $\mathcal{B}(D, E, F)$, $\mathcal{B}(D, F, E)$, $\mathcal{B}(E, D, F)$. Neka je na primer $\mathcal{B}(F, D, E)$. Pri tome su A, F, E tri razne nekolinearne tačke. Prava

BC je u ravni određenoj tačkama A, F, E, ne sadrži tačku A i seče prave FE, EA, AF redom u tačkama B, C, D takvim da je $\mathcal{B}(F, D, E)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$ i $\mathcal{B}(A, F, B)$ što je prema Pašovoj aksiomi nemoguće. Sledi da ne može biti $\mathcal{B}(F, D, E)$. Slično se dokazuje da nije $\mathcal{B}(F, E, D)$ i da nije $\mathcal{B}(E, F, D)$ pa tačke D, E, F ne pripadaju jednoj pravoj. □

Teorema 2.5.3. *Ako su A i B dve razne tačke tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, C, B)$.*

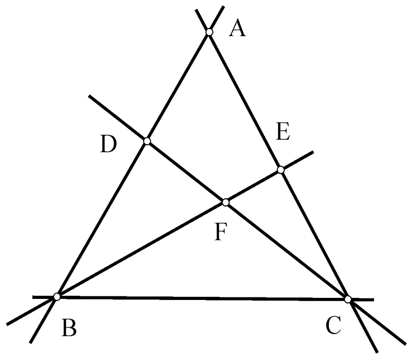


Slika 2.3.

Dokaz. Neka je D bilo koja tačka koja ne pripada pravoj AB. Egzistencija te tačke sledi iz aksiome I9. Kako je tačka D van prave AB, tačke B i D su različite među sobom te na pravoj BD postoji prema aksiomi II4 tačka E (slika 2.3) takva da je $\mathcal{B}(B, D, E)$, E je van prave AB pa mora biti različita od A. Stoga prema Aksiomi II4 na pravoj AE postoji tačka F takva da je $\mathcal{B}(A, E, F)$.

Primenom prethodne teoreme na tačke A, B, E koje su tri nekolinearne tačke, i pravu DF u ravni određenoj tim tačkama koja ne sadrži tačku A i seče pravu BE u tački D takvoj da je $\mathcal{B}(B, D, E)$ zaključujemo da prava DF mora da seče ili pravu AE u tački koja je između tačaka A i E ili pravu AB u tački koja je između tačaka A i B. Lako se dokazuje da je prvi slučaj nemoguć. Dakle, prava FD seče pravu AB u nekoj tački C tako da je $\mathcal{B}(A, C, B)$. □

Teorema 2.5.4. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, D, E redom tačke pravih AB, AC takve da je $\mathcal{B}(A, D, B)$, $\mathcal{B}(A, E, C)$ tada se prave BE i CD seku u nekoj tački F takvoj da je $\mathcal{B}(B, F, E)$ i $\mathcal{B}(C, F, D)$.*



Slika 2.4.

Dokaz. Teorema se dokazuje korišćenjem prethodne teoreme, činjenice da $A \notin DE$ jer je $D \neq E$, $E \neq A$ i korišćenjem Pašove aksiome (slika 2.4) za tačke D, A, C i pravu BE. □

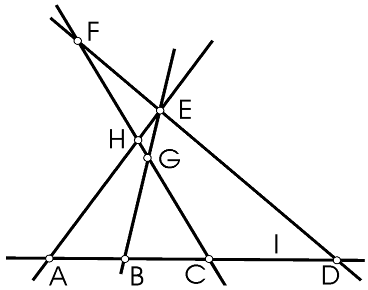
Teorema 2.5.5. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ tada je $\mathcal{B}(A, C, D)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$.*

Dokaz. Neka je l prava kojoj pripadaju tačke A, B, C i D i neka je E proizvoljna tačka (slika 2.5) van prave l i F tačka takva da je $\mathcal{B}(D, E, F)$. Kako je $\mathcal{B}(D, E, F)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$, to primenom Pašove aksiome na tačke B, D, E i pravu CF sledi da prava CF seče BE u tački G takvoj da je $\mathcal{B}(B, G, E)$. Takođe iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, G, E)$ primenom Pašove aksiome na tačke A, B, E i pravu CF sledi da prava CF seče pravu AE u tački H takvoj da je $\mathcal{B}(A, H, E)$. Sada prava CF seče AE u tački H tako da je $\mathcal{B}(A, H, E)$ a pravu DE u tački u tački F tako da je $\mathcal{B}(D, E, F)$, to na osnovu Pašove aksiome primenjene na tačke A, D i pravu CF sledi $\mathcal{B}(A, C, D)$.

Iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ na osnovu aksiome II2 sledi da je $\mathcal{B}(C, B, A)$ i $\mathcal{B}(D, C, B)$, odakle na osnovu dokazanog dela sledi $\mathcal{B}(D, B, A)$, odakle je $\mathcal{B}(A, B, D)$. □

Teorema 2.5.6. *ako su A, B, C i D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada je $\mathcal{B}(B, C, D)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$.*

Dokaz. Neka je E tačka van prave l određene tačkama A, B, C i D i F tačka takva da je $\mathcal{B}(D, E, F)$. Primenimo Pašovu aksiomu na tačke A, D, E i pravu CF. Tada iz $\mathcal{B}(A, C, D)$ i $\mathcal{B}(D, E, F)$ sledi da prava CF seče pravu AE



Slika 2.5.

u tački H takvoj da je $\mathcal{B}(A, H, E)$. Analogno, iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, H, E)$, primenom Pašove aksiome na tačke A, B, E i pravu CF, zaključujemo da prava CF seče pravu BE u tački G takvoj da je $\mathcal{B}(B, G, E)$. Ponovnom primenom Pašove aksiome na tačke D, E, B i pravu CF iz $\mathcal{B}(B, G, E)$ i $\mathcal{B}(D, E, F)$ sledi $\mathcal{B}(B, C, D)$, čime je dokazana prva relacija. Sada iz $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ na osnovu teoreme 2.5.5. sledi i $\mathcal{B}(A, B, D)$ $\square$

Teorema 2.5.7. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$ tada je $\mathcal{B}(B, C, D)$ i $\mathcal{B}(A, C, D)$ ili $\mathcal{B}(B, D, C)$ i $\mathcal{B}(A, D, C)$.*

Dokaz. tačke A, C i D su tri nekolinearne tačke. Tada prema teoremi 2.5.1. važi tačno jedna od relacija $\mathcal{B}(A, C, D)$, $\mathcal{B}(C, D, A)$, $\mathcal{B}(D, A, C)$. Ako bi važila relacija $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada na osnovu teoreme 2.5.6. važi i $\mathcal{B}(B, C, D)$, čime je prva relacija dokazana. Ako bi bilo $\mathcal{B}(C, D, A)$ tada bi važilo i $\mathcal{B}(A, D, C)$, a kako je još $\mathcal{B}(A, B, D)$, prema teoremi 2.5.6. sledi $\mathcal{B}(B, D, C)$, tj važi i druga relacija. Ako bi važila relacija $\mathcal{B}(D, A, C)$ tada bi iz $\mathcal{B}(A, B, D)$, tj. $\mathcal{B}(D, B, A)$ sledilo $\mathcal{B}(B, A, C)$, što protivureči pretpostavci teoreme da je $\mathcal{B}(A, B, C)$. $\square$

Relacija $\mathcal{B}$ uzeta je kao relacija "između" i ona je troelementna. Međutim, ona se može uopštiti, te možemo definisati n-toelementnu relaciju "između".

Definicija 2.5.1. Konačan skup kolinearnih tačaka $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $n > 3$, je *linearno uređen* ako za svako $1 \leq i < j < k \leq n$ važe relacije $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$. To označavamo $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Sa ovako uvedenom relacijom $\mathcal{B}$ u mogućnosti smo da govorimo o linearnom poretku tačaka na jednoj pravoj. Teoreme 2.5.5., 2.5.6. i 2.5.7. možemo formulisati redom na sledeći način:

Teorema 2.5.8. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(B, C, D)$ tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.*

Teorema 2.5.9. *ako su A, B, C i D četiri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.*

Teorema 2.5.10. *Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ i $\mathcal{B}(A, B, D)$ tada je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ ili $\mathcal{B}(A, B, D, C)$.*

Ako konačno mnogo puta primenimo teoremu 2.5.8. dobijamo:

Teorema 2.5.11. *Ako je $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ konačan skup od n kolinearnih tačaka takvih da za svako $i = 1, 2, \ldots, n-1$ važi relacija $\mathcal{B}(A_{i-1}, A_i, A_{i+1})$ tada važi relacija $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.*

2.6 Pojam duži

Između bilo koje dve razne tačke A i B postoji neka tačka C. Induktivnim postupkom zaključujemo da između bilo koje dve razne tačke A i B postoji neograničeno mnogo tačaka. Ova činjenica nam omogućava da uvedemo pojam duži.

Definicija 2.6.1. Neka su A i B dve razne tačke neke prave l. *Otvorenom duži* (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su između A i B tj.

$$(AB) = \{X | X \in l \ \ \& \ \ \mathcal{B}(A, X, B)\}.$$

Definicija 2.6.2. *Zatvorenom duži* $[AB]$ nazivamo uniju

$$[AB] = (AB) \cup \{A, B\}.$$

Nije teško utvrditi da važe sledeća tvrđenja:

Teorema 2.6.1. *Svaka tačka $C \in (AB)$ razlaže skup svih ostalih tačaka te duži na dve otvorene duži (AC) i (CB).*

Teorema 2.6.2. *Za tri razne kolinearne tačke A, B, C važi*

$$(AB) \cap (BC) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{B}(A, B, C).$$

Teorema 2.6.3. *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada je $(AB) \cap (AC) \cap (BC) = \emptyset$.*

2.7 Poluprava i njene osobine

Definicija 2.7.1. Neka su O, A, B tri razne tačke prave l. Ako nije zadovoljena relacija $\mathcal{B}(A, O, B)$ tada su tačke A i B *sa iste strane tačke* O (oznaka: $A, B \ddot{-} O$). Ako je za tačke O, A, B zadovoljena relacija $\mathcal{B}(A, O, B)$ tada su tačke A i B sa raznih strana tačke O (oznaka: $A, B \div O$)

Teorema 2.7.1. *Relacija* $\ddot{-}\, O$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost neposredno slede iz definicije. Dokazaćemo tranzitivnost. Neka su O, A, B, C četiri tačke prave l takve da je $A, B \ddot{-} O$ i $B, C \ddot{-} O$. Treba pokazati da je $A, C \ddot{-} O$. Pretpostavimo da je $A, C \div O$. Iz $A, B \ddot{-} O$ sledi $\mathcal{B}(O, A, B)$ ili $\mathcal{B}(O, B, A)$. Ako svaku od ovih relacija uporedimo sa $\mathcal{B}(A, O, C)$ dobijamo $\mathcal{B}(B, O, C)$ odakle sledi $B, C \div O$ što je suprotno pretpostavci. $\square$

Definicija 2.7.2. Skup svih tačaka neke prave l koje se nalaze sa iste strane date tačke O nazivamo *otvorenom polupravom.* Uniju ovog skupa i tačke O nazivamo *zatvorenom polupravom*, a tačku O početkom ili krajem poluprave.

Teorema 2.7.2. (Osnovna teorema o razbijanju prave) *Svaka tačka O neke prave l razlaže skup ostalih tačaka prave l na dve otvorene poluprave prave l.*

Dokaz. Na pravoj l prema aksiomi I1. osim tačke O postoji bar još jedna tačka, označimo je sa A. Prema aksiomi II4. na pravoj OA postoji tačka A' takva da je $\mathcal{B}(A, O, A')$. Ako obeležimo sa P, Q bilo koje dve tačke prave l koje se nalaze sa one strane tačke O sa koje je i tačka A, tada će P, Q biti sa iste strane tačke O zbog tranzitivnosti relacije $\ddot{-}\, O$.

Na taj način skup svih tačaka koje se nalaze sa iste strane sa koje se nalazi tačka A proizvodi neku otvorenu polupravu a. Na potpuno isti način konstatujemo da skup svih tačaka koje se nalaze sa iste strane tačke O sa koje je tačka A' proizvodi polupravu a'. Pokazaćemo da je tačkom O skup svih tačaka prave l razložen na poluprave a i a', tj pokazaćemo da:

(i) poluprave a i a' nemaju zajedničkih tačaka, tj. $a \cap a' = \emptyset$,

(ii)Svaka tačka S prave l pripada nekoj od polupravih a i a'.

(i) Neka poluprave a i a' imaju zajedničku tačku R. Kako $R \in a$ to je $A, R \ddot{-} O$. Međutim $R \in a'$ pa $R, A' \ddot{-} O$. Na osnovu tranzitivnosti relacije $\ddot{-}\, O$ sledi da $A, A' \ddot{-} O$ što je nemoguće jer smo pretpostavili da je $\mathcal{B}(A, O, A')$. Znači zaista je $a \cap a' = \emptyset$.

(ii) Pretpostavimo da neka tačka S ne pripada ni jednoj od polupravih a i a', tj. $S \notin a \cup a'$. U tom slučaju imamo $A, S \div O$ i $A', S \div O$, odnosno $\mathcal{B}(A, O, S)$ i $\mathcal{B}(A', O, S)$. Odavde sledi da nije $\mathcal{B}(A, O, A')$ što je suprotno pretpostavci da je $\mathcal{B}(A, O, A')$. Znači svaka tačka S prave l pripada nekoj od polupravih a ili a'. □

2.8 Orijentacija prave

Definicija 2.8.1. Neka su a i b dve poluprave iste prave l. Ako pri tome jedna od navedenih polupravih sadrži drugu polupravu kažemo da su poluprave a i b *istog smera (istosmerne)*. Ovo označavamo $a \rightrightarrows b$. U suprotnom poluprave a i b su *suprotnog smera (suprotnosmerne)*. To označavamo $a \rightleftarrows b$.

Definicija 2.8.2. Za dve duži AB i CD (otvorene ili zatvorene) kažemo da su *istosmerne* ako su poluprave AB i CD istosmerne. U protivnom su duži AB i CD *suprotnosmerne*.

Za relaciju istosmernosti važe sledeće osobine:

Teorema 2.8.1. *Relacija istosmernosti definisana na skupu polupravih (duži) jedne iste prave je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost slede neposredno iz definicije. Dokažimo tranzitivnost. Neka su a, b, c tri pluprave neke prave l takve da je $a \rightrightarrows b$ i $b \rightrightarrows c$. Pokazaćemo da je $a \rightrightarrows c$. Iz $a \rightrightarrows b$ sledi $a \subset b$ ili $b \subset a$, a iz $b \rightrightarrows c$ sledi $b \subset c$ ili $c \subset b$. Razmotrimo sve mogućnosti:
1) iz $a \subset b$ i $b \subset c$ sledi $a \subset c$ tj. $a \rightrightarrows c$,
2) iz $a \subset b$ i $c \subset b$ sledi $a \subset c$ ili $c \subset a$ tj. $a \rightrightarrows c$,
3) iz $b \subset a$ i $b \subset c$ sledi $a \subset c$ ili $c \subset a$ tj. $a \rightrightarrows c$,
4) iz $b \subset a$ i $c \subset b$ sledi $c \subset a$ tj. $a \rightrightarrows c$. □

Teorema 2.8.2. *Skup L svih polupravih neke prave l može se razložiti na dva podskupa L_1 i L_2 koji zadovoljavaju sledeće uslove:*
1) $L_1, L_2 \neq \emptyset$,
2) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$,
3) *za svako $p, q \in L_1$ ili $p, q \in L_2$ imamo da je $p \rightrightarrows q$,*
4) *za svako $p \in L_1$ i svako $q \in L_2$ važi $p \rightleftarrows q$.*

Dokaz. Neka je $A \in l$ proizvoljna tačka. Prema ranije dokazanoj teoremi ona razlaže l na dve poluprave a i a'. Saglasno definiciji poluprave a i a'

su suprotnosmerne. Označimo sa L_1 skup polupravih prave l koji se sastoji od poluprave a i svih polupravih prave l istosmernih sa a, a sa L_2 skup koji se sastoji od poluprave a' i svih polupravih prave l koje su istosmerne sa a'. Dokažimo da ovako konstruisani skupovi L_1 i L_2 zadovoljavaju uslove teoreme.

1) S obzirom da je $a \in L_1$, $a' \in L_2$ to su $L_1, L_2 \neq \emptyset$,

2) Dokažimo da svaka poluprava prave l pripada jednom i samo jednom od skupova L_1 i L_2. Obeležimo sa b bilo koju polupravu iz L. Ako je $b \equiv a$ ili $b \equiv a'$ tvrđenje je dokazano.

Neka je $b \neq a$, $b \neq a'$ i neka je B kraj poluprave b, a b' poluprava komplementarna sa b.

Tada razlikujemo četiri mogućnosti:

(1) $A \in b$ i $B \in a \Rightarrow a' \subset b \Rightarrow b \in L_2$,
(2) $A \in b$ i $B \in a' \Rightarrow a \subset b \Rightarrow b \in L_1$,
(3) $A \in b'$ i $B \in a \Rightarrow a' \subset b' \Rightarrow b \subset a \Rightarrow b \in L_1$,
(4) $A \in b'$ i $B \in a' \Rightarrow a \subset b' \Rightarrow b \subset a' \Rightarrow b \in L_2$.

Prema tome, poluprava b pripada jednom od skupova L_1 i L_2 tj. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

3) se dokazuje neposredno jer je relacija $\rightrightarrows$ tranzitivna.

4) se dokazuje indirektno koristeći uslov 3). □

Definicija 2.8.3. Svaki od podskupova L_1 i L_2 na koje je prema dokazanoj teoremi razložen skup L svih polupravih prave l nazivamo *orijentacijom* ili *smerom* na pravoj l.

Iz same definicije i prethodne teoreme neposredno zaključujemo da na jednoj pravoj postoje dva i samo dva smera. Uobičajeno je da se oni smatraju suprotnim što ukazuje na mogućnost da jedan zovemo pozitivnim a drugi negativnim.

Pojam orijentacije omogućuje da geometriju poretka na pravoj izgradimo na potpuno nov način uvođenjem dveju pomoćnih relacija "pre" i "posle", koje se inače koriste u teoriji brojeva.

Definicija 2.8.4. Neka su A i B dve razne tačke neke orijentisane prave l i a i b njima odgovarajuće poluprave iz orijentacije koja je utvrđena na pravoj l. Ako je pri tome $b \subset a$ tada kažemo da je na orijentisanoj pravoj l *tačka A pre tačke B* i označavamo $A \prec B$. U suprotnom, ako je $a \subset b$ kažemo da je na orijentisanoj pravoj l *tačka A posle tačke B* i pišemo $A \succ B$.

Teorema 2.8.3. *Relacija $\prec$ je relacija potpunog poretka tačaka na orijentisanoj pravoj l.*

Drugim rečima ona je na tom skupu konektivna tj. definisana za svake dve tačke, antisimetrična je i tranzitivna.

Primedba 2.8.1. *Teorija brojeva i geometrija na pravoj su zahvaljujući ovome ekvivalentne.*

Takođe važi:

Teorema 2.8.4. *Za svake tri tačke A, B, C orijentisane prave l važi*

$$\mathcal{B}(A, B, C) \Leftrightarrow A \prec B \prec C \vee A \succ B \succ C.$$

2.9 Definicija i osobine poluravni

I u ovom slučaju uvodimo dve pomoćne relacije: "sa iste strane prave" i "sa raznih strana prave".

Definicija 2.9.1. Neka su A i B dve razne tačke neke ravni π, p prava koja pripada toj ravni i $A, B \notin p$. Ako je pri tome $(AB) \cap p = \emptyset$ tada kažemo da su A i B *sa iste strane prave* p i označavamo $A, B \ddot{-}\, p$. U protivnom kažemo da su tačke A i B *sa raznih strana prave* p i to označavamo $A, B \div p$.

Teorema 2.9.1. *Relacija* $\ddot{-}\, p$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Osobine refleksivnosti i simetrije slede neposredno iz definicije relacije $\ddot{-}\, p$. Dokažimo tranzitivnost. Označimo sa A, B, C tri razne tačke ravni π i sa p pravu u ravni π koja ne sadrži ni jednu od tačaka A, B, C, pri čemu je $A, B \ddot{-}\, p$ i $B, C \ddot{-}\, p$. Pokazaćemo da je $A, C \ddot{-}\, p$.

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1) Tačke A, B, C pripadaju jednoj pravoj s. Prava s seče pravu p ili sa njom nema zajedničkih tačaka. Ako je $s \cap p = \{O\}$ tada su $A, B \ddot{-}\, O$ i $B, C \ddot{-}\, O$ pa je i $A, C \ddot{-}\, O$. Odatle sledi $A, C \ddot{-}\, p$. Ako je pak $s \cap p = \emptyset$ tada duž (AC) nema zajedničkih tačaka sa pravom p pa je i u ovom slučaju $A, C \ddot{-}\, p$.

2) Tačke A, B, C nisu kolinearne. Iz $A, B \ddot{-}\, p$ sledi $(AB) \cap p = \emptyset$. Takođe iz $B, C \ddot{-}\, p$ sledi $(BC) \cap p = \emptyset$. Prava p pripada ravni ABC. Ona ne može seći (AC) između tačaka A i C jer bi prema Pašovom stavu morala seći još duž(AB) ili duž (BC) što je u suprotnosti sa pretpostavkom. $\square$

Definicija 2.9.2. Skup svih tačaka neke ravni π koje se nalaze sa jedne iste strane prave $p \subset \pi$ nazivamo *otvorenom poluravni.* Skup koji se sastoji od tačaka otvorene poluravni i tačaka prave p nazivamo *zatvorenom poluravni.* Pravu p u oba slučaja nazivamo granicom ili međom. Ako je p granica i A bilo koja tačka neke poluravni tada ovu poluravan ukoliko je otvorena simbolički označavamo (p, A), a ako je zatvorena $[p, A)$.

Teorema 2.9.2. *Svaka prava p ravni π razlaže skup ostalih tačaka te ravni na dve otvorene poluravni.*

Dokaz. U ravni π postoje tačke X, O i Y takve da $O \in p$ i $\mathcal{B}(X, O, Y)$. To znači $X, Y \div p$, pa je broj klasa ekvivalencije relacije $\ddot{-}$ veći od jedan. Dokažimo da broj klasa ekvivalencije relacije $\ddot{-}\, p$ ne može biti veći od dva. Ako bi broj klasa ekvivalencije bio veći od dva, onda bi postojala tačka Z takva da je $X, Z \div p$ i $Y, Z \div p$. Za tri razne tačke X, Y i Z mogu nastupiti dva slučaja:

(i) Tačke X, Y i Z su nekolinearne. U tom slučaju bi prava p sekla svaku od duži XY, YZ i ZX, što je u suprotnosti sa teoremom 2.5.2.

(ii) Tačke X, Y i Z su kolinearne. Tada dobijamo kontradikciju sa teoremom 2.6.1.

Prema tome, broj klasa ekvivalencije relacije $\ddot{-}\, p$ je dva. $\square$

2.10 Ugaona linija i ugao

Definicija 2.10.1. Skup koji se sastoji od jedne tačke O i tačaka dveju raznih polupravih p i q koje imaju zajednički kraj O, nazivamo *ugaonom linijom* i označavamo ga $\angle pq$.

Definiciji pojma ugla prethodi uvođenje dve pomoćne relacije: "sa iste strane ugaone linije" i " sa raznih strana ugaone linije".

Definicija 2.10.2. Skup nadovezanih duži $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ nazivamo *poligonalnom linijom.* Poligonalnu liniju čiji se početak i kraj poklapaju nazivamo *poligonom.* Poligon p je prost ako, nikoje dve njegove stranice nemaju zajedničkih tačaka, sem što svake dve susedne stranice imaju zajedničko teme. U suprotnom poligon p je složen.

Definicija 2.10.3. Neka je $\angle pq$ ugaona linija neke ravni π i A, B tačke ravni π koje ne pripadaju ugaonoj liniji $\angle pq$. Ako postoji poligonalna linija L koja spaja tačke A i B, pripada ravni π i sa ugaonom linijom $\angle pq$ nema zajedničkih tačaka tada kažemo da su tačke A i B *sa iste strane ugaone linije* $\angle pq$ i označavamo $A, B \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$. Ukoliko ovo nije zadovoljeno tada su tačke A i B *sa raznih strana ugaone linije* $\angle pq$ što označavamo $A, B \div \angle pq$.

Teorema 2.10.1. *Relacija* $\ddot{-}\angle pq$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost slede neposredno iz definicije. Dokažimo tranzitivnost. Neka su A, B, C tri tačke ravni π i $\angle pq$ ugaona linija u toj ravni takva da je $A, B \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$ i $B, C \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$. Dokažimo da je $A, C \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$. Kako je $A, B \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$ to postoji poligonalna linija $L_1 \subset \pi$ koja spaja tačke A i B i $L_1 \cap \angle pq = \emptyset$. Iz $B, C \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$ sledi da postoji poligonalna linija $L_2 \subset \pi$ koja spaja tačke B i C i $L_2 \cap \angle pq = \emptyset$. Poligonalna linija $L = L_1 \cup L_2$ spaja tačke A i C, pripada ravni π i $L \cap \angle pq = \emptyset$ odakle sledi $A, C \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$. □

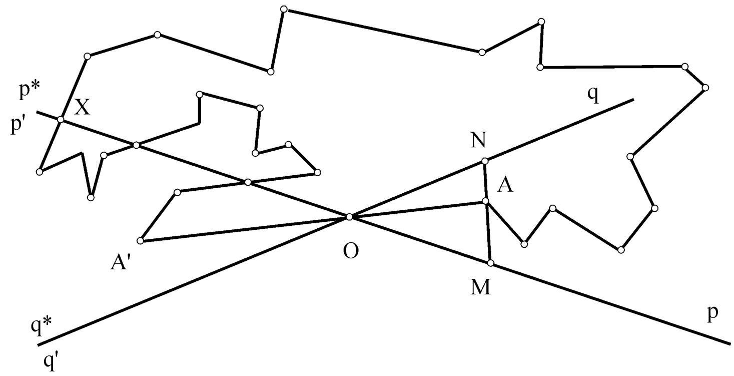
Definicija 2.10.4. Neka je $\angle pq$ ugaona linija neke ravni π. Skup tačaka ravni π koje se nalaze sa iste strane ugaone linije $\angle pq$ zovemo *otvorenim uglom* i obeležavamo ga $\measuredangle pq$. Uniju ugaone linije $\angle pq$ i otvorenog ugla $\measuredangle pq$ nazivamo *zatvorenim uglom* i obeležavamo ga $[\measuredangle pq]$. Ugaonu liniju $\angle pq$ zovemo granicom ili međom ugla $\measuredangle pq$, polupravе p i q kracima a tačku O temenom svakog od tih uglova.

Teorema 2.10.2. *Svaka ugaona linija neke ravni* π *razlaže skup ostalih tačaka te ravni na dva otvorena ugla.*

Dokaz. Neka je $\angle pq$ proizvoljna ugaona linija ravni π. Ako bi poluprave p i q bile kolinearne tj. ako bi obrazovale jednu pravu, tada bi dokaz bio završen jer bi one razložile ravan na dve poluravni.

Pretpostavimo da poluprave p i q (slika 2.6) nisu na jednoj pravoj. Neka su M i N tačke polupravih p i q respektivno i neka je A tačka duži (MN) takva da je $\mathcal{B}(M, A, N)$. Tada su O i A dve razne tačke, te na pravoj OA postoji tačka A' takva da važi relacija $\mathcal{B}(A, O, A')$. Dokažimo da su tačke $A, A' \div \angle pq$. Dokaz izvodimo indirektno. Pretpostavimo da je $A, A' \mathrel{\ddot{-}} \angle pq$. Tada postoji poligonalna linija L koja spaja tačke A i A', cela pripada ravni π i $L \cap \angle pq = \emptyset$. Neka je p' poluprava komplementarna sa p i q' poluprava komplementarna sa q, p^* prava koja sadrži p i q^* prava koja sadrži q. Kako su $A, A' \in AA'$ i $A, A' \div O$, gde $O \in p^*$ to je $A, A' \div p^*$ pa svaka poligonalna linija koja spaja A i A' seče pravu p^*, pa i poligonalna linija L.

Neka je X ona tačka na poligonalnoj liniji L koja pripada p^*, pri čemu tačka X razlaže poligonalnu liniju L na dva dela od kojih onaj koji odgovara



Slika 2.6.

tački A sa pravom p^* nema drugih zajedničkih tačaka, tj. neka je na liniji L počev od tačke A ka tački A', X prva zajednička tačka te linije sa pravom p^*. Ovaj deo linije L označimo sa L'. Kako je X tačka linije L' na pravoj p^* to znači da X pripada p' jer je $L' \cap \angle pq = \emptyset$. Sada iz $M \in p$ i $X \in p'$ sledi $M, X \div O$ a odavde $M, X \div q^*$. Svaka tačka poligonalne linije osim X će biti sa one strane prave p^* sa koje nije A'. Pored toga je $A, N \ddot{-} p^*$ jer je $\mathcal{B}(N, A, M)$, pa je svaka tačka otvorene poluprave q sa iste strane prave p^* sa koje je A, a svaka tačka poluprave q' je sa one strane prave p^* sa koje je A'. Sledi da L' ne seče q', a ne seče ni q jer poligonalna linija L po pretpostavci ne seče q. Znači L' i q^* nemaju zajedničkih tačaka, pa je $A, X \ddot{-} q^*$.

Međutim $X, M \div q^*$ pa je $A, M \div q^*$, što je u suprotnosti $\mathcal{B}(N, A, M)$. Prema tome $A, A' \div \angle pq$, pa je broj klasa ekvivalencije relacije $\ddot{-}$ veći od jedan. Obeležimo sa ω klasu ekvivalencije (ugao) kojoj pripada tačka A a sa ω' klasu ekvivalencije (ugao) kojoj pripada tačka A'. Dokazaćemo da ugaona linija $\angle pq$ razlaže skup svih ostalih tačaka ravni π na otvorene uglove ω i ω'.

To znači da trebamo dokazati:

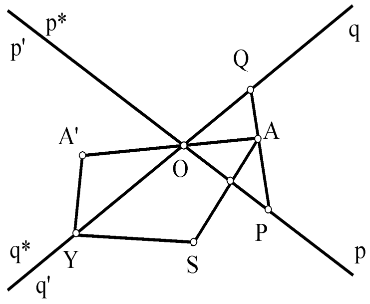
(1) $\omega \cap \omega' = \emptyset$,

(2) $\omega \cup \omega' \cup \angle pq = \pi$.

Oba tvrđenja dokazujemo indirektno.

(1) Neka je $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$. To znači da postoji tačka $R \in \omega \cap \omega'$. Iz $R \in \omega$ sledi $A, R \ddot{-} \angle pq$. Iz $R \in \omega'$ sledi $A', R \ddot{-} \angle pq$. Zbog tranzitivnosti relacije $\ddot{-}$ sledi $A, A' \ddot{-} \angle pq$, što je nemoguće jer smo ustanovili da važi $A, A' \div \angle pq$.

(2) Neka $S \notin \omega \cup \omega' \cup \angle pq$. Tada $S \in AA'$ ili $S \notin AA'$. Ako $S \in AA'$ tvrđenje sledi neposredno uzimajući u obzir poredak tačaka u odnosu na



Slika 2.7.

tačku O. Ako $S \notin AA'$ (slika 2.7) onda duž AS seče ili polupravu p ili polupravu q. Neka duž AS seče polupravu p. Tada su $A, S \div p^*$ i $A, A' \div p^*$ odakle sledi $A', S \ddot{-}\, p^*$. Neka je Y proizvoljna tačka poluprave q'. Tada je $Y, A' \ddot{-}\, p^*$, odakle sledi $Y, S \ddot{-}\, p^*$. Ako je $S \equiv Y$ onda $A'S$ nema zajedničkih tačaka ni sa p ni sa q, pa je $A', S \ddot{-}\, p^*$. Ako je $S \neq Y$ onda poligonalna linija $A'Y \cup YS$ ne seče pravu p^*, a pravu q^* seče u tački $Y \in q'$. Tačke $A', S \notin q^*$ pa je $A'Y \cap q \neq \emptyset$ i $YS \cap q \neq \emptyset$, pa je $A', S \ddot{-}\, \angle pq$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $S \notin \omega'$. Dakle ω i ω' su jedini uglovi na koje je ugaonom linijom $\angle pq$ razložena ravan π. □

2.11 Orijentacija ravni

Da bismo uveli orijentaciju ravni, pre toga treba uvesti pojam istosmernih uglova. Pri tome razlikujemo dva slučaja:
(1) kada uglovi imaju zajedničko teme,
(2) kada uglovi nemaju zajedničko teme.

Definicija 2.11.1. Za ugao $\sphericalangle ab$ čiji kraci a i b čine uređen par polupravih kažemo da je *orijentisan*. Krak a je početni ili prvi a krak b krajnji ili drugi krak tog orijentisanog ugla.

Definicija 2.11.2. Dva orijentisana ugla $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle cd$ koji pripadaju istoj ravni π i imaju zajedničko teme O nazivaju se *istosmernim* (oznaka: $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle cd$) ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:
(1) ako je $a = c$ ili $b = d$ jedan od uglova $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle cd$ sadrži drugi.
(2) ako je $a \neq c$ i $b \neq d$ jedan od uglova $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle cd$ prema uslovu (1) zadovoljava relacije $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle ad$ i $\sphericalangle ad \rightrightarrows \sphericalangle cd$. Ako pomenuti uglovi $\sphericalangle ab$

i $\sphericalangle cd$ nisu istosmerni onda kažemo da su *suprotnosmerni* (oznaka $\sphericalangle ab \rightleftarrows \sphericalangle cd$).

Za orijentisane uglove koristićemo oznaku $\sphericalangle ab$ a za neorijentisane oznaku $\measuredangle ab$.

Definicija 2.11.3. Dva orijentisana ugla $\sphericalangle ab$ i $\sphericalangle cd$ neke ravni π sa raznim temenima O i S nazivamo *istosmernim* i simbolički obeležavamo $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle cd$ ako postoje orijentisani uglovi $\sphericalangle pq$ i $\sphericalangle rs$ sa temenima redom u tačkama O i S tako da je za poluprave p, q, r, s: $p \rightrightarrows r$ i $q \rightrightarrows s$ pri čemu je $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle pq$ i $\sphericalangle rs \rightrightarrows \sphericalangle cd$.

Teorema 2.11.1. *Relacija istosmernosti definisana na skupu uglova jedne ravni je relacija ekvivalencije.*

Postupak dokazivanja ove teoreme analogan je postupku dokazivanja odgovarajuće teoreme za istosmerne prave, s tim što će biti razmatrano više mogućnosti nego za pravu. Ovo nastaje zbog toga što treba razlikovati slučajeve kada uglovi imaju:

(1) zajedničko teme, (2) različita temena.

Jedna od posledica relacije istosmernosti uglova je i mogućnost razlaganja svih uglova na klase istosmernih uglova.

Teorema 2.11.2. *Skup svih orijentisanih uglova K neke ravni π može se razložiti na dva podskupa K_1 i K_2 pri čemu su zadovoljeni uslovi :*
(1) *Podskupovi K_1 i K_2 nisu prazni, tj. $K_1, K_2 \neq \emptyset$,*
(2) *Podskupovi K_1 i K_2 su disjunktni, tj. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$,*
(3) *Svaka dva ugla iz istog podskupa su istosmerna.*
(4) *Svaka dva ugla iz raznih podskupova su suprotnosmerna.*

Dokaz ove teoreme vrši se analogno dokazu odgovarajuće teoreme u slučaju orijentacije prave.

Definicija 2.11.4. Svaki od dva podskupa K_1 i K_2 pomenuta u prethodnoj teoremi nazivamo *orijentacijom* ili *smerom* u razmatranoj ravni π. Orijentacije K_1 i K_2 nazivamo *suprotnim* međusobom. Ravan u kojoj je zadata jedna orijentacija nazivamo *orijentisanom.*

U apsolutnoj geometriji pojam orijentacije nije transmisibilan, tj. moguće je govoriti samo o orijentaciji na jednoj ali ne i o orijentaciji koja bi bila zajednička za više pravih (što je slučaj npr. u pogledu orijentacije paralelnih pravih u Euklidskoj geometriji).

Takođe, može se govoriti samo o orijentaciji jedne iste ravni jer pojam orijentacije uglova u različitim ravnima ne može biti definisan. U Euklidskoj geometriji zahvaljujući definisanju pojma paralelnosti moguće je definisati orijentacije na šire klase: klasu paralelnih pravih odnosno klasu paralelnih ravni, dok se u geometriji Lobačevskog (hiperboličkoj geometriji) takve orijentacije ne mogu izvoditi što znači da pojam orijentacije u Euklidskoj geometriji predstavlja transmisibilan a u Apsolutnoj geometriji i hiperboličkoj geometriji netransmisibilan pojam.

2.12 Poluprostori i razlaganje prostora pomoću ravni

Definiciji pojma poluprostora prethodi uvođenje pomoćnih relacija ”sa iste strane ravni” i ”sa raznih strana ravni”. Koristićemo oznake $A, B \ddot{-} \pi$ i $A, B \div \pi$.

Definicija 2.12.1. Neka su A, B dve tačke koje ne pripadaju ravni π. Ako je pritom $(AB) \cap \pi = \emptyset$ tada kažemo da su tačke A i B *sa iste strane ravni* π. U suprotnom, ako je $(AB) \cap \pi \neq \emptyset$ tada kažemo da su tačke A i B *sa raznih strana ravni* π.

Teorema 2.12.1. *Relacija ”sa iste strane ravni” je relacija ekvivalencije.*

Dokaz ove teoreme vrši se analogno dokazu odgovarajuće teoreme o relaciji ”sa iste strane prave” u ravni.

Relacija ”sa iste strane ravni” omogućuje definisanje pojma poluprostora.

Definicija 2.12.2. Skup svih tačaka koje se nalaze sa iste strane ravni π nazivamo *otvorenim poluprostorom.* Skup koji se sastoji od tačaka ravni π i tačaka poluprostora nazivamo *zatvorenim poluprostorom* pri čemu je ravan π granica ili međa poluprostora.

Nije teško konstatovati da je poluprostor jednoznačno određen međom tj. ravni π i jednom tačkom van međe. Ako je ravan π međa i tačka A ne pripada ravni π onda otvoreni poluprostor određen na ovaj način označavamo (π, A). Odgovarajući zatvoreni poluprostor označavamo $[\pi, A)$.

Teorema 2.12.2. (Osnovna teorema o razlaganju prostora) *Svaka ravan π prostora S^3 razlaže skup svih ostalih tačaka tog prostora na dva otvorena poluprostora.*

Dokaz ove teoreme se vrši analogno dokazu teoreme o razlaganju ravni na otvorene poluravni.

Teorema 2.12.3. *Otvoren i zatvoren poluprostor su konveksni skupovi tačaka.*

Napomena. Osobina razlaganja prave, ravni ili prostora je individualno svojstvo regulisano aksiomatikom. Za razliku od Apsolutne geometrije u Projektivnoj geometriji jedna tačka ne vrši razlaganje prave, odnosno jedna ravan ne vrši razlaganje prostora, već dve tačke razlažu pravu na dva projektivna odsečka. U Apsolutnoj geometriji tačka razlaže pravu, a jedna ravan razlaže prostor. Dve ravni koje se seku razlažu prostor na četiri dela. Tri ravni koje se seki razlažu prostor na maksimalno osam delova, a četiri ravni na maksimalno petnaest delova.

2.13 Diedarska površ i diedar

Definicija 2.13.1. Skup tačaka dveju poluravni α i β koje imaju zajedničku granicu s i tačaka prave s nazivamo *diedarska površ* a označavamo je $\alpha\beta$.

Definicija 2.13.2. Neka su A i B dve tačke koje ne pripadaju diedarskoj površi $\alpha\beta$. Ako postoji poligonalna linija koja spaja tačke A i B i koja sa diedarskom površi $\alpha\beta$ nema zajedničkih tačaka, tada kažemo da su tačke A, B *sa iste strane diedarske površi* $\alpha\beta$, a ako takva linija ne postoji tada su tačke A i B *sa različitih strana diedarske površi* $\alpha\beta$. Kao i u svim prethodnim slučajevima koristićemo iste oznake relacija sa iste strane i sa raznih strana diedarske površi.

Teorema 2.13.1. *Relacija* $\ddot{-}\,\alpha\beta$ *je relacija ekvivalencije.*

Ova teorema dokazuje se analogno odgovarajućoj teoremi vezanoj za ugao.

Definicija 2.13.3. Skup svih tačaka prostora koje se nalaze sa iste strane diedarske površi $\alpha\beta$ nazivamo *otvorenim diedrom.* Ako tačkama diedarske površi $\alpha\beta$ dodamo otvoren diedar, dobijamo *zatvoren diedar.* U oba slučaja diedarska površ je granica ili međa diedra, poluravni α i β nazivamo pljosnima tog diedra a zajedničku granicu s ivicom diedra.

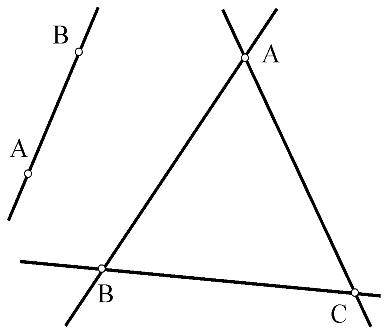
Teorema 2.13.2. *Svaka diedarska površ prostora razlaže skup ostalih tačaka prostora na dva otvorena diedra.*

Ova teorema dokazuje se analogno odgovarajućoj teoremi vezanoj za ugao.

2.14 Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora sa izvesnim skupovima tačaka

Teorema 2.14.1. *Ako su A i B dve razne tačke neke prave l tada je prava l identična sa skupom l' koji se sastoji od tačaka A i B i svih tačaka X koje zadovoljavaju neku od triju relacija: $\mathcal{B}(A,X,B)$, $\mathcal{B}(X,A,B)$, $\mathcal{B}(A,B,X)$.*

Dokaz. Sledi direktno iz aksiome II1 i teoreme 2.5.1. □



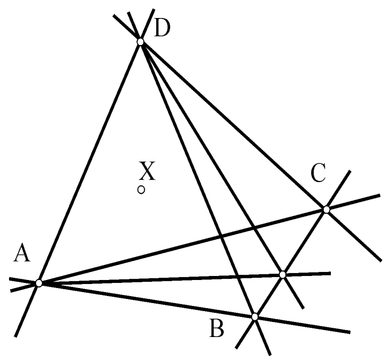
Slika 2.8.

Takođe nije teško dokazati i sledeće teoreme

Teorema 2.14.2. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni π tada je ravan π identična sa skupom π' svih tačaka X koje zadovoljavaju bar jednu od relacija: $X \in l(B,C)$, $X \in l(C,A)$, $X \in l(A,B)$, $\mathcal{B}(B,AX,C)$, $\mathcal{B}(C,BX,A)$, $\mathcal{B}(A,CX,B)$ (slika 2.8).*

Napomena. $l(B,C)$ je oznaka za pravu određenu tačkama B i C a oznaka $\mathcal{B}(B,AX,C)$ znači da su tačke B i C sa raznih strana prave AX.

Teorema 2.14.3. *Ako su A,B,C,D četiri nekomplanarne tačke, tada je skup S svih tačaka prostora identičan sa skupom S' svih tačaka X koje zadovoljavaju bar jednu od relacija: $X \in \pi(B,C,D)$, $X \in \pi(C,D,A)$, $X \in \pi(D,A,B)$, $X \in \pi(A,B,C)$, $\mathcal{B}(B,ADX,C)$, $\mathcal{B}(C,BDX,A)$, $\mathcal{B}(A,CDX,B)$, $\mathcal{B}(A,BCX,D)$, $\mathcal{B}(B,CAX,D)$, $\mathcal{B}(C,ABX,D)$ (slika 2.9).*



Slika 2.9.

Napomena. Oznaka $X \in \pi(B, C, D)$ znači da tačka X pripada ravni određenoj tačkama B, C, D a oznaka $\mathcal{B}(B, ADX, C)$ znači da se tačke B i C nalaze sa raznih strana ravni $\pi(A, D, X)$.

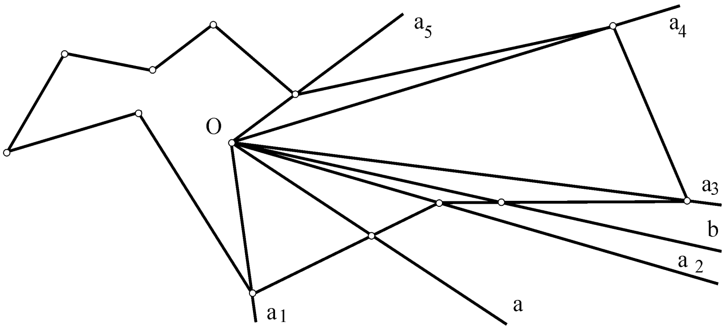
2.15 Jednostruko povezane poligonske površi

Definiciju poligonske površi izvešćemo uz prethodno uvođenje pomoćnih relacija: "tačka u prostom ravnom poligonu" i "tačka van prostog ravnog poligona".

Teorema 2.15.1. *Neka je dat prost ravan poligon p i neka je O tačka u njegovoj ravni koja nije na poligonu p i a, b par polupravih u ravni tog poligona, koje imaju za kraj tačku O i koje ne sadrže ni jedno teme poligona p. Ako pri tome poluprava a ima sa poligonom p neparan broj zajedničkih tačaka tada i poluprava b ima neparan broj zajedničkih tačaka sa poligonom p. Ako poluprava a ima sa poligonom p nula ili paran broj zajedničkih tačaka tada i poluprava b ima sa poligonom p nula ili paran zajedničkih tačaka.*

Dokaz. Označimo sa $k(a)$ broj presečnih tačaka poluprave a sa poligonom p a sa $k(b)$ broj presečnih tačaka poluprave b sa piligonom p. Da bi dokazali teoremu dovoljno je dokazati da je razlika $k(a) - k(b)$ nula ili paran broj, tj. da je $k(a) \equiv k(b)\ (mod\ 2)$.

Konstruišimo sve poluprave (slika 2.10) koje polaze iz tačke O i sadrže respektivno temena poligona p. Neke od tih polupravih mogu se i poklopiti. U tom slučaju takve poluprave smatraćemo jednom polupravom. Ako poligon p ima n temena onda onda je ukupan broj polupravih sa početkom u tački

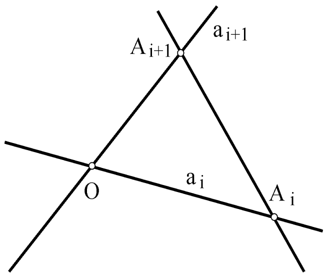


Slika 2.10.

O jednak m pri čemu je $m \leqslant n$. Označimo sa $a_1, a_2, \ldots, a_m$ te poluprave pri čemu je uveden takav poredak da je $a_2 \subset \measuredangle(a_1, a_3)$, $a_3 \subset \measuredangle(a_2, a_4), \ldots$

Naime, ovih m polupravih razlažu ravan π na m otvorenih uglova, pri tome između svake dve uzastopne poluprave nema temena, već samo stranica poligona p.

Neka je pri tome a_1 poluprava, takva da je $a \subset \measuredangle(a_1, a_2)$. U tom slučaju može se dogoditi da je i $b \subset \measuredangle(a_1, a_2)$ ili je b u nekom drugom od uglova (slika 2.11) $\measuredangle(a_i, a_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

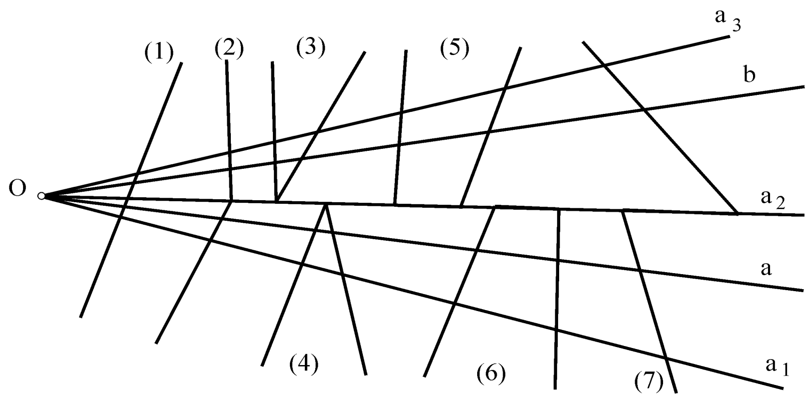


Slika 2.11.

Ako je poluprava $b \subset \measuredangle(a_1, a_2)$ u kome je i polupra a neposredno sledi da ako a seče neku stranicu poligona p, tada i b seče tu stranicu poligona p i obrnuto. U tom slučaju je $k(a) = k(b)$ tj. $k(a) - k(b) = 0$.

Ako poluprava b nije u uglu $\measuredangle(a_1, a_2)$ već naprimer u uglu $\measuredangle(a_2, a_3)$, mogu nastupiti sledeći slučajevi:

(1) Neka stranica poligona (slika 2.12) seče sva tri kraka a_1, a_2, a_3. Tada ona seče obe poluprave a i b.



Slika 2.12.

(2) Neka jedna stranica (slika 2.12) ima za kraj tačku koja je na a_2 a njoj susedna stranica polazi iz te tačke i nalazi se sa druge strane prave određene sa a_2. Tada a seče tu stranicu a b seče njoj susednu pa je za taj slučaj $k(a) = k(b)$, tj. $k(a) - k(b) = 0$.

(3) Neka obe susedne stranice poligona (slika 2.12) imaju za kraj tačku na polupravoj a_2 i neka se obe nalaze sa iste strane poluprave a_2 npr. tamo gde je poluprava a. Tada one obe seku a i ne seku b. Analogno u slučaju (4) one obe seku b a ne seku a. I u slučaju (3) i (4) razlika je paran broj.

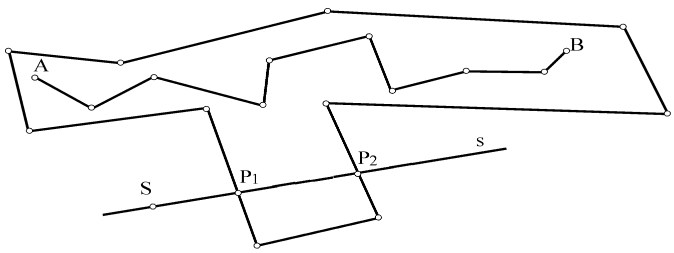
(5) Jedna od stranica poligona (slika 2.12) može pripadati polupravoj a_2. U tom slučaju mogu nastupiti situacije (5), (6) i (7). U svim ovim slučajevima je $k(a) - k(b)$ paran broj ili nula. Ako se b ne nalazi u $\measuredangle(a_2, a_3)$ nego u nekom od sledećih uglova, tada se dokaz izvodi indukcijom i zaključuje da je $k(a) - k(b)$ paran broj ili nula. Odavde zaključujemo da ako je $k(a)$ neparan broj tada je i $k(b)$ neparan broj, a ako je $k(a)$ paran broj ili nula tada je i $k(b)$ paran broj ili nula. $\square$

Definicija 2.15.1. Neka je p prost ravan poligon i O tačka u njegovoj ravni koja ne pripada poligonu p. Ako postoji poluprava a koja se nalazi u ravni poligona p, ne sadrži ni jedno njegovo teme i ima sa p neparan broj zajedničkih tačaka, tada kažemo da je tačka O *unutar poligona p*. Ako takva poluprava ne postoji kažemo da je tačka O *izvan poligona p*.

Definicija 2.15.2. Neka je p prost ravan poligon. Skup tačaka ravni tog poligona koje se nalaze u tom poligonu nazivamo *otvorenom poligonskom površi*. Temena i stranice poligona nazivamo temenima i stranicama poligonske površi. Otvorenu poligonsku površ označavamo sa (p). Skup svih tačaka otvorene poligonske površi (p) i tačaka koje se nalaze na poligonu p nazivamo *zatvorenom poligonskom površi* i označavamo je sa $[p]$. Poligon p je granica ili rub poligonske površi.

Nije teško ustanoviti da se bilo koje dve tačke poligonske površi mogu spojiti poligonalnom linijom koja cela pripada unutrašnjosti razmatrane poligonske površi.

Teorema 2.15.2. *Svaka prava s u ravni prostog ravnog poligona p koja ne sadrži ni jedno teme tog poligona, ima sa tim poligonom paran broj zajedničkih tačaka.*

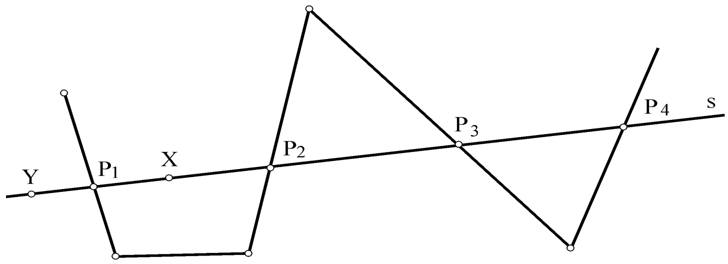


Slika 2.13.

Dokaz. Neka je S proizvoljna tačka prave s (slika 2.13) koja ne pripada poligonu p. Prema ranije navedenoj teoremi o razlaganju prave tačka S razlaže pravu s na dve poluprave s_1 i s_2. Prema dokazanoj teoremi, ako poluprava s_1 ima sa poligonom p neparan broj zajedničkih tačaka, tada isto važi i za polupravu s_2, a ako poluprava s_1 ima paran broj zajedničkih tačaka sa poligonom p ili ih nema tada i poluprava s_2 ima sa poligonom p paran broj zajedničkih tačaka ili ih nema. Budući da su s_1 i s_2 disjunktni skupovi tačaka, ukupan broj presečnih tačaka prave s i poligona p iznosi $k(s_1) + k(s_2)$, pa $k(s)$ mora biti paran. $\square$

Teorema 2.15.3. (Žordanova teorema - osnovna teorema o razlaganju ravni nekim prostim ravnim poligonom): *Svaki prost ravan poligon neke ravni π razlaže skup ostalih tačaka te ravni na dva podskupa, od kojih je jedan otvorena poligonska površ, a drugi predstavlja spoljašnjost poligonske površi.*

Dokaz. Neka je p prost ravan poligon i neka je s proizvoljna prava koja ima sa poligonom p zajedničkih tačaka i ne sadrži ni jedno teme poligona p. Prema prethodnoj teoremi prava s ima sa poligonom p paran broj presečnih tačaka (slika 2.14) koje možemo označiti $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ pri čemu je $\mathcal{B}(P_1, P_2, \ldots, P_{2n})$. Neka je X proizvoljna tačka između P_1 i P_2 a Y tačka prave s koja je iza P_1 u odnosu na P_2, tj. važi $\mathcal{B}(Y, P_1, X, P_2)$.



Slika 2.14.

Tada X razlaže pravu s na dve poluprave. Bilo koju od njih, recimo onu koja sadrži $P_2, P_3, \ldots, P_{2n}$ obeležimo sa s_1. Tačka Y ralaže pravu s na dve poluprave. Neka je s_2 ona od njih koja sadrži tačke $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$. Kako tačka X ne pripada poligonu p i pripada onoj polupravoj koja sa poligonom p ima neparan broj zajednjičkih tačaka, tačka X je unutar poligona p. Kako je tačka Y u ravni poligona p i postoji poluprava s_2 sa početkom u Y koja sa poligonom p ima paran broj zajedničkih tačaka, tačka Y je van poligona p. Iz ovoga sledi da unutrašnjost i spoljašnjost poligona p nusu prazni skupovi. Da bi smo pokazali da poligon p razlaže skup svih ostalih tačaka njegove ravni na unutrašnjost i spoljašnjost poligona p dovoljno je ustanoviti sledeća dva svojstva:

(1) unutrašnjost i spoljašnjost poligona p nemaju zajedničkih tačaka,

(2) svaka tačka ravni tog poligona koja ne pripada tom poligonu pripada ili spoljašnjosti ili unutrašnjosti tog poligona.

(1) Prvi slučaj dokazuje se indirektno. Ako bi u unutrašnjosti i spoljašnjosti postojala neka zajednička tačka M, tada bi tačka M kao unutrašnja tačka predstavljala kraj neke poluprave a koja sa poligonom p ima neparan broj zajedničkih tačaka. S druge strane tačka M kao spoljašnja tačka poligona bila bi kraj neke poluprave b koja bi sa poligonom p imala paran broj ili nula zajedničkih tačaka. U tom slučaju iz tačke M ravni poligona p postoje dve poluprave koje ne sadrže ni jedno teme poligona p pri čemu jedna od njih ima sa poligonom p neparan a druga paran broj ili nula zajedničkih tačaka što je nemoguće.

(2) Drugo svojstvo dokazuje se neposredno. Ako bi M bila tačka ravni poligona p koja ne pripada poligonu p i ako je a poluprava koja se nalazi u

ravni tog poligona i ne sadrži ni jedno teme tog poligona tada poluprava a sa poligonom p ili ima neparan broj zajedničkih tačaka ili nula zajedničkih tačaka te je tačka M ili na poligonu ili van poligona ili unutar poligona čime je teorema dokazana. □

Takođe važi

Teorema 2.15.4. *Ako je p prost ravan poligon i l poligonalna linija čiji se krajevi nalaze na tom poligonu a sve ostale tačke u tom poligonu p tada ova poligonalna linija l razlaže poligonsku površ ograničenu poligonom p na dve poligonske površi.*

Napomena. Ova teorema primenjuje se na razlaganje poligonske površi koje je neophodno pri takozvanoj triangulaciji poligonske površi tj. razbijanju poligona na trouglove (trougaone poligonske površi).

Kao što smo videli ranije poligoni se mogu podeliti na proste i složene. U skladu sa ovim možemo i dijagonale poligona podeliti na proste i složene.

Definicija 2.15.3. Kažemo da je dijagonala poligona *prosta*, ako sa tim poligonom nema zajedničkih tačaka. U protivnom je dijagonala poligona *složena*. Prosta dijagonala može biti unutrašnja ili spoljašnja.

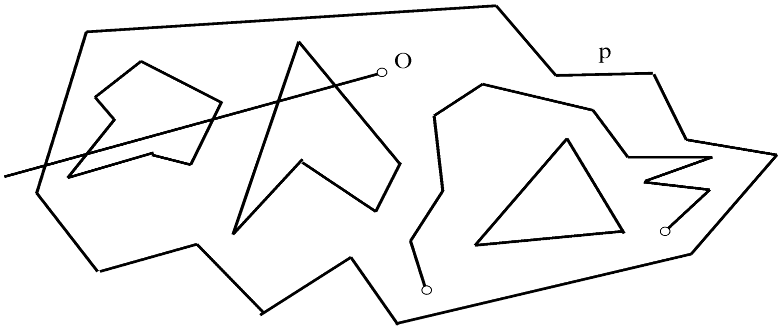
Definicija 2.15.4. Prosta dijagonala poligona p je *unutrašnja* ako su sve njene tačke sem krajnjih unutar tog poligona. Prosta dijagonala poligona je *spoljašnja* ako su sve njene tačke izvan poligona p osim njenih krajnjih tačaka.

Teorema 2.15.5. *Svaka poligonska površ može se unutrašnjim dijagonalama razložiti na trougaone površi.*

Dokaz ove teoreme zasniva se na prethodnoj teoremi.

2.16 Višestruko povezane poligonske površi

Sem poligonskih površi koje smo do sada razmatrali, a to su bile jednostruko povezane poligonske površi, u geometriji se razmatraju i višestruko povezane poligonske površi.



Slika 2.15.

Definicija 2.16.1. Neka je dat prost ravan poligon p i neka je $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ konačan skup poligona (slika 2.15) koji se nalaze u poligonu p, koji međusobom nemaju zajedničkih tačaka, a svaki od njih se nalazi izvan ostalih. Poligonsku površ koja se dobija kada se od otvorene poligonske površi p oduzmu zatvorene poligonske površi $[p_1], [p_2], \ldots, [p_k]$ nazivamo $(k+1)-$*struko povezanom* otvorenom poligonskom površi. Ako se ovom skupu tačaka dodaju tačke poligona p_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, i tačke poligona p dobijamo zatvorenu $(k+1)-$struko povezanu površ.

Nije teško dokazati sledeće teoreme:

Teorema 2.16.1. *Ako je tačka O unutar $(k+1)-$struko povezane otvorene poligonske površi i ako je a poluprava koja ima za kraj tačku O i ne sadrži ni jedno teme poligona, onda poluprava a ima sa rubom te površi neparan broj zajedničkih tačaka.*

Teorema 2.16.2. *Ma koje dve tačke u prostoj $(k+1)$-struko povezanoj poligonskoj površi uvek se mogu spojiti jednom poligonalnom linijom koja pripada toj poligonskoj površi.*

Teorema 2.16.3. *Ma koje dve tačke izvan* $(k+1)-$*struko povezane poligonske površi mogu se spojiti poligonalnom linijom* l*, takvom da nema zajedničkih tačaka sa poligonom* p*, tj.* $l \cap p = \emptyset$*, ili je broj presečnih tačaka paran.*

Teorema 2.16.4. *Ako su* P *i* Q *dve tačke u ravni* $(k+1)-$*struko povezane poligonske pvrši i* P *unutar a* Q *van nje, onda svaka poligonalna linija koja spaja tačke* P *i* Q *a pripada ravni tog poligona ima neparan broj zajedničkih tačaka sa rubom te poligonske površi a ako sadrži deo stranice onda ima beskonačno mnogo zajedničkih tačaka.*

2.17 Rogljaste površi i rogljevi

Definicija 2.17.1. Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ konačan niz međusobom različitih polupravih sa zajedničkim početkom u tački O, od kojih nikoje tri uzastopne nisu komplanarne, onda skup koji se sastoji od tačke O, svih polupravih $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i svih otvorenih uglova $\measuredangle(a_1, a_2)$, $\measuredangle(a_2, a_3)$, $\ldots$, $\measuredangle(a_{n-1}, a_n)$ nazivamo *otvorenom rogljastom površi.* Tačku O nazivamo vrhom ili temenom, poluprave $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ivicama a uglove $\measuredangle(a_1, a_2)$, $\measuredangle(a_2, a_3)$, $\ldots$, $\measuredangle(a_{n-1}, a_n)$ ivičnim uglovima ili pljosnima te rogljaste površi. Ivice a_1 i a_n nazivamo krajnjim a ostale unutrašnjim ivicama. Ako navedenom skupu tačaka dodamo i tačke ugla $\measuredangle(a_n, a_1)$ dobijamo *zatvorenu rogljastu površ* koju nazivamo kraće rogljasta površ.

Rogljasta površ može da bude prosta i složena.

Definicija 2.17.2. Rogljasta površ je *prosta* ako nikoje dve pljosni nemaju zajedničkih tačaka sem što imaju zajedničko teme i što susedne pljosni imaju zajedničke ivice. U protivnom rogljasta površ je *složena.*

Razlikujemo i jednostrane i višestrane rogljaste površi.

Definicija 2.17.3. Rogljasta površ je *jednostrana* ako postoji ravan koja sadrži njeno teme dok se sve ostale tačke te površi nalaze sa iste strane te ravni. Ako takva ravan ne postoji rogljastu površ nazivamo *višestranom.*

Definicija 2.17.4. Dve tačke su *sa iste strane proste rogljaste površi* ako postoji poligonalna linija u prostoru koja spaja te dve tačke i nema sa rogljastom površi zajedničkih tačaka. U protivnom su *sa raznih strana rogljaste površi.* Pomenute relacije označavamo kao i u prethodnim slučajevima.

Definicija 2.17.5. Skup svih tačaka koje su sa iste strane proste rogljaste površi nazivamo *rogalj.*

Analogno odgovarajućim teoremama iz prethodnih slučajeva dokazuje se i sledeća

Teorema 2.17.1. (Žordanova teorema) *Svaka prosta zatvorena rogljasta površ prostora razlaže skup ostalih tačaka prostora na dva otvorena podskupa.*

Svaki od dva pomenuta podskupa predstavlja rogalj. Samu rogljastu površ nazivamo granicom ili međom svakog od tih rogljeva.

Definicija 2.17.6. Svaki neprazan podskup prostora S^n zovemo *geometrijskim likom* ili *figurom.*

Definicija 2.17.7. *Geometrijska figura* Φ *je konveksna ako za proizvoljne tačke* A *i* B *figure* Φ *cela duž* AB *pripada figuri* Φ.

Definicija 2.17.8. Neka je data prostorna figura Φ i neka ravan π. Ravan π je *ravan oslonca figure* Φ ako ima sa njom zajedničkih tačaka, pri čemu su sve ostale tačke figure Φ sa iste strane ravni π.

Lako se dokazuje sledeća teorema

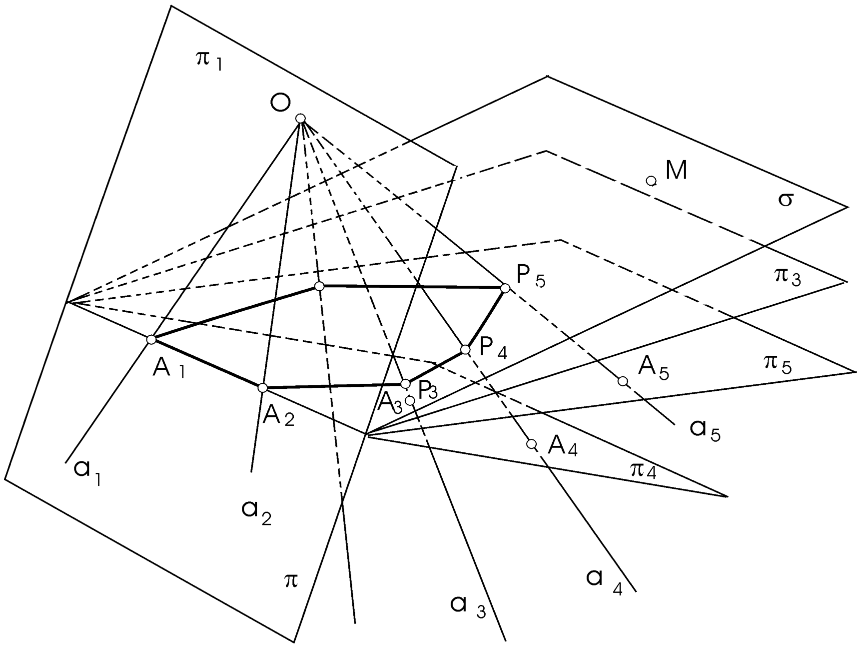
Teorema 2.17.2. *Ako je kod nekog* n*-tostranog roglja ravan određena bilo kojom pljosni tog roglja ravan oslonca tog roglja, tada je taj rogalj konveksan.*

Definicija 2.17.9. Rogljasta površ je *konveksna* ako predstavlja granicu nekog konveksnog roglja.

Napomena. Konveksnost $(n-1)$-dimenzione figure u n dimenzionom prostoru se definiše na taj način što se posmatra konveksnost n-dimenzione figure čiju među predstavlja razmatrana $(n-1)$-dimenziona figura.

Teorema 2.17.3. *Svaki konveksan rogalj može se preseći izvesnom ravni tako da presek bude konveksna poligonalna površ.*

Dokaz. Neka je $Oa_1a_2\dots a_n$ (slika 2.16) konveksan rogalj. Dokažimo da postoji ravan σ koja ga seče po konveksnoj poligonalnoj površi. Neka su A_1 i A_2 bilo koje dve tačke na ivicama a_1 i a_2. Prava $l(A_1, A_2)$ razlaže ravan pljosni (a_1, a_2) na dve poluravni. Označimo sa π ravan te pljosni a sa π_1

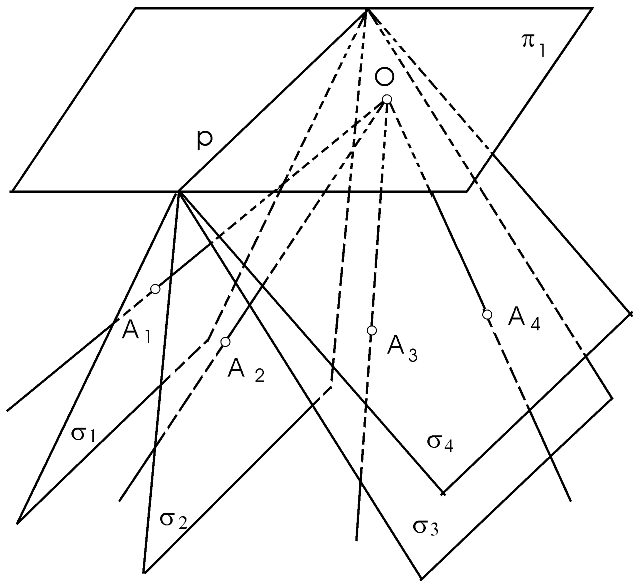


Slika 2.16.

poluravan kojoj je rub prava $l(A_1, A_2)$ i koja sadrži tačku O. Neka su zatim $A_3, A_4, \ldots, A_n$ proizvoljne tačke redom ivica $a_3, \ldots, a_n$.

Označimo sa $\pi_3, \ldots, \pi_n$ poluravni koje imaju za granicu pravu $l(A_1, A_2)$ i sadrže redom tačke $A_3, A_4 \ldots, A_n$. Poluravni $\pi_3, \pi_4, \ldots, \pi_n$ nalaze se sa iste strane ravni π jer je rogalj konveksan, te sa poluravni π_1 zaklapaju konveksne diedre. Obeležimo te diedre sa $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_n$. Svi ovi diedri imaju zajedničku pljosan π_1 i nalaze se sa iste strane ravni π pa u tom skupu diedara postoji diedar koji je sadržan u svim ostalim diedrima tog skupa. Neka je to diedar Φ_k. Neka je M proizvoljna tačka unutar diedra Φ_k i neka je σ ravan koja sadrži tačku M i pravu $l(A_1, A_2)$. Tačke $A_3, A_4, \ldots, A_n$ nalaze se sa one strane ravni σ sa koje nije tačka O, te poluprave koje sadrže duži OA_3, OA_4,...,OA_n tj. ivice a_3, $a_4, \ldots, a_n$ prodiru ravan σ u tačkama P_3, $P_4 \ldots P_n$. Na taj način ravan σ seče pljosni (a_1, a_2), (a_2, a_3),...,(a_n, a_1) po dužima A_1A_2, A_2P_3, P_3P_4,...,P_nA_1, a ceo rogalj $O_{a_1a_2\ldots a_n}$ po poligonskoj površi $A_1A_2P_3P_4 \ldots P_n$. Kako je rogalj $O_{a_1a_2\ldots a_n}$ konveksan i ravan σ konveksan lik to je i njihov presek, tj. poligonska površ $A_1A_2P_3 \ldots P_n$ konveksan lik. □

Teorema 2.17.4. *Ako je data jednostrana, konveksna rogljasta površ, tada postoji ravan koja seče sve ivice te rogljaste površi.*



Slika 2.17.

Dokaz. Postoji ravan π koja sadrži tačku O (slika 2.17) a sve ostale tačke te rogljste površi nalaze se sa iste strane ravni π. Uočimo proizvoljnu pravu p u ravni π i proizvoljne tačke A_1, A_2,…,A_n na ivicama rogljaste površi. Obeležimo sa π_1 poluravan kojoj je međa prava p i koja sadrži tačku O. Označimo sa σ_1, σ_2,…,σ_n poluravni sa zajedničkom granicom p koje sadrže redom tačke A_1, A_2,…,A_n. Sve te tačke su sa iste strane ravni π, te poluravni σ_1, σ_2,…,σ_n sa poluravni π_1 zahvataju konveksne diedre Φ_1, $\Phi_2 \ldots, \Phi_n$. Ostatak teoreme dokazuje se analogno prethodnoj teoremi. □

Glava 3

Geometrija poliedara

3.1 Poliedarske površi. Poliedri

Da bismo definisali pojam poliedarske površi potrebno je najpre definisati pojam lanca poligonskih površi.

Definicija 3.1.1. Dat je niz poligonskih površi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, pri čemu su svake dve uzastopne površi ω_1, ω_2; ω_2, ω_3; $\ldots$; ω_{n-1}, ω_n susedne poligonske površi tj. imaju jednu zajedničku stranicu. U tom slučaju ovakav niz poligonskih površi obrazuje *lanac poligonskih površi.* Za poligonske površi ω_1, ω_n kažemo da su vezane lancem poligonskih površi $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$, ako $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ formiraju lanac poligonskih površi.

Definicija 3.1.2. Skup poligonskih površi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ je *jednostruko povezan*, ako se svake dve poligonske površi iz tog skupa mogu povezati lancem poligonskih površi koji je sastavljen iz poligonskih površi tog skupa.

Definicija 3.1.3. Povezan skup poligonskih površi nazivamo *poliedarskom površi*, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:
(1) Svaka duž na stranici neke od poligonskih površi datog skupa može da pripada rubu još samo jedne poligonske površi iz tog skupa.
(2) Svake dve susedne poligonske površi iz tog skupa pripadaju dvema raznim ravnima.

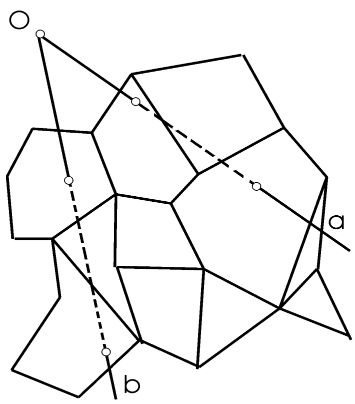
Definicija 3.1.4. Skup svih tačaka poliedarske površi ω, koje se nalaze na graniciama njenih pljosni i koje pripadaju granici samo jedne poligonske površi iz tog skupa, nazivamo *rubom* te površi.

Definicija 3.1.5. Poliedarsku površ koja ima rub nazivamo *otvorenom poliedarskom površi*, a poliedarsku površ koja nema rub, *zatvorenom poliedarskom površi.* Poligonske površi od kojih je sastavljena jedna poliedarska površ nazivamo pljosnima poliedarske površi. Stranice tih poligonskih površi nazivamo ivicama poliedarske površi, a temena tih poligonskih površi temenima poliedarske površi.

Poliedarske površi mogu biti proste i složene.

Definicija 3.1.6. Ako nikoje dve pljosni poliedarske površi nemaju zajedničkih tačaka sem što susedne imaju zajedničku ivicu i pljosni koje se sustiču u istom temenu imaju zajedničko to teme, poliedarsku površ nazivamo *prostom poliedarskom površi.* U protivnom nazivamo je *složenom poliedarskom površi.*

Teorema 3.1.1. *Neka je ω prosta zatvorena poliedarska površ, O tačka koja ne pripada toj površi i a i b par polupravih koje imaju zajednički kraj O, ne seku ni jednu ivicu niti sadrže neko teme poliedarske površi ω. Tada, ako poluprava a ima neparan broj zajedničkih tačaka sa poliedarskom površi ω, tada i poluprava b ima sa površi ω neparan broj zajedničkih tačaka. Inače, ako poluprava a ima sa poliedarskom površi ω nula ili paran broj zajedničkih tačaka, tada i poluprava b ima sa poliedarskom površi ω nula ili paran broj zajedničkih tačaka.*



Slika 3.1.

Dokaz. Označimo sa π ravan određenu polupravama a i b. Ako su a i b na jednoj pravoj p onda označimo sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu p (slika 3.1). Mogu nastupiti dva slučaja:

(1) Ravan π ne sadrži ni jedno teme poliedarske površi ω. Tada ravan π seče površ ω po konačnom broju poligona. Označimo ih sa $p_1, \ldots, p_s$. Oni nemaju zajedničkih tačaka međusobom jer ravan π ne sadrži ni jedno teme poliedarske površi ω. Pri tome se tačka O nalazi u izvesnom broju poligona, recimo $p_1, \ldots, p_m$ i van poligona $p_{m+1} \ldots, p_s$. Označimo sa $k(a)$ ukupan broj presečnih tačaka poluprave a sa poligonima $p_1, \ldots, p_s$ tj. sa poligonalnom površi ω a sa $k(b)$ ukupan broj presečnih tačaka poluprave b sa poligonima $p_1, \ldots, p_s$, tj. sa površi ω. Kako je tačka O u poligonima $p_1, \ldots, p_m$ poluprave a i b imaju sa tim poligonima neparan broj zajedničkih tačaka te će $k(a)$ i $k(b)$ biti istovremeno neparni ili istovremeno parni u zavisnosti od toga da li je m paran ili neparan broj.

Kako je tačka O izvan svakog od poligona $p_{m+1}, \ldots, p_s$, poluprave a i b imaju sa svakim od njih po nula ili paran broj zajedničkih tačaka, pa će ukupan broj presečnih tačaka polupravih a i b sa poligonima $p_{m+1}, \ldots, p_s$ biti nula ili paran.

Prema tome brojevi $k(a)$ i $k(b)$ biće istovremeno ili oba neparna ili oba parna ili nule. Prema tome važi $k(a) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$.

(2) Ravan π sadrži neko teme površi ω. Tada postoji poluprava c sa krajem u tački O takva da ravni određene polupravama a, c i b, c ne sadrže ni jedno teme površi ω. Prema dokazanom delu (1) imamo $k(c) \equiv k(a)\,(mod\ 2)$ i $k(c) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$ odakle je $k(a) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$. □

Ova teorema omogućuje definisanje pojma poliedra.

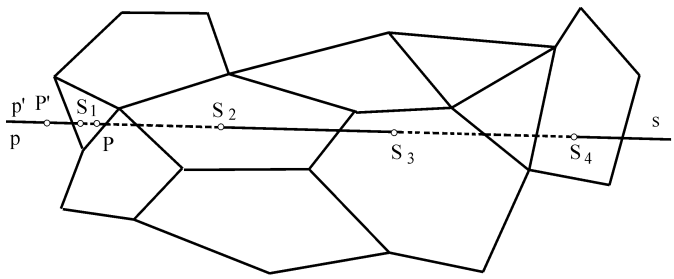
Definicija 3.1.7. Neka je ω prosta zatvorena poligonalna površ i O tačka prostora koja ne pripada toj površi. Ako pri tome postoji poluprava a sa krajem u tački O koja ne sadrži ni jedno teme površi ω i ne seče ni jednu njenu ivicu a ima sa površi ω neparan broj zajedničkih tačaka, kažemo da je tačka O *unutar površi* ω. U suprotnom, ako takva poluprava ne postoji, tačka O je *izvan površi* ω.

Definicija 3.1.8. Neka je ω prosta zatvorena poliedarska površ. Skup svih tačaka prostora koje se nalaze unutar površi ω nazivamo *unutrašnjost* ili *otvoreni poliedar* a označavamo ga (ω). Skup svih tačaka otvorenog poliedra (ω) i tačaka površi ω nazivamo *zatvorenim* jednostruko povezanim poliedrom i označavamo ga $[\omega]$. Površ ω predstavlja granicu ili među svakog od poliedara (ω) i $[\omega]$.

Teorema 3.1.2. *Svaka prava koja ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu proste zatvorene poliedarske površi ω ima sa tom poliedarskom površi nula ili paran broj zajedničkih tačaka.*

Dokaz. Neka je s prava koja ne sadrži ni jedno teme poliedarske površi ω i neka je S tačka prave s koja nije na površi ω. Prema poznatoj teoremi tačka S razlaže skup svih ostalih tačaka prave S na dve poluprave s_1 i s_2. Saglasno prethodnoj teoremi ako poluprava s_1 ima sa površi ω neparan broj zajedničkih tačaka to isto važi i za polupravu s_2. Inače, ako poluprava s_1 ima sa površi ω nula ili paran broj zajedničkih tačaka isto važi i za polupravu s_2. Kako su s_1 i s_2 disjunktne biće $k(s) = k(s_1) + k(s_2)$. Kako je $k(s_1) \equiv k(s_2)\ (mod\, 2)$ to $k(s)$ mora biti paran broj ili nula. $\square$

Teorema 3.1.3. (Žordanova teorema o poliedrima) *Svaka prosta zatvorena poliedarska površ ω razlaže skup ostalih tačaka prostora na dva podskupa od kojih je jedan unutrašnjost a drugi spoljašnjost površi ω.*



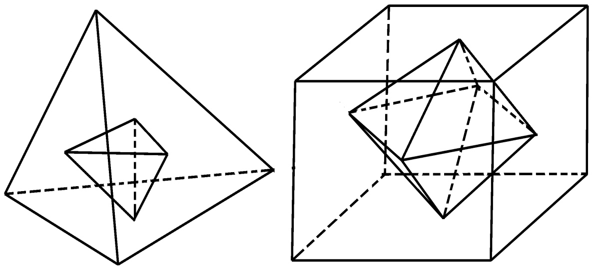
Slika 3.2.

Dokaz. Neka je s prava (slika 3.2) koja ima sa površi ω zajedničkih tačaka, ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu. Prema prethodnoj teoremi prava s ima sa površi ω paran broj zajedničkih tačaka. Označimo ih $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$ tako da važi $\mathcal{B}(S_1, S_2, \ldots, S_{2k})$. Neka je P proizvoljna tačka takva da je $\mathcal{B}(S_1, P, S_2)$ a P' tačka takva da je $\mathcal{B}(P', S_1, P)$. Tačkom P prava s razložena je na dve poluprave. Neka je p ona od njih koja sadrži tačku S_1. U tom slučaju poluprava p ima sa površi ω samo jednu zajedničku tačku S_1 te je tačka P unutar površi ω. Tačka P' takođe razlaže pravu s na dve poluprave. Neka je p' ona od njih koja pripada polupravoj p. Na osnovu rečenog poluprava p' nema zajedničkih tačaka sa površi ω, pa je tačka P' izvan površi ω. Ovim je pokazano da unutrašnjost (ω) i spoljašnjost $(\overline{\omega})$ površi ω nisu prazni skupovi tačaka. Da bi smo dokazali da površ ω razlaže skup svih ostalih tačaka prostora na skupove (ω) i $(\overline{\omega})$ dovoljno je ustanoviti sledeće:

(1) $(\omega) \cap (\overline{\omega}) = \emptyset$,

(2) $\omega \cup (\omega) \cup (\overline{\omega}) = S^3$.

(1) Dokaz izvodimo indirektnim putem. Neka je $O \in (\omega) \cap (\overline{\omega})$ i neka je a proizvoljna poluprava sa početkom u tački O koja ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu površi ω. Kako je tačka O unutar površi ω tj $O \in (\omega)$ to poluprava a ima sa površi ω neparan broj zajedničkih tačaka. S druge strane $O \in (\overline{\omega})$ tj. pripada spoljašnjosti površi ω pa poluprava a i površ ω imaju nula ili paran broj zajedničkih tačaka, što je nemoguće pa je $(\omega) \cap (\overline{\omega}) = \emptyset$.



Slika 3.3.

(2) Dokaz izvodimo neposredno. Ako je O proizvoljna tačka prostora koja ne pripada površi ω i a proizvoljna poluprava sa krajem u tački O koja ne sadrži ni jedno teme površi ω i ne seče ni jednu ivicu te površi tada poluprava a ima sa površi ω ili neparan broj zajedničkih tačaka ili nula ili paran broj zajedničkih tačaka, tj. $O \in (\omega)$ ili $O \in (\overline{\omega})$. $\square$

3.2 Topološke osobine poliedara

U geometriji poliedara mogu se razlikovati dve vrste osobina poliedara i to topološke i metričke. Topološke osobine se mogu izvesti iz aksioma incidencije i poretka dok se metrička svojstva mogu posmatrati tek posle uvođenja aksioma podudarnosti. Prilikom proučavanja topoloških osobina poliedara uvode se pomoćne relacije i to:

(1) relacija incidentnosti temena, ivica i pljosni poliedara,

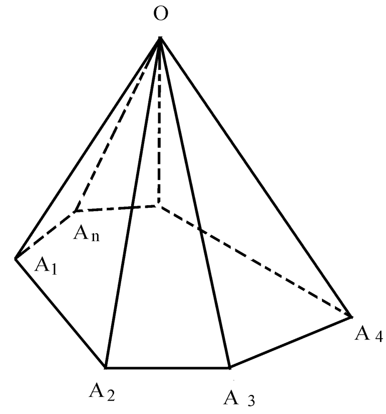
(2) relacija izomorfnosti i

(3) relacija dualnosti dva poliedra.

Definicija 3.2.1. Kod nekog poliedra su *incidentni*:

(1) jedno teme i jedna ivica ako se to teme poklapa sa jednim krajem ivice,

(2) jedno teme i jedna pljosan ako se to teme poklapa sa jednim temenom te pljosni,



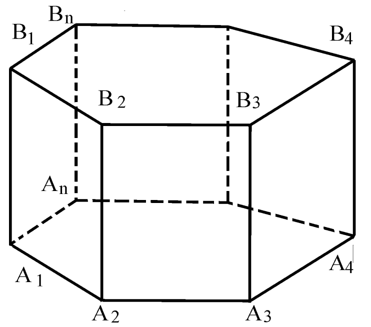
Slika 3.4. *n-tostrana piramida ima ukupno $n+1$ teme, $2n$ ivica i $n+1$ pljosan.*

(3) jedna ivica i jedna pljosan ako se ta ivica poklapa sa jednom stranicom te pljosni.

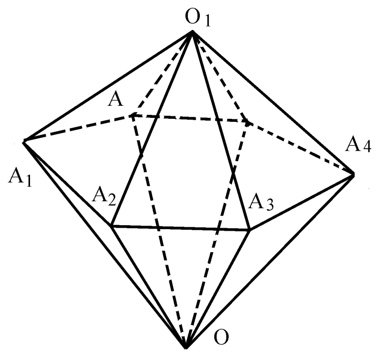
Definicija 3.2.2. Dva poliedra F i F' nazivamo *izomorfnim* ako između temena, ivica i pljosni poliedra F i temena, ivica i pljosni poliedra F' postoji takav bijektivni odnos u kome incidentnim temenima, ivicama i pljosnima poliedra F odgovaraju respektivno incidentna temena, ivice i pljosni poliedra F'.

Neposredno možemo zaključiti da je relacija izomorfnosti poliedara relacija ekvivalencije. Stoga se skup svih poliedara prostora S^3 može razvrstati u klase ekvivalencije koje su sastavljene od uzajamno izomorfnih poliedara prostora S^3. Takvih klasa ekvivalencije ima beskonačno mnogo. Osobine koje su zajedničke za sve poliedre iz iste klase, nazivamo topološkim osobinama proizvoljnog poliedra iz razmatrane klase. Znači, bilo koji poliedar iz neke klase može poslužiti kao predstavnik svoje klase u pogledu topoloških osobina. Osim toga proučavanje topoloških osobina u okviru jedne klase poliedara omogućava upoznavanje topoloških osobina poliedara iz dualne klase.

Definicija 3.2.3. Dva poliedra F i F' nazivamo *dualnim* (slika 3.3) ako između temena, ivica i pljosni poliedra F i pljosni, ivica i temena poliedra F' postoji bijektivan odnos u kome incidentnim temenima, ivicama i pljosnima poliedra F odgovaraju redom incidentne pljosni, ivice i temena poliedra F'.



Slika 3.5. *n-tostrana kombinatorna prizma ima ukupno $2n$ temena, $3n$ ivica i $n+2$ pljosni.*

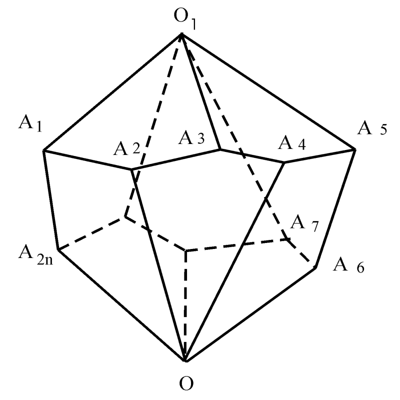


Slika 3.6. *n-tostrana bipiramida ima $n+2$ temena, $3n$ ivica i $2n$ pljosni. Lako je uočiti da su n-tostrana bipiramida i n-tostrana kombinatorna prizma poliedri dualni međusobom.*

Neposredno iz definicije zaključujemo da je relacija dualnosti poliedara antirefleksivna, simetrična i netranzitivna.

Definicija 3.2.4. *n-tostranom piramidom* (slika 3.4) nazivamo poliedar ograničen sa $n+1$ pljosni od kojih je jedna n-tostrana a sve ostale trougaone. Pomenuta n-tougaona pljosan je osnova, a sve ostale bočne strane piramide. Ivice na rubu osnove su osnovne ivice a sve ostale su bočne ivice. Temena osnove su osnovna a preostalo teme je vrh piramide.

Definicija 3.2.5. *Topološkom ili kombinatornom n-tostranom prizmom* (slika 3.5) nazivamo poliedar ograničen sa $n+2$ pljosni, od kojih su dve n-tostrane $A_1A_2\dots A_n$ i $B_1B_2\dots B_n$, a svaka od ostalih n pljosni je četvorougaona. n-tostrane pljosni su osnovne pljosni ili osnove a astale su bočne.

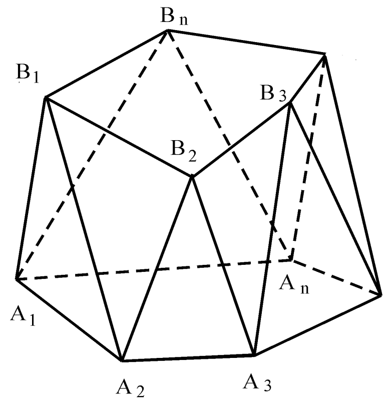


Slika 3.7. *n-tostrana antibipiramida ima $2n+2$ temena, $4n$ ivica i $2n$ pljosni.*

Definicija 3.2.6. *n-tostranom bipiramidom* (slika 3.6) nazivamo poliedar ograničen sa $2n$ trougaonih pljosni koje čine uniju bočnih pljosni dveju piramida sa zajedničkom osnovom $A_1A_2\ldots A_n$. Temena $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazivamo osnovnim a preostala dva temena O i O_1 su vrhovi te bipiramide. Stranice poligona $A_1A_2\ldots A_n$ su osnovne ivice dok su ostale ivice bočne.

Definicija 3.2.7. *n-tostranom antibipiramidom* (slika 3.7) nazivamo poliedar ograničen sa $2n$ četvorouglova, od kojih n ima zajedničko teme O a ostalih n zajedničko teme O_1. Temena O i O_1 predstavljaju vrhove, a ostala temena su osnovna temena antibipiramide. Ivice koje spajaju osnovna temena nazivamo osnovnim, a ostale bočnim ivicama.

Definicija 3.2.8. *Topološkom* ili *kombinatornom antiprizmom* (slika 3.8) nazivamo poliedar ograničen sa $2n+2$ pljosni od kojih su dve n-tougaone $A_1A_2\ldots A_n$ i $B_1B_2\ldots B_n$, a ostale pljosni su trougaone i raspoređene su tako da se u svakom temenu pomenutih n-tougaonih pljosni sustiču još po tri trougaone pljosni. Pljosni $A_1A_2\ldots A_n$ i $B_1B_2\ldots B_n$ su osnovne a ostale pljosni su bočne. Ivice koje se nalaze na rubovima osnovnih pljosni su osnovne a ostale su bočne.



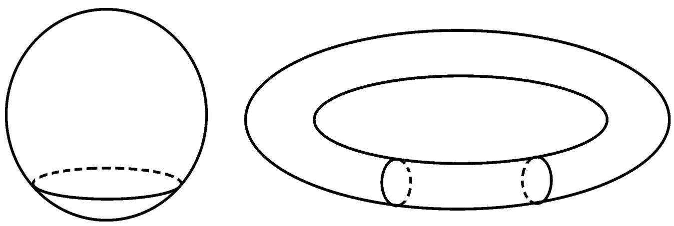
Slika 3.8. *n-tostrana kombinatorna antiprizma ima ukupno $2n$ temena, $4n$ ivica i $2n+2$ pljosni. n-tostrana antibipiramida i n-tostrana kombinatorna antiprizma predstavljaju međusobom dualne poliedre.*

3.3 Topološki pravilni poliedri

Definicija 3.3.1. Prost poligon kome su stranice ivice nekog poliedra tj. poliedarske površi nazivamo *povratnom linijom* te poliedarske površi.

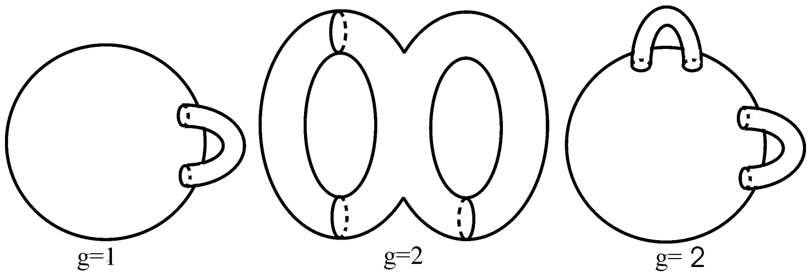
Povratna linija može, ali ne mora, da razlaže površ dotičnog poliedra na dva dela.

Definicija 3.3.2. Maksimalan broj povratnih linija neke poliedarske površi koje međusobom nemaju zajedničkih tačaka i koje ne razlažu tu poliedarsku površ na dva ili više delova nazivamo *rodom* te poliedarske površi.



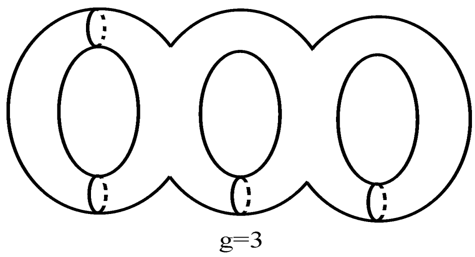
Slika 3.9.

Definicija 3.3.3. Dve površi su *homeomorfne* ako između njih postoji bijektivno i bikontinualno (neprekidno u oba smera) preslikavanje.



Slika 3.10.

Sfera ima za povratnu liniju neki krug (slika 3.9) i on razlaže površ sfere na dva dela. Znači sfera je površ nultog roda, tj. $g = 0$. Torus takođe ima za povratnu liniju neki krug ali taj presek ne razlaže torus na dva dela. Ako konstruišemo bilo koji drugi povratni presek bez zajedničkih tačaka sa prvim, onda će površ sfere sa ta dva povratna preseka biti razložena na dva dela. Znači torus može imati najviše jednu (slika 3.9) povratnu liniju koja ga ne razlaže pa je torus površ prvog roda, tj. za torus je $g = 1$. Generisanje površi proizvoljnog roda n možemo izvršiti (slika 3.10, 3.11) "slepljivanjem" n torusa ili konstrukcijom sfere sa n ručki.



Slika 3.11.

Za svaku ovako dobijenu površ može se konstruisati homeomorfna poliedarska površ. To znači da poliedarske površi mogu biti proizvoljnog roda $g = 1, 2, \ldots$ Posebno su interesantne poliedarske površi nultog roda tj. poliedarske površi homeomorfne sa sferom.

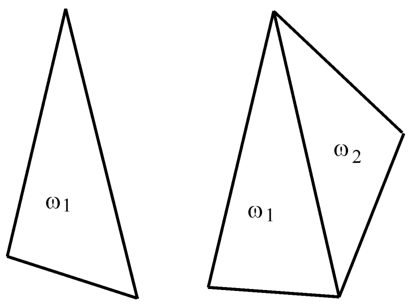
Teorema 3.3.1. (Ojlerova teorema za poliedarske površi nultog roda) *Ukupan broj temena t i pljosni p bilo koje poliedarske površi nultog roda za dva je veći od broja njegovih ivica, tj.*

$$t + p = i + 2$$

Definicija 3.3.4. *Karakteristikom poliedarske površi* ω koja ima t temena, i ivica i p pljosni zovemo broj $z(\omega) = t + p - i$.

Prema tome prethodna teorema se može preformulusati u

Teorema 3.3.2. *Karakteristika proizvoljne poliedarske površi ω nultog roda je $z(\omega) = 2$.*

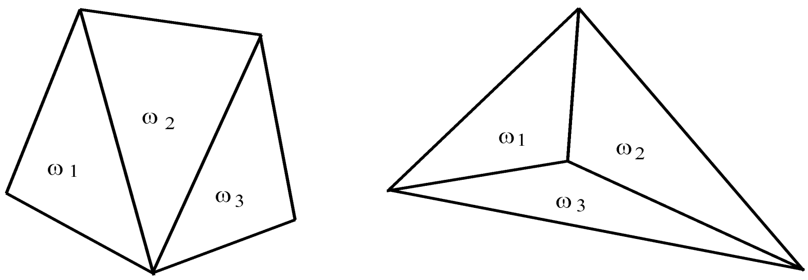


Slika 3.12.

Dokaz. Nije teško ustanoviti sledeće: ako bilo koju pljosan površi ω razložimo nekom unutrašnjom dijagonalom na dve površi i ako te dobijene površi smatramo pljosnima poliedarske površi ω, karakteristika te površi se ne menja. Zaista, docrtavanjem jedne dijagonale broj ivica se povećava za jedan i broj strana se povećava takođe za jedan, dok broj temena ostaje nepromenjen. Znači i karakteristika $z(\omega)$ ostaje nepromenjena. Ova osobina omogućava triangulaciju poliedarske površi ω tj. razlaganje svih pljosni koje nisu trougaone unutrašnjim dijagonalama na trougaone površi i smatrajući dobijene dijagonale ivicama, a dobijene trougaone površi pljosnima nove površi, karakteristika $z(\omega)$ ostaje nepromenjena. Pretpostavimo da smo sve pljosni poliedarske površi razložili na trouglove i označimo te trouglove redom sa $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Konstruišimo površ ω' koja se podudara sa površi ω polazeći od prve od navedenih površi ω_1 i dodajući joj redom susedne površi. Na taj način dobijamo niz poliedarskih pvrši $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Za prvu površ $\sigma_1 = \omega_1$ je $z(\sigma_1) = z(\omega_1) = 1$.

Dodavanjem površi ω_2 (slika 3.12) dobijamo površ σ_2. Znači $\sigma_2 = \omega_1 \cup \omega_2$ pa se t povećalo za 1, i povećalo za 2 a p povećalo za 1 pa karakteristika ostaje nepromenjena, tj. $z(\sigma_2) = 1$.

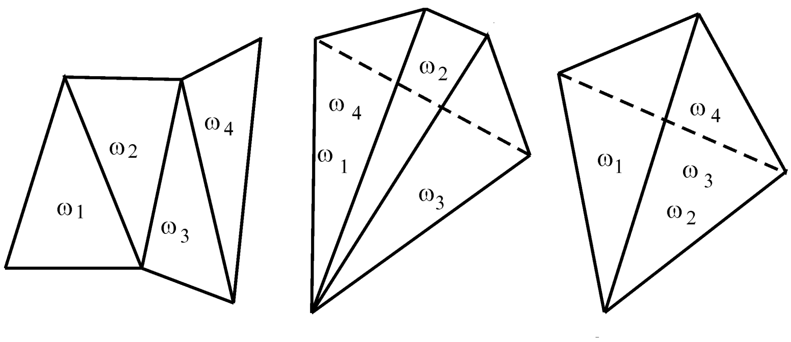
Površi σ_2 dodajmo površ ω_3. Ovo možemo učiniti na dva načina (Slika 3.13).



Slika 3.13.

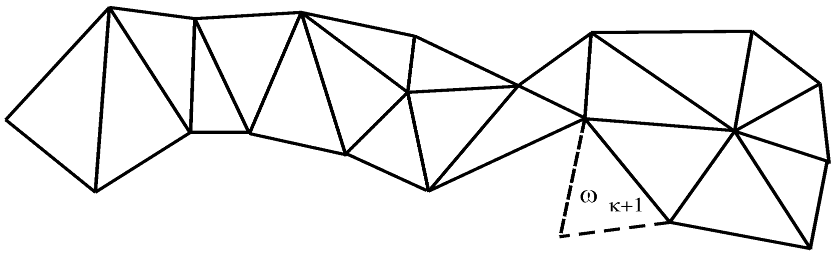
U prvom slučaju se t povećava za 1, i povećava za 2 i p povećava za 1 pa je $z(\sigma_3) = z(\sigma_2) = 1$. U drugom sučaju t ostaje nepromenjeno, i se povećava za 1 i p se povećava za 1, pa i u ovom slučaju karakteristika ostaje nepromenjena, tj. $z(\sigma_3) = 1$.

Površi σ_3 dodajmo površ ω_4. Ovo se može izvesti na tri načina (slika 3.14):



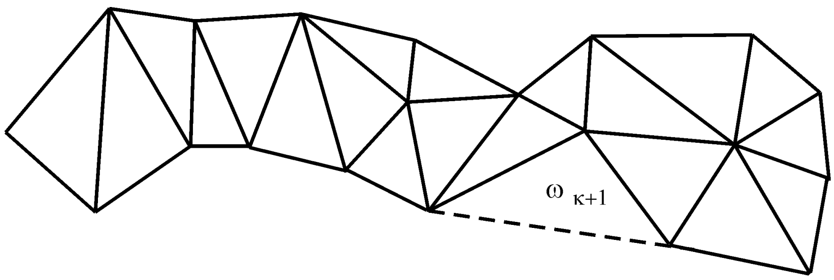
Slika 3.14.

U prvom slučaju se t povećava za jedan, i se povećava za dva i p se povećava za jedan pa je $z(\sigma_4) = 1$. U drugom slučaju se t nije izmenilo, a i i p se povećavaju za jedan pa je $z(\sigma_4) = 1$. U trećem slučaju t i i se nisu izmenili a p se povećalo za jedan pa je $z(\sigma_4) = 2$. U ovom slučaju dodavanjem ω_4 zatvorili smo tetraedar. Na taj način teorema je dokazana ako smo zatvorili tetraedar za $n = 4$. Pretpostavimo da nismo zatvorili poliedarsku površ. Nastavljajući postupak dobija se neka površ σ_k pri čemu je određeno $z(\sigma_k)$. Razmotrimo slučaj kada površi σ_k dodajemo površ ω_{k+1} pri čemu se dobija površ σ_{k+1}. Mogu nastupiti četiri slučaja.



Slika 3.15.

(1) U prvom slučaju t se povećalo za jedan, i se povećalo za dva i p se povećalo za jedan (slika 3.15) pa je $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k)$.



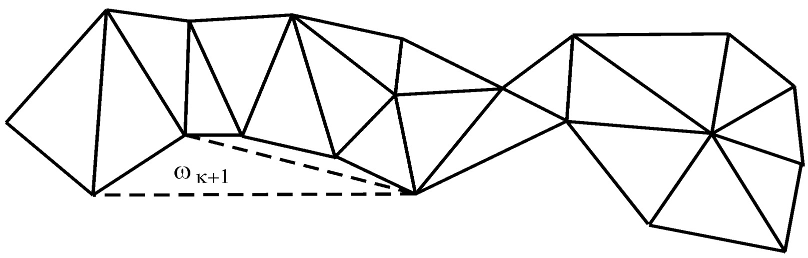
Slika 3.16.

(2) U drugom slučaju t ostaje isto, i se povećalo za jedan i p se povećalo za jedan (slika 3.16) pa je $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k)$.

(3) U trećem slučaju i se povećalo za dva, t ostaje isto, p se povećalo za jedan (slika 3.17) pa imamo $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k) - 1$.

(4) U četvrtom slučaju t ostaje isto, i ostaje isto a p se povećalo za jedan (slika 3.18). Tada je $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k) + 1$.

Iz ove četiri mogućnosti zaključujemo:

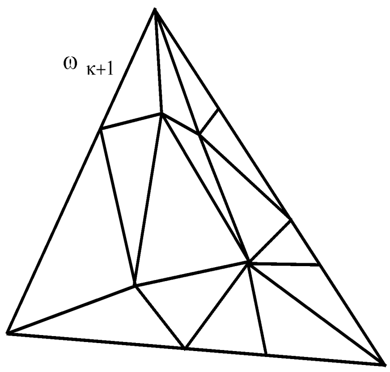


Slika 3.17.

(i) kada se dodavanjem površi ω_{k+1} broj poligona na rubu dobijene površi ne menja tj. u prva dva slučaja karakteristika površi se ne menja.

(ii) Kada se dodavanjem površi ω_{k+1} broj poligona na rubu poliedarske površi povećava za jedan karaktreristika se smanjuje za jedam i obratno, ako se broj poligona na rubu smanjuje za jedan onda se karakteristika povećava za jedan.

Nastavljajući ovaj postupak, pre nego što dodamo površ ω_n imaćemo poliedarsku površ σ_{n-1}, kod koje je broj poligona iz kojih se sastoji njen rub jednak jedan. Tada na osnovu izloženog možemo zaključiti da je karakteristika površi σ_{n-1} jednaka jedan. Dodavanjem poslednjeg poligona ω_n nestaje i taj jedan poligon na rubu pa je kao u slučaju (4) $z(\sigma_n) = z(\sigma_{n-1}) + 1$, tj. $z(\omega) = 2$. □



Slika 3.18.

Napomena. U dokazu se nigde eksplicitno ne koristi da je površ ω nultog roda te bi se moglo poverovati da isto tvrđenje važi i za površi koje nisu nultog roda. Međutim pri dodavanju površi ω_{k+1} u slučaju (3) uveli smo pretpostavku da teme površi ω_{k+1} mora biti na rubu istog poligona gde je stranica trougaone površi. To teme ne može biti na rubu nekog drugog poligona te površi jer je površ ω nultog roda.

Definicija 3.3.5. Poliedar Φ prostora S^3 je *topološki pravilan* ako:
(1) sve pljosni poliedra imaju jednak broj stranica,
(2) u svakom temenu poliedra sustiče se jednak broj ivica.

Za označavanje topološki pravilnih poliedara koristićemo oznaku $\{p, q\}$ pri čemu p označava broj ivica pljosni poliedra a q broj ivica poliedra koje se sustiču u istom temenu.

Teorema 3.3.3. *Postoji pet i samo pet različitih vrsta topološki pravilnih poliedara.*

Dokaz. Neka je Φ poliedar sa t temena, i ivica i p pljosni. Neka je dalje m broj strana svake pljosni a n broj ivica koje se sustiču u jednom temenu poliedra Φ. Prema Ojlerovoj teoremi je $t + p - i = 2$. Svaka ivica poliedra je zajednička stranica dveju susednih pljosni poliedra pa važi $mp = 2i$, tj $p = \frac{2i}{m}$. Dalje svaka ivica poliedra spaja dva razna temena tog poliedra pa je $nt = 2i$, tj $t = \frac{2i}{n}$. Ako vrednosti za p i t zamenimo u Ojlerovu formulu dobijamo

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{i} + \frac{1}{2}.$$

Odavde zaključujemo da mora biti $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Odavde sledi da je bar jedan od brojeva $\frac{1}{m}$ i $\frac{1}{n}$ veći od $\frac{1}{4}$. Znači bar jedan od brojeva m i n će biti jednak 3, tj. bar jedan je manji od 4. Brojevi m i n ne mogu biti manji od tri jer označavaju broj stranica i broj ivica poliedra. Prema tome jedina rešenja nejednačine $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ su uređeni parovi $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$. To znači da postoji tačno pet različitih vrsta topološki pravilnih poliedara.

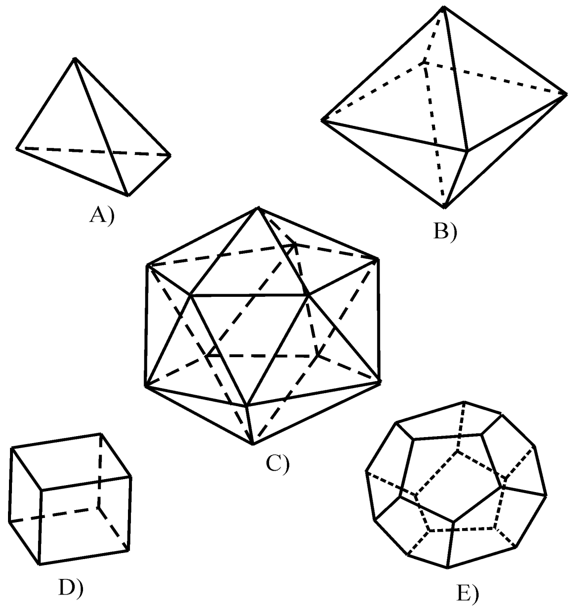
(1) Ako je $m = 3$, $n = 3$ tada je $t = 4$, $i = 6$, $p = 4$ (slika 3.19 A). Takav poliedar naziva se tetraedar.

(2) Ako je $m = 3$, $n = 4$ tada je $t = 6$, $i = 12$, $p = 8$ (slika 3.19 B). Takav poliedar naziva se oktaedar.

(3) Ako je $m = 3$, $n = 5$ tada je $t = 12$, $i = 30$, $p = 20$ (slika 3.19 C). Takav poliedar naziva se ikosaedar.

(4) Ako je $m = 4$, $n = 3$ tada je $t = 8$, $i = 12$, $p = 6$ (slika 3.19 D). Takav poliedar naziva se heksaedar.

(5) Ako je $m = 5$, $n = 3$ tada je $t = 12$, $i = 30$, $p = 12$ (slika 3.19 E). Takav poliedar naziva se dodekaedar.



Slika 3.19. *Topološki pravilni poliedri: A) Tetraedar; B) Oktaedar; C) Ikosaedar; D) Heksaedar; E) Dodekaedar*

Brojevi t, i, p određeni su iz relacija $t+p=i+2$, $mp=2i$, $nt=2i$. $\square$

Pod poliedrom dualnim datom poliedru možemo smatrati poliedar kome su temenima prethodnog dodeljene pljosni dualnog a svakoj pljosni dualnog teme prethodnog. Na taj način dualan poliedru $\{p,q\}$ biće poliedar $\{q,p\}$. Prema tome, tetraedar je dualan sam sebi; oktaedar i heksadar su dualni a takođe ikosaedar i dodekaedar.

Glava 4

Podudarnost

Još je Euklid u svojim Elementima pretpostavio da su dva geometrijska lika podudarna ako se kretanjem mogu dovesti do poklapanja. Peano u svom delu Načela geometrije je pojam kretanja prihvatio kao jedan od osnovnih pojmova geometrije. Paš, Veroneze a zatim i Hilbert su u svojim radovima pošli od podudarnosti kao nedefinisane relacije, a uveli su je odgovarajućim aksiomama. Dok Paš i Veroneze usvajaju samo podudarnost duži kao osnovnu relaciju a podudarnost uglova definišu, Hilbert i podudarnost duži i podudarnost uglova uvodi aksiomama. Mi ćemo ovde aksiomama uvesti podudarnost parova tačaka umesto podudarnosti duži i uglova.[1]

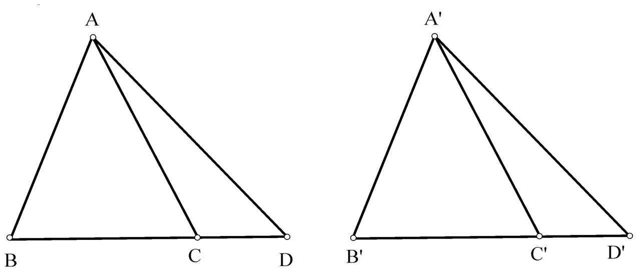
4.1 Aksiome podudarnosti i njihove prve posledice

Relaciju podudarnosti parova tačaka prostora S^3 (koju označavamo: $(A,B) \cong (C,D)$ ili $\mathcal{C}(A,B;C,D)$) karakteriše sledeća grupa aksioma:

III1 *Za svake dve tačke* $A, B \in S^3$ *je* $(A,A) \cong (B,B)$.
III2 *Za svake dve tačke* $A, B \in S^3$ *je* $(A,B) \cong (B,A)$.
III3 *Ako su* $A, B, C, D, E, F \in S^3$ *takve da je* $(A,B) \cong (C,D)$ *i* $(A,B) \cong (E,F)$ *tada je* $(C,D) \cong (E,F)$.
III4 *Ako su* C *i* C' *tačke otvorenih duži* (AB) *i* $(A'B')$ *redom, takve da je* $(A,C) \cong (A',C')$ *i* $(B,C) \cong (B',C')$, *tada je* $(A,B) \cong (A',B')$.
III5 *Ako su* A *i* B *dve razne tačke i ako je* A' *kraj neke poluprave* p, *tada na polupravoj* p *postoji tačka* B' *takva da je* $(A,B) \cong (A',B')$.
III6 *Ako su* A, B, C *tri nekolinearne tačke i* A', B' *dve razne tačke ruba neke poluravni* π' *takve da je* $(A',B') \cong (A,B)$, *tada u poluravni* π' *postoji tačno*

[1] To je način na koji je uvedena podudarnost u Osnovama geometrije Borsuka i Šmielove.

jedna tačka C' takva da je $(A,C) \cong (A',C')$ i $(B,C) \cong (B',C')$.
III7 *Ako su A,B,C i A',B',C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' (slika 4.1) tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$, $(C,A) \cong (C',A')$ i $(B,D) \cong (B',D')$ tada je $(A,D) \cong (A',D')$.*



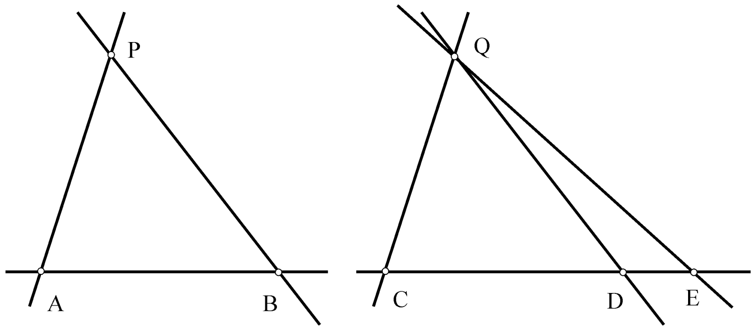
Slika 4.1.

Teorema 4.1.1. *Relacija podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. (i) *Refleksivnost.* Neka su A i B dve razne tačke. Prema Aksiomi III2 imamo da je $(B,A) \cong (A,B)$ i $(B,A) \cong (A,B)$ odakle je prema Aksiomi III3 $(A,B) \cong (A,B)$, tj. relacija podudarnosti parova tačaka je refleksivna.
(ii) *Simetričnost.* Neka je $(A,B) \cong (C,D)$. Kako je još $(A,B) \cong (A,B)$ prema Aksiomi III3 sledi da je $(C,D) \cong (A,B)$, tj. relacija je simetrična.
(iii) *Tranzitivnost.* Neka je $(A,B) \cong (C,D)$ i $(C,D) \cong (E,F)$. Tada je $(C,D) \cong (A,B)$ i $(C,D) \cong (E,F)$, odakle prema Aksiomi III3 sledi $(A,B) \cong (E,F)$, tj. relacija podudarnosti parova tačaka je i tranzitivna relacija. □

Teorema 4.1.2. *Ako su A i B dve razne tačke i C kraj neke poluprave p tada na polupravoj p postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A,B) \cong (C,D)$.*

Dokaz. Egzistenciju tačke D omogućava Aksioma III5. Prema tome dovoljno je dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da na polupravoj p postoji još jedna tačka E, različita od D, takva da je $(A,B) \cong (C,E)$. Neka je P (slika 4.2) proizvoljna tačka koja ne pripada pravoj AB. Tada na osnovu Aksiome III6 u jednoj od poluravni sa rubom CD postoji jedinstvena tačka Q takva da je $(A,P) \cong (C,Q)$ i $(B,P) \cong (D,Q)$, pa na osnovu Aksiome III7 imamo $(B,P) \cong (E,Q)$. Dakle, A,B,P su tri nekolinearne tačke a C i Q tačke na rubu poluravni (CQD) takve da je $(A,B) \cong (C,D)$, $(B,P) \cong (D,Q)$ i $(A,B) \cong (C,E)$, $(B,P) \cong (E,Q)$, sto je u suprotnosti sa Aksiomom III6. □

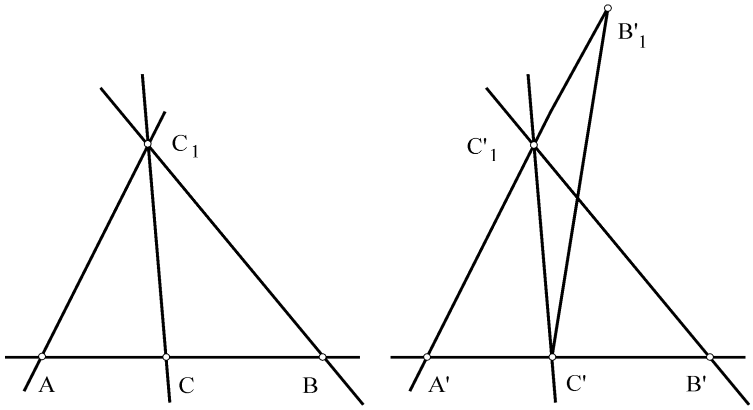


Slika 4.2.

Teorema 4.1.3. (Osnovna teorema o podudarnosti parova tačaka) *Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave l i A', B' tačke neke prave l' takve da je $(A, B) \cong (A', B')$ tada postoji jedna i samo jedna tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$, pri tome tačka C' pripada pravoj l'. Osim toga, poretku tačaka A, B, C na pravoj l odgovara analogan paredak tačaka A', B', C' na pravoj l'.*

Dokaz. Neka važi raspored tačaka $\mathcal{B}(A, C, B)$. Pokazaćemo najpre egzistenciju tačke C'. Na polupravoj $A'B'$ poštoje tačke C' i B'' takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B'', C')$. Prema Aksiomi III4 sledi da je $(A, B) \cong (A', B'')$. Primenom prethodne teoreme sledi da je $B'' \equiv B'$. Prema tome, dokazali smo da postoji tačka C' takva da je $\mathcal{B}(A', C', B')$, $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$. Dokažimo sada jedinstvenost tačke C'. Neka je C'_1 (slika 4.3) tačka koja zadovoljava iste uslove kao i tačka C'. Ako je tačka C'_1 na pravoj l' tada na osnovu prethodne teoreme sledi da je $\mathcal{B}(C'_1, A', C')$ a kako je još $\mathcal{B}(A', C', B')$, tačke C' i C'_1 bi pripadale istoj polupravoj $B'A'$ pri čemu je $(B, C) \cong (B', C')$ i $(B, C) \cong (B', C'_1)$, što je ponovo u suprotnosti sa prethodnom teoremom.

Neka je sada tačka C'_1 van prave l'. Tada prema Aksiomi III6 u jednoj od poluravni čiji je rub prava l postoji tačka C_1 takva da je $(A, C_1) \cong (A', C'_1)$ i $(B, C_1) \cong (B', C'_1)$. Primenom Aksiome III7 zaključujemo $(C_1, C) \cong (C'_1, C')$. Ako je $B'_1 \in A'C'_1$ takva da je $\mathcal{B}(A', C'_1, B'_1)$ i $(C', B') \cong (C'_1, B'_1)$ onda prema aksiomi III7 imamo $(C', B'_1) \cong (C'_1, B')$. U tom slučaju biće tačke B, C, C_1 nekolinearne a tačke C' i C'_1 na rubu neke poluravni π koja sadrži tačke B' i B'_1 pri čemu je $(C, C_1) \cong (C', C'_1)$. U tom slučaju bi u poluravni π postojale dve razne tačke B' i B'_1 takve da je $(C, B) \cong (C', B')$ i $(C_1, B) \cong (C'_1, B')$, $(C, B) \cong (C'_1, B'_1)$ i $(C_1, B) \cong (C', B'_1)$, što je prema



Slika 4.3.

Aksiomi III6 nemoguće. Slučajevi $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,A,C)$ razmatraju se analogno. □

U odnosu na relaciju podudarnosti parova tačaka možemo da uvedemo i nešto šire definisanu relaciju koja će se odnositi na uredjene trojke, četvorke, …, n-torke tačaka. Činjenicu da je $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$ i $(A,C) \cong (A',C')$ označavaćemo $(A,B,C) \cong (A',B',C')$. Analogno tome možemo definisati relaciju podudarnosti uređenih n-torki:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \cong (A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$$

ako za svako $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ važi $(A_i, A_j) \cong (A'_i, A'_j)$.

4.2 Izometrijske transformacije prostora $\mathbf{S^n}$ $(\mathbf{n = 1, 2, 3})$

Definicija 4.2.1. Bijektivno preslikavanje $\mathcal{I} : S^n \to S^n$ nazivamo *izometrijskom transformacijom* prostora S^n $(n = 1, 2, 3)$ ako za proizvoljne dve tačke A i B prostora S^n važi

$$(A, B) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)).$$

Teorema 4.2.1. *Identično preslikavanje (koincidencija, jedinično) $\varepsilon : S^n \to S^n$ $(n = 1, 2, 3)$ je izometrijska transformacija.*

Teorema 4.2.2. *Proizvod bilo koje dve izometrijske transformacaje prostora S^n je izometrijska transformacija prostora S^n.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}_1 : S^n \to S^n$ izometrijska tnansformacija koja tačke $A, B \in S^n$ preslikava redom u tačke $A_1, B_1 \in S^n$, pri čemu je $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ i neka je $\mathcal{I}_2 : S^n \to S^n$ izometrijska transformacija koja tačke $A_1, B_1 \in S^n$ preslikava redom u tačke $A_2, B_2 \in S^n$, pri čemu je $(A_1, B_1) \cong (A_2, B_2)$. U transformaciji $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ tačkama $A, B \in S^n$ odgovaraju redom tačke $A_2, B_2 \in S^n$, pri čemu je $(A, B) \cong (A_2, B_2)$. Kako je još proizvod dve bijekcije takodje bijekcija, sledi da je proizvod dve izometrijske transformacije prostora S^n takodje izometrijska transformacija prostora S^n. □

Teorema 4.2.3. *Inverzna transformacija izometrijske transformacije prostora S^n je takodje izometrijska transformacija tog prostora.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija prostora S^n koja tačke $A, B \in S^n$ preslikava redom u tačke $A_1, B_1 \in S^n$, pri čemu je $(A, B) \cong (A_1, B_1)$. U inverznoj transformaciji $\mathcal{I}^{-1}$ prostora S^n tačkama A_1 i $B_1 \in S^n$ odgovaraju tačke A i $B \in S^n$ pri čemu je $(A_1, B_1) \cong (A, B)$, a kako je još inverzno preslikavanje bijektivnog preslikavanja bijektivno sledi da je inverzna transformacija izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ takodje izometrijska transformacija. □

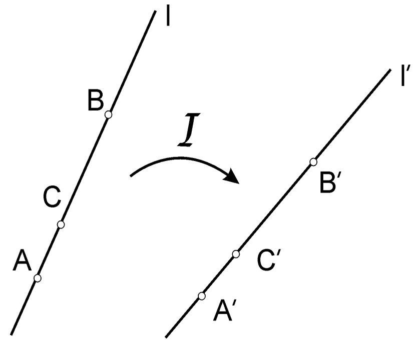
Teorema 4.2.4. (Osnovna teorema o izometrijskim transformacijama) *Skup svih izometrijskih transformacija prostora S^n predstavlja grupu.*

Dokaz. Budući da su izometrijske transformacije prostora S^n elementi grupe svih bijektivnih transformacija prostora S^n iz prethodnih teorema sledi da skup svih izometrijskih transformacija prostora S^n čini grupu. □

Definicija 4.2.2. Grupu ustanovljenu prethodnom teoremom nazivamo *grupom izometrijskih transformacija prostora S^n* i simbolički je označavamo $G(\mathcal{I})$.

Teorema 4.2.5. *Ako su A i B dve razne tačke neke prave l, A' i B' tačke neke prave l' takve da je $(A, B) \cong (A', B')$ tada postoji jedno i samo jedno izometrijsko preslikavanje $\mathcal{I} : l \to l'$ tako da tačkama A i B respektivno odgovaraju tačke A' i B'.*

Dokaz. Ako je C proizvoljlna tačka prave l (Slika 4.4.) u skladu sa jednom od ranije dokazanih teorema postoji tačno jedna tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$. Štaviše prema toj teoremi tačka C' pripada pravoj l'. Osim toga, poretku tačaka A, B, C na pravoj l odgovara



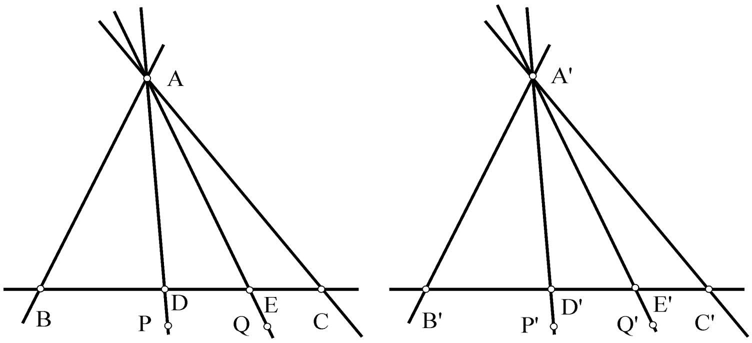
Slika 4.4.

analogni poredak tačaka A', B', C' na pravoj l'. Na taj način postoji preslikavanje $\mathcal{I}$ koje prevodi tačke prave l na tačke prave l'. Na potpuno isti način konstatuje se da je svaka tačka $C' \in l'$ slika neke tačke C sa prave l. Prema tome, postoji bijektivna funkcija $\mathcal{I} : l \to l'$ u kojoj tačkama A i B odgovaraju tačke A' i B', a svakoj tački C prave l odgovara tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$. Treba pokazati da je $\mathcal{I}$ izometrija. Obeležimo sa D bilo koju tačku na pravoj l a sa $D' = \mathcal{I}(D)$. U tom slučaju poretku tačaka A, B, C, D na pravoj l odgovara analogan poredak tačaka A', B', C', D' na pravoj l'. Štaviše $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ odakle je i $(C, D) \cong (C', D')$ pa je preslikavanjc $\mathcal{I}$ izometrija. $\square$

Posledica. Svaka izometrijska transformacija prave koja ima dve razne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju, tj. identičko preslikavanje.

Teorema 4.2.6. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni π i A', B', C' tri nekolinearne tačke neke ravni π' takve da je $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ tada postoji jedno i samo jedno izometrijsko preslikavanje $\mathcal{I} : \pi \to \pi'$ koje prevodi tačke A, B, C respektivno u tačke A', B', C'.*

Dokaz. Primenom prethodne teoreme zaključujemo da iz nekolinearnosti tačaka A, B, C sledi nekolinearnost tačaka A', B', C'. Ako je P (slika 4.5) proizvoljna tačka ravni π, tada tačka P pripada nekoj od pravih koje sadrže tačku A i neku tačku duži BC ili tačku C i neku tačku duži AB ili tačku B i neku tačku duži AC. Ne umanjujući opštost dokaza pretpostavimo da je zadovoljen prvi slučaj, tj. da je P tačka koja pripada pravoj koja sadrži tačku A i neku tačku duži BC, npr. tačku D. Analogni postupak možemo primeniti na ΔADC i tačku Q koja leži na pravoj koja sadrži tačku A i neku tačku E duži DC. Posmatrajmo trougao $\Delta A'B'C'$ i odgovarajuće tačke



Slika 4.5.

D',E', P', Q' koje respektivno odgovaraju u izometriji $\mathcal{I}$ tačkama D, E, P, Q. Primenjujući na pomenute trouglove ΔABC i ΔADC i njima odgovarajuće trouglove $\Delta A'B'C'$ i $\Delta A'D'C'$ aksiome podudarnosti, tj. Aksiomu III7 neposredno možemo zaključiti jedinstvenost izometrijske transformacije $\mathcal{I}$. $\square$

Posledica. Svaka izometrijska transformacija ravni π koja ima tri nekolinearne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju.

Teorema 4.2.7. *Ako su A, B, C, D i A', B', C', D' dve četvorke nekoplanarnih tačaka prostora S^3 takve da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ tada postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I} : S^3 \to S^3$ koja prevodi tačke A, B, C i D respetivno u tačke A', B', C', D'.*

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu prethodnih teorema.

Posledica. Svaka izometrijska transformacija prostora S^3 koja ima četiri nekoplanarne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju.

4.3 Podudarnost likova

Definicija 4.3.1. Kažemo da je lik Φ prostora S^n *podudaran* liku Φ' prostora S^n ako postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^n takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. Relaciju podudarnosti likova Φ i Φ' simbolički označavamo $\Phi \cong \Phi'$.

Teorema 4.3.1. *Relacija podudarnosti likova prostora S^n je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. (i) *Reflksivnost.* Kako je identična tarnsformacija ε prostora S^n izometrijska transformacija pri čemu svakom liku Φ prostora S^n odgovara taj isti lik Φ, tj. $\varepsilon(\Phi) = \Phi$ sledi da je $\Phi \cong \Phi'$.
(ii) *Simetričnost.* Neka su dati likovi Φ i Φ' prostora S^n, pri čemu je $\Phi \cong \Phi'$. Odatle sledi da postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. U tom slučaju postoji i inverzna transformacija $\mathcal{I}^{-1}$ koja lik Φ' prevodi u lik Φ pa zaključujemo da je $\Phi' \cong \Phi$.
(iii) *Tranzitivnost.* Neka je $\Phi \cong \Phi'$ i $\Phi' \cong \Phi''$ pri čemu su Φ, Φ', i Φ'' likovi prostora S^n. Tada postoji izometrijska transforrnacija $\mathcal{I}_1$ takva da je $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi'$ i transformacija $\mathcal{I}_2$ takva da je $\mathcal{I}_2(\Phi') = \Phi''$. Kompozicija $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ pevodi lik Φ u lik Φ'', a pošto je kompozicija izometrijskih transformacija takodje izometrijska transformacija zaključujemo da je $\Phi \cong \Phi'$. $\square$

Iz činjenice da je relacija podudarnosti likova relacija ekvivalencije zaključujemo da će njeno dejstvo na skupu geometrijskih likova prostora S^n dovesti do particije ovog skupa na odgovarajuće klase ekvivalencuje, pa tako možemo analizirati podskupove medjusobom podudarnih likova prostora S^n. Lako zaključujemo da pravoj odgovara prava, ravni ravan, n-dimenzionom prostoru n-dimenzioni prostor. Za razmatranje podudarnosti ostalih geometrijskih objekata kao osnova geometrijske teorije podudarnosti služiće dve osnovne relacije i to:

- relacija podudarnosti duži i
- relacija podudarnosti uglova.

4.4 Podudarnost duži i podudarnost uglova

Teorema 4.4.1. *Ako su A, B i A', B' dva para raznih tačaka takvih da je $(A, B) \cong (A', B')$ tada je $(AB) \cong (A'B')$.*

Dokaz. Obeležimo sa l pravu odredjenu tačkama A i B i sa l' pravu odredjenu tačkama A' i B'. Iz $(A, B) \cong (A', B')$ sledi da postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I} : l \to l'$ takva da je $\mathcal{I}(l) = l'$, $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$. Štaviše, prema ranije dokazanoj teoremi svakoj tački $X \in l$, takvoj da je $\mathcal{B}(A, X, B)$, odgovaraće tačka $X' \in l'$ takva da je $\mathcal{B}(A', X', B')$, tj. iz $X \in (AB)$ sledi $\mathcal{I}(X) \in (A'B')$. Analognim postupkom ustanovljuje se da će svaka tačka $X' \in (A'B')$ biti slika neke tačke $X \in (AB)$, te zaključujemo da u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ otvorenoj duži (AB) odgovara otvorena duž $(A'B')$. □

Analogna teorema važi za zatvorene, poluotvorene i poluzatvorene duži.

Definicija 4.4.1. Tačku O nazivamo *središtem duži* AB ako su zadovoljeni sledeći uslovi: (i) $O \in (AB)$, (ii) $(OA) \cong (OB)$.

Teorema 4.4.2. (O egzistenciji i jedinstvenosti središta duži) *Svaka duž ima jedno i samo jedno središte.*

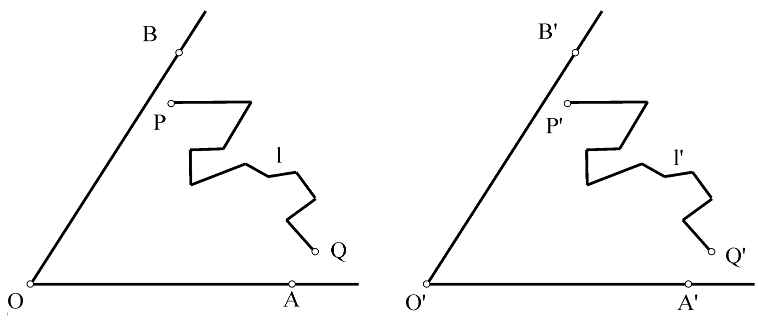
Dokaz. Neka je AB proizvoljna duž. Dokažimo da ona poseduje jedinstveno središte. Nekaje C bilo koja tačka van prave AB. Tačke A, B i C su nekolinearne, te postoji ravan π koja ih sadrži. Prema Aksiomi III6 u ravni π, sa one strane prave AB sa koje nije tačka C postoji jodinstvena tačka D takva da je $(A, C) \cong (B, D)$ i $(B, C) \cong (A, D)$. No kako je pored toga $(A, B) \cong (B, A)$, iz nekolinearnosti tačaka A, B, C sledi da postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ ravni π koja prevodi tačke A, B, C respektivno u tačke B, A, D, tj. $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$, $\mathcal{I}(C) = D$. U toj izometrijskoj transformaciji ravni π pravama AB i CD odgovaraju respektivno prave BA i DC, tj. iste prave. Prema tome, tačka O, presek ovih pravih se pomoću izometrije $\mathcal{I}$ preslikava u samu sebe, tj. $\mathcal{I}(O) = O$. Da bi dokazali da je O središte duži AB treba još pokazati da važi uslov (ii) iz definicije. Iz $\mathcal{I}(O) = O$ i $\mathcal{I}(A) = B$ sledi da je $(O, A) \cong (O, B)$ čime je dokazan usiov (ii). Dokažimo još da O pripada otvorenoj duži (AB). S obzirom da je tačka O presek pravih AB i CD ona pripada pravoj AB. Tačka O ne može biti istovetna sa tačkom A jer je $\mathcal{I}(O) = O$, $\mathcal{I}(A) = B$ i $A \neq B$. Analogno se pokazuje da tačka O ne može biti istovetna sa tačkom B. Tačka O ne može biti ni na produžetku duži AB jer ako bi npr. bilo $\mathcal{B}(O, A, B)$ tada bi na polupravoj OA postojale dve različite tačke A i B takve da je $(OA) \cong (OB)$

što je nemoguće. Odatle je $\mathcal{B}(A, O, B)$ i $O \in (AB)$ pa je tačka O središte duži AB.

Neka osim tačke O duž AB ima još jedno središte, npr. tačku O'. Tada bi u izometriji $\mathcal{I}$ bilo $\mathcal{I}(O) = O$ i $\mathcal{I}(O') = O'$, odnosno izometrija $\mathcal{I}$ koja deluje na pravu AB tj. u prostoru S^1 imala bi dve invarijantne tačke O i O' pa bi prema tome morala da bude identična transformacija prave AB. Medjutim ova transformacija prevodi tačku A u tačku B, tj. $\mathcal{I}(A) = B$ i $A \neq B$. Odatle sledi da $\mathcal{I}$ nije identična transformacija što predstavlja kontradikciju. Dakle duž AB ima jedinstveno središte. □

Teorema 4.4.3. *U izometrijskoj transformaciji uglu odgovara ugao.*

Dokaz. Neka je u nekoj ravni π dat ugao ω sa kracima OA i OB i neka mu u nekoj izometriji $\mathcal{I} : \pi \to \pi'$ odgovara neki lik ω' . Dokažimo da je lik ω' takodje ugao.



Slika 4.6.

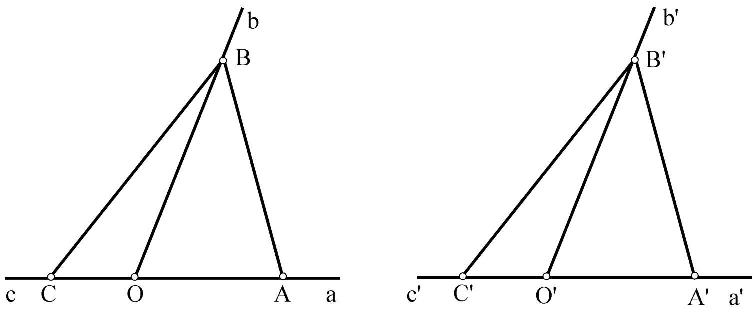
Budući da u izometriji $\mathcal{I}$ polupravama OA i OB odgovaraju poluprave $O'A'$ i $O'B'$, ugaonoj liniji $\measuredangle AOB$ odgovara ugaona linija $\measuredangle A'O'B'$. Treba još pokazati da će u izometriji $\mathcal{I}$ unutrašnjim tačkama ugla ω odgovarati unutrašnje tačke nekog ugla ω' odredjenog ugaonom linijom $\measuredangle A'O'B'$. U tom cilju obeležimo sa P i Q (slika 4.6.) bilo koje dve tačke koje pripadaju unutrašnjosti ugla ω. U skladu sa definicijom pojma ugla, postoji poligonalna linija $\mathcal{I}$ u ravni π koja spaja tačke P i Q i koja sa ugaonom linijom $\measuredangle AOB$ nema zajedničkih tačaka. Kako u izometriji $\mathcal{I}$ dužima odgovaraju duži, poligonalnoj liniji l odgovara poligonalna linija l' koja spaja tačke P' i Q' i nalazi se u ravni π'. Kako ugaona linija $\measuredangle AOB$ nema zajedničkih tačaka sa poligonalnom linijom l biće i $\measuredangle A'O'B' \cap l' = \emptyset$. Odatle sledi da su tačke P' i Q' sa iste strane ugaone linije $\measuredangle A'O'B'$, tj. da svim unutrašnjim tačkama ugla ω odgovaraju u izometriji $\mathcal{I}$ tačke koje se nalaze sa iste strane ugaone linije $\measuredangle A'O'B'$ odnosno ugao ω' . Istim postupkom dokazuje se da svaka tačka P' ugla ω' predstavlja sliku neke tačke P ugla ω, čime je teorema dokazana. $\square$

Teorema 4.4.4. *Da bi dva ugla $\measuredangle ab$ i $\measuredangle a'b'$ sa temenima O i O' bila podudarna, potrebno je i dovoljno da na kracima a, b i a', b' postoje respektivno tačke A, B, A', B' takve da je $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ i $(AB) \cong (A'B')$.*

Dokaz. U slučaju kada su uglovi opruženi dokaz je neposredan. Neka sada uglovi $\measuredangle ab$ i $\measuredangle a'b'$ nisu opruženi. Ako su oni podudarni tada postoji izometrija koja preslikava jedan na drugi. Tada se tom izometrijom proizvoljne tačke $A \in a$, $B \in b$ preslikavaju u tačke $A' \in a'$, $B' \in b'$ pri čemu je $(O, A, B) \cong (O', A', B')$, tj. $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ i $(AB) \cong (A'B')$.

Obratno, neka je $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ i $(AB) \cong (A'B')$. Tada je $(O, A, B) \cong (O', A', B')$, pri čemu su O, A, B i O', A', B' dve trojke nekolinernih tačaka, odakle sledi da postoji jedinstvena izometrija ravni koja tačke O, A, B prevodi redom u tačke O', A', B'. Ta izometrija ugao $\measuredangle ab$ preslikava na ugao $\measuredangle a'b'$, odakle sledi $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$. $\square$

Teorema 4.4.5. *Naporedni uglovi podudarnih uglova su podudarni.*



Slika 4.7.

Dokaz. Neka su $\measuredangle ab$ i $\measuredangle a'b'$ (slika 4.7) neopruženi, konveksni podudarni uglovi i neka su $\measuredangle bc$ i $\measuredangle b'c'$ njihovi naporedni uglovi. Neka su O, O' temena a A, B, A', B' redom tačke polupravih a, b, a', b', takve da je $OA \cong O'A'$ i $OB \cong O'B'$. Tada je na osnovu prethodne teoreme $AB \cong A'B'$. Neka su C

i C' tačke polupravih c i c' redom takve da je $OC \cong O'C'$. Tada na osnovu aksiome III7 sledi da je $BC \cong B'C'$, pa na osnovu prethodne teoreme sledi $\measuredangle bc \cong \measuredangle b'c'$. □

Teorema 4.4.6. *Unakrsni uglovi su međusobom podudarni.*

Dokaz. Kako unakrsni ugiovi imaju iste naporedne uglove, to na osnovu prethodne teoreme sledi tvrdjenje teoreme. □

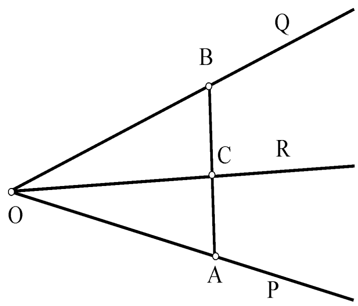
Teorema 4.4.7. *Za svaki orjentisani ugao $\measuredangle POQ$ neke ravni π i za svaku poluprnvu $O'P'$ neke ravni π' u kojoj je data izvesna orjentacija K' postoji jedinstvena poluprava $O'Q'$ u ravni π' takva da je $\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'O'Q'$ i da ugao $\measuredangle P'O'Q'$ pripada orjentaciji K'.*

Definicija 4.4.2. *Raspolovnicom (simetralom, bisektrisom) ugla $\measuredangle POQ$* nazivamo polupravu OR koja pripada tom uglu i koja ga razlaže na dva podudarna ugla.

Napomena. Pod pojmom simetrale ugla najčešće podrazumevamo ne samo navedenu polupravu već i celu pravu koja sadrži ovu polupravu dok ćemo ovu polupravu najčešće nazivati raspolovnicom ili bisektrisom.

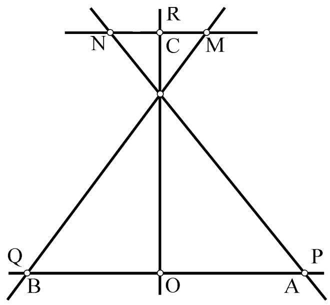
Teorema 4.4.8. *Svaki ugao ima jednu i samo jednu bisektrisu.*

Dokaz. Prilikom dokaza ove teoreme razlikovaćemo dva slučaja i to:
(i) Ugao $\measuredangle POQ$ nije opružen, (ii) Ugao $\measuredangle POQ$ je opružen.



Slika 4.8.

(i) Neka su A, B redom tačke sa krakova OP, OQ (slika 4.8) takve da je $(O, A) \cong (O, B)$. Pri tome su A, O, B tri nekolinearne tačke takve da je $(O,A) \cong (O,B)$, $(O,B) \cong (O,A)$ (zbog simetričnosti) i $(A,B) \cong (B,A)$ pa postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni π u kojoj se nalazi taj ugao i koja prevodi tačke O, A, B respektivno u tačke O, B, A tj. $\mathcal{I}(O) = O$, $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$. U skladu sa poslednjim dvema relacijama središte duži AD, tačka C je invarijanta transformacije $\mathcal{I}$, tj. $\mathcal{I}(C) = C$. U tom slučaju izometrija $\mathcal{I}$ ravni π poseduje dve invarijantne tačke O i C te je svaka tačka prave OC invarijantna. Tačka O razlaže pravu OC na dve poluprave od kojih je jedna u uglu $\measuredangle POQ$ a druga van njega. Neka je poluprava OC u tom uglu. Obeležimo je sa OR i pokažimo da je OR bisektrisa ugla $\measuredangle POQ$. Iz pretpostavke neposredno sledi da OR pripada uglu $\measuredangle POQ$. Kako je $\mathcal{I}(\measuredangle POR) \cong \measuredangle QOR$, poluprava OR razlaže ugao $\measuredangle POQ$ na dva podudarna ugla, pa odatle sledi da je OR raspolovnica ugla $\measuredangle POQ$. Jedinstvenost se pokazuje indirektnim postupkom.



Slika 4.9.

(ii) Neka je sada $\measuredangle POQ$ opružen. Neka su A, B tačke polupravih OP i OQ (slika 4.9) takve da je $(O,A) \cong (O,B)$. Neka je M bilo koja tačka ugla $\measuredangle POQ$ koja nije na pravoj PQ. U skladu sa Aksiomom III6 u toj poluravni postoji jedinstvena tačka N takva da je $(AM) \cong (BN)$ i $(BM) \cong (AN)$. Sem toga je $(A,B) \cong (B,A)$ te postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ ravni π u kojoj se nalazi taj ugao koja prevodi tačke A, B, M redom u tačke B, A, N, tj. $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$, $\mathcal{I}(M) = N$.

Kako u toj transformaciji tački A odgovara tačka B, tački B odgovara tačka A, to središtu O duži AB odgovara ta ista tačka, tj. $\mathcal{I}(O) = O$. Kako je u ovoj izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}(M) = N$ i $\mathcal{I}(N) = M$, središtu C duži MN odgovara ta ista tačka C, tj. $\mathcal{I}(C) = C$. U tom slučaju u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni π tačkama O i C te ravni odgovaraju te iste tačke te je svaka tačka prave OC invarijanta transformacije $\mathcal{I}$. Tačka O razlaže pravu OC na dve poluprave od kojih jedna pripada uglu $\measuredangle POQ$

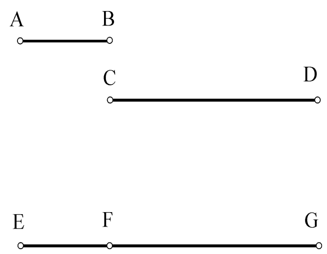
a druga je van njega. Nekaje npr. OC u uglu $\measuredangle POQ$. Označimo je sa OR. Iz pretpostavke neposredno sledi da poluprava OR pripada uglu $\measuredangle POQ$ i kako u izometriji $\mathcal{I}$ uglu $\measuredangle POR$ odgovara ugao $\measuredangle QOR$ poluprava OR razlaže $\measuredangle POQ$ na dva podudarna ugla. Odatle sledi da je OR bisektrisa ugla $\measuredangle POQ$ čime je dokazana egzistencija. Jedinstvenost se dokazuje indirektnim postupkom. $\square$

Napomena. Izometrijske transformacije omogućuju da se osim do sada posmatrane relacije podudarnosti definišu i druge relacije na skupu geometrijskih objekata:
- Na skupu duži "manja od", "veća od",
- Na skupu uglova "manji od", veći od".

Definicija 4.4.3. Duž AB je *veća* od duži CD ako postoji tačka E na pravoj AB takva da je $AE \cong CD$ i $\mathcal{B}(A, E, B)$. Duž CD je *manja* od duži AB ako postoji tačka E na pravoj AB takva da je $AE \cong CD$ i $\mathcal{B}(A, E, B)$.

Svi zakoni brojeva važe i ovde. Posebno važi zakon trihotomije, tj. za svake dve duži AB i CD važi jedna i samo jedna od relacija: (i) $AB \cong CD$, (ii) AB veća od CD, (iii) AB manja od CD. Osim navedenih relacija na skupu svih duži i uglova mogu se definisati i operacije: "sabiranje duži", "množenje duži brojem", "sabiranje uglova", "množenje ugla brojem".

Definicija 4.4.4. *Zbirom duži* AB i CD (slika 4.10) nazivamo duž EG unutar koje postoji tačka F tako da su duži AB i CD respektivno podudarne dužima EF i FG.



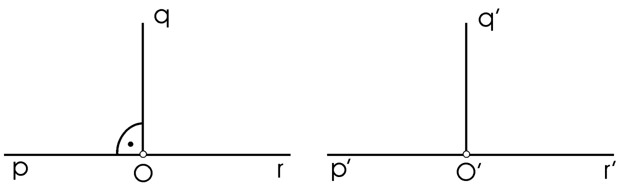
Slika 4.10.

Sva moguća algebarska svojstva u skupu brojeva mogu se sada geometrijski produžiti na skup duži. Sve osobine u vezi s podudarnošću likova potrebno je izvoditi preko izometrijskih transformacija.

4.5 Prav ugao

Definicija 4.5.1. Neki ugao je *prav, oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je jednak, veći ili manji od svog naporednog ugla.

Egzistencija pravog ugla sledi iz činjenice da svaki ugao, pa i opružen ugao ima jedinstvenu bisektrisu.



Slika 4.11.

Teorema 4.5.1. *Ugao podudaran pravom uglu je prav.*

Dokaz. Neka je $\measuredangle pOq$ prav i $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$. Obeležimo sa r i r' (slika 4.11) poluprave komplementne redom sa polupravama p i p'. Uglovi $\measuredangle pOq$ i $\measuredangle p'O'q'$ su podudarni pa su i njihovi naporedni uglovi $\measuredangle qOr$ i $\measuredangle q'O'r'$ podudarni. Pri tome je $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$, $\measuredangle pOq \cong \measuredangle qOr$ i $\measuredangle qOr \cong \measuredangle q'O'r'$ odakle je zbog tranzitivnosti relacije podudarnosti uglova $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle q'O'r'$ pa je $\measuredangle p'O'q'$ prav ugao. $\square$

Teorema 4.5.2. *Svaka dva prava ugla su međusobom podudarna.*

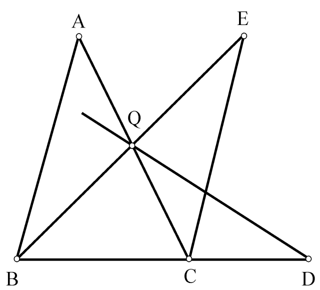
Slika 4.12.

Dokaz. Neka su p, q, p', q' kraci pravih uglova $\measuredangle pOq$ i $\measuredangle p'O'q'$ (slika 4.12) a r i r' poluprave komplementne redom sa polupravama p i p'. Pretpostavimo da pravi uglovi $\measuredangle pOq$ i $\measuredangle p'O'q'$ nisu podudarni. Neka je ugao $\measuredangle p'O'q'$ veći od ugla $\measuredangle pOq$. Tada unutar ugla $\measuredangle p'O'q'$ postoji polupravа q'' takva da je $\measuredangle p'O'q'' \cong \measuredangle pOq$. Kako je ugao $\measuredangle pOq$ prav, to je i njemu podudaran ugao $\measuredangle p'O'q''$ prav.

Sada su uglovi $\measuredangle p'O'q'$ i $\measuredangle p'O'q''$ pravi, pa je svaki od njih jednak svom naporednom uglu tj. $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle q'O'r'$ i $\measuredangle p'O'q$” $\cong \measuredangle q$”$O'r'$. U tom slučaju bi opružen ugao $\measuredangle p'O'r'$ imao dve bisektrise q' i q”, što je nemoguće. Prema tome ne važi $\measuredangle p'O'q' > \measuredangle pOq$. Analogno se pokazuje da nije $\measuredangle p'O'q' < \measuredangle pOq$. Dakle mora biti $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$. □

4.6 Stavovi o podudarnosti trouglova

Teorema 4.6.1. *Spoljašnji ugao trougla je veći od bilo kog unutrašnjeg nesusednog ugla.*



Slika 4.13.

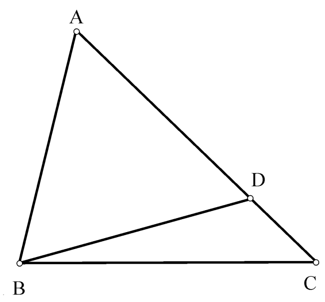
Dokaz. Posmatrajmo ΔABC i neka je D (slika 4.13) tačka prave BC takva da je $\mathcal{B}(B,C,D)$. Dokazaćemo da je $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$. Označimo sa Q središte duži AC, a sa E tačku poluprave BQ takvu da je $\mathcal{B}(B,Q,E)$ i $BQ \cong QE$. Uglovi $\measuredangle AQB$ i $\measuredangle CQE$ su unakrsni pa su kao takvi i podudarni. Kako je još $QA \cong QC$ i $QB \cong QE$ to je $(A,Q,B) \cong (C,Q,E)$. Odavde je $\measuredangle BAQ \cong \measuredangle ECQ$.

Prava DQ seče stranicu BE trougla ΔBCE u tački Q, ne seče stranicu BC jer važi $\mathcal{B}(B,C,D)$, pa prema Pašovom stavu mora seći stranicu CE. Tačke D i Q su sa raznih strana prave CE, jer je $B,D \div CE$ i $B,Q \stackrel{\cdot\cdot}{-} CE$. Prema tome poluprava CE pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle ACD$ pa je $\measuredangle ACE < \measuredangle ACD$. S druge strane je $\measuredangle ACE \cong \measuredangle BAC$ odakle sledi $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$. □

Iz ove teoreme sledi da najviše jedan unutrašnji ugao trougla može biti prav ili tup.

Teorema 4.6.2. *Naspram jednakih stranica trougla su jednaki uglovi i obratno naspram jednakih uglova trougla su jednake stranice.*

Teorema 4.6.3. *Naspram veće stranice u trouglu leži veći ugao, i obratno naspram većeg ugla u trouglu je veća stranica.*



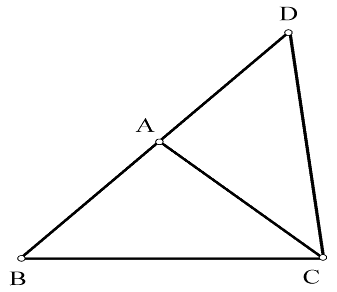
Slika 4.14.

Dokaz. Neka je u trouglu ΔABC (slika 4.14) zadovoljeno $AC > AB$. Tada na duži AC postoji tačka D takva da je $AD \cong AB$ i $\mathcal{B}(A, D, C)$. Tada je poluprava BD unutar ugla $\measuredangle ABC$ trougla ΔABC pa je $\measuredangle ABC > \measuredangle ABD$. Trougao ΔABD je jednakokraki pa je $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ADB$. U trouglu ΔBCD ugao $\measuredangle ADB$ je spoljašnji nesusedni za ugao $\measuredangle BCD$ pa je $\measuredangle ADB > \measuredangle ACB$. Prema tome imamo $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.

Obratno, neka je $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Tada ne može biti $AB \cong AC$ jer bismo imali $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB$. Takodje ne može biti $AC < AB$ jer bi prema dokazanom delu bilo $\measuredangle ABC < \measuredangle ACB$. Dakle mora biti $AC > AB$. $\square$

Teorema 4.6.4. *Zbir dve stranice trougla je veći od treće stranice tog trougla, a razlika dve stranice trougla, je manja od treće stranice tog trougla.*

Dokaz. Neka je ΔABC proizvoljan trougao. Označimo sa D (slika 4.15) tačku poluprave BA tako daje $\mathcal{B}(B, A, D)$ i $AD \cong AC$. Tada je $\measuredangle BCD > \measuredangle BCA$ i $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BDC$, pa je u trouglu ΔBCD zadovoljeno $\measuredangle BCD > \measuredangle BDC$ tj. $BD > BC$ a samim tim i $AB + AC > BC$. U drugom delu pretpostavimo da je $AC > AB$. Tada je prema dokazanom $AC < AB + BC$, odakle je $AC - AB < BC$ $\square$



Slika 4.15.

Teorema 4.6.5. (Prvi stav o podudarnosti trouglova) *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su dve stranicei njima zahvaćen ugao prvog trougla podudarni odgovarajućim stranicama i uglu drugog trougla.*

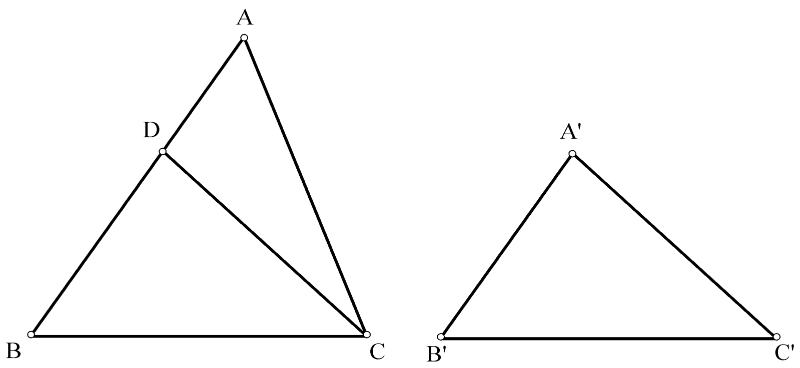
Dokaz neposredno sledi.

Teorema 4.6.6. (Drugi stav o podudarnosti trouglova) *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su jedna stranica i na njoj nalegli uglovi prvog trougla podudarni odgovarajućoj stranici i uglovima drugog trougla.*

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dva trougla takva da je $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ i $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$. Ako bi bilo $AB > A'B'$, tada na duži AB postoji tačka D (slika 4.16) takva daje $DB \cong A'B'$. Trouglovi ΔDBC i $\Delta A'B'C'$ su podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova, pa je i $\measuredangle DCB \cong \measuredangle A'C'B'$. S druge strane je $\measuredangle A'C'B' \cong \measuredangle ACB$ odakle sledi da je $\measuredangle DCB \cong \measuredangle ACB$, što je nemoguće. Analogno i pretpostavka da je $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije. Dakle mora biti $AB \cong A'B'$ pa su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova. $\square$

Teorema 4.6.7. (Treći stav o podudarnosti trouglova) *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su sve stranice prvog trougla podudarne odgovarajućim stranicama drugog trougla.*

Teorema 4.6.8. (Četvrti stav o podudarnosti trouglova) *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su dve stranice i ugao naspram jedne od njih prvog trougla podudarni odgovarajucim stranicama i uglu drugog trougla, dok su uglovi naspram, drugih dveju podudarnih stranica oba oštra, oba parva ili oba tupa.*



Slika 4.16.

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dva trougla takva da je $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ a uglovi $\measuredangle A$ i $\measuredangle A'$ oba oštra oba prava ili oba tupa. Tada za stranice AB i $A'B'$ važi tačno jedna od mogućnosti:

(i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ i (iii) $AB \cong A'B'$.

(i) Ako je $AB > A'B'$ tada na duži AB postoji tačka D takva da je $DB \cong A'B'$. Tada su podudarni trouglovi ΔDBC i $\Delta A'B'C'$ pa je i $CD \cong C'A'$. Kako je još $C'A' \cong CA$ imamo da je $CD \cong CA$ pa iz trougla ΔACD imamo $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CAD$. Znači uglovi $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle CDB$ će biti istovremeno oba oštra, oba prava ili oba tupa. Oni su naporedni i jednaki pa ne mogu istovremeno biti oštri ili tupi. Takodje ne mogu biti oba prava jer bi tada trougao ΔACD imao dva unutrašnja prava ugla. Dakle ne može biti $AB > A'B'$.

(ii) Analogno i pretpostavka $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Znači mora biti $AB \cong A'B'$ pa su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarni na osnovu nekog od prethodnih stavova o podudarnosti. $\square$

Teorema 4.6.9. (Peti stav o podudarnosti trouglova) *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su jedna stranica, na njoj nalegli ugao i ugao naspram nje prvog trougla podudarni odgovarajucoj stranici i uglovima drugog trougla.*

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dva trougla takva da je $BC \cong B'C'$ $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$. Tada za stranice AB i $A'B'$ može važiti tačno jedna od mogućnosti:

(i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ i (iii) $AB \cong A'B'$.

(i) Ako je $AB > A'B'$ onda na duži AB postoji tačka D takva da je $DB \cong A'B'$. U tom slučaju su trouglovi ΔDBC i $\Delta A'B'C'$ podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova. Odatle sledi da je $\measuredangle BDC$ jednak uglu $\measuredangle A'$ i kako je još $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ imamo da je $\measuredangle DBC \cong \measuredangle A$ sto je nemoguće jer je $\measuredangle DBC$ spoljašnji nesusedni uglu $\measuredangle A$ u trouglu ΔACD.

(ii) Pretpostavka $AB < A'B'$ analogno dovodi do kontradikcije.

(iii) Znači mora biti $AB \cong A'B'$, pa su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova. $\square$

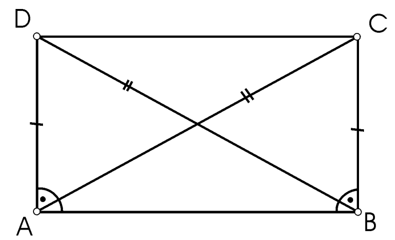
4.7 Četvorouglovi u apsolutnoj geometriji

Zatvorena poligonalna linija koja se sastoji od četiri nadovezane duži predstavlja četvorougao. Deo ravni ograničen četvorouglom predstavlja četvorougaonu površ. Lik podudaran četvorouglu predstavlja, kao što smo se ranije uverili, takođe četrvorougao. U apsolutnoj geometriji su od posebnog interesa Lambertov i Sakerijev četvorougao.

Definicija 4.7.1. Četvorougao sa tri prava ugla nazivamo *Lambertovim četvorouglom.* Ako su uglovi $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ Lambertovog četvorougla pravi, tada su stranice AB i BC osnovice a AD i CD visine Lambertovog četvorougla.

Definicija 4.7.2. Četvorougao $ABCD$ kod koga su uglovi $\measuredangle A$ i $\measuredangle B$ pravi a $AD \cong BC$ nazivamo *Sakerijevim četvorouglom.* Stranica AB je osnovica, CD protivosnovica a AD i BC su bočne stranice Sakerijevog četvorougla.

Teorema 4.7.1. *Kod Sakerijevog četvorougla $ABCD$ sa osnovicom AB i protivosnovicom CD važi $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.*

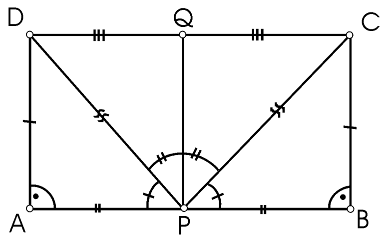


Slika 4.17.

Dokaz. Trouglovi ΔABC i ΔBAD (slika 4.17) su podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova. Iz njihove podudarnosti sledi $AC \cong BD$. Sada trouglovi ΔACD i ΔBDC imaju podudarne sve tri odgovarajuće stranice, odakle sledi njihova podudarnost prema trećem stavu o podudarnosti trouglova. Dakle, $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$. □

Definicija 4.7.3. Duž koja spaja središta osnovice i protivosnovice Sakerijevog četvorougla je *srednja linija* tog četvorougla.

Teorema 4.7.2. *Srednja linija Sakerijevog četvorougla razlaže taj četvorougao na dva Lambertova četvorougla.*



Slika 4.18.

Dokaz. Neka su P i Q središta redom osnovice AB i protivosnovice CD (slika 4.18) Sakerijevog četvorougla $ABCD$. Trouglovi ΔAPD i ΔBPC su podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova. Iz njihove podudarnosti sledi $PD \cong PC$ i $\measuredangle APD \cong \measuredangle BPC$. Sada su trouglovi ΔPQD i ΔPQC podudarni prema trećem stavu o podudarnosti trouglova, odakle sledi $\measuredangle QPD \cong \measuredangle QPC$ i $\measuredangle PQD \cong \measuredangle PQC$. Uglovi $\measuredangle PQD$ i $\measuredangle PQC$ su podudarni i naporedni, dakle pravi. Kako je još

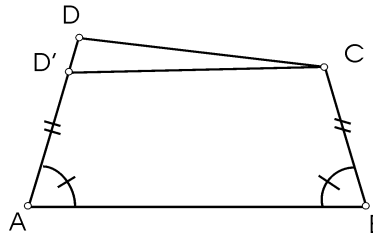
$$\measuredangle APQ = \measuredangle APD + \measuredangle QPD = \measuredangle BPC + \measuredangle QPC = \measuredangle BPQ,$$

pa su i uglovi $\measuredangle APQ$ i $\measuredangle BPQ$ pravi. Dakle, četvorouglovi $APQD$ i $BPQC$ su Lambertovi. □

Teorema 4.7.3. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ i $AD \cong BC$ tada je $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.*

Dokaz. Teorema se dokazuje na potpuno isti način kao i teorema 4.7.1. □

Teorema 4.7.4. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ i $\measuredangle D > \measuredangle C$ tada je $BC > AD$.*



Slika 4.19.

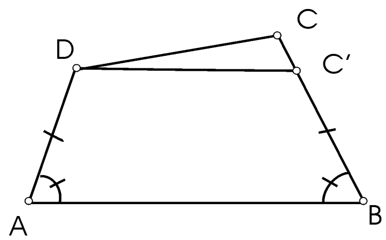
Dokaz. Za duži BC i AD važi tačno jedna od relacija: (i) $BC \cong AD$, (ii) $BC < AD$ ili (iii) $BC > AD$.

(i) Neka je $BC \cong AD$. Kako je još $\measuredangle A \cong \measuredangle B$, to na osnovu teoreme 4.7.3. sledi $\measuredangle C \cong \measuredangle D$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom.

(ii) Ako je $BC < AD$, tada postoji tačka D' (slika 4.19) takva da je $AD' \cong BC$ i $\mathcal{B}(A, D', D)$. Četvorougao $ABCD'$ je prost jer su tačke C i D' sa iste strane prave AB i zadovoljava sve uslove teoreme 4.7.3., odakle sledi $\measuredangle BCD' \cong \measuredangle CD'A$. Tačka D' pripada duži AD, odakle sledi da D' pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle BCD$, pa je $\measuredangle BCD > \measuredangle BCD'$ i kako je još $\measuredangle BCD' \cong \measuredangle CD'A$, to je $\measuredangle BCD > \measuredangle CD'A$. Ugao $\measuredangle CD'A$ je spoljašnji nesusedni uglu $\measuredangle CDD' \equiv \measuredangle CDA$, odakle sledi $\measuredangle BCD > \measuredangle CDA$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom teoreme. Prema tome ne može biti $BC < AD$.

(iii) preostaje mogućnost $BC > AD$. $\square$

Teorema 4.7.5. *Ako je kod četvorougla $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ i $BC > AD$ tada je $\measuredangle D > \measuredangle C$.*



Slika 4.20.

Dokaz. Iz $BC > AD$ sledi da postoji tačka C' (slika 4.20) takva da je $BC' \cong AD$ i $\mathcal{B}(B, C', C)$. Četvorougao $ABC'D$ zadovoljava sve uslove teoreme

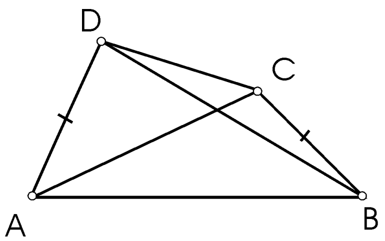
4.7.3. odakle je $\measuredangle BC'D \cong \measuredangle ADC'$. Sada je

$$\measuredangle ADC > \measuredangle ADC' \cong \measuredangle BC'D > \measuredangle BCD,$$

tj. $\measuredangle D > \measuredangle C$. □

Teorema 4.7.6. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$: $AD \cong BC$ i $\measuredangle A > \measuredangle B$, tada je $\measuredangle C > \measuredangle D$.*

Dokaz. Za trouglove ΔABC i ΔABD je $BC \cong AD$, $AB \equiv AB$ i $\measuredangle ABC < \measuredangle ABD$ (slika 4.21) pa je $AC < BD$. Sada za trouglove ΔACD i ΔBCD važi $CD \equiv CD$, $AD \cong BC$ i $AC < BD$, odakle je $\measuredangle ADC < \measuredangle BCD$, tj. $\measuredangle D < \measuredangle C$. □



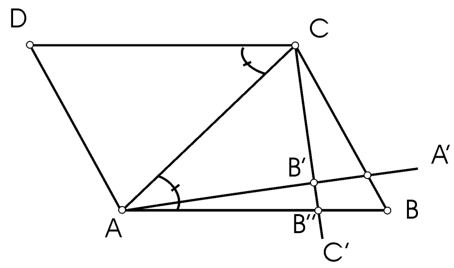
Slika 4.21.

Teorema 4.7.7. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, tada je $AB \cong DC$ i $BC \cong AD$.*

Dokaz. Za uglove $\measuredangle ACD$ i $\measuredangle CAB$ važi tačno jedna od tri relacije: (i) $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$, (ii) $\measuredangle ACD > \measuredangle CAB$ ili (iii) $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$.

(i) Ako je $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$ tada je i $\measuredangle ACB > \measuredangle CAB$. U uglu $\measuredangle ACB$ postoji poluprava CC' (slika 4.22) takva da je $\measuredangle ACC' \cong \measuredangle CAD$. Na isti način postoji poluprava AA' unutar ugla $\measuredangle CAB$ takva da je $\measuredangle CAA' \cong \measuredangle ACD$. Označimo sa B' presečnu tačku polupravih AA' i CC'. Nije teško zaključiti, primenom Pašove aksiome, da se tačka B' nalazi unutar trougla ΔABC.

Trouglovi $\Delta ACB'$ i ΔACD su podudarni prema drugom stavu o podudarnosti trouglova. Odavde sledi $\measuredangle AB'C \cong \measuredangle D$. Kako je još $\measuredangle D \cong \measuredangle B$ dobijamo $\measuredangle AB'C \cong \measuredangle ABC$. Označimo sa B'' presečnu tačku pravih CC' i AB. Ugao $\measuredangle AB'C$ je spoljašnji nesusedni u trouglu $\Delta AB''B'$ uglu $\measuredangle AB''B'$ pa je $\measuredangle AB'C > \measuredangle AB''B'$. Na isti način je $\measuredangle AB''B' > \measuredangle ABC$ kao spoljašnji



Slika 4.22.

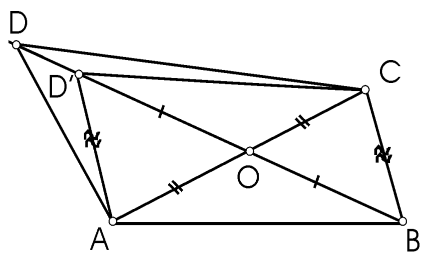
nesusedni u trouglu $\Delta B''BC$. Prema tome, dobija se $\measuredangle AB'C > \measuredangle ABC$, što predstavlja kontradikciju. Prema tome ne može biti $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$.

(ii) Analogno, pretpostavka $\measuredangle ACD > \measuredangle CAB$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Dakle, preostaje da je $\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB$. Tada je $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD$ kao dopune jednakih uglova do jednakih. Sada su trouglovi ΔABC i ΔADC podudarni prema drugom stavu o podudarnosti trouglova, odakle sledi $AB \cong CD$ i $BC \cong AD$. $\square$

Teorema 4.7.8. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$, $\measuredangle B \cong \measuredangle D$ i ako središte dijagonale AC leži na dijagonali BD, tada su naspramne stranice tog četvorougla podudarne međusobno.*

Dokaz. Označimo sa D' tačku prave BD takvu da je $OB \cong OD'$ i $D, D' \ddot{-} O$. Tada važi tačno jedna od relacija: (i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ ili (iii) $D' \equiv D$.



Slika 4.23.

(i) Neka je $\mathcal{B}(O, D', D)$. Za truglove ΔOAB i $\Delta OCD'$ (slika 4.23) je $AO \cong OC$, $OB \cong OD'$ i $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD'$ pa su oni podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova. Iz njihove podudarnosti sledi $AB \cong$

CD'. Sada su i trouglovi $\Delta AOD'$ i ΔCOB podudarni prema prvom stavu o podudarnosti jer je $AO \cong CO$, $OD' \cong OB$ i $\measuredangle AOD' \cong \measuredangle COB$. Odavde je $AD' \cong CB$. Za trouglove ΔABC i $\Delta CD'A$ je $AC \equiv CA$, $AB \cong CD'$ i $BC \cong D'A$, tj. i oni su podudarni (treći stav o podudarnosti), odakle je $\measuredangle ABC \cong \measuredangle AD'C$. Kako je još $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ADC$ sledi $\measuredangle ADC \cong \measuredangle AD'C$, što je u suprotnosti sa $\measuredangle ADC < \measuredangle AD'C$. Prema tome nije $\mathcal{B}(O, D', D)$.

(ii) Analogno, i pretpostavka $\mathcal{B}(O, D, D')$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $D \equiv D'$, tj. $AB \cong CD' \equiv CD$ i $BC \cong AD' \equiv AD$. □

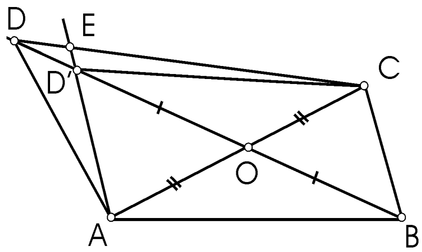
Teorema 4.7.9. *Ako je kod prostog četvorougla $ABCD$, $AB + BC \cong CD + DA$ i ako je središte O dijagonale AC na dijagonali BD, tada su naspramne stranice tog četvorougla podudarne.*

Dokaz. Neka je D' tačka prave BD takva da je $OD' \cong OB$ i $D, D' \mathrel{\ddot{-}} O$. Tada mogu nastupiti sledeći slučajevi: (i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ ili (iii) $D' \equiv D$.

(i) Neka je $\mathcal{B}(O, D', D)$. Trouglovi ΔAOB i $\Delta COD'$ (slika 4.24) su podudarni, odakle je $AB \cong CD'$. Takodje iz podudarnosti trouglova ΔBOC i $\Delta D'OA$ sledi $BC \cong AD'$. Iz poslednje dve jednakosti je $AB + BC \cong AD' + CD'$. Po pretpostavci je $AB + BC \cong AD + CD$, pa je

$$AD + DC \cong AD' + CD'.$$

Označimo sa E presečnu tačku pravih AD' i CD. Tada je $\mathcal{B}(C, E, D)$ i $AD' + CD' < AD' + D'E + EC < AD + DE + EC \cong AD + DC$, tj. $AD' + CD' < AD + DC$ odakle sledi $AD + DC > AB + BC$, što predstavlja kontradikciju.



Slika 4.24.

(ii) Analogno i pretpostavka $\mathcal{B}(O, D, D')$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $D \equiv D'$. Iz podudarnosti trouglova ΔAOB i ΔCOD sledi $AB \cong CD$, dok iz podudarnosti trouglova ΔBOC i ΔAOD sledi $BC \cong AD$. □

4.8 Upravnost pravih i ravni

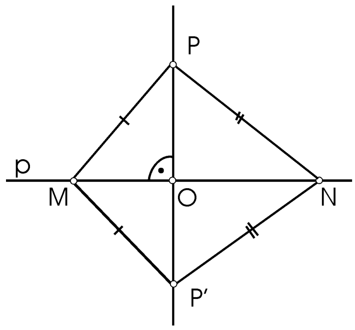
Pojam pravog ugla omogućuje definisanje pojma upravnih pravih.

Definicija 4.8.1. Prava a je *upravna* na pravoj b (oznaka: $a \perp b$) ako prave a i b sadrže krake nekog pravog ugla.

Iz definicije neposredno sledi da je relacija upravnosti pravih simetrična ali da nije refleksivna i tranzitivna.

Teorema 4.8.1. *Za svaku pravu p i svaku tačku P neke ravni π postoji jedna i samo jedna prava n ravni π takva da je $n \perp p$.*

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja:
(i) Tačka P ne pripada pravoj p, (ii) tačka P pripada pravoj p.



Slika 4.25.

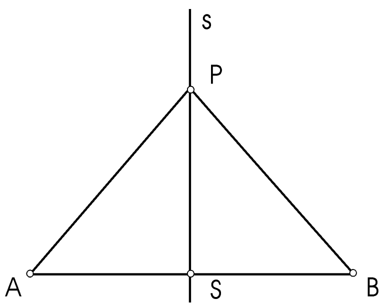
(i) Neka je tačka P van prave p i neka su M i N (slika 4.25) dve proizvoljne tačke prave p i P' tačka ravni π sa one strane prave p sa koje nije tačka P pri čemu je $MP \cong MP'$ i $NP \cong NP'$. Kako su P i P' sa raznih strana prave p, to duž PP' ima sa pravom p zajedničku tačku O. Kako su P, M, N i P', M, N dve trojke nekolinearnih tačaka ravni π takve daje $(P, M, N) \cong (P', M, N)$ to pos- toji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni π koja tačke P, M, N prevodi redom u tačke P', M, N. U toj izometrijskoj transformaciji ugiu $\measuredangle POM$ odgovara ugao $\measuredangle P'OM$ pa su oni podudarni a kako su još i naporedni oni su pravi. Tada je prava $n \equiv PP'$ upravna na pravu p. Jedinstvenost prave p dokazuje se indirektnim postupkom.

(ii) Neka je sada tačka P na pravoj p. Neka su M i N tačke prave p takve da je $\mathcal{B}(M, P, N)$. Tada postoji jedinstvena bisektrisa PP_1 opruženog ugla $\measuredangle MPN$ koja taj ugao razlaže na dva podudarna naporedna ugla. Svaki od ta dva ugla je prav pa prema definiciji sledi da je PP_1 upravna na pravoj p. Jedinstvenost se dokaznje indirektnim postupkom. $\square$

Definicija 4.8.2. Pravu s koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravu AB nazivamo *simetralom* ili *medijatrisom* duži AB.

Teorema 4.8.2. *Neka je u ravni π zadata duž AB. Tačka P ravni π pripada medijatrisi duži AB ako i samo ako je $PA \cong PB$.*

Dokaz. Označimo sa S središte duži AB. Neka je P (slika 4.26) proizvoljna tačka ravni π takva da je $PA \cong PB$. U tom slučaju je $(A, S, P) \cong (B, S, P)$, odakle sledi da su naporedni uglovi $\measuredangle ASP$ i $\measuredangle BSP$ podudarni. To znači da je $SP \perp AB$, tj. tačka P pripada medijatrisi duži AB.



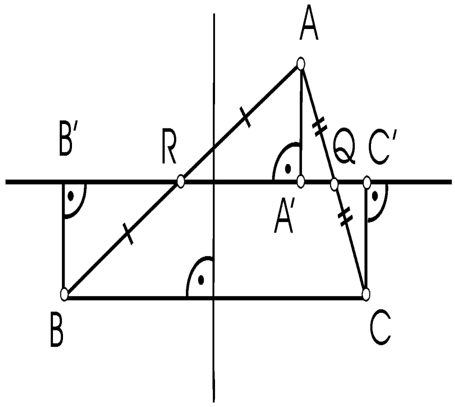
Slika 4.26.

Obratno, neka je P proizvoljna tačka medijatrise s duži AB. Tada su trouglovi ΔASP i ΔBSP podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, odakle sledi $PA \cong PB$. $\square$

Teorema 4.8.3. *Prava određena središtima Q i R stranica AC i AB trougla ΔABC upravna je na medijatrisu s treće stranice tog trougla.*

Dokaz. Označimo sa A', B' i C' (slika 4.27) redom podnožja normala iz tačaka A, B i C na pravu QR. Tada je $\Delta AA'R \cong \Delta BB'R$ i $\Delta AA'Q \cong$

$\Delta CC'Q$, odakle je $AA' \cong BB'$ i $AA' \cong CC'$. Prema tome, četvorougao $B'C'CB$ je Sakerijev sa osnovicom $B'C'$ i protivosnovicom BC. Na osnovu teoreme 4.7.1. srednja linija Sakerijevog četvorougla je zajednička normala osnovice i protivosnovice, tj. medijatrisa stranice BC upravna je na pravu $QR \equiv B'C'$ □



Slika 4.27.

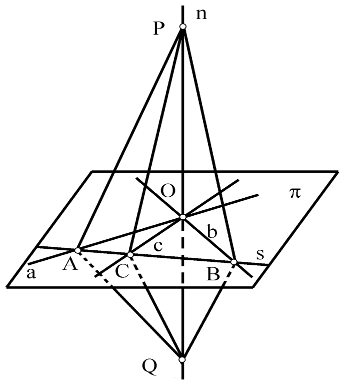
Definicija 4.8.3. Prava n je *upravna (ortogonalna, normalna)* na ravan π (oznaka $n \perp \pi$) ako prava n prodire ravan π i upravna je na svakoj pravoj ravni π koja sadrži tačku prodora. Obratno, ravan π je upravna na pravu n (oznaka $\pi \perp n$) ako ravan π seče pravu n i ako je svaka prava ravni π koja prolazi kroz presečnu tačku upravna na pravu n.

Prema navedenoj definiciji relacija upravnosti prave i ravni je simetrična. Ako je prava n upravna na ravan π, tada ćemo reći da je prava n upravna na svaku pravu ravni π. Na taj način je dopuštena mogućnost da mimoilazne prave budu medjusobno upravne.

Teorema 4.8.4. (Košijev[2] stav - kriterijum upravnosti prave na ravan) *Prava n je upravna na ravan π ako i samo ako prodire tu ravan i u tački prodora je upravna na dvema raznim pravama te ravni.*

Dokaz. Neka prava n prodire ravan π i neka je u prodornoj tački O (slika 4.28) upravna ma dvema pravama a i b ravni π. Da bismo dokazali da je n upravna na π trebamo dokazati da je n upravna na proizvoljnoj pravoj

[2] A.L.Koši (1789-1853) je izveo dokaz ove teorem 1813. g.



Slika 4.28.

c ravni π koja prolazi kroz tačku prodora O. Označimo sa s proizvoljnu pravu ravni π koja seče prave a, b i c redom u tačkama A, B i C a sa P i Q dve tačke prave n takve da je $OP \cong OQ$ i $\mathcal{B}(P, O, Q)$. Pri tome je $\Delta OAP \cong \Delta OAQ$ i $\Delta OBP \cong \Delta OBQ$ pa je i $AP \cong AQ$ i $BP \cong BQ$. Sada je $\Delta PAB \cong \Delta QAB$ odakle je $\measuredangle PAB \cong \measuredangle QAB$ tj. $\measuredangle PAC \cong \measuredangle QAC$. Sada je $\Delta PAC \cong \Delta QAC$ pa je $PC \cong QC$. Prema tome važi $\Delta POC \cong \Delta QOC$, pa su uglovi $\measuredangle POC$ i $\measuredangle QOC$ podudarni. Kako su oni još i naporedni oni su pravi pa je prava $n \equiv PQ$ upravna na pravu c, pa prema tome i na ravan π. Obratno, dokaz je trivijalan. $\square$

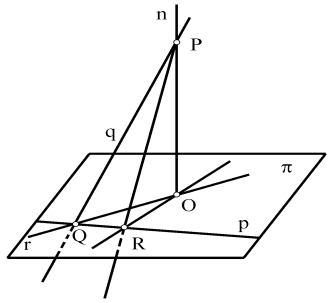
Izvedeni dokaz prethodne teoreme važi i u geometriji Lobačevskog tj. predstavlja stav apsolutne geometrije. Pre Košija Ležandr je dokazao ovaj stav u Euklidskoj geometriji koristeći metrička svojstva Euklidskog prostora.

Teorema 4.8.5. *Za svaku ravan π i svaku tačku P prostora S^3 postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku P i upravna je na ravan π.*

Dokaz. Mogu nastupiti dva slučaja: (i) $P \notin \pi$, (ii) $P \in \pi$.

(i) Neka tačka P ne pripada ravni π. Označimo sa p proizvoljnu pravu ravni π. Tačka P i prava p (slika 4.29) odredjuju neku ravan α. U ravni α postoji jedinstvena prava q takva da sadrži tačku P i upravna je na pravoj p. Podnožje te normale označimo sa Q. Tačka Q pripada pravoj p koja je u ravni π te u ravni π postoji jedinstvena prava r koja sadrži tačku Q i upravna je na pravoj p.

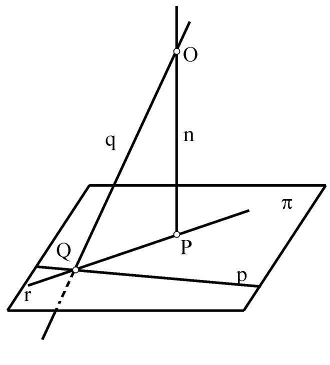
Tačka P ne pripada pravoj r te postoji jedinstvena ravan β koja sadrži tačku P i pravu r. U ravni β postoji jedinstvena prava n koja sadrži tačku



Slika 4.29.

P i upravna je na pravoj r. Dokazaćemo da je prava n upravna na ravan π. Po konstrukciji je $n \perp r$ te je prema Košijevom stavu dovoljno dokazati da je prava n upravna na bar još jednoj pravoj koja sadrži tačku O i pripada ravni π. Neka je R tačka prave p takva da je $QR \cong OP$. Tada je $\Delta OPQ \cong \Delta ORQ$, pa je $PQ \cong OR$. Sada su podudarni trouglovi ΔPOR i ΔPQR pa je $\measuredangle POR \cong \measuredangle PQR$. Kako je ugao $\measuredangle PQR$ po konstrukciji prav to je i ugao $\measuredangle POR$ prav, tj. $n \perp OR$.

(ii) Neka sada tačka P pripada ravni π. U ravni π uočimo pravu p koja ne sadrži tačku P. Kroz tačku P ravni π (slika 4.30) postoji jedinstvena prava r upravna na pravu p.

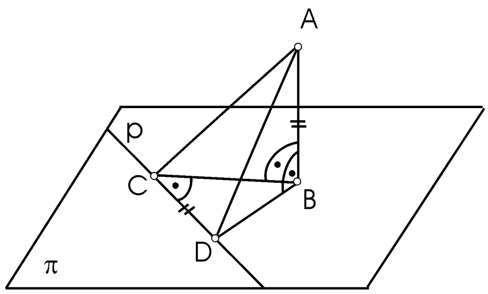


Slika 4.30.

U proizvoljnoj ravni koja sadrži pravu p i različita je od ravni π uočimo pravu q upravnu na pravoj P u tački preseka Q pravih pravih p i r. U ravni odredjenoj pravama q i r kroz tačku P postoji jedinstvena normala na pravu r. Da je prava n normalna na ravan π pokazuje se kao u slučaju (i).

Jedinstvenost prave n dokazuje se indirektno. □

Teorema 4.8.6. (Teorema o tri normale) *Neka je prava AB upravna na ravni π u tački B i prava BC upravna na pravoj p ravni π u tački C. Tada je prava AC upravna na pravoj p.*



Slika 4.31.

Dokaz. Označimo sa D tačku prave p (slika 4.31) takvu da je $AB \cong CD$. Tada su pravougli trouglovi ΔABC i ΔDCB podudarni, odakle sledi $AC \cong BD$. Sada su podudarni i trouglovi ΔABD i ΔDCA na osnovu trećeg stava o podudarnosti. Odatle sledi $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD$, tj. prava AC je upravna na pravoj p. □

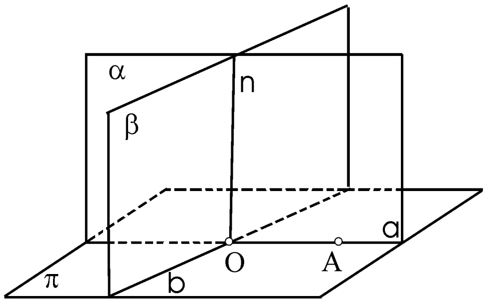
Teorema 4.8.7. *Neka je data prava n i tačka O na njoj. Sve prave koje sadrže tačku O i upravne su na pravoj n pripadaju jednoj ravni koja je upravna na pravoj n.*

Dokaz. Označimo sa p, q i r prave koje sadrže tačku O prave n i upravne su na toj pravoj. Označimo sa π ravan određenu pravama p i q, a sa γ ravan odredjenu pravama r i n. Neka je r' presečna prava ravni γ i π. Tada je na osnovu Košijeve teoreme i prava r' upravna na na pravu n.Ta da bi u tački O postojale dve prave ravni γ koje su upravne na pravu n što je nemoguće. Dakle i prava r pripada ravni π, pa sve prave upravne na pravu n u tački O pripadaju jednoj ravni koja je upravna na pravu n. □

Teorema 4.8.8. *Postoji tačno jedna ravan koja sadrži datu tačku A i upravna je na datoj pravoj n.*

Dokaz. Označimo sa α (slika 4.32) ravan odredjenu tačkom A i pravom n. Neka je a prava ravni α koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj n

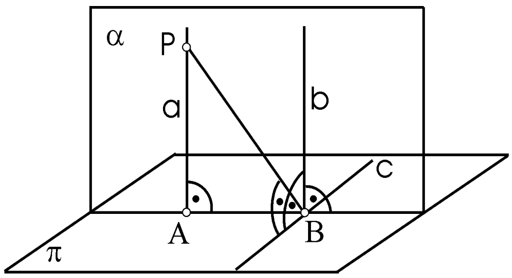
i neka je β proizvoljna ravan koja sadrži pravu n i različita je od ravni α. Označimo sa b pravu ravni β koja sadrži tačku $O = a \cap n$ i upravna je na pravoj n. Neka je π ravan odredjena pravama a i b. Tačka A pripada pravoj a, dakle i ravni π. Prava n je u tački O upravna na dvema pravama a i b ravni π, pa je $n \perp \pi$, tj. $\pi \perp n$ i $A \in \pi$. Time je dokazana egzistencija tražene ravni.



Slika 4.32.

Dokažimo još jedinstvenost. Neka je π' još jedna ravan koja sadrži tačku A i upravna je na pravu n. Označimo još sa a' presečnu pravu ravni π' i α. U tom slučaju bi dve razne prave a i a' sadržale tačku A i bile upravne na pravu n, što je nemoguće. $\square$

Teorema 4.8.9. *Neka su a i b dve razne prave upravne na ravan π. Tada su a i b komplanarne prave.*

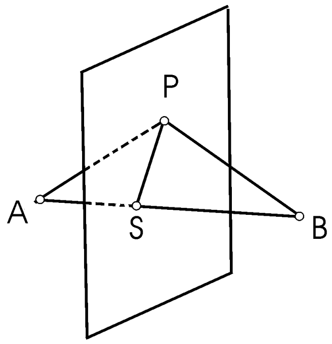


Slika 4.33.

Dokaz. Označimo sa A i B (slika 4.33) prodorne tačke redom pravih a i b kroz ravan π, sa P proizvoljnu tačku prave a različitu od tačke A a sa

c pravu ravni π koja sadrži tačku B i upravna je na pravoj AB. Prema teoremi o trima normalama PB upravna na c. Prema tome, prave PB, AB i b su tri prave upravne na pravu c u tački B, te sve tri prema teoremi 4.8.7. pripadaju jednoj ravni α. Prava a sa ravni α ima dve zajedničke tačke P i A pa i ona pripada ravni α. □

Definicija 4.8.4. Ravan koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravu AB nazivamo *medijalnom* ili *simetralnom ravni.*



Slika 4.34.

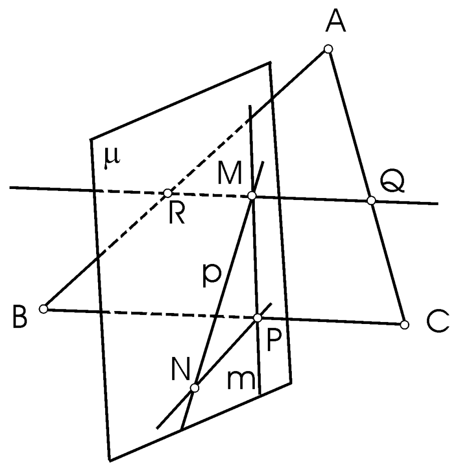
Kako duž ima jedinstveno središte i kako prava kroz zadatu tačku ima jedinstvenu normalnu ravan sledi da svaka duž ima jedinstvenu medijalnu ravan.

Teorema 4.8.10. *Tačka P pripada medijalnoj ravni duži AB ako i samo ako važi $PA \cong PB$.*

Dokaz. Neka je P (slika 4.34) proizvoljna tačka za koju je $PA \cong PB$. Označimo sa S središte duži AB. Tada je $(A, S, P) \cong (B, S, P)$. Dakle naporedni uglovi $\measuredangle ASP$ i $\measuredangle BSP$ su podudarni, a samim tim i pravi. Prema tome $PS \perp AB$, tj. tačka P pripada ravni koja prolazi kroz tačku S i upravna je na pravoj AB, tj. tačka P pripada medijalnoj ravni duži AB.

Obratno, neka tačka P pripada medijalnoj ravni duži AB i neka je $P \neq S$. Za trouglove ΔASP i ΔBSP je zadovoljeno $SP \equiv SP$, $SA \cong SB$ i $\measuredangle ASP \cong \measuredangle BSP$, pa su oni podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, odakle sledi $PA \cong PB$ □

Teorema 4.8.11. *Prava određena središtima Q i R stranica AC i AB trougla ΔABC upravna je na medijalnu ravan μ treće stranice tog trougla.*



Slika 4.35.

Dokaz. Prema teoremi 4.8.3. medijatrisa m (slika 4.35.) stranice BC trougla ΔABC je upravna na pravu QR određenu središtima Q i R redom stranica AC i AB. Označimo sa P i M presečne tačke medijatrise m redom sa pravama BC i QR a sa n pravu upravnu na ravan trougla ΔABC u tački M. Neka je N proizvoljna tačka prave n razliv̌ cita od tačke M. Tada je prava $p \equiv MN$, prema teoremi o trima normalama, upravna na pravu QR. Dakle, prava QR je upravna na dvema pravama p i m medijalne ravni μ, odakle prema Košijevom stavu sledi da je QR upravna na medijalnu ravan μ. $\square$

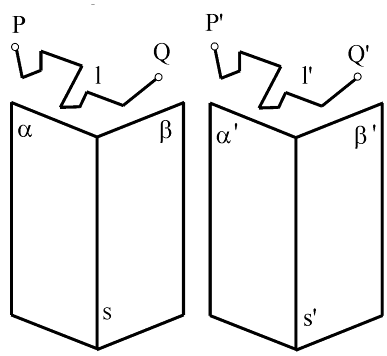
Glava 5

Podudarnost geometrijskih likova u S^3

5.1 Podudarnost diedara

Teorema 5.1.1. *U izometrijskoj transformaciji prostora S^3 diedru odgovara diedar.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija prostora S^3 i Ω diedar sa pljosnima α i β. U izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ poluravnima α i β sa zajedničkim rubom s odgovaraju neke poluravni α' i β' sa zajedničkim rubom s'. Neka su P i Q dve proizvoljne tačke iinutar diedra Ω a P' Q' tačke koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju redom tačkama P i Q.

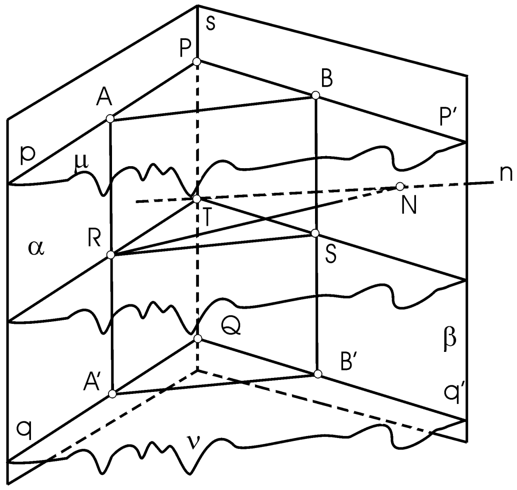


Slika 5.1.

Neka je l poligonalna linija koja spaja tačke P i Q (slika 5.1) i koja nema zajedničkih tačaka sa diedarskom površi $\alpha\beta$. Takva poligonalna linija postoji jer su tačke P i Q sa iste strane diedarske površi $\alpha\beta$. Slika $l' = \mathcal{I}(l)$ poligonalne linije l u izometriji $\mathcal{I}$ je neka poligonalna linija koja koja nema zajedničkih tačaka sa diedarskom površi $\alpha'\beta'$ te su tačke P' i Q' sa iste strane diedarske površi $\alpha'\beta'$.

Neka je Ω' diedar u kome su tačke P' i Q' sa pljosnima α' i β'. Tada unutrašnjim tačkama diedra Ω odgovaraju tačke koje su unutar diedra Ω'. Nije teško ustanoviti da je svaka tačka diedra Ω' slika neke tačke diedra Ω u izometriji $\mathcal{I}$. Dakle u izometriji diedru odgovara diedar, tj. lik koji je podudaran nekom diedru je takodje diedar. $\square$

Teorema 5.1.2. *Ravni upravne na ivicu nekog diedra seku taj diedar po podudarnim uglovima.*



Slika 5.2.

Dokaz. Označimo sa μ i ν ravni upravne na ivicu s diedra $\alpha\beta$ redom u tačkama P i Q. Neka su p i p' presečne poluprave ravni μ sa poluravnima α i β, a q i q' (slika 5.2) presečne poluprave ravni ν sa α i β. Treba pokazati da je $\measuredangle pp' \cong \measuredangle qq'$.

Označimo sa A, A', B, B' tačke polupravih p, p', q i q' redom, takve da je $PA \cong PB \cong QA' \cong QB'$. Neka je T središte duži PQ a R i S redom središta duži AA' i BB'. Četvorouglovi $PQA'A$ i $PQB'B$ su medjusobom podudarni Sakerijevi četvorouglovi. Kako srednja linija Sakerijevog četvorougla razlaže taj četvorougao na dva Lambertova četvorougla, to su četvorouglovi $QTRA'$, $PTRA$, $QTSB'$ i $PTSB$ Lambertovi.

Uglovi $\measuredangle PTR$ i $\measuredangle PTS$ su pravi pa je prava $s \equiv PQ$ prema Košijevom stavu upravna na ravan RTS. Ako je n prava ravni RTS upravna na RT u tački T, onda je ona upravna i na pravu s. Na osnovu teoreme o trima normalama sledi da je prava NR upravna na pravu AA', gde je N proizvoljna tačka prave n. Odavde sledi da je $AA' \perp RTS$. Analogno, $BB' \perp RTS$, pa prave AA' i BB' pripadaju jednoj ravni. Iz podudarnosti Lambertovih četvorouglova $PTRA$ i $PTSB$ sledi $RA \cong SB$, pa je četvorougao $RSBA$ Sakerijev. Analogno, i četvorougao $RSB'A'$ je Sakerijev. Iz podudarnosti ova dva Sakerijeva četvorougla sledi $AB \cong A'B'$. Prema tome, trouglovi ΔPAB i $\Delta QA'B'$ su podudarni, odakle sledi $\measuredangle APB \cong \measuredangle A'QB'$, tj. $\measuredangle pp' \cong \measuredangle qq'$. □

Definicija 5.1.1. Ugao po kome neka ravan normalna na ivicu diedra seče taj diedar nazivamo *uglom tog diedra* ili *nagibnim uglom diedra.*

Takođe važi:

Teorema 5.1.3. *Dva diedra su podudarna ako i samo ako su uglovi tih diedara medjusobom podudarni.*

Dokaz. Neka su diedri $\alpha\beta$ i $\alpha'\beta'$ podudarni. Tada postoji izometrija $\mathcal{I}$ takva da je $\mathcal{I}(\alpha\beta) = \alpha'\beta'$. Izometrija $\mathcal{I}$ preslikava ravan π, upravnu na ivicu s diedra $\alpha\beta$, na ravan π' upravnu na ivicu s' diedra $\alpha'\beta'$. Dakle, nagibni ugao diedra $\alpha\beta$ koji pripada ravni π, preslikava se izometrijom $\mathcal{I}$ na nagibni ugao diedra $\alpha'\beta'$ koji pripada ravni π', odakle sledi da su nagibni uglovi ova dva diedra međusobno podudarni.

Obratno, neka su nagibni uglovi $\measuredangle ab$ i $\measuredangle a'b'$ redom didara $\alpha\beta$ i $\alpha'\beta'$ međusobom podudarni. Tada postoji izometrija $\mathcal{I}$ takva da je $\mathcal{I}(\measuredangle ab) = \measuredangle a'b'$. U tom slučaju se izometrijom $\mathcal{I}$ prava s, upravna u temenu ugla $\measuredangle ab$ na ravan tog ugla, preslikava u pravu s' upravnu u temenu ugla $\measuredangle a'b'$ na ravan ugla $\measuredangle a'b'$. Izometrijom $\mathcal{I}$ se i poluravni α i β sa zajedničkim rubom s preslikavaju na pluravni α' i β' sa zajedničkim rubom s', pri čemu poluravni α' i β' sadrže redom poluprave a' i b'. To znači da je $\mathcal{I}(\alpha\beta) = \alpha'\beta'$, tj. diedri $\alpha\beta$ i $\alpha'\beta'$ su međusobno podudarni. □

Definicija 5.1.2. Ako su $\alpha\beta$ i $\mu\nu$ dva diedra, i ako postoji poluravan ρ koja pripada diedru $\mu\nu$, a rub poluravni ρ se poklapa sa ivicom tog diedra, tako da je $\alpha\beta \cong \mu\rho$, onda je diedar $\alpha\beta$ *manji* od diedra $\mu\nu$. Takođe, možemo reći i da je diedar $\mu\nu$ *veći* od diedra $\alpha\beta$.

Definicija 5.1.3. Diedar je *oštar, prav* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je manji, jednak ili veći od svog naporednog diedra.

Na osnovu izloženog sledi:

Teorema 5.1.4. *Diedar je oštar, prav ili tup u zavisnosti od toga da li je njegov nagibni igao oštar, prav ili tup.*

Definicija 5.1.4. Diedar $\alpha\beta$ je *jednak zbiru diedara* $\mu\nu$ i $\rho\tau$, ako postoji poluravan γ koja razlaže diedar $\alpha\beta$ na diedre $\alpha\gamma$ i $\gamma\beta$ tako da je $\alpha\gamma \cong \mu\nu$ i $\gamma\beta \cong \rho\tau$.

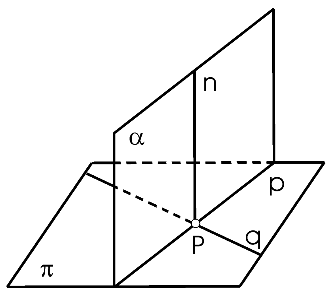
Prethodna definicija se induktivno može proširiti i na $n > 2$ diedara.

5.2 Ortogonalnost ravni

Definicija 5.2.1. Neka se ravni α i β seku po pravoj s. Te dve ravni određuju dva para unakrsnih diedara. Ako su pomenuti diedri pravi, onda kažemo da je ravan α *ortogonalna, normalna ili upravna* na ravan β. To simbolički označavamo $\alpha \perp \beta$.

Iz definicije neposredno sledi da je relacija ortogonalnosti ravni simetrična. Navedimo sada još nekoliko važnih osobina ove relacije.

Teorema 5.2.1. *Ako je prava n ortogonalna na ravan π, tada je svaka ravan koja sadrži pravu n upravna na ravan π.*

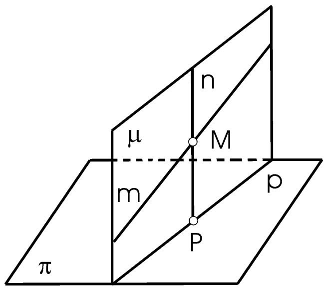


Slika 5.3.

Dokaz. Kako je prava n upravna na ravan π (slika 5.3), to ona prodire ravan π u nekoj tački P. Ozněimo sa α ravan koja sadrži pravu n. Tačka

P je zajednička tačka ravni α i π. Sledi, rvni α i π se seku po pravoj p koja sadrži tačku P. Označimo sa q pravu ravni π upravnu u tački P na pravu p. Prave n i q sadržane su redom u ravnima α i π i u istoj tački P upravne na presečnu pravu p tih ravni te one određuju uglove diedra koje zahvataju ravni α i π. Kako je $n \perp \pi$, $q \in \pi$ i $S \in q$ to sledi $n \perp q$, tj. uglovi diedara koje zahvataju ravni α i π su pravi. Dakle, $\alpha \perp \pi$. □

Teorema 5.2.2. *Ako prava m ne pripada ravni π, tada postoji jedinstvena ravan ν koja sadrži pravu m.*

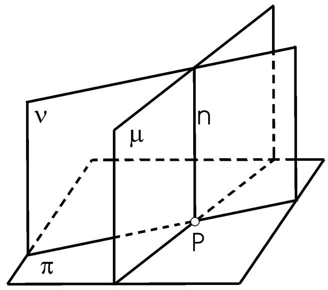


Slika 5.4.

Dokaz. Neka je M proizvoljna tačka prave m i n prava koja sadrži tačku M i upravna je na ravni π (slika 5.4). Prave m i n imaju zajedničku tačku M te određuju neku ravan μ. Kako ravan μ sadrži pravu n ortogonalnu na ravan π, to je na osnovu prethodne teoreme $\mu \perp \pi$. Ostaje još da dokažemo jedinstvenost, tj. da je ravan μ jedina sa osobinom da sadrži pravu m i upravna je na ravan π. Pretpostavimo da je ravan μ' još jedna takva ravan. Kako je $\mu \perp \pi$ i $\mu' \perp \pi$ to ravni μ i μ' seku ravan π respektivno po pravama p i p'. Ako je n' prava ravni μ' koja sadrži tačku M i upravna je na pravoj p', tada je $n' \perp \pi$ i $n' \neq n$. Dakle, postoje dve prave n i n' koje sadrže tačku M i upravne su na ravan π, što je nemoguće. □

Teorema 5.2.3. *Ako su dve razne ravni μ i ν upravne na ravan π, tada je i njihova presečna prava n upravna na ravan π.*

Dokaz. Pretpostavimo da prava n nije upravna na ravan π. Tada bi prema prethodnoj teoremi postojala jedinstvena ravan koja sadrži pravu n i upravna je na ravni π. To znači da bi se ravni μ i ν, od kojih svaka sadrži pravu n i upravna je na ravan π, poklapale. Međutim, to je nemoguće jer se po pretpostavci teoreme ravni μ i ν seku po pravoj n. Dakle $n \perp \pi$ (slika 5.5). □



Slika 5.5.

5.3 Triedar. Podudarnost triedara

Lik podudaran rogljastoj površi je, kao što smo mogli videti rogljasta površ, rogalj je podudaran roglju. U ovom odeljku zadržaćemo se na trostrane rogljaste površi i trostrane rogljeve, tj. na *triedarske površi* i *triedre*. Naravno i za triedarske površi i triedre važi

Teorema 5.3.1. *Triedarska površ je podudarna triedarskoj površi, a triedar je podudaran triedru.*

Definicija 5.3.1. *Polarnim triedrom* datog konveksnog triedra $Oabc$ nazivamo triedar $Oa'b'c'$ koji sa triedrom $Oabc$ ima zajedničko teme O i čije su ivice a', b' i c' upravne redom na pljosnima bc, ca i ab i pripadaju poluprostorima redom sa rubovima bc, ca i ab, kojima ne pripada triedar $Oabc$.

Za triedre važe sledeća tvrđenja:

Teorema 5.3.2. *Svaki konveksan triedar je polarni triedar svog polarnog triedra.*

Teorema 5.3.3. *Polarni triedar datog konveksnog triedra je konveksan.*

Teorema 5.3.4. *Dva konveksna triedra su podudarna ako i samo ako su podudarni njihovi odgovarajući polarni triedri.*

Teorema 5.3.5. *Zbir ugla bilo kog diedra konveksnog triedra $Oabc$ i odgovarajućeg ivičnog ugla polarnog triedra $Oa'b'c'$ jednak je zbiru dvaju pravih uglova.*

Sve što smo dosad naveli za triedre može se uopštiti i za rogljeve čiji je broj pljosni veći od tri. Sada ćemo dokazati još nekoliko stavova o triedrima.

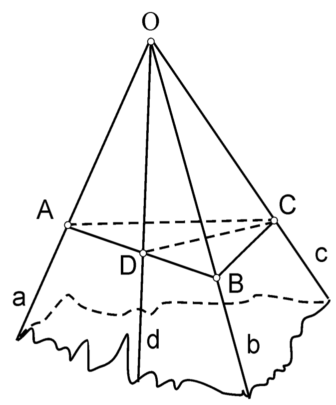
Teorema 5.3.6. *Konveksni triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ su podudarni ako i samo ako postoje tačke A, B, C i A', B', C' redom na ivicama a, b, c i a', b', c' takve da važi $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$.*

Dokaz. Ako su triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ podudarni, tada postoji izometrija $\mathcal{I}$, takva da je $\mathcal{I}(Oabc) = O'a'b'c'$. Tada se proizvoljne tačke $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ preslikavaju izometrijom $\mathcal{I}$ na tačke $A' \in a'$, $B' \in b'$ i $C' \in c'$ i pritom važi $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$.

Obratno, ako na ivicama a, b, c, a', b' i c' triedara $Oabc$ i $O'a'b'c'$ postoje redom tačke A, B, C, A', B', C' takve da je $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$, tada postoji jedinstvena izometrija prostora (Teorema 4.2.7.) koja tačke O, A, B i C prevodi redom u tačke O', A', B' i C'. To upravo i znači da su triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ podudarni. $\square$

Teorema 5.3.7. *Zbir dva ivična ugla konveksnog triedra veći je od trećeg ivičnog ugla tog triedra.*

Dokaz. Neka je $Oabc$ konveksan triedar. Treba pokazati da je $\measuredangle(b, c) + \measuredangle(c, a) > \measuredangle(a, b)$. Ako je $\measuredangle(b, c) > \measuredangle(a, b)$ ili $\measuredangle(c, a) > \measuredangle(a, b)$ dokaz je trivijalan. Neka je $\measuredangle(b, c) < \measuredangle(a, b)$ i $\measuredangle(c, a) < \measuredangle(a, b)$. Tada u uglu $\measuredangle(a, b)$ postoji poluprava d sa početkom u tački O koja razlaže taj ugao na uglove $\measuredangle(d, a)$ i $\measuredangle(d, b)$ tako da je $\measuredangle(d, a) \cong \measuredangle(c, a)$.

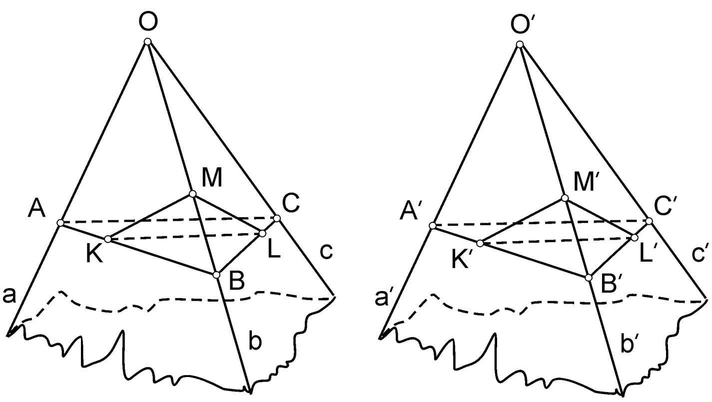


Slika 5.6.

Neka su A i B (slika 5.6) proizvoljne tačke polupravih a i b. Tada poluprava l seče duž AB u tački D. Označimo sa C tačku poluprave c takvu da je $OC \cong OD$. Tada su trouglovi ΔAOD i ΔAOC podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova, odakle sledi $AD \cong AC$. Sada iz $DB = AB - AD$ sledi $DB = AB - AC$, a kako još važi $AB - AC < BC$, to sledi $DB < BC$. Sada je, na osnovu teoreme 4.6.3. $\measuredangle(d, b) < \measuredangle(b, c)$, pa je $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(d, a) + \measuredangle(d, b) < \measuredangle(b, c) + \measuredangle(c, a)$. □

Postoji šest stavova o podudarnosti triedara u apsolutnoj geometriji.

Teorema 5.3.8. (Prvi stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su dva ivična ugla i diedar zahvaćen njima prvog triedra podudarni odgovarajućim uglovima i diedru drugog triedra.*



Slika 5.7.

Dokaz. Neka za triedre $Oabc$ i $O'a'b'c'$ (slika 5.7) važi $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(a', b')$, $\measuredangle(b, c) = \measuredangle(b', c')$ i $dij(b) \cong dij(b')$. Neka su A, B, C, A', B', C' tačke redom polupravih a, b, c, a', b', c' takve da je $OA = OB = OC = O'A' = O'B' = O'C'$. Tada je $\Delta OAB \cong \Delta O'A'B'$ i $\Delta OBC \cong \Delta O'B'C'$. Nije teško zaključiti da postoje tačke K, L i M redom duži AB, BC i OB takve da je ravan KLM upravna na pravu b. Označimo sa K', L', i M' tačke polupravih $B'A'$, $B'C'$ $B'O'$ redom, takve da je $BK = B'K'$, $BL = B'L'$ i $BM = B'M'$. Tada je $\Delta KBM \cong \Delta K'B'M'$ i $\Delta LMB \cong \Delta L'M'B'$. Dakle, trouglovi $\Delta K'B'M'$ i $\Delta L'M'B'$ su pravougli sa pravim uglovima god temena M', odakle sledi da je ravan $K'L'M'$ upravna na pravu b'. Trouglovi ΔKML i $\Delta K'M'L'$ su podudarni prema prvom stavu o podudarnosti trouglova, pa je

$KL = K'L'$. Sada je $\Delta KBL \cong \Delta K'B'L'$, odakle sledi $\measuredangle KBL = \measuredangle K'B'L'$, tj. $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ pa su i trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ međusobom podudarni. Sada je $AC = A'C'$ pa je $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$ odakle prema teoremi 5.3.6. sledi $Oabc = O'a'b'c'$. □

Teorema 5.3.9. (Drugi stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su jedan ivični ugao i na njemu nalegli diedri prvog triedra podudarni odgovarajućem uglu i diedrima drugog triedra.*

Dokaz. Sledi iz teorema 5.3.4. i 5.3.5. i prvog stava o podudarnosti triedara. □

Teorema 5.3.10. (Treći stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su odgovarajući ivični uglovi tih triedara međusobom podudarni.*

Dokaz. Neposredno sledi iz teoreme 5.3.6. □

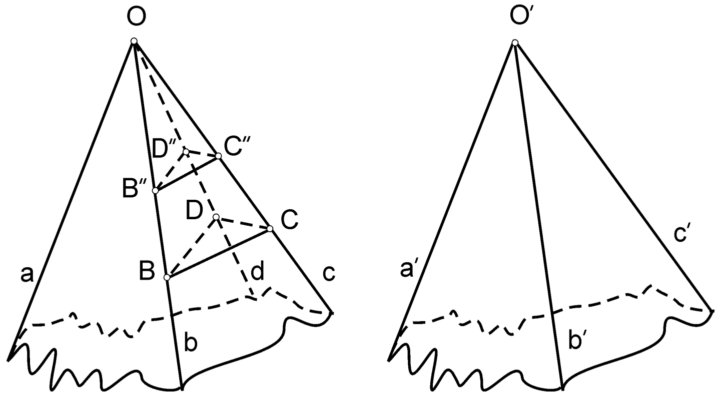
Teorema 5.3.11. (Četvrti stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su odgovarajući diedri tih triedara međusobom podudarni.*

Dokaz. Sledi iz trećeg stava i teorema 5.3.4. i 5.3.5.. □

Teorema 5.3.12. (Peti stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su dva ivična ugla, koja nisu oba prava, i diedar naspram jednog od njih prvog triedra podudarni odgovarajućim uglovima i diedru drugog triedra, a diedri naspram drugog para odgovarajućih ivičnih uglova oba oštra, oba prava ili oba tupa.*

Dokaz. Neka su ivični uglovi ab i bc i diedar sa ivicom a triedra $Oabc$ podudarni redom ivičnim uglovima $a'b'$ i $b'c'$ i diedru sa ivicom a' triedra $O'a'b'c'$, a diedri sa ivicama c i c' oba oštra, oba prava ili oba tupa.

Ako bi ivica b bila upravna na pljosan ac, onda bi ivični uglovi ab i ac bili pravi. Pretpostavimo da b nije upravna na pljosan bc i da pljosni ac i $a'c'$ nisu podudarne. Neka je npr. $ac > a'c'$. U tom slučaju postoji poluprava d (slika 5.8) pljosni ac takva da je $ad \cong a'c'$. Triedri $Oabd$ i $O'a'b'c'$ imaju podudarne dva ivična ugla i njima zahvaćene diedre, pa su podudarni prema prvom stavu o podudarnosti triedara. Odavde sledi $bd \cong b'c'$. Kako je još $b'c' \cong bc$ sledi $bc \cong bd$. Označimo sa B'', C'', D'' tačke redom polupravih b, c i d takve da je $OB'' \cong OC'' \cong OD''$. Tada su četvorke tačaka (O, B'', C'', D'') i



Slika 5.8.

(O, B'', D'', C'') međusobno podudarne, odakle sledi da su diedri sa ivicama c i d triedra $Obcd$ podudarni. Dakle, diedri sa ivicom d redom triedara $Obad$ i $Obcd$ su oba oštra, oba prava ili oba tupa. Neka su diedri sa ivicom d oba prava i neka je B proizvoljna tačka poluprave b a C i D podnožja normala iz tačke B redom na prave c i d. Tada su prave BC i BD upravne na pravama ravni ac, odakle sledi da trougao ΔBCD ima dva prava ugla $\measuredangle BCD$ i $\measuredangle BDC$, što je nemoguće. Dakle, $ac \cong a'c'$, pa su triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ podudarni na osnovu četvrtog stava o podudarnosti triedara. $\square$

Teorema 5.3.13. (Šesti stav o podudarnosti triedara) *Dva triedra su podudarna ako i samo ako su dva dva diedra, koja nisu oba prava, i ivični ugao naspram jednog od njih prvog triedra podudarni odgovarajućim diedrima i ivičnom uglu drugog triedra, a ivični uglovi naspram drugog para odgovarajućih diedara oba oštra, oba prava ili oba tupa.*

Dokaz. Sledi iz petog stava i teorema 5.3.4. i 5.3.5.. $\square$

Glava 6

Izometrijske transformacije ravni $\mathbf{S}^2$

6.1 Specifična svojstva izometrijskih transformacija

Do sada su razmatrane izometrijske transformacije u najopštijem obliku. Sada ćemo se ograničiti na izometrijske transformacije ravni S^2.

Definicija 6.1.1. Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni S^2 je *direktna* ako ne menja orjentaciju ravni S^2. U suprotnom ona je *indirektna*.

Teorema 6.1.1. *Skup svih direktnih izometrijskih transformacija ravni S^2, $G(\mathcal{I}^+)$ predstavlja podgrupu grupe svih izometrija $G(\mathcal{I})$ prostora S^2.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ direktne izometrije prostora S^2. Tada je $\mathcal{I}_2^{-1}$, a samim tim i $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2^{-1}$ direktna izometrija ravni S^2. $\square$

Napomena. Indirektne izometrijske transformacije ne mogu činiti grupu jer je proizvod dve indirektne izometrije direktna izometrija. Navedena klasifikacija predstavlja prvu, tj. najgrublju klasifikaciju izometrijskih transformacija ravni S^2. Dalja klasifikacija izometrijskih transformacija izvodi se prema broju invarijantnih tačaka koje razmatrana izometrija poseduje.

6.2 Osna refleksija ravni S^2

Definicija 6.2.1. *Osnom refleksijom ravni* S^2 u odnosu na pravu p nazivamo izometrijsku transformaciju $\mathcal{S}_p$ koja nije koincidencija i u kojoj je svaka tačka prave p invarijantna. Prava p je osa refleksije $\mathcal{S}_p$.

Napomena. Iz definicije sledi da pored prave p u ravni S^2 osna refleksija nema invarijantnih tačaka. Reč refleksija korišćena je umesto reči simetrija u pojmu osna refleksija jer pojam simetrije u geometrijskoj teoriji izometrijskih transformacija ima šire značenje i označava svaku izometrijsku transformaciju koja lik Φ datog prostora prevodi u lik Φ' a prostor u samog sebe.

Sada ćemo navesti neke osobine osne refleksije.

Teorema 6.2.1. *Ako su P i P' korespodentne tačke osne refleksije $\mathcal{S}_p$ ravni S^2 tada je prava p medijatrisa duži PP'.*

Definicija 6.2.2. *Medijatrisa (simetrala)* duži je prava upravna na toj duži u njenom središtu. *Medijalna (simetrijska) ravan* duži je ravan upravna na toj duži u njenom središtu.

Teorema 6.2.2. *Osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni S^2 je jednoznačno određena ako je data njena osa p ili jedan par odgovarajućih neistovetnih tačaka P i P'.*

Teorema 6.2.3. *Osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni S^2 je indirektna izometrijska transformacija.*

Teorema 6.2.4. *Osna refleksija $\mathcal{S}_s$ ravni S^2 je involuciona izometrijska transformacija ($\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s = \varepsilon$).*

Teorema 6.2.5. *Ako je izometrijska trmisformacija $\mathcal{I}$ ravni S^2 indirektna i involuciona tada je $\mathcal{I}$ osna refleksija ravni S^2.*

Teorema 6.2.6. *Ako indirektna izometriska transformacija $\mathcal{I}$ ravni S^2 poseduje invarijantnu tačku O tada je $\mathcal{I}$ osna refleksija čija osa sadrži tačku O.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija a koincidencija ε direktna izometrijska transformacija to je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Prema tome u ravni S^2 postoji tačka P takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Tada tačke P i P' određuju neku duž PP' u ravni S^2. Neka je p medijatrisa te duži. Kako u izometriji $\mathcal{I}$ tački O odgovara sama tačka O, a tački P odgovara tačka P' biće $OP \cong OP'$. Dakle tačka O pripada medijatrisi p duži PP'. Dokazaćemo da izometrija $\mathcal{I}$ predstavlja osnu refleksiju sa osom p, tj. da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$. Kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ je direktna izometrijska transformacija sa dve fiksne tačke pa predstavlja koincidenciju, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \varepsilon$. Odavde je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$. □

6.3 Osnosimetrični likovi u ravni S^2

Definicija 6.3.1. Lik ω u ravni S^2 je *osnosimetričan* ako postoji osna refleksija $\mathcal{S}_p$ koja preslikava S^2 u S^2 tako da je $\mathcal{S}_p(\omega) = \omega$. Prava p predstavlja u tom slučaju *osu simetrije lika* ω.

Navešćemo neke osobine osnosimetričnih likova ravni S^2

Teorema 6.3.1. *Svaka duž AB u ravni S^2 ima dve i samo dve ose simetrije: pravu koja sadrži duž AB i medijatrisu duži AB.*

Teorema 6.3.2. *Ugao u ravni S^2 ima jedinstvenu osu simetrije - pravu koja sadrži bisektrisu tog ugla.*

Teorema 6.3.3. *Ako su u ravni S^2 zadate dve prave a i b koje se seku u tački O onda postoje dve i samo dve ose simetrije s_1 i s_2 takve da je $\mathcal{S}_{s_1}(a) = b$ i $\mathcal{S}_{s_2}(a) = b$ pri čemu je $s_1 \perp s_2$.*

Teorema 6.3.4. *Ako su a i b dve disjunktne prave ravni S^2 tada postoji jedinstvena prava s u toj ravni takva da je $\mathcal{S}_s(a) = b$.*

6.4 Predstavljanje izometrijskih transformacija ravni S^2 pomoću osnih refleksija

Teorema 6.4.1. *Svaka izometrijska transformacija ravni S^2 može se predstaviti u obliku kompozicije najviše tri osne refleksije.*

Dokaz. S obzirom na broj invarijantnih tačaka razlikujemo četiri slučaja koji se mogu javiti u pogledu bilo koje izometrije $\mathcal{I}$ ravni S^2.

(i) Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni S^2 poseduje bar tri nekolinearne invarijantne tačke, označimo ih sa A, B i C. Tada je $\mathcal{I}(A) = A$, $\mathcal{I}(B) = B$ i $\mathcal{I}(C) = C$. Neka je p proizvoljna prava ravni S^2. Osna simetrija $\mathcal{S}_p$ je involucija, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \varepsilon$. Izometrijska transfrmacija $\mathcal{I}$ poseduje tri nekolinearne invarijantne tačke pa predstavlja koincidenciju, tj. $\mathcal{I} = \varepsilon$. Prema tome imamo $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$, tj. u ovom slučaju izometrija $\mathcal{I}$ se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija.

(ii) Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni S^2 posoduje dve razne invarijantne tačke A i B, tj. $\mathcal{I}(A) = A$ i $\mathcal{I}(B) = B$. S obzirom da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ima dve invarijantne tačke A i B to je svaka tačka prave

AB u transformaciji $\mathcal{I}$ invarijantna. Van prave AB izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka jer bi se u protivnom ovaj slučaj sveo na prethodni. Prema tome izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nije koincidencija te postoji tačka P ravni S^2 takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Neka je p medijatrisa duži PP'. Kako u izometriji $\mathcal{I}$ tačkama A, B i P odgovaraju redom tačke A, B i P', to tačke A i B pripadaju medijatrisi duži PP'. Izometrijska transformacija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ ravni S^2 poseduje tri invarijantne nekolinearne tačke A, B i P pa predstavlja koincidenciju, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \varepsilon$. Množenjem poslednje jednakosti sa $\mathcal{S}_p$ sa leve strane i uzimajući u obzir involutivnost preslikavanja $\mathcal{S}_p$ dobijamo da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ čime je dokaz završen i u slučaju (ii).

(iii) Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje jednu invarijantnu tačku, označimo je sa A. Prema tome izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nije koincidencija pa postoji tačka P takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Označimo sa p medijatrisu duži PP'. Kako u izometriji $\mathcal{I}$ tačkama A i P odgovaraju redom tačke A i P' to tačka A pripada medijatrisi p duži PP'. Izometrijska transformacija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ poseduje dve invarijantne tačke A i P pa prema slučaju (ii) predstavlja osnu refleksiju, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, pa je i ovaj slučaj dokazan.

(iv) Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka. Tada je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ pa postoji tačka P ravni S^2 takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Kako su P i P' dve razne tačke one određuju duž PP' u ravni S^2. Neka je prava p medijatrisa te duži. Izometrijska transformacija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ poseduje jednu invarijantnu tačku P pa se prema dokazanom slučaju (iii) može predstaviti kao proizvod dve osne refleksije. Nekaje $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. Odavde množenjem sa $\mathcal{S}_p$ sa leve strane dobijamo $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, čime je teorema dokazana. □

Primedba. Svaka izometrijska transformacija se može predstaviti kao kompozicija bilo kog broja osnih refleksija ali je od interesa da taj broj bude minimalan.

Definicija 6.4.1. Svaku kompoziciju konačnog broja osnih refleksija ravni S^2 kojom je predstavljena neka izometrijska tranformacija $\mathcal{I}$ te ravni nazivamo *osno-refleksivnom ili simetrijskom reprezentacijom* te izometrije. Simetrijsku reprezentaciju izometrije $\mathcal{I}$ ravni S^2 sastavljenu iz najmanjeg mogućeg broja osnih simetrija naziamo *minimalnom ili optimalnom simetrijskom reprezentacijom* te izometrije.

6.5 Transmutacija izometrijskih transformacija i automorfizmi grupe G($\mathcal{I}$)

Definicija 6.5.1. Neka su data preslikavanja f i g takva da: $f : X \mapsto X'$, $g : X \mapsto Y$ i $g : X' \mapsto Y'$. *Transmutacijom* ili *preobraženjem* funkcije f funkcijom g nazivamo kompoziciju $gfg^{-1} = f^g$ pri čemu je $g^{-1}(Y) = X$, $f(X) = X'$, $g(X') = Y'$ i g je "1-1" preslikavanje.

Teorema 6.5.1. (O transmutaciji osnih refleksija) *Neka je $\mathcal{S}_p$ bilo koja osna refleksija ravni S^2 i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija te ravni. Tada je $\mathcal{I}\mathcal{S}_p\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p)}$, tj. $\mathcal{S}_p^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p)}$*

Dokaz. Prema definiciji osne refleksije za svaku tačku X prave $\mathcal{I}(p)$ je $\mathcal{S}_p(\mathcal{I}^{-1}(X)) = \mathcal{I}^{-1}(X)$ jer je $\mathcal{I}^{-1}(X) \in p$, tj. $\mathcal{S}_p\mathcal{I}^{-1}(X) = \mathcal{I}^{-1}(X)$. Množenjem obeju strana sa $\mathcal{I}$ dobijamo $\mathcal{I}\mathcal{S}_p\mathcal{I}^{-1}(X) = X$, te indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}\mathcal{S}_p\mathcal{I}^{-1}$ ima invarijantnu tačku pa predstavlja osnu refleksiju. U toj osnoj refleksiji svaka tačka X prave $\mathcal{I}(p)$ je invarijantna te je $\mathcal{I}\mathcal{S}_p\mathcal{I}^{-1} = S_{\mathcal{I}(p)}$. □

Teorema 6.5.2. *Neka je data proizvoljna kompozicija osnih refleksija $\mathcal{S}_{p_1}\mathcal{S}_{p_2}\ldots\mathcal{S}_{p_n}$. Tada je za proizvoljnu izometriju $\mathcal{I}$:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}_{p_1}\mathcal{S}_{p_2}\ldots\mathcal{S}_{p_n})\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_1)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_2)}\ldots\mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_n)}.$$

Dokaz. U kompoziciji $\mathcal{S}_{p_1}\mathcal{S}_{p_2}\ldots\mathcal{S}_{p_n}$ između svake dve susedne osne refleksije možemo ubaciti koincidenciju u obliku $\varepsilon = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}$. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(\mathcal{S}_{p_1}\mathcal{S}_{p_2}\ldots\mathcal{S}_{p_n})\mathcal{I}^{-1} = \\ &\qquad \mathcal{I}\mathcal{S}_{p_1}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_{p_2}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\ldots\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_{p_n}\mathcal{I}^{-1} = . \\ &\qquad \mathcal{S}_{p_1}^{\mathcal{I}}\mathcal{S}_{p_2}^{\mathcal{I}}\ldots\mathcal{S}_{p_n}^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_1)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_2)}\ldots\mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_n)}\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Navedene teoreme predstavljaju deo opštije teoreme o automorfizmima grupe izometrija $G(\mathcal{I})$. Naime prva teorema je primenljiva na proizvoljne izometrije i u tom slučaju njena formulacija bi bila sledeća:

Teorema 6.5.3. *Neka je $\mathcal{I}_1$ izometrijska transformacija prostora S^n sa skupom invarijantnih tačaka A. Tada je za proizvoljnu izometriju $\mathcal{I}$ prostora S^n transformacija $\mathcal{I}\mathcal{I}_1\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}_1^{\mathcal{I}}$ takođe izometrija prostora S^n istog tipa kao transformacija $\mathcal{I}_1$ sa skupom invarijantnih tačaka $\mathcal{I}(A)$.*

Takođe primenjena na niz izometrijskih transformacija $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$ transmutacija daje novu izometrijsku transformacijn koja je proizvod izometrijskih transformacija istog tipa dobijenih pojedinačnim transmutacijama svake od izometrijskih transformacija u nizu $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$, tj.

$$\mathcal{I}(\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_n)\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}_1^{\mathcal{I}}\mathcal{I}_2^{\mathcal{I}}\ldots\mathcal{I}_n^{\mathcal{I}}.$$

Pri tome ako skupovi A_1, A_2, ..., A_n predstavljaju respektivno skupove invarijantnih tačaka transformacija $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots \mathcal{I}_n$, tada će skupovi $\mathcal{I}(A_1)$, $\mathcal{I}(A_2),\ldots, \mathcal{I}(A_n)$ predstavljati respektivno skupove invarijantnih tačaka transformacija dobijenih transmutacijom.

Nije teško dokazati da važi i sledeća

Teorema 6.5.4. *Neka su $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$, osne refleksije sa osama a i b. Relacija $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ važi ako i samo ako je $a \perp b$.*

6.6 Pramenovi pravih u ravni S^2

Definicija 6.6.1. Skup $\mathcal{L}$ svih pravih neke ravni S^2 nazivamo *pramenom pravih* ako za svake tri prave a, b, c skupa $\mathcal{L}$ kompozicija $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$.

Iz definicije neposredno zaključujemo sledeće:

(i) Ako su a, b, c tri prave jednog pramena i ako $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ tada i d pripada tom pramenu pravih.

(ii) Ako prave a, b, c pripadaju jednom pramenu $\mathcal{L}$ tada i ose refieksija $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ pripadaju pramenu $\mathcal{L}$.

(iii) Za svaku tačku X u ravni S^2 postoji u pramenu pravih $\mathcal{L}$, tačno jedna prava p koja je sadrži.

(iv) Ako su a, b, c tri prave pramena $\mathcal{L}$ tada je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$.

Zaista, neka je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Tada je $\mathcal{S}_d^2 = \varepsilon$, pa je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \varepsilon$ Množenjem sa leve strane redom sa $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ dobijamo $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$.

Teorema 6.6.1. *Skup svih konkurentnih pravih jedne ravni predstavlja jedan pramen pravh.*

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{L}$, skup svih konkurentnih pravih posmatrane ravni i sa a, b, c ma koje tri prave tog skupa, a sa O njihovu zajedničku tačku. Tada je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a(O) = O$. S obzirom da je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ indirektna transformacija sa invarijantnom tačkom O, ona predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$, čija osa d sadrži tačku O, te prava d pripada skupu $\mathcal{L}$. Prema definiciji pramena, skup $\mathcal{L}$ tada predstavlja pramen pravih u posmatranoj ravni. $\square$

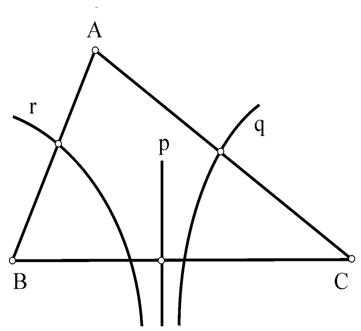
Definicija 6.6.2. Pramen konkurentnih pravih u ravni nazivamo *eliptičkim pramenom pravih.*

Teorema 6.6.2. *Skup svih pravih neke ravni S^2 upravnih na neku pravu s te ravni predstavlja pramen pravih.*

Definicija 6.6.3. Pramen pravih ravni S^2 upravnih na jednoj pravoj p nazivamo *hiperboličkim pramenom pravih*, a pravu p bazisnom pravom hiperboličkog pramena pravih.

Razmotrimo sada neke teoreme u vezi sa trouglovima.

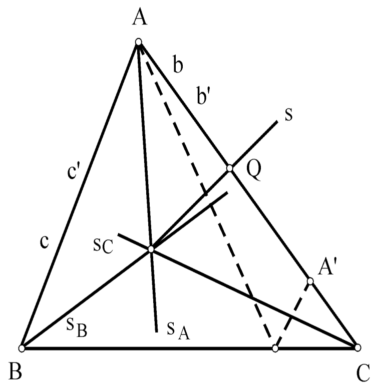
Teorema 6.6.3. *Medijatrise stranica trougla pripadaju jednom pramenu pravih.*



Slika 6.1.

Dokaz. Obeležimo sa p, q i r (slika 6.1) medijatrise redom stranica BC, CA i AB trougla ΔABC. U kompoziciji $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p$ tačka B je invarijantna, tj. $\mathcal{I}(B) = B$. S obzirom da je izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ indirektna i ima invarijantnu tačku B to je $\mathcal{I}$ neka osna refleksija. Označimo je sa $\mathcal{S}_s$. Dakle, $\mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Tada $B \in s$ i prave p, q, r po definiciji pripadaju istom pramenu pravih. $\square$

Dokaz koji smo izveli važi u Apsolutnoj geometriji. U Euklidskoj geometriji medijatrise stranica trougla se seku u jednoj tački, centru opisanog kruga oko trougla tj. pramen pravih određen medijatrisama je eliptički. U geometriji Lobačevskog medijatrise stranica trougla se ne moraju seći te ne možemo oko svakog trougla opisati krug.



Slika 6.2.

Teorema 6.6.4. *Ako su s_A, s_B i s_C simetrale unutrašnjih uglova trougla ΔABC tada one pripadaju jednom pramenu konkurentnih pravih.*

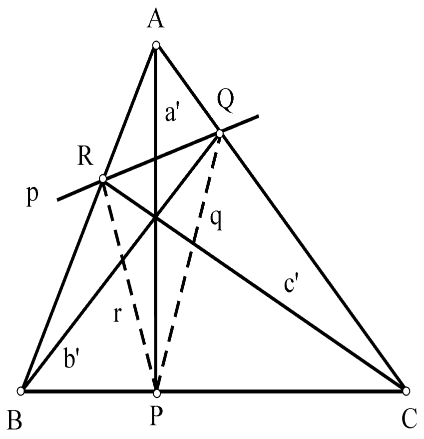
Dokaz. Neka je ΔABC (slika 6.2) proizvoljan trougao u ravni S^2. Obeležimo sa a, b, c redom orjentisane prave BC, CA, AB a sa a', b', c' te iste prave ali sa suprotnom orjentacijom. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{s_C}\mathcal{S}_{s_B}\mathcal{S}_{s_A}$. U ovoj kompoziciji pravoj b odgovara prava b' tj. $\mathcal{I}(b) = b'$ što znači da u izometriji $\mathcal{I}$ pravoj b odgovara ista prava b ali sa suprotnom orjentacijom. Tacki A prave b odgovara u izometriji $\mathcal{I}$ neka tačka A' koja mora biti na pravoj b te središte duži AA', označimo ga sa Q, predstavlja invarijantnu tačku u izometriji $\mathcal{I}$.

Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija, kao kompozicija tri osne refleksije ona predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{I} = \mathcal{S}_s$, gde je prava s normalna na b u tački Q. Na taj način je $\mathcal{S}_{s_C}\mathcal{S}_{s_B}\mathcal{S}_{s_A} = \mathcal{S}_s$ pa prave s_A, s_B i s_C pripadaju jednom pramenu pravih. Simetrale s_B i s_C, s obzirom na to da obe pripadaju unutrašnjosti trougla, seku se u tački S, te se i sve prave pramena kome pripadaju prave s_B i s_C seku u jednoj tački te se kao rezultat dobija eliptički pramen pravih. Središte pramena biće centar kruga upisanog u trougao ΔABC koji dodiruje AC u tački Q. $\square$

Analogno se dokazuje i sledeća teorema

Teorema 6.6.5. *Simetrale jednog unutrašnjeg i spoljašnjih uglova kod drugih dvaju temena nekog trougla pripadaju jednom pramenu pravih.*

Teorema 6.6.6. *Prave određene visinama trougla u ravni S^2 pripadaju jednom pramenu pravih.*



Slika 6.3.

Dokaz. Neka je u ravni S^2 dat trougao ΔABC i neka su AP, BQ, CR (slika 6.3) visine tog trougla. Dokažimo da prave AP, BQ, CR pripadaju jednom pramenu pravih. Ako je ΔABC pravougli onda se u temenu pravog ugla seku sve tri visine, te se taj slučaj neposredno dokazuje. Neka ΔABC nije pravougli. Obeležimo sa a, b, c prave određene stranicama BC, CA, AB a sa a', b', c' prave određene visinama AP, BQ, CR i sa p pravu određenu tačkama Q i R, a sa q i r prave takve da je $\mathcal{S}_{c'}(p) = r$, $\mathcal{S}_{b'}(p) = q$ pri tome svaka od kompozicija $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_{b'}\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_{c'}$ prevodi pravu q u pravu r.

Budući da je $A = b \times c$, $B = b' \times c$, $C = b \times c'$ to su A, B, C invarijantne u tim kompozicijama, svaka od tačaka A, B, C nalazi se na osi simetrije pravih q i r no s obzirom da su tačke A, B, C nekolinearne a nalaze se na osama simetrije q i r biće prave q i r konkurentne i seći će se u jednoj tački P'. Pri tome je tačka A na jednoj a tačke B i C na drugoj osi simetrije pravih q i r te su tačke P i P' istovetne. Na taj način prave a, a', b, b', c, c' predstavljaju simetrale unutrašnjih ili spoljašnjih uglova trougla ΔPQR. S obzirom da se trojke pravih a', b, c; a, b', c; a, b, c' seku redom u tačkama A, B, C prema stavu o simetralama unutrašnjih (i spoljašnjih) uglova u trouglu u ravni S^2 sledi da prave a', b', c' pripadaju jednom pramenu pravih. $\square$

Definicija 6.6.4. Pramen pravih kome pripadaju prave određene visinama trougla u ravni S^2 nazivamo *ortocentričnim pramenom pravih.*

U ravni S^2 trougao može da raspolaže ortocentričnim pramenom nekonkurentnih pravih. Ako je taj pramen, pramen konkurentnih pravih, tada zajedničku tačku svih pravih tog eliptičkog pramena nazivamo ortocentrom tog trougla. U Euklidskoj geometriji ortocentrični pramen je obavezno eliptički, dok u geometriji Lobačevskog on može biti i hiperbolički.

6.7 Centralna rotacija ravni S^2

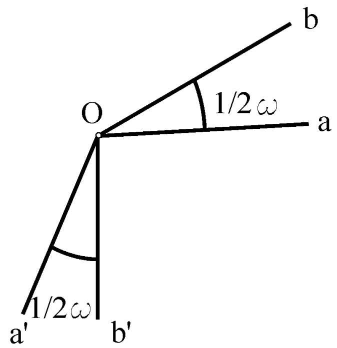
Definicija 6.7.1. Kompoziciju dveju osnih refleksija ravni S^2 čije se ose seku u nekoj tački O nazivamo *centralnom rotacijom ravni S^2 oko tačke O.*

Ako pomenute osne refleksije označimo $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ tada je $\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a = \mathcal{R}_{ab}$ centralna rotacija ravni S^2. Ako je O presečna tačka pravih a i b tada tačku O nazivamo središtem centralne rotacije $\mathcal{R}_{ab}$.

Iz definicije centralne rotacije u ravni S^2 neposredno sledi da centralna rotacija ravni S^2 ima jedinstvenu invarijantnu tačku: centar te rotacije.

Centralna rotacija ravni S^2 je po definiciji kompozicija dveju osnih refleksija, koje su indirektne izometrijske transformacije, te ona predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju ravni S^2.

Svakoj tački $X \in S^2$ različitoj od središta O centralne rotacije $\mathcal{R}_{ab}$ u ravni S^2 odgovara neka druga tačka X', tj. $X' = \mathcal{R}_{ab}(X)$ pri čemu je orjentisani ugao $\sphericalangle XOX'$ jednak dvostrukom orjentisanom uglu između pravih a i b. Označimo taj dvostruki orjentisani ugao sa ω. Tada možemo označiti $\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{O,\omega}$. Ugao ω nazivamo uglom centralne rotacije.



Slika 6.4.

Nije teško ustanoviti da se centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni S^2 može predstaviti kao kompozicija bilo kojih dveju osnih refleksija $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$, pri čemu se prave a i b seku u tački O i orjentisani ugao ω jednak je dvostrukom orjentisanom uglu između pravih a i b. Na taj način izbor generišućih refleksija $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$

dozvoljava slobodan izbor jedne od osa refleksija koja sadrži centar rotacije O. Ako su a', b' prave u ravni S^2 koje sadrže tačku O takve da je orjentisani ugao između pravih a' i b' (slika 6.4) jednak polovini orijentisanog ugla ω tada je $\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{a'b'}$.

Teorema 6.7.1. (O transmutaciji centralnih rotacija) *Ako je $\mathcal{R}_{O,\omega}$ bilo koja centralna rotacija ravni S^2 i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija te ravni tada je*

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{\mathcal{I}(O),\mathcal{I}(\omega)}.$$

Dokaz. Po definiciji je centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ proizvod osnih refleksija $\mathcal{S}_b$ i $\mathcal{S}_a$. Transmutacijom transformacije $\mathcal{R}_{O,\omega}$ vršimo u stvari transmutaciju svake od generišućih osnih refleksija:

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{I}\mathcal{R}_{O,\omega}\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{S}_b\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_a\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$$

tj. dobijamo $\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$.

Kako se prave a i b seku u tački O njihove slike u izometriji $\mathcal{I}$ se seku u tački $\mathcal{I}(O)$ što znači da transformacija $\mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$ ima invarijantnu tačku $\mathcal{I}(O)$ pa predstavlja centralnu rotaciju $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(O),\mathcal{I}(\omega)}$. Naime transformacija $\mathcal{I}$ prevodi prave a i b u prave $\mathcal{I}(a)$ i $\mathcal{I}(b)$, prevodi orjentisani ugao $\omega\,(\omega/2)$ u ojentisani ugao $\mathcal{I}(\omega)\,(\mathcal{I}(\omega/2))$ koji je po veličini jednak uglu ω ali u pogledu orjentacije može imati istu orjentaciju ako je $\mathcal{I}$ direktna izometrija, odnosno suprotnu orjentaciju ako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrija. $\square$

Stav o transmutaciji centralne rotacije omogućuje da se ustanove stavovi o komutativnosti centralnih rotacija sa drugim izometrijskim transformacijama.

Teorema 6.7.2. *Skup svih centralnih rotacija ravni S^2 koje imaju zajedničko središte O uključujući koincidenciju predstavlja Abelovu grupu.*

Definicija 6.7.2. Grupu sačinjenu od centralnih rotacija ravni S^2 koje imaju zajedničko središte O nazivamo *grupom rotacija ravni S^2 sa centrom O* i simbolički je obeležavamo $G(\mathcal{R}_O)$.

Primetimo da skup svih centralnih rotacija jedne ravni u odnosu na različito središte ne predstavlja grupu.

Grupa rotacija ravni S^2 sa središtem O omogućuje da specifično izvedemo definiciju pojma kruga.

Definicija 6.7.3. Neka je G grupa simetrija. Skup svih tačaka dobijenih kao slike tačke X pomoću simetrija iz grupe G nazivamo *trajektorijom* tačke X u odnosu na grupu G, ili skupom tačaka ekvivalentnih sa tačkom X u odnosu na grupu G.

Definicija 6.7.4. Neka je $G(\mathcal{R}_O)$ grupa centralnih rotacija ravni S^2 oko tačke O, a P tačka ravni S^2 različita od tačke O. Trajektorija tačke P u odnosu na grupu $G(\mathcal{R}_O)$ naziva se *krug*. Tačka O se naziva središtem tog kruga a podudarne duži koje spajaju tačku O sa tačkama kruga nazivaju se poluprečnici tog kruga.

S obzirom da se svaka centralna rotacija može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija u odnosu na ose refleksije koje sadrže invarijantnu tačku O, u slučaju grupe $G(\mathcal{R}_O)$ radimo sa elementima pramena pravih sa zajedničkim središtem O te možemo reći da krug predstavlja ortogonalnu trajektoriju ili samo trajektoriju elemenata pramena pravih.

Pomoću relacija "veće", "manje" neposredno se može razviti teorija o krugu.

Definicija 6.7.5. Za tačku X kažemo da je u krugu sa centrom O i poluprečnikom r ako je $OX < r$, a da je izvan kruga ako je $OX > r$.

Definicija 6.7.6. Skup svih tačaka u krugu $k(O, r)$ nazivamo *otvorenom kružnom površi* a uniju ovog skupa i skupa svih tačaka kruga k *zatvorenom kružnom površi.*

U ovako aksiomatski zasnovanoj geometriji može se uvesti i pojam tangente.

Definicija 6.7.7. Prava t je *tangenta kruga* ako pripada ravni tog kruga i ima s njim samo jednu zajedničku tačku.

Definicija 6.7.8. Prava s je *sečica kruga* ako pripada ravni tog kruga i ima s njim dve zajedničke tačke.

6.8 Centralna simetrija reda n u ravni S^2

Definicija 6.8.1. Kaže se da je u ravni S^2 lik λ *obrtno ili rotaciono podudaran* sa likom λ' u odnosu na tačku O ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni S^2 tako da je $\mathcal{R}_{O,\omega}(\lambda) = \lambda'$.

Iz definicije zaključujemo da relacija obrtne podudarnosti predstavlja relaciju ekvivalencije. Poseban značaj ima slučaj kada je $\lambda = \lambda'$.

Definicija 6.8.2. Kaže se da u ravni S^2 lik λ raspolaže *centralnom simetrijom reda n* ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$ u ravni S^2 tako da je $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}(\lambda) = \lambda$ gde je O tačka ravni S^2, R - orjentisan prav ugao, a n ceo pozitivan broj ili racionalan broj oblika $\frac{p}{q}$ pri čemu su p i q uzajamno prosti. Tačka O se naziva središtem centralne simetrije $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$.

Navodimo sada neke osnovne osobine centralne simetrije reda n u S^2.

Teorema 6.8.1. *Ako lik λ u ravni S^2 raspolaže centralnom simetrijom reda n gde je n ceo pozitivan broj deljiv sa celim pozitivnim brojem $m > 1$, tada lik λ raspolaže centralnom simetrijom reda m.*

Teorema 6.8.2. *Centralna simetrija reda n lika λ u ravni S^2 je periodična transformacija. Ako sa k označimo taj period tada je $k = n$ ako je n ceo broj veći od jedan, tj. $k = p$ ako je n racionalan broj oblika p/q pri čemu su p i q uzajamno prosti.*

Centralna simetrija reda n lika λ u ravni S^2 omogućuje da pomoću izometrijskih transformacija definišemo pojam pravilnog poligona.

Definicija 6.8.3. Za poligon $A_1A_2\ldots A_p$ u ravni S^2 kažemo da je *pravilan* ili *regularan* ako raspolaže centralnom simetrijom reda p.

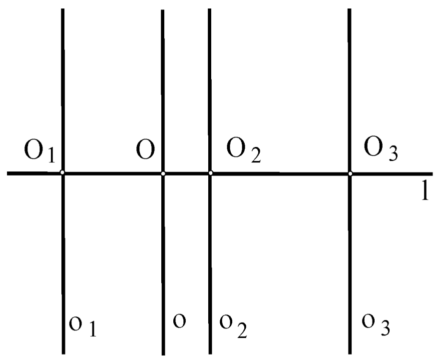
Centralna simetrija reda 2 je kao involuciona transformacija od posebnog značaja u skupu centralnih rotacija. Primetimo da centralna simetrija reda 2 zapravo predstavlja poluobrt ravni oko tačke O tj. rotaciju za opruženi ugao. Ovakva involutivna transformacija može se predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija čije su ose upravne međusobom. S obzirom na to da je $\omega/2 = R$, tj. $a \perp b$ dobijamo komutativnu kompoziciju osnih refleksija, tj. $\mathcal{R}_{O,2R} = \mathcal{S}_a\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$.

Napomena. Centralna simetrija reda 2 se u literaturi najčešće naziva samo centralna simetrija ili centralna refleksija. Ovaj drugi naziv se može smatrati opravdanim pošto je centralna simetrija reda 2 jedina u skupu centralnih simetrija reda n koja je involuciona.

Teorema 6.8.3. *Centralna simetrija reda 2 je involuciona transformacija, i predstavlja proizvod komutativnih osnih refleksija $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$.*

Dokaz. Centralna simetrija reda 2 se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija čije su ose a i b uzajamno upravne, tj. $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$. Iz ortogonalnosti osa a i b sledi komutativnost osnih refleksija $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$, tj. važi $\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$. Sada je $\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a)^2 = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a\mathcal{S}_a\mathcal{S}_b = \varepsilon$ jer je $\mathcal{S}_a^2 = \varepsilon$ i $\mathcal{S}_b^2 = \varepsilon$. □

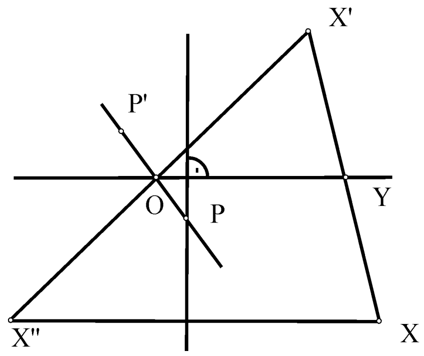
Teorema 6.8.4. (O kompoziciji centralnih refleksija u ravni S^2) *Kompozicija neparnog broja centralnih simetrija u ravni S^2 čija središta pripadaju jednoj pravoj l ravni S^2 predstavlja takođe centralnu simetriju čije je središte na pravoj l.*



Slika 6.5.

Dokaz. Neka je n broj centralnih refleksija koje učestvuju u kompoziciji. Neka je najpre $n = 3$, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_3}\mathcal{S}_{O_2}\mathcal{S}_{O_1}$. Označimo sa o_1, o_2 i o_3 (slika 6.5.) prave upravne na pravu l redom u tačkama O_1, O_2 i O_3. Tada je $\mathcal{S}_{O_3} = \mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l\mathcal{S}_{o_3}$, $\mathcal{S}_{O_2} = \mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l\mathcal{S}_{o_2}$ i $\mathcal{S}_{O_1} = \mathcal{S}_{o_1}\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l\mathcal{S}_{o_1}$ pa imamo $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_l\mathcal{S}_l\mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_l\mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_{o_1}\mathcal{S}_l$. Međutim ose o_1, o_2 i o_3 pripadaju istom pramenu pravih sa bazisnom pravom l pa je $\mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_o$, tj. kao rezultat se dobija osna refleksija $\mathcal{S}_o$ čija osa o pripada istom pramenu pravih pa je i $o \perp l$. Prema tome $\mathcal{I} = \mathcal{S}_o\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_O$ gde je O presečna tačka pravih o i l. Ako je $n > 3$ dokaz se izvodi indukcijom. □

Teorema 6.8.5. (Šala-Hjelmsleva) *Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ ravni S^2 pripadaju jednoj pravoj.*



Slika 6.6.

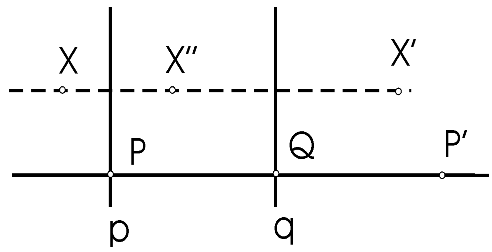
Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka ravni S^2 i P' slika tačke P u izometriji $\mathcal{I}$, tj. $P' = \mathcal{I}(P)$ i neka je O središte duži PP' (slika 6.6). Neka je X bilo koja druga tačka ravni S^2 i $X' = \mathcal{I}(X)$ a X'' tačka simetrična sa tačkom X' u odnosu na tačku O. U tom slučaju kompozicija $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$ sastavljena je iz direktne izometrije $\mathcal{S}_O$ i indirektne transformacije $\mathcal{I}$ pa je ona indirektna izometrija ravni S^2. U toj indirektnoj izometriji tačka P je invarijantna te ova kompozicija predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_p$ čija osa p sadrži tačku P.

Kako u toj kompoziciji tački X odgovara tačka X'', prava p je medijatrisa duži XX''. Ako je Y središte duži XX' biće i prava određena središtima O i Y stranica $X'X''$ i XX' trougla $\Delta XX'X''$ upravna na medijatrisi p duži XX''. S obzirom da postoji tačno jedna prava koja sadrži fiksiranu tačku O i upravna je na datoj pravoj p, središta svih duži koje spajaju korespodentne tačke indirektne izometrije $\mathcal{I}$ ravni S^2 pripadaju jednoj pravoj, u našem slučaju to je prava OY. $\square$

Definicija 6.8.4. Pravu određenu središtima duži koje spajaju odgovarajuće tačke indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ ravni S^2 nazivamo *osom* te izometrijske transformacije.

6.9 Translacija ravni $\mathbf{S^2}$

Definicija 6.9.1. Neka su $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ osne refleksije ravni S^2 čije su ose p i q upravne na nekoj pravoj s u tačkama P i Q redom i neka je $P' = \mathcal{S}_q(P)$. *Translacijom ravni* S^2 po pravoj s za duž PP' nazivamo kompoziciju $\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p$. Označavamo je $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$.



Slika 6.7.

Translacija čuva invarijantnost prave s. Pored ove osobine, iz navedene definicije sledi da je translacija direktna izometrijska transformacija ravni S^2 i da nema invarijantnih tačaka.

Teorema 6.9.1. (O transmutaciji translacije ravni S^2) *Ako je* $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ *translacija a* $\mathcal{I}$ *bilo koja izometrija ravni* S^2, *tada je*

$$\mathcal{I}\tau_{\overrightarrow{MN}}\mathcal{I}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(N)}}.$$

Dokaz. Translacija $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ se može prikazati kao kompozicija osnih refleksija $\mathcal{S}_m$ i $\mathcal{S}_n$, pri čemu su prave m i n upravne na pravu MN respektivno u tačkama M i S, a S je središte duži MN. Prema tome važi

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\tau_{\overrightarrow{MN}}\mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I}\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{S}_n\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_m\mathcal{I}^{-1}\\ &= \mathcal{S}_n^{\mathcal{I}}\mathcal{S}_m^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(n)}\mathcal{S}_{\mathcal{I}(m)} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(N)}}\end{aligned}$$

a to je i trebalo pokazati. □

Ovaj stav omogućuje da se ustanove stavovi o komutativnosti translacije sa ostalim izometrijama.

Teorema 6.9.2. *Kompozicija parnog broja osnih refleksija ravni* S^2 *čije su ose upravne na nekoj pravoj* s *predstavlja koincidenciju ili translaciju sa osom* s.

Teorema 6.9.3. *Kompozicija parnog broja centralnih simetrija ravni S^2 kojima središta pripadaju nekoj pravoj s predstavlja koincidenciju ili translaciju sa osom s.*

6.10 Translatorna (klizajuća) refleksija ravni S^2

Definicija 6.10.1. *Translatorna (klizajuća) refleksija* ravni S^2 u oznaci $\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}}$ je kompozicija translacije $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ i osne refleksije $\mathcal{S}_{MN}$ sa osom MN, tj.

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_{MN}\tau_{\overrightarrow{MN}}.$$

Kompozicija iz definicije je komutativna. Zaista, uzimajući u obzir da je $\tau_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$, $\mathcal{S}_m\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_m$, $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_n$, gde je $p \equiv MN$ imamo

$$\tau_{\overrightarrow{MN}}\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_p\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_p\tau_{\overrightarrow{MN}}.$$

Pored ove osobine iz definicije neposredno sledi da je $\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}}$ indirektna izometrijska transformacija.

Teorema 6.10.1. (Osnovna teorema o klizajućoj refleksiji) *Kompozicija triju osnih refleksija ravni S^2 u odnosu na prave koje ne pripadaju jednom pramenu pravih predstavlja klizajuću refleksiju ravni S^2. Naime ako je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p$ gde prave p, q i r ne pripadaju jednom pramenu pravih tada je $\mathcal{I}$ klizajuća refleksija.*

Dokaz. Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ne može imati invarijantnih tačaka, jer ako bi imala invarijantnu tačku ona bi predstavljala osnu refleksiju u odnosu na neku pravu koja bi sa pravama p, q, r činila pramen što je nemoguće jer po pretpostavci prave p, q, r ne pripadaju istom pramenu. Neka je S proizvoljna tačka ravni S^2 i S' tačka ravni S^2 takva da je $\mathcal{I}(S) = S'$ i $S \neq S'$. Neka je O središte duži SS'. U kompoziciji $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$ tačka S je invarijantna, tj. $\mathcal{S}_O\mathcal{I}(S) = S$. Indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$ ima invarijantnu tačku pa mora predstavljati neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_{p'}$ pri čemu $S \in p'$. Iz $\mathcal{S}_O\mathcal{I} = \mathcal{S}_{p'}$ sledi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O\mathcal{S}_{p'}$ jer je $\mathcal{S}_O^2 = \varepsilon$. Pri tome tačka O ne pripada pravoj p' jer bi u suprotnom $\mathcal{I}$ predstavljala neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_{r'}$ čija je osa r' upravna na pravoj p' u tački O što je po pretpostavci teoreme isključeno jer bi u tom slučaju prave p, q i r pripadale istom pramenu. Obeležimo sa P podnožje upravne iz tačke O na pravu p' a sa q' pravu koja sadrži tačku O i upravna je na pravoj p. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_r\mathcal{S}_q\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O\mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{OP}\mathcal{S}_{q'}\mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{OP}\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$$

a to je i trebalo pokazati. □

Na osnovu svega rečenog nije teško zaključiti da važi

Teorema 6.10.2. *Postoje dve i samo dve vrste indirektnih izometrijskih transformacija ravni* S^2*: klizajuća refleksija i osna refleksija.*

Glava 7

Izometrijske transformacije prostora $\mathbf{S}^3$

7.1 Specifične vrste izometrijskih transformacija prostora $\mathbf{S}^3$

Definicija 7.1.1. *Refleksijom u odnosu na ravan* π nazivamo neidentičnu transformaciju $\mathcal{S}_\pi$ prostora S^3 kojoj je svaka tačka ravni π invarijantna. Ravan π nazivamo osnovom te ravanske refleksije.

Iz definicije neposredno zaključujemo da ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ nema invarijantnih tačaka van ravni π. Neposredno se može uočiti da je ravanska refleksija prostora S^3 jednoznačno određena osnovom π ili parom neistovetnih korespodentnih tačaka. Takođe se lako može ustanoviti da je ravanska refleksija indirektna involuciona izometrija prostora S^3.

Teorema 7.1.1. (O transmutaciji ravanske refleksije) *Ako je $\mathcal{S}_\pi$ ravanska refleksija prostora S^3 tada je $\mathcal{S}_\pi^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(\pi)}$.*

Dokaz se vrši analogno dokazu odgovarajuće teoreme o transmutaciji osne refleksije. Ova teorema u stvari predstavlja posledicu opštijeg stava o transmutacijama odnosno automorfizmima grupe $G(\mathcal{I})$.

Teorema 7.1.2. *U prostoru S^3 dve ravanske refleksije $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ sa raznim osnovama α i β komutiraju ako i samo ako su im osnove međusobom upravne.*

Teorema 7.1.3. *Svaka izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3može se predstaviti kao kompozicija najviše četiri ravanske refleksije tog prostora.*

Dokaz. S obzirom na maksimalan broj linearno nezvisnih tačaka invarijantnih u izometriji $\mathcal{I}$ prostora S^3 mogu nastupiti pet različita slučaja.

(i) Izometrija $\mathcal{I}$ ima bar četiri nekomplanarne invarijantne tačke. Označimo ih sa A, B, C i D. Tada je $\mathcal{I}(A) = A, \mathcal{I}(B) = B, \mathcal{I}(C) = C, \mathcal{I}(D) = D$. Prema osnovnom stavu o izometrijskim transformacijama prostora S^3 takva izometrijska transformacija predstavlja koincidenciju prostora S^3, tj. $\mathcal{I} = \varepsilon$. Kako je $\mathcal{S}_\pi$ involuciona izometrijska transformacija, sledi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi$, tj. u ovom slučaju $\mathcal{I}$ je predstavljena kao kompozicija dve ravanske refleksije.

(ii) Izometrija $\mathcal{I}$ raspolaže sa tri nekolinearne invarijantne tačke, označimo ih sa A, B i C. Van ravni određenoj tačkama A, B i C izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, pa je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Prema tome postoji tačka X prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Označimo sa π medijalnu ravan duži XX'. Kako je $AX = AX'$, $BX = BX'$ i $CX = CX'$ sledi da tačke A, B i C pripadaju ravni π. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ ima četiri invarijantne nekomplanarne tačke A, B, C i X pa predstavlja koincidenciju. Dakle $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I} = \varepsilon$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$.

(iii) Izometrija $\mathcal{I}$ raspolaže sa dve razne inarijantne tačke, označimo ih sa A i B. Van prave određene tačkama A i B izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, pa je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Prema tome postoji tačka X van prave AB prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Označimo sa π medijalnu ravan duži XX'. Kako je $AX = AX'$ i $BX = BX'$ sledi da tačke A i B pripadaju ravni π. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ ima tri invarijantne nekolinearne tačke A, B i X pa prema prethodnom slučaju predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi'}$. Dakle $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'}$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_{\pi'}$.

(iv) Izometrija $\mathcal{I}$ raspolaže sa jednom invarijantnom tačkom A. Postoji tačka X prostora S^3 različita od tačke A takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Označimo sa π medijalnu ravan duži XX'. Kako je $AX = AX'$ sledi da tačka A pripada ravni π. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ ima dve razne invarijantne tačke A i X pa prema prethodnom slučaju predstavlja kompoziciju dve ravanske refleksije $\mathcal{S}_{\pi'}$ i $\mathcal{S}_{\pi''}$. Dakle $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'} \mathcal{S}_{\pi''}$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_{\pi'} \mathcal{S}_{\pi''}$.

(v) Ostaje nam da razmotrimo slučaj kada izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka. Postoji tačka X prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Označimo sa π medijalnu ravan duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ ima invarijantnu tačku X pa prema prethodnom slučaju predstavlja kompoziciju tri ravanske refleksije $\mathcal{S}_{\pi'}$, $\mathcal{S}_{\pi''}$ i $\mathcal{S}_{\pi'''}$. Dakle $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'} \mathcal{S}_{\pi''} \mathcal{S}_{\pi'''}$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_{\pi'} \mathcal{S}_{\pi''} \mathcal{S}_{\pi'''}$.

Time je dokaz teoreme u potpunosti završen. □

Napomena. Važiće i generalizacija ovakve teorema za n-dimenzioni prostor pri čemu će se svaka izometrija $\mathcal{I}$ prosrora S^n moći da prikaže kao kompozicija najviše $n+1$ hiperravanske refleksije, pri čemu pod pojmom hiperravanske refleksije podrazumevamo neidentičnu izometriju koja čuva invarijantnim $n-1$ dimenzioni podprostor prostora S^n, tačku po tačku.

Definicija 7.1.2. Reprezentaciju izometrijske transformacije prostora S^3 sa minimalnim brojem ravanskih refleksija nazivamo *minimalnom* ili *optimalnom reprezentacijom.*

Teorema 7.1.4. *Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3 poseduje dve invarijantne tačke A i B tada ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\pi$, pri čemu tačke A i B pripadaju ravni π.*

Dokaz. Kako je transformacija $\mathcal{I}$ indirektna a koincidencija ε direktna to je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Prema tome postoji tačka X prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Označimo sa π medijalnu ravan duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I}$ je direktna izometrijska transformacija sa tri nekolinerne invarijantne tačke A, B i X pa predstavlja koincidenciju, tj. $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I} = \varepsilon$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$. □

Napomena. Ova teorema ima veliki značaj pri dokazivanju mnogih stavova koji se odnose na izometrije prostora S^3.

7.2 Pramen ravni. Snop ravni. Snop pravih prostora S^3

Definicija 7.2.1. Skup $\mathcal{X}$ ravni prostora S^3 predstavlja *pramen ravni* ako za tri proizvoljne ravni α, β i γ skupa $\mathcal{X}$, kompozicija $\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\alpha$ predstavlja ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$.

Svojstva pramena ravni u prostoru S^3 potpuno su analogna svojstvima pramena pravih prostora S^2.

Definicija 7.2.2. Pramen ravni u S^3 nazivamo *koaksijalnim* ili *eliptičkim* ako se sve ravni tog pramena seku po jednoj pravoj. Pramen ravni u S^3 nazivamo *ortogonalnim* ili *hiperboličkim* ako su sve ravni tog pramena upravne na jednoj pravoj.

Definicija 7.2.3. Skup $\mathcal{Y}$ pravih prostora S^3 predstavjla *snop pravih* ako su svake dve prave iz tog snopa komplanarne. Ravni određene parovima pravih nekog snopa nazivamo ravnima tog snopa pravih. Skup svih ravni nekog snopa pravih nazivamo snopom ravni.

U apsolutnoj geometriji razlikujemo dve vrste snopova pravih i dve vrste snopova ravni.

Definicija 7.2.4. Skup svih pravih koje se seku u istoj tački prostora S^3 predstavlja snop koji nazivamo *konkurentnim* ili *eliptičkim snopom* pravih prostora S^3. Skup svih pravih upravnih na istu ravan nekog prostora S^3 predstavlja snop koji nazivamo *ortogonalnim* ili *hiperboličkim snopom pravih* prostora S^3

Pomenutim snopovima pravih odgovaraju snopovi ravni. Stoga u prostoru S^3 imamo dve vrste snopova ravni.

7.3 Osna rotacija prostora S^3

Definicija 7.3.1. Neka su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ ravanske refleksije prostora S^3 čije se osnove α i β seku po nekoj pravoj s i neka je ω dvostruki orjentisani ugao između ravni α i β. *Osnom rotacijom prostora* S^3 oko prave s za ugao ω nazivamo transformaciju $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$. Prava s je osa rotacije, a orjentisani ugao ω ugao rotacije.

Kako je ravanska refleksija indirektna izometrijska transformacija, osna rotacija je kao kompozicija dveju ravanskih refleksija direktna izometrija. Nije teško ustanoviti da je osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{s,\omega}$ invarijantna svaka tačka prave s i da van prave s ta transformacija nema invarijantnih tačaka. Ako u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{s,\omega}$ ugao ω nije opružen, s je jedina invarijantna prava ove transformacije dok su invarivarijantne jedino ravni upravne na osi s. Ako je u osnoj rotaciji ugao ω opružen, tada sem prave s postoji neograničeno mnogo pravih koje su invarijantne i to su prave koje seku pravu s pod pravim uglom. U tom slučaju sem ravni koje su upravne na pravu s postoji još neograničeno mnogo invarijantnih ravni, to su ravni koje sadrže pravu s.

S obzirom da su u osnoj rotaciji prostora S^3 invarijantne jedino tačke ose s, dve osne rotacije prostora S^3 mogu biti jednake samo u slučaju ako imaju zajedničku osu. Nije teško dokazati da je osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ jednoznačno određena pravom s i uglom rotacije ω.

Teorema 7.3.1. *Skup $\mathcal{R}_s$ koji se sastoji od identične transformacije i svih osnih rotacija prostora S^3 koje imaju zajedničku osu s predstavlja grupu.*

Tu grupu nazivamo grupom osnih rotacija prostora S^3 oko prave s i obeležavamo je sa $G(\mathcal{R}_s)$. Lako se dokazuje da je grupa $G(\mathcal{R}_s)$ Abelova.

Teorema 7.3.2. (Dalamberova teorema) *Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3 koja ima jednu invarijantnu tačku O predsravlja koincidenciju ε ili neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ čija osa s sadrži tačku O.*

Dokaz. U slučaju kada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi = \varepsilon$ dokaz sledi neposredno. Pretpostavimo da je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Tada u S^3 postoji tačka P takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Neka je π_1 medijalna ravan duži PP'. Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ je direktna izometrijska transformacija i ima dve invarijantne tačke O i P, $O \neq P$ pa predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi_2}$. Iz $\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ sledi $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}$, pri čemu se ravni π_1 i π_2 seku po pravoj OP Ako tu pravu obeležimo sa s a dvostruki orjentisani ugao između ravni π_1 i π_2 sa ω, biće $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$. □

Teorema 7.3.3. (Ojlerova teorema) *Kompozicija dveju osnih rotacija prostora S^3 kojima se ose seku u nekoj tački O predstavlja takođe osnu rotaciju kojoj osa sadrži tačku O.*

Primedba. Ojlerova teorema predstavlja specijalan slučaj Dalamberove, međutim Ojleru nije bila poznata Dalamberova teorema.

Teorema 7.3.4. (O transmutaciji osnih rotacija) *Ako je $\mathcal{R}_{s,\omega}$ osna rotacija prostora S^3 i $\mathcal{I}$ proizvoljna izometrija istog prostora, tada je*

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{\mathcal{I}(s),\mathcal{I}(\omega)}.$$

Dokaz se vrši analogno dokazu odgovarajuće teoreme za centralnu rotaciju u ravni S^2.

Teorema 7.3.5. *Dve osne rotacije $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{b,\beta}$ prostora S^3 su komutativne ako i samo ako se ose tih rotacija poklapaju.*

Dokaz sledi neposredno iz prethodne teoreme.

Teorema 7.3.6. *Osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta$ je ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora S^3 sa komutativnom kompozicijom $\mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta$ ako i samo ako je prava s upravna na ravan π.*

Osna rotacija prostora S^3 omogućuje da se definišu specifične vrste simetrija prostora S^3.

7.4 Osna simetrija reda n prostora $\mathbf{S}^3$

Definicija 7.4.1. *U prostoru S^3 lik Φ raspolaže osnom simetrijom reda n ako postoji osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\frac{4R}{n}}$ takva da je $\mathcal{R}_{s,\frac{4R}{n}}(\Phi) = \Phi$ pri čemu je $n \in Z^+$ ili je n racionalan broj oblika $\frac{p}{q}$ gde su p i q uzajamno prosti. Prava s predstavlja osu navedene simetrije reda n.*

Osobine osne simetrije reda n analogne su osobinama centralne simetrije ravni S^2 reda n.

Teorema 7.4.1. *Ako prostorni lik Φ raspolaže osnom simetrijom reda n, $n \in N$ i n je deljiv celim pozitivnim brojem m, $m > 1$, tada lik Φ raspolaže i osnom simetrijom reda m.*

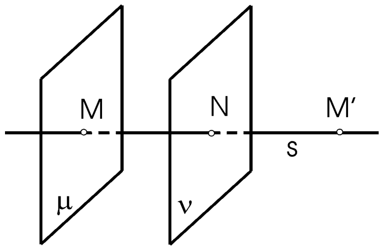
Teorema 7.4.2. *Osna simetrija reda n lika Φ je periodična transformacija. Period k te transformacije određen je relacijom $k = n$ ili $k = p$ u zavisnosti od toga da li je n ceo broj ili je oblika p/q, gde su p i q uzajamno prosti brojevi.*

Specijalno za $n = 2$ osnu simetriju reda dva nazivamo jednostavno osnom simetrijom prostora S^3. Svojstva osne simetrije prostora S^3 u potpunosti su analogna svojstvima centralne simetrije ravni S^2.

7.5 Translacija prostora $\mathbf{S}^3$

Definicija 7.5.1. Neka su $\mathcal{S}_\mu$ i $\mathcal{S}_\nu$ ravanske refleksije prostora S^3 sa osnovama μ i ν upravnim na pravoj s u tačkama M i N i neka je M' tačka simetrična tački M u odnosu na ravan ν. *Translacijom prostora* S^3 po pravoj s za orjentisanu duž $\overrightarrow{MM'}$ nazivamo transformaviju $\tau_{\overrightarrow{MM'}} = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu$. Pravu s nazivamo osom te translacije.

Navodimo neke od osobina translacije prostora S^3. Iz definicije neposredno zaključujemo da je translacija $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ prostora S^3 jednoznačno određena tačkama M i M' (slika 7.1). S obzirom na to da je ravanska refleksija indirektna izometrija, translacija je kao kompozicija dveju ravanskih refleksija direktna izometrijska transformacija. Nije teško ustanoviti da translacija nema invarijantnih tačaka i da poseduje jednu invarijantnu pravu - osu translacije s određenu tačkama M i M'. Takođe, nije teško ustanoviti da skup τ_s koji se sastoji od identičke transformacije ε i svih translacija prostora S^3 sa zajedničkom osom s predstavlja Abelovu grupu.



Slika 7.1.

Definicija 7.5.2. Grupu koja se sastoji od identičke transformacije i svih translacija prostora S^3 sa zajedničkom osom s nazivamo *grupom translacija sa osom* s i obeležavamo je $G(\tau_s)$.

Teorema 7.5.1. (O transmutacijama translacija) *Ako je* $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ *translacija i* $\mathcal{I}$ *bilo koja izometrijska transformacija prostora* S^3 *tada je*

$$\tau^{\mathcal{I}}_{\overrightarrow{MM'}} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(M')}}.$$

Dokaz se vrši analogno odgovarajućem dokazu o transmutacijam translacija ravni S^2. Nije teško utvrditi da važe sledeće teoreme:

Teorema 7.5.2. *Translacija* $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ *i ravanska refleksija* $\mathcal{S}_\pi$ *prostora* S^3 *su komutativne ako i samo ako* M *i* M' *pripadaju ravni* π.

Teorema 7.5.3. *Translacija* $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ *i osna rotacija* $\mathcal{R}_{s,\omega}$ *prostora* S^3 *su komutativne ako i samo ako tačke* M *i* M' *pripadaju pravoj* s.

7.6 Rotaciona refleksija prostora $\mathbf{S}^3$

Definicija 7.6.1. Kompoziciju jedne osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ i jedne ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora S^3 pri čemu je prava s upravna na ravan π nazivamo *rotacionom refleksijom prostora* S^3 i obeležavamo je sa $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$. Ravan π zovemo osnovom a orijentisani ugao ω uglom rotacione refleksije $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$, dok presečnu tačku S prave s sa ravni π nazivamo središtem rotacione refleksije prostora S^3.

Navedimo sada neke osobine rotacione refleksije prostora S^3.

Iz definicije neposredno zaključujemo da su osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ i ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ koje sačinjavaju rotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ komutativne transformacije jer je s upravna na π.

Teorema 7.6.1. *Rotaciona refleksija prostora S^3 poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku - središte rotacione refleksije S.*

Teorema 7.6.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ koja ima jedinstvenu invarijantnu tačku O u prostoru S^3 predstavlja rotacionu refleksiju sa središtem O.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija prostora S^3, a ε direktna izometrijska transformacija tog prostora, biće $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Zbog toga postoji tačka X prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Neka je π_1 medijalna ravan duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ ima dve invarijantne tačke O i X. Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ je direktna izometrijska transformacija prostora S^3 te prema Dalamberovoj teoremi predstavlja koincidenciju ili osnu rotaciju čija osa sadrži tačke O i X.

Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ nije koincidencija jer ako bi bilo $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I} = \varepsilon$ onda bi bilo $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$ te bi izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ predstavljala ravansku refleksiju i posedovala sem tačke O još invarijantnih tačaka, što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme.

Prema tome, $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$, tj. ako je prava s upravna na π_1 neposredno zaključujemo da je $\mathcal{I}$ rotaciona refleksija. Ako prava s nije upravna na π_1 tada obeležimo sa π_2 ravan koja sadrži pravu s i upravna je na ravan π_1, a sa π_3 obeležimo ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_3}$. U tom slučaju je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_3}$ pri čemu je ravan π_2 upravna na π_1 i seče je po pravoj s_1. Obeležimo sa σ_1 ravan koja sadrži pravu s_1 i upravna je na π_3, a sa σ_2 ravan takvu da je $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\sigma_2}$. S obzirom da je $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{R}_{s_1,2R}$ biće i $\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\sigma_2} = \mathcal{R}_{s_1,2R}$ odakle sledi da prava s_1 pripada ravni σ_2 jer je $\pi_1 \cap \pi_2 = s_1$ i da je ravan σ_2 upravna na σ_1 jer uglovi rotacije kod jednakih rotacija moraju biti podjednaki. Prema tome je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_3}$. Ravni σ_2 i π_3 su upravne na ravan σ_1 i seku se po nekoj pravoj o koja sadrži tačku O i koja je upravna na σ_1 te kompozicija $\mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_3}$ predstavlja osnu rotaciju $\mathcal{R}_{o,\theta}$ oko prave o pri čemu je θ dvostruki orjentisani ugao između ravni σ_2 i π_3. Prema tome imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{R}_{o,\theta} = \mathcal{R}_{\sigma_1;o,\theta}$$

čime smo dokazali da izometrija $\mathcal{I}$ predstavlja rotacionu refleksiju sa središtem O. □

Teorema 7.6.3. (Teorema Šala) *Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3 može se predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija tog prostora.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{I} = \varepsilon$, tada zbog involutivnosti osne refleksije za proizvoljnu pravu p prostora S^3 je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_p$.

Ako je $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ tada postoji tačka X prostora S^3 takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$, $X \neq X'$. Neka je π_1 medijalna ravan duži XX'. S obzirom na to da je $\mathcal{I}$ direktna a ravanska refleksija $\mathcal{S}_{\pi_1}$ indirektna izometrija prostora S^3, kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ je indirektna izometrija prostora S^3 pa predstavlja ili ravansku refleksiju ili rotacionu refleksiju sa središtem X.

Neka je kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ ravanska refleksija. Označimo je sa $\mathcal{S}_{\pi_2}$. tada je $\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$, odakle je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}$. Označimo sa π ravan upravnu na ravni π_1 i π_2 a sa m i n prave po kojima ona seče ravni π_1 i π_2. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi}\mathcal{S}_{\pi}\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_m\mathcal{S}_n.$$

Ako kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I}$ sem tačke X nema drugih invarijantnih tačaka tada ona predstavlja osno rotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega}$, tj. $\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{I} = \mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega}$ kojoj je središte tačka X. Obeležimo sa π_2 ravan koja sdrži pravu s i upravna je na π_1, a sa π_3 ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_3}$. U tom slučaju biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_3}\mathcal{S}_{\pi_4}.$$

Kako je prava s u ravni π_3 i upravna je na π_4 sledi da je ravan π_3 upravna na ravan π_4. Sem toga je $\pi_3 \cap \pi_4 = n$, $\pi_1 \cap \pi_2 = m$ i $\pi_1 \perp \pi_2$ odakle sledi da je

$$\mathcal{I} = (\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2})(\mathcal{S}_{\pi_3}\mathcal{S}_{\pi_4}) = \mathcal{S}_m\mathcal{S}_n,$$

što je i trbalo pokazati. □

7.7 Centralna refleksija prostora S^3

Osno rotaciona refleksija prostora S^3 u opštem slučaju nije involuciona transformacija. Ona je involuciona samo u slučaju kada je ugao rotacije opružen.

Definicija 7.7.1. *Osno rotacionu refleksiju za opružen ugao zvaćemo centralnom refleksijom prostora S^3.*

Teorema 7.7.1. *Centralna refleksija prostora S^3 može se predstaviti kao kompozicija tri ravanske refleksije kojima su osnove upravne međusobom u središtu te refleksije.*

Dokaz. Zaista. Važi $\mathcal{R}_{\pi;s,2R} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{R}_{s,2R}$ i $\mathcal{R}_{s,2R} = \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_\nu$ pri čemu je s presečna prava ravni μ i ν i $\mu \perp \nu$. Kako je $s \perp \pi$, to su ravni π, μ i ν tri međusobom upravne ravni. Označimo sa O presečnu tačku tih triju ravni. Tada je $\mathcal{R}_{\pi;s,2R} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_\nu$. □

Centralnu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi;s,2R}$ označavaćemo $\mathcal{S}_O$.

Teorema 7.7.2. *Kompozicija neparnog broja centralnih refleksija prostora S^3 čija središta pripadaju nekoj pravoj p predstavlja takođe neku centralnu refleksiju prostora S^3 čiji je centar na pravoj p.*

Dokaz. Neka su O_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ središta centralnih refleksija $\mathcal{S}_{O_i}$ pri čemu tačke O_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pripadaju pravoj p. Neka je najpre $n = 3$, tj posmatrajmo izometriju $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_3}\mathcal{S}_{O_2}\mathcal{S}_{O_1}$. Neka su π_1, π_2, π_3 ravni upravne na pravoj p redom u tačkama O_1, O_2 i O_3. Tada je $\mathcal{S}_{O_3} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_3}$, $\mathcal{S}_{O_2} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_2}$ i $\mathcal{S}_{O_1} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_1}$ pri čemu je svaka od tri kompozicije komutativna. Prema tome imamo

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_3}\mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{\pi_3}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}.$$

Osnove π_1, π_2 i π_3 upravne su na istoj pravoj p te pripadaju istom pramenu ravni. Prema tome kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_3}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}$ predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\pi$ čija osnova π pripada istom pramenu ravni, tj. $\pi \perp p$. Dakle dobili smo da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_\pi$ i $p \perp \pi$. Dakle $\mathcal{I}$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_O$ gde je O presečna tačka prave p i ravni π.

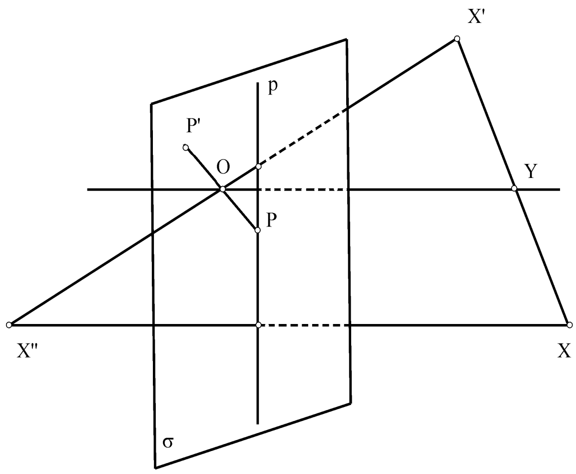
Za $n > 3$ dokaz se izvodi matematičkom indukcijom. □

Teorema 7.7.3. *Kompozicija parnog broja centralnih refleksija prostora S^3 čija središta pripadaju nekoj pravoj p predstavlja translaciju prostora S^3 duž prave p.*

Teorema 7.7.4. (generalizacija teoreme Hjelmsleva) *Središta duži koja spajaju odgovarajuće tačke indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ prostora S^3, ili se poklapaju ili pripadaju jednoj ravni.*

Dokaz. Ako transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3 predstavlja centralnu refleksiju tog prostora tvrđenje sledi neposredno. Razmotrćemo slučaj kada transformacija $\mathcal{I}$ prostora S^3 ne prdstavlja centralnu refleksiju tog prostora.

Neka je u tom slučaju P proizviljna tačka prostora S^3 i $\mathcal{I}(P) = P'$. Neka je O središte duži PP' (slika 7.2) i X proizvoljna tačka prostora S^3 različita od tačke P. Neka je još $\mathcal{I}(X) = X'$ i $\mathcal{S}_O(X') = X''$. U tom slučaju tačka P je invarijanta direktne izometrijske transformacije $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$. Tada prema



Slika 7.2.

Dalamberovoj teoremi ona predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{p,\omega}$, pri čemu osa p sadrži tačku P. Kako je $\mathcal{R}_{p,\omega}(X) = X''$, medijalna ravan σ duži XX'' sadrži osu p osne rotacije $\mathcal{R}_{p,\omega}$. Označimo sa Y središte duži XX'. Prava OY određena središtima stranica $X'X''$ i XX' trougla $\Delta XX'X''$ je upravna na medijalnoj ravni σ. Kako je $OY \perp \sigma$ i ravan σ sadrži pravu p to je prava OY upravna na pravu p. Kako su tačka Y i prava p fiksirane to tačka Y pripada ravni π koja sadrži tačku O i upravna je na pravoj p. Ravan π sadrži središta duži koja spajaju korespodentne tačke izometrijske transformacije $\mathcal{I}$. □

Definicija 7.7.2. *Ravan π određenu središtima duži korespodentnih tačaka indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ prostora S^3 nazivamo osnovom te izometrijske transformacije.*

7.8 Klizajuća refleksija prostora S^3

Definicija 7.8.1. *Klizajućom ili translatornom refleksijom* $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{MM'}}$ nazivamo kompoziciju sastavljenu od translacije $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ i ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$, pri čemu prava MM' pripada ravni π. Pravu s određenu tačkama M i M' nazivamo osom a ravan π osnovom klizajuće refleksije.

Kompozicija iz definicije je komutativna jer ravan π sadrži pravu MM'.

Navešćemo sada neke osobine klizajuće refleksije propstora S^3.

Klizajuća refleksija prostora S^3 je u potpunosti određena osnovom π i osom MM'. Klizajuća refleksija nema invarijantnih tačaka. Ima samo jednu invarijantnu pravu osu MM' i dve invarijantne ravni: osnovu π i ravan koja sadrži osu MM' i upravna je na osnovu π. Klizajuća refleksija je indirektna izometrijska transformacija.

7.9 Zavojno kretanje prostora S^3

Definicija 7.9.1. *Zavojnim ili helikoidnim kretanjem* $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$ prostora S^3 *nazivamo kompoziciju sastavljenu od jedne translacije* $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ *i jedne osne rotacije* $\mathcal{R}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$. *Orjentisanu pravu* $\overrightarrow{MM'}$ *nazivamo osom a orjentisani ugao* ω *uglom tog zavojnog kretanja. U slučaju da je ugao* ω *opružen, takvo zavojno kretanje zovemo zavojnim poluobrtajem.*

Neposredno iz definicije sledi da je zavojno kretanje jednoznačno određeno ako su zadati translaciona duž $\overrightarrow{MM'}$ i ugao obrtanja ω.

Zavojno kretanje je direktna izometrijska transformacija kao kompozicija dve direktne izometreije. Prema poznatom stavu translacija $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ i osna rotacija $\mathcal{R}_{MM',\omega}$ su komutativne transformacije jer se ose osne rotacije i translacije poklapaju. Zavojno kretanje nema invarijantnih tačaka i ima samo jednu invarijantnu pravu - osu MM'.

Nije teško dokazati sledeću teoremu primenom generalisane teoreme Hjelmsleva.

Teorema 7.9.1. *Ako su data ma kakva dva podudarna i suprotno orjentisana skupa tačaka prostora* S^3*, tada sredine duži koje spajaju odgovarajuće tačke u izometriji koju određuju ti skupovi tačaka pripadaju jednoj ravni.*

Glava 8

Neprekidnost u geometriji

8.1 Dedekindova aksioma neprekidnosti

Grupa aksioma neprekidnosti sastoji se od samo jedne aksiome.

IV.1. (**Dedekindova aksioma neprekidnosti**) *Ako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva neprazna skupa tačaka orjentisane prave p tako da za proizvoljnu tačku P skupa $\mathcal{M}$ i prizvoljnu tačku Q skupa $\mathcal{N}$ važi da je tačka P ispred tačke Q ($P \prec Q$), tada na pravoj p postoji tačka X takva da za svaku tačku $P \in \mathcal{M}\backslash\{X\}$ i $Q \in \mathcal{N}\backslash\{X\}$ važi relacija $P \prec X \prec Q$.*

Navedena aksioma je dovoljna da se izvede kompletna teorija neprekidnosti u apsolutnoj geometriji. Kao posledice Dedekindove aksiome neprekidnosti navešćemo Arhimedov stav za duži i Kantorovu aksiomu.

Teorema 8.1.1. (Arhimedov stav za duži) *Ako su AB i CD dve duži takve da je $AB > CD$ tada postoji prirodan broj n takav da je*

$$nCD \leqslant AB < (n+1)CD.$$

Arhimedov stav za duži može se formulisati i na sledeći način:

Neka su AB i CD dve duži i neka su A_1, A_2, A_3, $\cdots$ tačke prave AB takve da je

$$\mathcal{B}(A, A_1, A_2), \quad \mathcal{B}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathcal{B}(A_2, A_3, A_4), \cdots$$

i

$$AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \cdots \cong CD.$$

Tada postoji prirodan broj n takav da je ili $B \equiv A_n$ ili $\mathcal{B}(A_n, B, A_{n+1})$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji beskonačan niz duži $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \cdots$, $\mathcal{B}(A, A_1, A_2)$, $\mathcal{B}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathcal{B}(A_2, A_3, A_4), \cdots$, koje su sve sadržane u AB. Na pravoj AB izaberimo takav raspored tačaka da je $A \prec B$. Sve tačke prave AB podelimo na dve klase. Neka prvoj klasi $\mathcal{M}$ pripadaju sve tačke prave AB koje su ispred tačke A_n. Neka su u drugoj $\mathcal{N}$ sve ostale tačke prave AB. Tada je svaka tačka prave AB sadržana u jednoj i samo jednoj klasi. Klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su neprazni skupovi. Zaista, klasi $\mathcal{M}$ pripada tačka A, a klasi $\mathcal{N}$ tačka B. Pored toga svaka tačka prve klase je ispred svake tačke druge klase. Na osnovu Dedekindove aksiome postoji jedinstvena tačka X prave AB koja vrši presek prave AB. Tačka X nije tačka klase $\mathcal{M}$. Takođe tačka X je tačka koja je ispred svih tačaka klase $\mathcal{N}$. Na osnovu aksiome III5 postoji tačka C takva da je

$$C \prec X, \quad XC \cong A_1A_2.$$

Kako je $C \prec X$ to tačka C ne može biti tačka klase $\mathcal{N}$. Prema tome tačka C pripada klasi $\mathcal{M}$. Prema definiciji klase $\mathcal{M}$ sledi $C \prec A_n$ i $C \prec A_{n+1}$. Prema tome, svaka od tačaka A_n i A_{n+1} je između tačaka X i C, odakle sledi $A_nA_{n+1} < CX$, što je u suprotnosti sa $XC \cong A_nA_{n+1}$ $\square$

Teorema 8.1.2. *Ako su a i b proizvoljne duži takve da je $a < b$, tada za proizvoljnu duž c postoje prirodni brojevi m i n takvi da je*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Dokaz. Iz Arhimedove teoreme, s obzirom na to da je $a < b$ sledi da postoji prirodan broj n takav da je $c < 2^n(b - a)$, odakle sledi

$$\frac{1}{2^n}c < b - a.$$

Za duži $\frac{1}{2^n}$ i a može nastupiti jedan od slučajeva:
(i) $\frac{1}{2^n}c > a$ ili (ii) $\frac{1}{2^n}c < a$.
(i) Ako je $\frac{1}{2^n}c > a$ onda je $a < \frac{1}{2^n}c < b - a < b$, tj.

$$a < \frac{1}{2^n}c < b,$$

čime je teorema dokazana. U ovom slučaju je $m = 1$.

(ii) Ako je $\frac{1}{2^n}c < a$, tada na osnovu Arhimedovog stava postoji prirodan broj m takav da je

$$(m - 1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Tada je

$$a < m\frac{1}{2^n}c = \frac{1}{2^n} + (m-1)\frac{1}{2^n}c < b - a + a = b,$$

tj.

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

□

Teorema 8.1.3. (Kantorov stav) *Ako beskonačan niz zatvorenih duži $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$, ... neke prave p zadovoljava uslove:*

(i) *svaka duž tog niza sadrži sledeću duž,*

(ii) *ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima tog niza;*

tada postoji jedinstvena tačka X koja je sadržana u svim dužima tog niza.

Dokaz. Neka je $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$, ... beskonačan niz duži prave p, tako da je $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_n, B_n]$ za svaki prirodan broj n i ne postoji duž koja pripada svim dužima tog niza.

Na pravoj p izaberimo orjentaciju tako da je $A_n \prec B_n$ za svako $n \in N$. Ukoliko za neko n to nije zadovoljeno označimo A_n sa B_n i obrnuto. Tačke prave p podelimo na dve klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tako da tačka pripada prvoj klasi $\mathcal{M}$ ako je ispred neke tačke A_n (samim tim ona je i ispred tačaka A_{n+1}, A_{n+2}, $\cdots$). Drugoj klasi $\mathcal{N}$ neka pripadaju sve ostale tačke prave p. Očigledno je da je svaka tačka prave p u jednoj i samo jednoj od klasa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Takođe obe klase su neprazne jer je npr., $A_1 \in \mathcal{M}$ a $B_1 \in \mathcal{N}$. Tačke klase $\mathcal{M}$ su ispred tačaka klase $\mathcal{N}$. Dakle svi uslovi Dedekindove aksiome su zadovoljeni. Prema tome postoji tačka X koja vrši presek prave p na klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Znači tačka X je iza svih tačaka $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ klase $\mathcal{M}$ a ispred svih tačaka $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ klase $\mathcal{N}$, tj. tačka X pripada duži $[A_n, B_n]$ za svako $n \in N$.

Dokažimo još jedinstvenost. Neka je Y još jedna tačka koja pripada svakoj tački datog niza. Tada bi i svaka tačka Z duži XY pripadala svakoj duži pomenutog niza, tj. cela duž XY bi pripadala svakoj duži niza $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$, ..., što je nemoguće. □

Definicija 8.1.1. Niz duži $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$, ... neke prave p je *Kantorov niz* ako:

(i) svaka duž tog niza sadrži sledeću duž,

(ii) ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima datog niza duži.

Teorema 8.1.4. *Ne postoji duž manja od svake duži Kantorovog niza.*

Dokaz. Označimo sa X jedinstvenu tačku koja je sadržana u svim dužima Kantorovog niza duži $[A_1B_1]$, $[A_2, B_2]$,…,$[A_n, B_n]$, … neke prave p. Tada je $\mathcal{B}(A_k, X, B_k)$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da su sve tačke A_k sa jedne a sve tačke B_k sa druge strane tačke X. kako je $A_kB_k = A_kX \cup XB_k$ i $A_kB_k \supset A_{k+1}B_{k+1}$ to tačka A_{k+1} pripada duži $A_{k+1}X$ a tačka B_{k+1} pripada duži XB_{k+1}. Označimo sa x proizvoljnu duž prave p. Tada na pravoj p postoje tačke A i B takve da je tačka X središte duži, $AB \cong x$, $A_k, A \mathrel{\ddot{-}} X$ i $B_k, B \mathrel{\ddot{-}} X$. Kada na duži AX ne bi bilo ni jedne od tačaka A_k, tada bi bilo $\mathcal{B}(A_k, A, X)$ za svako $k \in \mathbb{N}$, odakle sledi da bi duž AX pripadala svim dužima Kantorovog niza, što je nemoguće, pa su za dovoljno veliko n sve tačke A_k, $k > n$, između tačaka A i X. Analogno, za dovoljno veliko n su sve tačke B_k, $k > n$, između tačaka X i B. To znači da za dovoljno veliko n duž AB sadrži svaku od duži A_kB_k, $k > n$, odakle je $A_nB_n < x$. □

Često se umesto Dedekindove aksiome uzimaju Arhimedov i Kantorov stav kao aksiome neprekidnosti. Neka uz prve tri grupe aksioma važe Arhimedov i Kantorov stav.

Dokaz Dedekindove aksiome. S obzirom na činjenicu da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni skupovi, to postoje tačke M_1 i N_1 koje pripadaju redom skupovima $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Označimo sa S_1 središte duži M_1N_1. Kako je S_1 tačka prave p to ona pripada tačno jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ukoliko tačka S_1 pripada skupu $\mathcal{M}$, označimo je sa M_2, a tačku N_1 sa N_2, a ako S_1 pripada skupu $\mathcal{N}$ označimo je sa N_2 a tačku M_1 sa M_2. Neka je sada S_2 središte duži M_2N_2. Primenom pomenutog postupka dobijamo niz zatvorenih duži $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,…,$[M_nN_n]$,… od kojih svaka sadrži sledeću i

$$M_{k+1}N_{k+1} = \frac{1}{2}M_kN_k.$$

Dokažimo da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima konstruisanog niza duži. Ako bi x bila takva duž, onda bi za svako k važilo $x < M_kN_k$. Međutim po konstrukciji je $M_kN_k = \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, odakle je $x < \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, tj. $2^{k-1}x < M_1N_1$, za svako $k \in \mathbb{N}$, što je u suprotnosti sa Arhimedovim stavom. Dakle, niz $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,…,$[M_nN_n]$,… je Kantorov, pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svim dužima pomenutog niza. Iz konstrukcije niza duži $[M_kN_k]$, $k \in \mathbb{N}$, sledi da su sve tačke niza $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sa jedne strane tačke X, a sve tačke niza $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sa druge strane tačke X. Tačka X pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Ako je $M \neq X$ proizvoljna tačka skupa $\mathcal{M}$ tada ne može biti $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{N}$ između dveju tačaka skupa $\mathcal{M}$. Analogno, ako je $N \neq X$ tačka skupa $\mathcal{N}$ tada ne može biti $\mathcal{B}(N, X, N_k)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{M}$ koja je između N i X. Dakle, postoji jedinstvena tačka X koja razdvaja tačke skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tj. za svaku tačku $P \in \mathcal{M} \setminus \{X\}$ i $Q \in \mathcal{N} \setminus \{X\}$ važi $P \prec X \prec Q$. □

Stavovi analogni Arhimedovom i Kantorovom stavu mogu se pokazati i za uglove.

8.2 Posledice aksioma neprekidnosti

Mnoge teoreme koje su naizgled očigledne ne mogu se dokazati bez primene aksioma neprekidnosti. Sada ćemo navesti nekoliko primera takvih teorema.

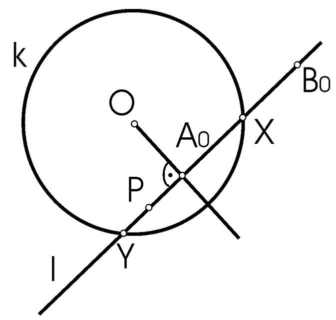
Teorema 8.2.1. *Ako je dat krug $k(O, r)$ i tačka P unutar kruga k tada proizvoljna prava l u ravni kruga k koja sadrži tačku P ima sa krugom k dve zajedničke tačke.*

Dokaz. Mogu nastupiti dva slučaja:

(i) Prava l sadrži središte O kruga k,

(ii) Prava l ne sadrži središte O kruga k.

(i) Neka tčka O pripada pravoj l. Tada postoje tačke X i Y na pravoj l sa raznih strana tačke O takve da je $OX \cong r$ i $OY \cong r$, pa prava l ima sa krugom $k(O, r)$ dve zajedničke tačke X i Y.



Slika 8.1.

(ii) Neka sada tačka O ne pripada pravoj l (slika 8.1). Označimo sa A_0 podnožje normale iz tačke O na pravoj l. Tada će biti $OA_0 \leqslant OP$. Kako je tačka P unutar kruga k biće $OP < r$, te je i $OA_0 < r$. Odredimo na pravoj l sa bilo koje strane tačke A_0 tačku B_0 takvu da je $A_0B_0 \cong r$. U pravouglom trouglu ΔOA_0B_0 hipotenuza OB_0 je veća od katete A_0B_0 pa je $OB_0 > r$, tj. tačka B_0 je van kruga k. Neka je C_0 središte duži A_0B_0. U tom slučaju za tačku C_0 mogu nastupiti tri mogućnosti: $OC_0 \cong r$, $OC_0 < r$ i $OC_0 > r$.

Ako je $OC_0 \cong r$ tvrđenje sledi neposredno. Ako je tačka C_0 unutar kruga k označimo sa A_1 tačku C_0 a sa B_1 tačku B_0. Ako je C_0 izvan kruga k označimo A_1 tačku A_0 a sa B_1 tačku C_0. U oba slučaja je je $OA_1 < r$ i $OB_1 > r$, duž A_1B_1 je jednaka polovini duži A_0B_0 i sadržana je u njoj. Označimo sa C_1 središte duži A_1B_1. Za tačku C_1 imamo sledeće mogućnosti: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ ili $OC_1 > r$. Ako je $OC_1 \cong r$, onda je C_1 presečna tačka prave l i kruga k. Ako je $OC_1 > r$ obeležimo sa A_2 tačku A_1 a sa B_2 tačku C_1, a ako je $OC_1 < r$ onda označimo sa A_2 tačku C_1 a sa B_2 tačku B_1. U oba slučaja je $OA_2 < r$, $OB_2 > r$, duž A_2B_2 jednaka je polovini duži A_1B_1 i sadržana je u njoj.

Nastavljajući taj postupak posle n koraka dobijamo da je

$$OA_n < r, \quad OB_n > r, \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n}A_0B_0, \quad [A_nB_n] \subset [A_{n-1}B_{n-1}].$$

Prema tome, dobili smo niz zatvorenih duži $[A_nB_n]$ za koji važi:

(i) svaka duž tog niza sadrži sledeću,

(ii) ne postoji duž sadržana u svim dužima tog niza.

Zaista, jer ako bi postojala takva duž d koja bi pripadala svim dužima tog niza duži, tada broj n možemo izabrati tako da duž $[A_nB_n]$ bude manja od bilo koje unapred zadate duži, pa i od duži d, pa bi veća duž d bila sadržana u manjoj duži A_nB_n, što je nemoguće.

Dakle, zadovoljeni su svi uslovi Kantorovog stava za duži pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svim dužima tog niza duži. Dokažimo da tačka X pripada krugu k, tj. da je jedna od presečnih tačaka prave l i kruga k. Dovoljno je da dokažemo da je $OX \cong r$. Za duži OX i r važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti:

(i) $OX < r$, (ii) $OX > r$ i (iii) $OX \cong r$.

(i) Neka je $OX < r$. Tada postoji neka duž ε takva da je $OX = r - \varepsilon$. Iz trougla ΔOXB_n imamo $OB_n < OX + XB_n$. Tačka X pripada duži $[A_nB_n]$, pa je $XB_n < A_nB_n$. Broj n možemo izabrati dovoljno veliki da duž $[A_nB_n]$ bude manja od bilo koje unapred zadate duži ε. Tada je $XB_n < \varepsilon$ pa je $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Dakle, dobili smo da tačka B_n pripada unutrašnjosti kruga što predstavlja kontradikciju. Prema tome nije $OX < r$.

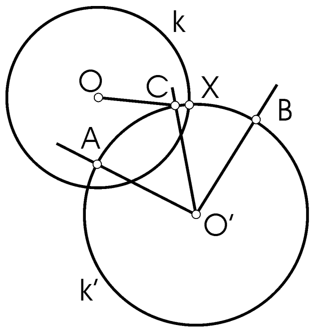
(ii) Analogno se dokazuje da nije $OX > r$.

(iii) Znači, mora biti $OX \cong r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Za tačku Y prave l simetričnu tački X u odnosu na tačku A_0 neposredno se dobija da pripada krugu k. Dakle, prava l i krug k imaju dve zajedničke tačke X i Y. Nije teško zaključiti da osim ovih dveju tačaka krug k i prava l nemaju drugih zajedničkih tačaka. □

Dokaz ove teoreme se ne može izvesti bez upotrebe aksioma neprekidnosti.

Teorema 8.2.2. *Ako dva kruga k i k' pripadaju jednoj ravni i ako jedan od ta dva kruga, npr. k' sadrži neku tačku A koja se nalazi unutar kruga k i neku tačku B van kruga k, tada krugovi k i k' imaju dve zajedničke tačke.*



Slika 8.2.

Dokaz. Neka su O i O' (slika 8.2) središta a r i r' poluprečnici redom krugova k i k'. Označimo sa s medijatrisu jednog od uglova $\measuredangle AO'B$. Poluprava s ima sa krugom k' jednu zajedničku tačku, označimo je sa C. Pri tome je ili $OC \cong r$ ili $OC < r$ ili $OC > r$. Ako je $OC \cong r$ tada je tačka C jedna zajednička tačka krugova k i k'. Ako je $OC < r$ obeležimo sa A_1 tačku C a sa B_1 tačku B. Ako je pak $OC > r$ obeležimo sa A_1 tačku A a sa B_1 tačku C. U oba slučaja je $OA_1 < r$, $OB_1 > r$ i $\measuredangle A_1O'B_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AO'B$.

Konstruišimo medijatrisu ugla $\measuredangle A_1O'B_1$ i označimo sa C_1 zajedničku tačku medijatrise s_1 i kruga k'. Za tačku C_1 postoje tri mogućnosti: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ ili $OC_1 > r$. Ako je $OC_1 \cong r$ tada je tačka C_1 zajednička tačka krugova k i k'. Ako je $OC_1 < r$ označimo sa A_2 tačku C_1 a sa B_2 tačku B_1, a ako je pak $OC_1 > r$ onda označimo sa A_2 tačku A_1 a sa B_2 tačku C_1. Tada je u oba slučaja $OA_2 < r$, $OB_2 > r$ i $\measuredangle A_2O'B_2 = \frac{1}{2^2}\measuredangle AO'B$.

Nastavljajući taj postupak dobijamo tačke A_n i B_n takve da je $OA_n < r$, $OB_n > r$ i $\measuredangle A_nO'B_n = \frac{1}{2^n}\measuredangle AO'B$. Na taj način je dobijen neograničen niz zatvorenih uglova $[\measuredangle AO'B]$, $[\measuredangle A_1O'B_1]$, $[\measuredangle A_2O'B_2]$, ... koji zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) svaki ugao iz tog niza sadrži sledeći,

(ii) ne postoji ugao sadržan u svim uglovima tog niza.

Tada, prema Kantorovom stavu za uglove sledi da postoji jedinstvena poluprava s' sadržana u svim uglovima tog niza. Označimo sa X tačku te poluprave takvu da je $O'X \cong r'$, odnosno tačku u kojoj poluprava s' seče krug k'. Dokažimo da tačka X pripada i krugu k. U tom slučaju za tačku X mogu nastupiti tri mogućnosti: (i) $OX \cong r$, (ii) $OX < r$ ili (iii) $OX > r$.

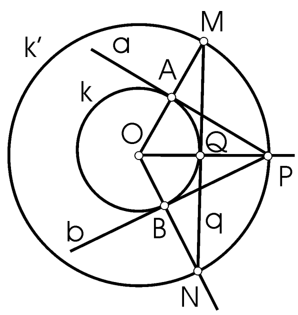
(i) Neka je $OX < r$. U tom slučaju postoji neka duž ε takva da je $OX = r - \varepsilon$. U trouglu ΔOXB_n je $OB_n < OX + XB_n$. Broj n možemo izabrati tako da tetiva A_nB_n bude manja od bilo koje unapred zadate duži ε. Kako je tačka X unutrašnja tačka duži $A_n, B_n]$ to je $XB_n < A_nB_n$ pa je $XB_n < \varepsilon$. Prema tome imamo da je $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, pa je B_n unutrašnja tačka kruga k što je u kontradikciji sa konstrukcijom niza tačaka B_0, B_1, B_2, ... Dakle nije $OX < r$.

(ii) Na potpuno isti način i pretpostavka $OX > r$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $OX \cong r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Razmatranjem drugog ugla $\measuredangle AO'B$ analognim postupkom dobijamo drugu presečnu tačku Y krugova k i k'. $\square$

Teorema 8.2.3. *Ako je u ravni dat krug $k(O, r)$ i tačka P van tog kruga, tada kroz tačku P postoje dve i samo dve prave koje dodiruju krug $k(O, r)$.*



Slika 8.3.

Dokaz. Tačka P je van kruga $k(O, r)$ pa je $OP > r$. Stoga na polupravoj OP postoji tačka Q (slika 8.3) takva da je $OQ = r$. Tačka Q pripada krugu k. Neka je q prava upravna na pravu OP u tački Q. Neka je k' krug sa središtem u tački O i poluprečnikom OP. Kako je $OQ < OP$ tačka Q će biti unutar kruga k'. Prava q sadrži unutrašnju tačku Q kruga k' te prava q i krug k' imaju dve zajedničke tačke M i N. Poluprave OM i ON seku krug $k(O,r)$ u dvema tačkama A i B. Kako su A i P dve razne tačke one određuju tačno jednu pravu a. Slično tačke B i P određuju tačno jednu pravu b. Dokazaćemo da prave a i b imaju sa krugom k samo po jednu zajedničku tačku. Dovoljno je da ustanovimo da je $\measuredangle OAP = \measuredangle OBP = R$. Kako je $\Delta OAP \cong \Delta OQM$ i $\measuredangle OQM$ prav biće $\measuredangle OAP$ prav. Odatle sledi da je prava a tangenta kruga k. Analogno se pokazuje da je i prava b tangenta kruga k u tački B. Prema tome postoje dve prave koje sadrže tačku P i dodiruju krug $k(O,r)$. Da osim ovih dveju pravih nema drugih tangenti kroz tačku P na krug k dokazuje se indirektnim putem. □

Možemo primetiti da ovaj stav ima uopštenje u prostoru S^3 u kome krugu $k(O,r)$ odgovara sfera $S(O,r)$, tački P prava p a pravama a i b ravni α i β.

8.3 Merenje duži

U apsolutnoj geometriji moguće je razviti proces merenja duži i uglova. Međutim merenje površi i zapremina nije moguće s obzirom na odsustvo pojma paralelnosti, odnosno odgovarajuće aksiome.

Definicija 8.3.1. *Sistemom merenja duži* nazivamo funkciju $\mathcal{L}$ koja svakoj duži a korespondira realan broj $\mathcal{L}(a)$ tako da važi:
(1) Za svaku duž a je $\mathcal{L}(a) \geq 0$, (Uslov nenegativnosti)
(2) Postoji duž a_0 takva da je $\mathcal{L}(a_0) = 1$ (Uslov normiranosti)
(3) Ako je $a \cong b$ tada je $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$ (Uslov invarijantnosti)
(4) Ako je $a + b = c$ tada je $\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(c)$. (Uslov aditivnosti).
Broj $\mathcal{L}(a)$ koji je u sistemu $\mathcal{L}$ merenja duži korespondiran duži a nazivamo merom ili dužinom duži a u sistemu merenja $\mathcal{L}$. Duž a_0 za koju je $\mathcal{L}(a_0) = 1$ nazivamo jediničnom duži u sistemu merenja $\mathcal{L}$.

Navedena definicija predstavlja aksiomatsku definiciju merenja duži.

Teorema 8.3.1. *Neka je $\mathcal{L}$ sistem merenja duži. Tada je funkcija $\mathcal{L}'$ sistem merenja duži ako i samo ako postoji broj $k \in \mathbb{R}^+$, takav da važi $\mathcal{L}' = k\mathcal{L}$.*

Teorema 8.3.2. *U sistemu $\mathcal{L}$ merenja duži za svake dve duži a i b važi:*
(a) $\mathcal{L}(a) < \mathcal{L}(b) \Leftrightarrow a < b$,
(b) $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow a \cong b$,
(c) $\mathcal{L}(a - b) = \mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b)$ *za* $a > b$.

Dokaz. (a) Neka je $a < b$ i neka je O početna tačka poluprave p. Označimo sa A i B tačke poluprave p takve da je $OA \cong a$ i $OB \cong b$. Tada je $\mathcal{B}(O, A, B)$, tj. $OB \cong OA + AB$. Odavde prema uslovu (4) iz definicije sledi $\mathcal{L}(OB) = \mathcal{L}(OA) + \mathcal{L}(AB)$. To znači da je $\mathcal{L}(OA) < \mathcal{L}(OB)$, tj. $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$.

Obratno, ako je $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$, tada na polupravoj p sa početkom u tački O postoje tačke A i B takve da je $OA \cong a$, $OB \cong b$ i $\mathcal{B}(O, A, B)$, odakle sledi da je $OA < OB$, tj. $a < b$.

(b) Neka je $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$ i $a \neq b$. Tada je prema dokazanom delu pod (a) $\mathcal{L}(a) \neq \mathcal{L}(b)$, što je nemoguće.

(c) Na polupravoj p sa početkom u tački O uočimo tačke A i B takve da je $OA = a$ i $OB = b$. S obzirom na to da je $a > b$ važi $\mathcal{B}(O, B, A)$, tj. $OA \cong OB + BA$. Odavde sledi na osnovu uslova aditivnosti $\mathcal{L}(OA) = \mathcal{L}(OB) + \mathcal{L}(BA)$, tj. $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) + \mathcal{L}(a - b)$, čime je dokaz završen. □

Teorema 8.3.3. *Ako je a_0 bilo koja duž, tada postoji jedan i samo jedan sistem $\mathcal{L}_0$ merenja duži takav da je $\mathcal{L}_0(a_0) = 1$.*

Dokaz. Neka su na izvesnoj pravoj l zadate dve duži $a_0 = A_0B_0$ i $a = AB$, pri čemu je duž $AB < A_0B_0$. Duž A_0B_0 podelimo na 2^k podudarnih duži. Neka je A_kB_k bilo koja od njih. Na pravoj l konstruišimo sistem tačaka takvih da svake dve uzastopne tačke tog sistema određujuduž podudarnu sa duži A_kB_k i da same tačke A_k, B_k pripadaju tom sistemu. Jasno je da tačke A_0 i B_0 kao i sve deobene tačke duži A_0B_0 pripadaju tom sistemu. Saglasimo se da dobijeni sistem tačaka nazovemo k-tom gradijacijom ili gradijacijom ranga ku odnosu na duž A_0B_0 i tu gradijaciju obeležimo sa N_k. Gradijacijom N_k razložena je prava l na neograničeno mnogo duži podudarnih sa A_kB_k. Obeležimo sa n_k ukupan broj duži gradijacije N_k koje pripadaju duži AB a sa n'_k ukupan broj duži gradijacije N_k koje sa duži AB imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Ako broju k dajemo redom vrednosti $0, 1, 2, \ldots$ dobijamo dva niza brojeva

$$n_0,\ \frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2^2},\ \frac{n_3}{2^3},\ \ldots \tag{$*$}$$

$$n'_0,\ \frac{n'_1}{2},\ \frac{n'_2}{2^2},\ \frac{n'_3}{2^3},\ \ldots \tag{$**$}$$

Pri tome je $n_{k+1} \geq 2n_k$ i $n'_{k+1} \leq 2n'_k$ pa je

$$n_0 \leq \frac{n_1}{2} \leq \frac{n_2}{2^2} \leq \frac{n_3}{2^3} \leq \ldots$$

$$n'_0 \geq \frac{n'_1}{2} \geq \frac{n'_2}{2^2} \geq \frac{n'_3}{2^3} \geq \ldots$$

Prema tome niz (*) je neopadajući a niz (**) ne rastući. Osim toga iz $n_k \leq n'_k$ sledi

$$\frac{n_k}{2^k} \leq \frac{n'_k}{2^k} \leq n'_0 \quad \text{i} \quad \frac{n'_k}{2^k} \geq \frac{n_k}{2^k} \leq n_0,$$

pa je niz (*) ograničen sa gornje a niz (**) sa donje strane, te oba niza konvergiraju kad $k \to +\infty$.

Neka je

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{n_k}{2^k} = n \quad \text{i} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k}{2^k} = n'.$$

S obzirom na to da je $n'_k - n_k \leq 2$ biće

$$\frac{n'_k - n_k}{2^k} \leq \frac{2}{2^k} \quad \text{pa je} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k - n_k}{2^k} = 0$$

i prema tome $n = n'$. Saglasimo se da zajedničku graničnu vrednost nizova (*) i (**) obeležimo sa $\mathcal{L}(a)$. U tom slučaju je

$$\mathcal{L}_0(a) = \lim_{k\to+\infty} \frac{n_k}{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k}{2^k} = n.$$

Na taj način svakoj duži a koja pripada pravoj l korespondiran je izvestan broj $\mathcal{L}_0(a)$ određen u odnosu na duž a_0. Može se lako pokazati da funkcija $\mathcal{L}_0$ predstavlja sistem merenja duži, tj. da funkcija $\mathcal{L}_0$ konstruisana na ovaj način zadovoljava uslove aksiomatske definicije merenja duži. □

Na osnovu izloženog možemo ustanoviti da je prostor S^3 metrički. Meru duži AB zovemo *rastojanjem* između tačaka A i B. Ako još pretpostavimo da je mera nula duži jednaka nuli, onda u apsolutnom prostoru imamo metriku. Označimo sa

$$d_{\mathcal{L}}(A, B)$$

rastojanje između tačaka A i B. Tada važi

(i) $d_{\mathcal{L}}(A, B) = 0$ ako i samo ako se tačke A i B poklapaju,

(ii) $d_{\mathcal{L}}(A, B) = d_{\mathcal{L}}(B, A)$,

(iii) $d_{\mathcal{L}}(A, B) + d_{\mathcal{L}}(B, C) \geq d_{\mathcal{L}}(A, C)$.

Neposredno se utvrđuje da sve tri osobine metrike važe.

Takođe nije teško pokazati da važe sledeća tvrđenja

Teorema 8.3.4. *Za tri date tačke A, B i C je $\mathcal{B}(A, B, C)$ ako i samo ako su A, B i C tri razne tačke takve da je $d_{\mathcal{L}}(A, B) + d_{\mathcal{L}}(B, C) = d_{\mathcal{L}}(A, C)$.*

Teorema 8.3.5. *Za četiri tačke A, B, C i D je $(A, B) \cong (C, D)$ ako i samo ako je $d_{\mathcal{L}}(A, B) = d_{\mathcal{L}}(C, D)$.*

8.4 Merenje uglova

U apsolutnoj geometriji potpuno analogno pojmu mere duži uvodi se pojam mere uglova.

Definicija 8.4.1. *Sistemom merenja uglova* nazivamo funkciju $\mathcal{L}$ koja svakom uglu α korespondira realan broj $\mathcal{L}(\alpha)$ tako da važi:
(1) Za svaki ugao α je $\mathcal{L}(\alpha) \geq 0$, (Uslov nenegativnosti)
(2) Postoji ugao α_0 takav da je $\mathcal{L}(\alpha_0) = 1$ (Uslov normiranosti)
(3) Ako je $\alpha \cong \beta$ tada je $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ (Uslov invarijantnosti)
(4) Ako je $\alpha + \beta = \gamma$ tada je $\mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta) = \mathcal{L}(\gamma)$. (Uslov aditivnosti).
Broj $\mathcal{L}(\alpha)$ koji je u sistemu $\mathcal{L}$ merenja duži korespondiran uglu α nazivamo merom ili veličinom ugla α u sistemu merenja $\mathcal{L}$. Ugao α_0 za koji je $\mathcal{L}(\alpha_0) = 1$ nazivamo jediničnim uglom u sistemu merenja $\mathcal{L}$.

Navedena definicija predstavlja aksiomatsku definiciju merenja uglova.

Teorema 8.4.1. *Neka je $\mathcal{L}$ sistem merenja uglova. Tada je funkcija $\mathcal{L}'$ sistem merenja uglova ako i samo ako postoji broj $k \in \mathbb{R}^+$, takav da važi $\mathcal{L}' = k\mathcal{L}$.*

Teorema 8.4.2. *U sistemu $\mathcal{L}$ merenja uglova za svake dva ugla α i β važi:*
(a) $\mathcal{L}(\alpha) < \mathcal{L}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$,
(b) $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta) \Rightarrow \alpha \cong \beta$,
(c) $\mathcal{L}(\alpha - \beta) = \mathcal{L}(\alpha) - \mathcal{L}(\beta)$ *za* $\alpha > \beta$.

Od svih sistema merenja uglova uglova za nas je najinteresantniji onaj koji pravom uglu dodeljuje broj $\pi/2$. Takav sistem merenja uglova nazivamo it prirodnim sistemom merenja uglova.

Do sada izložene četiri grupe aksioma u celini čine sistem aksioma apsolutne geometrije. Dalje razgranavanje geometrije na Euklidsku i hiperboličku koju nazivamo geometrijom Lobačevskog vršimo uvođenjem aksiome paralelnosti. U pogledu specifičnosti apsolutna geometrija je okarakterisana vezanošću translacije za bazisnu pravu, odnosno odsustvom mogućnosti merenja površine i zapremine koja iz toga proističe, dok će ovi pojmovi biti dalje razvijani pojedinačno nakon uvođenja aksiome paralelnosti. Pri tome sve teoreme izvedene u apsolutnoj geometriji kao posledica samo četiri grupe aksioma bivaju očuvane i u Euklidskoj geometriji i u geometriji Lobačevskog, odnosno dopunjene jačim tvrđenjima koja proističu kao posledica uvođenja aksiome paralelnosti.

Glava 9

Ekvivalenti petog Euklidovog postulata

9.1 Plejferova aksioma paralelnosti

Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u Antičkim vremenima kod Grka. Međutim Euklidova originalna formulacija unekoliko se razlikuje od Plejferove aksiome paralelnosti koja u stvari predstavlja ekvivalent petog Euklidovog postulata.

Peti Euklidov postulat. *Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.*

Pokušaji dokazivanja petog Euklidovog postulata doveli su do niza tvrđenja ekvivalentnih petom Euklidovom postulatu. Jedno od takvih tvrđenja je

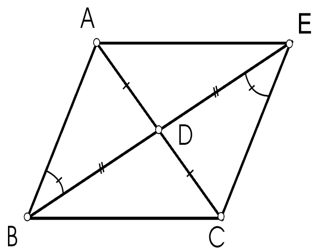
Plejferova aksioma paralelnosti. *Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni $\pi(p, A)$ postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.*

9.2 Ležandrove teoreme

Teoreme u ovom poglavlju odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i n-tougla u Apsolutnoj geometriji (bez aksiome paralelnosti).

Teorema 9.2.1. *Za svaki trougao Δ postoji trougao Δ_1 takav da su zbirovi unutrašnjih uglova trouglova Δ i Δ_1 jednaki međusobom a jedan unutrašnji ugao trougla Δ_1 je bar dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla Δ.*

Dokaz. Označimo sa A, B, C temena trugla Δ ali tako da $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$. Označimo dalje sa D sredinu stranice AC a sa E tačku simetričnu tački B u odnosu na tačku D (slika 9.1). Tada je ΔEBC traženi trougao Δ_1.



Slika 9.1.

Označimo sa $\sigma(ABC)$ zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC. Iz podudarnosti trouglova ΔABD i ΔCED sledi $\sigma(ABD) = \sigma(CED)$. Međutim, $\measuredangle CED$ jednak je uglu $\measuredangle ABD$, pa je bar jedan od uglova $\measuredangle ABD$ i $\measuredangle DBC$ bar dva puta manji od $\measuredangle ABC$. Tada je $\measuredangle DBC + \measuredangle DEC = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$ pa je

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta) &= \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB \\ &= \measuredangle DBC + \measuredangle DEC + \measuredangle BCA + \measuredangle ECA \\ &= \sigma(EBC) = \sigma(\Delta_1)\end{aligned}$$

Iz $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$ sledi $CE = AB \leq BC$ a odavde $\measuredangle CBE \leq \measuredangle BEC$. Neposredno dobijamo $2\measuredangle EBC \leq \measuredangle EBC + \measuredangle BEC = \measuredangle ABC$, pa je $\Delta_1 = \Delta EBC$ traženi trougao. □

Teorema 9.2.2. (Prva Ležandrova teorema) *U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.*

Pretpostavimo da postoji trougao Δ takav da mu je zbir unutršnjih uglova veći od zbira dva prava ugla. Označimo sa R prav ugao. To znači da $\sigma(\Delta) > 2R$, tj. $\sigma(\Delta) = 2R + \varepsilon$ pri čemu je $\varepsilon > 0$. Prema prethodnoj teoremi sledi da postoji trougao Δ_1 takav da je $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1)$ a jedan unutrašnji ugao trougla Δ_1 bar dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla Δ. Označimo te uglove redom sa α_1 i α. Tada je

$$\alpha_1 \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

Na isti način postoji Δ_2 takav da je $\sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2)$, a jedan unutrašnji ugao, označimo ga sa α_2 trougla Δ_2 bar dva puta manji od ugla α_1 trugla Δ_1. Tada je

$$\alpha_2 \leq \frac{1}{2}\alpha_1 \leq \frac{1}{2^2}\alpha.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz trouglova $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots \Delta_n \ldots$ i niz uglova $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots$ pri čemu je

$$\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \ldots = \sigma(\Delta_n) \ldots$$

i

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha.$$

Znači, dobili smo $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_n)$ i $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha$ za $\forall n \in N$. Pri tome broj n možemo izabrati tako veliki da ugao α_n bude manji od bilo kog unapred zadatog ugla pa i od ε. Ako je $\alpha_n < \varepsilon$ zbir ostala dva ugla trougla Δ_n je veći od $2R$, a to je nemoguće. Prema tome ne postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova veći od zbira dva prava ugla. □

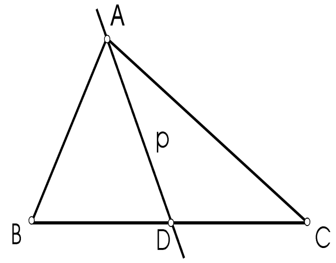
Definicija 9.2.1. Neka je $\sigma(ABC)$ zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC i R prav ugao. Razliku

$$\delta(ABC) = 2R - \sigma(ABC)$$

nazivamo *defektom trougla* ΔABC.

Očigledno je $\delta(ABC) \geq 0$.

Lema 1. *Ako je zbir unutrašnjih uglova nekog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla, koji je od prvog odsečen nekom pravom takođe jednak zbiru dva prava ugla.*



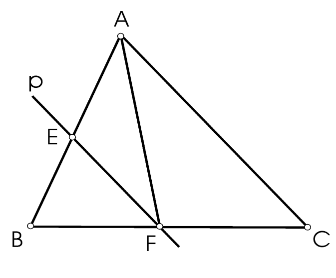
Slika 9.2.

Dokaz. Za presečnu pravu p mogu nastupiti dva slučaja:

(i) da sadrži jedno teme trougla i (ii) ne sadrži ni jedno teme trougla.

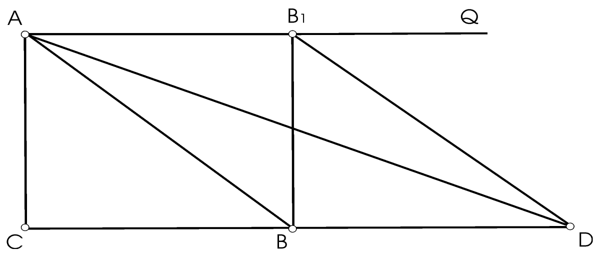
(i) Neka prava p sadrži teme A trougla ΔABC (slika 9.2). Označimo sa D presečnu tačku prave p sa stranicom BC. Tada je $\sigma(\Delta ABC) = \sigma(\Delta ABD) + \sigma(\Delta ACD) - 2R$ i $\sigma(ABC) = 2R$ pa je $\sigma(\Delta ABD) + \sigma(\Delta ACD) = 4R$. S druge strane zbir unutrašnjih uglova u trouglu ne može biti veći od zbira dva prava ugla pa je $\sigma(\Delta ABD) = 2R$ i $\sigma(\Delta ACD) = 2R$

(ii) Neka prava p ne sadrži ni jedno teme trougla ΔABC (slika 9.3). Označimo sa E i F presečne tačke prave p redom sa stranicama AB i BC trougla ΔABC. Zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABC jednak je zbiru dva prava ugla pa je prema dokazanom delu (i) zbir unutrašnjih uglova trougla ΔABF, a samim tim i trougla ΔBEF jednak zbiru dva prava ugla. □



Slika 9.3.

Lema 2. *Ako je zbir unutrašnjih uglova nekog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova pravouglog trougla koji se od prvog dobija udvostručavanjem jedne katete, takođe jednak zbiru dva prava ugla.*



Slika 9.4.

Dokaz. Neka je zbir unutršnjih uglova trougla ΔABC, sa pravim uglom kod temena C, jednak zbiru dva prava ugla (slika 9.4.). U tački A konstruišimo polupravu AQ upravnu na pravoj AC sa one strane prave AC sa koje je tačka B. Na polupravoj AQ uočimo tačku B_1 takvu da je $AB_1 = CB$. Neka je još D tačka poluprave CB takva da je $BD = BC$ i $\mathcal{B}(C, B, D)$. Kako je $\sigma(\Delta ABC) = 2R$ i $\measuredangle C = R$ sledi $\measuredangle CAB + \measuredangle CBA = R$. S druge strane je $\measuredangle CAB + \measuredangle BAB_1 = R$ pa je $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$. Za trouglove ΔABC i ΔABB_1 imamo $AB \equiv AB$, $BC = AB_1$ i $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$ pa su oni podudarni. Iz njihove podudarnosti sledi $\measuredangle AB_1B = \measuredangle C = R$, $\measuredangle CAB = \measuredangle B_1BA$. Sada je $\measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1BA + \measuredangle ABC = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC = R$, tj. $B_1B \perp CD$. Sada su trouglovi ΔABB_1 i ΔB_1DB podudarni jer je $\measuredangle AB_1B = \measuredangle DBB_1 = R$, $BB_1 \equiv BB_1$ i $AB_1 = DB_1$. Iz njihove podudarnosti sledi $AB = B_1D$ i $\measuredangle BAB_1 = \measuredangle B_1DB$. Sada trouglovi ΔABD i ΔDB_1A imaju sve odgovarajuće stranice podudarne pa su podudarni prema trećem stavu o podudarnosti trouglova, odakle sledi $\measuredangle BDA = \measuredangle B_1AD$. Zbir unutrašnjih uglova trougla ΔACD je

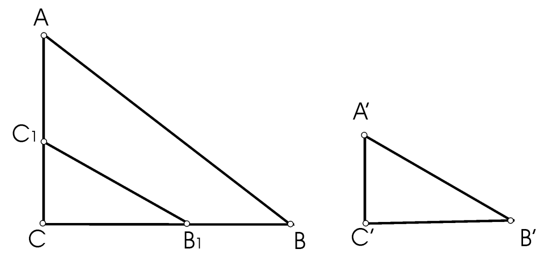
$$\begin{aligned}\sigma(\Delta ACD) &= \measuredangle ACD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAC \\ &= R + \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAC = R + \measuredangle B_1AC = 2R\end{aligned}$$

tj. $\sigma(\Delta ACD) = 2R$. □

Lema 3. *Ako je zbir unutrašnjih uglova jednog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla, tada je zbir unutrašnjih uglova svakog pravouglog trougla jednak zbiru dva prava ugla.*

Dokaz. Neka je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla i neka je $\Delta A'B'C'$ proizvoljan pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C'.

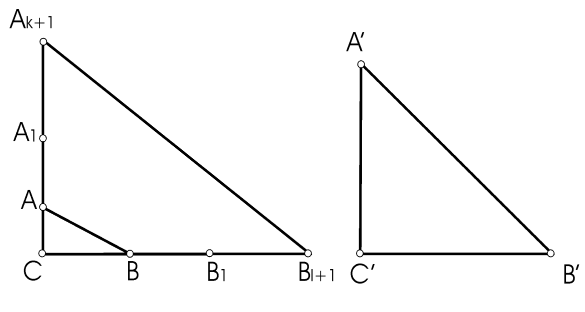
(i) Ako su obe katete trougla ΔABC veće ili jednake od odgovarajućih kateta trougla $\Delta A'B'C'$ tada na dužima CB i CA postoje tačke B_1 i A_1



Slika 9.5.

takve da je $CB_1 = C'A'$ i $CA_1 = C'A'$ (slika 9.5). Pravougli trougao ΔA_1B_1C nastao je odsecanjem od pravouglog trougla ΔABC čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla pa je prema Lemi 1. zbir unutrašnjih uglova trougla ΔA_1B_1C jednak zbiru dva prava ugla. Iz podudarnosti trouglova ΔA_1B_1C i $\Delta A'B'C'$ sledi da je zbir unutrašnjih uglova trougla $A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla.

(ii) Ako je kateta CA manja od katete $C'A'$ onda na polupravoj CA odredimo niz tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ takav da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ i $CA \cong AA_1$, $AA_1 \cong A_1A_2$,... (slika 9.6). Tada postoji prirodan broj k takav da je $CA_k < C'A' < CA_{k+1}$. Pri tome je prema Lemi 2. zbir unitrašnjih uglova u svakom od trouglova ΔA_nBC jednak $2R$.

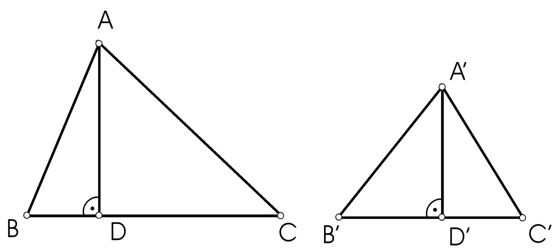


Slika 9.6.

Ako je kateta CB manja od katete $C'B'$ na polupravoj CB uočimo niz tačaka $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ takav da je $\mathcal{B}(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ i $CB \cong BB_1$, $BB_1 \cong B_1B_2$,... Tada postoji prirodan broj l takav da je $CB_l < C'A' < CB_{l+1}$. Pri tome je prema Lemi 2. zbir unitrašnjih uglova u svakom od trouglova ΔB_nBC_m jednak $2R$. Dakle, zbir unutrašnjih uglova u trouglu $\Delta A_{k+1}B_{l+1}C$ jednak je $2R$, pri čemu je $CA_{k+1} > C'A'$ i $CB_{l+1} > C'B'$ pa je prema dokazanom delu pod (i) zbir unutrašnjih uglova trougla $\Delta A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla.

Teorema 9.2.3. (Druga Ležandrova teorema) *Ako je u jednom trouglu ΔABC zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla tada je u svakom drugom trouglu $\Delta A'B'C'$ zbir unutrašnjih uglova takođe jednak zbiru dva prava ugla.*

Dokaz. Kod trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ bar po jedna visina ima podnožje na naspramnoj stranici (slika 9.7). Neka su to podnožja D i D' redom iz tačaka A i A'. Kako je kod ΔABC zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla, to visina AD razlaže taj trougao na trouglove ΔABD i ΔACD takve da su im zbirovi unutrašnjih uglova jednaki po $2R$ (Lema 1).



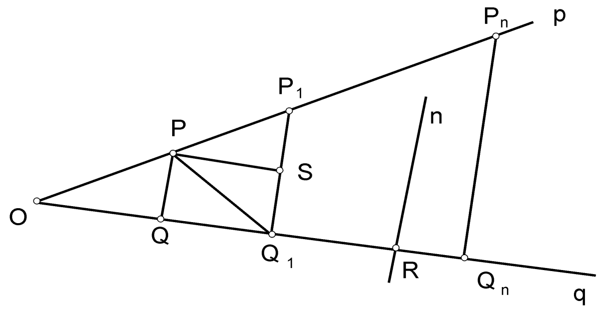
Slika 9.7.

Trougao ΔABD je pravougli i zbir unutrašnjih uglova mu je jednak $2R$ odakle sledi prema Lemi 2. da su zbirovi unutrašnjih uglova pravouglih trouglova $\Delta A'B'D'$ i $\Delta A'C'D'$ jednaki po $2R$ pa je i zbir unutrašnjih uglova trougla $A'B'C'$ jednak zbiru dva prava ugla. □

Teorema 9.2.4. *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla, ako i samo ako svaka prava upravna na jedan krak bilo kojeg oštrog ugla seče drugi krak tog ugla.*

Dokaz. Neka je $\measuredangle pOq$ proizvoljan oštar ugao i neka je $P \in p$ proizvoljna tačka. Označimo sa Q podnožje upravne iz tačke P na polupravu q (slika 9.8). Neka je R proizvoljna tačka poluprave q i n upravna na q u tački R.

Ako važi $\mathcal{B}(O,R,Q)$ onda na osnovu Pašove aksiome direktno sledi da prava n seče i polupravu p. Neka je $\mathcal{B}(O,Q,R)$ i P_n, Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ takve da je $\mathcal{B}(O,P,P_1,P_2,\cdots,P_n)$, $\mathcal{B}(O,Q,Q_1,Q_2,\cdots,Q_n)$, $OP_n = 2^n OP$ i $OQ_n = 2^n OQ$. Ako postoji trougao kod koga je suma unutrašnjih uglova



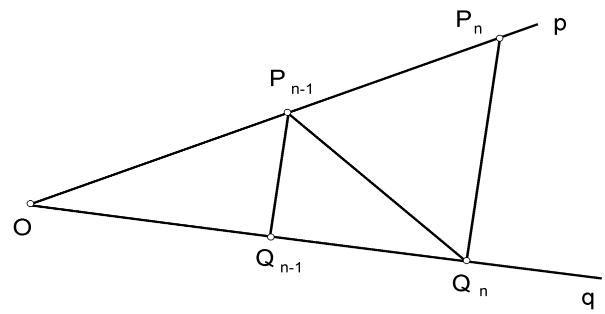
Slika 9.8.

jednaka zbiru dva prava ugla, onda je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla jednak zbiru dva prava ugla (druga Ležandrova teorema). Dakle, zbir unutrašnjih uglova trougla ΔOP_nQ_n jednak je zbiru dva prava ugla. Označimo sa S tačku prave s upravne na PQ u tački P takvu da je $PS \cong OQ$.

Tada je

$$\Delta OPQ \cong \Delta PP_1S \cong \Delta PQ_1S \cong \Delta PQ_1Q,$$

pa je $\measuredangle PQ_1Q \cong \measuredangle POQ$ i $\measuredangle P_1Q_1P \cong \measuredangle OPQ$ a kako je još $\measuredangle POQ + \measuredangle OPQ = R$, to je $\measuredangle OQ_1P_1$ prav. Rasuđujući na isti način zaključujemo da je ΔOP_nQ_n pravougli trougao sa pravim uglom kod temena Q_n. Na osnovu Arhimedove aksiome tačku Q_n možemo izabrati tako da je $\mathcal{B}(O, R, Q_n)$. Sada prava n na osnovu Pašovog stava mora seći još jednu stranicu trougla ΔOP_nQ_n u unutrašnjoj tački. Ukoliko bi n sekla stranicu P_nQ_n u unutrašnjoj tački, dobili bi smo trougao sa dva prava ugla, što je nemoguće. Prema tome n mora seći duž OP_n, tj. polupravu p, čime je dokaz završen.



Slika 9.9.

Obratno, neka svaka prava q_n upravna u tački Q_n na krak q seče krak p oštrog ugla $\measuredangle pOq$ u tački P_n (slika 9.9). Tada za defekt trougla ΔOP_nQ_n važi

$$\delta(OP_nQ_n) = \delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(P_{n-1}Q_{n-1}Q_n + \delta(P_{n-1}P_nQ_n),$$

tj.

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1}).$$

Nastavljajući taj postupak posle n koraka dobijamo

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2^n\delta(OPQ).$$

Ako bi bilo $\delta(OPQ) > 0$, broj n možemo izabrati dovoljno veliki da $2^n\delta(OPQ)$ bude veće od bilo kog unapred zadatog ugla, pa i od $2R$. Tada bi bilo

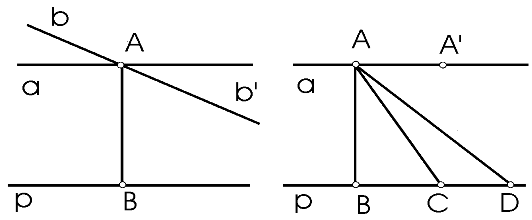
$$\delta(OP_nQ_n) > 2R$$

a to je nemoguće. Dakle, mora biti $\delta(OPQ) = 0$, tj. $\sigma(OPQ) = 2R$. □

Teorema 9.2.5. (Treća Ležandrova teorema) *Postoji trougao Δ kome je zbir $\sigma(\Delta)$ unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla ako i samo ako u ravni π određenoj pravom p i tačkom A van nje postoji samo jedna prava a koja sadrži tačku A i ne seče pravu p.*

Dokaz. Označimo sa B podnožje normale iz tačke A na pravu p, a sa a pravu koja je upravna na AB u tački A (slika 9.10.). Pretpostavimo da postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla i dokažimo da je prava a jedina koja prolazi kroz tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p. Neka je b još jedna prava u ravni π koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom sa pravom p. Neka je b' ona od polupravih prave b sa početkom u tački A koja sa polupravom BA gradi oštar ugao. Prava p je upravna na krak BA oštrog ugla, pa na osnovu teoreme 9.2.4. ona seče drugi krak b', dakle i pravu b.

Obratno, neka je u ravni π data prava p, tačka A van nje i prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p. Neka je prava a jedinstvena sa tom osobinom. Pokazaćemo da postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla. Obeležimo sa B podnožje upravne iz tačke A na pravu p (slika 9.10.). Neka je C proizvoljna tačka prave p različita od tačke B i A' tačka prave a sa iste strane prave AB sa koje je i tačka C. Tada je zbir $s(ABC)$ unutrašnjih uglova trougla ΔABC jednak



Slika 9.10.

$2R$. Dokažimo to. Na osnovu prve Ležandrove teoreme važi $s(ABC) \leq 2R$, pa je $\measuredangle ACB \leq \measuredangle CAA'$. Ako bi bilo $\measuredangle ACB < \measuredangle CAA'$ onda bi unutar ugla $\measuredangle CAA'$ postojala poluprava b' koja sa AC gradi ugao β podudaran uglu $\measuredangle ACB$. Ugao $\measuredangle ACB$ je oštar odakle sledi da je i β oštar, tj. poluprava b na osnovu teoreme 9.2.4. seče pravu p u tački D. Tada bi u trouglu ΔACD spoljašnji ugao kod temena C bio jednak unutrašnem nesusednom uglu $\measuredangle CAD$, što je nemoguće. Prema tome mora biti zbir unutrašnjih uglova u ΔABC jednak $2R$. □

9.3 Ekvivalenti Plejferove aksiome paralelnosti

Teorema 9.3.1. *Tvrđenje: "Zbir unutrašnjih uglova proizvojnog trougla jednak je zbiru dva prava ugla", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Sledi direktno iz druge i treće Ležandrove teoreme. □

Teorema 9.3.2. *Tvrđenje: "Zbir σ unutrašnjih uglova prostog ravnog n-tougla jednak je $\sigma = 2(n-2)R$, pri čemu je R prav ugao", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Direktno sledi iz prethodne teoreme. □

Posledica. *Tvrđenje "Zbir spoljašnjih uglova kod svih temena konveksnog prostog ravnog n- tougla jednak je $4R$" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Definicija 9.3.1. Četvorougao $ABCD$ je *Sakerijev* ako važi $\measuredangle A = \measuredangle B = R$ i $AD = BC$. Stranica AB je osnovica, CD protivosnovica a AD i BC su visine Sakerijevog četvorougla.

U Euklidskoj geometriji Sakerijev četvorougao je pravougaonik.

Teorema 9.3.3. *U apsolutnoj geometriji uglovi nalegli na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su jednaki.*

Definicija 9.3.2. *Srednja linija Sakerijevog* četvorougla je duž koja spaja središta osnovice i protivosnovice.

Teorema 9.3.4. *U apsolutnoj geometriji srednja linija Sakerijevog četvorougla je zajednička normala osnovice i protivosnovice.*

Teorema 9.3.5. *Tvrđenje: "Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su pravi" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Definicija 9.3.3. Četvorougao sa tri prava ugla u apsolutnoj geometriji naziva se *Lambertov.*

Teorema 9.3.6. *Tvrđenje: "Svi uglovi Lambertovog četvorougla su pravi", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Teorema 9.3.7. *Tvrđenje: "Svaka prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jedan krak oštrog ugla seče drugi krak", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

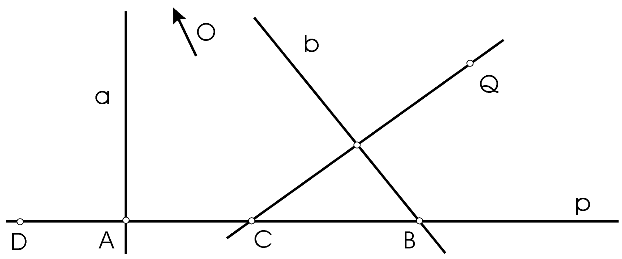
Dokaz. Sledi direktno iz teoreme 9.2.4. i treće Ležandrove teoreme. □

Teorema 9.3.8. *Tvrđenje: "Kroz makoje tri nekolinearne tačke prolazi krug", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka su A, B i C tri nekolinearne tačke. Medijatrise stranica trougla ΔABC pripadaju istom pramenu pravih. Nije teško zaključiti da se radi o pramenu konkurentnih pravih, tj. da presečna tačka O medijatrisa stranica trougla ΔABC predstavlja središte kruga opisanog oko trougla ΔABC.

Obratno, neka važe aksiome apsolutne geometrije i neka kroz ma koje tri nekolinearne tačke prolazi krug. Neka proizvoljne prave a i b seku neku pravu p tako da je a upravna na p i b nije upravna na p.

Označimo sa A i B presečne tačke prave p redom sa pravama a i b (slika 9.11). Neka je C tačka prave p takva da je $\mathcal{B}(A, C, B)$. Neka je D tačka simetrična tački C u odnosu na tačku A, q prava koja je normalna na pravu b i sadrži tačku C i Q tačka prave q simetrična tački C u odnosu

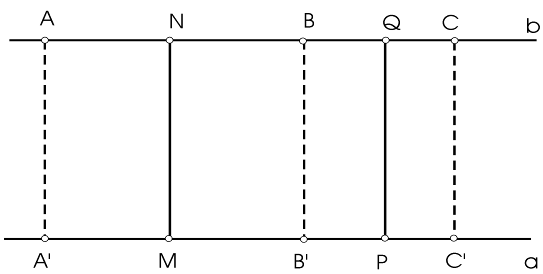


Slika 9.11.

na pravu b. Dakle, prave a i b su medijatrise redom duži CD i CQ. Tačke C, D i Q su tri nekolinearne tačke jer bi u suprotnom bilo $b \perp p$. Prema uvedenoj pretpostavci kroz tačke C, D i Q prolazi krug, sa centrom u tački O. Tačka O je podjednako udaljena od temena C, D i Q trougla ΔDCQ, tj. $OC \cong OD \cong OQ$. Tačka O pripada pravoj a, jer je a medijatrisa duži CD. Takođe tačka O pripada i pravoj b, jer je b medijatrisa duži CQ. Dakle, prave a i b seku se u tački O, što na osnovu teoreme 9.2.4. i treće Ležandrove teoreme znači da važi Plejferova aksioma paralelnosti. □

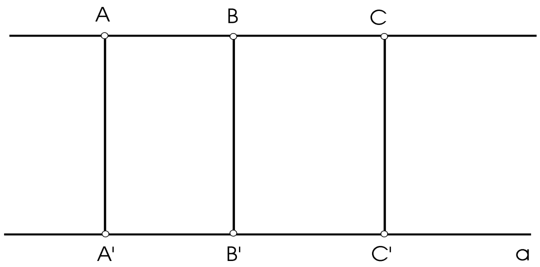
Teorema 9.3.9. *Tvrđenje: "U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljene od date prave", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka su A, B, C tri kolinearne tačke podjednako udaljene od prave a. Dokazaćemo da tada važi Plejferova aksioma paralelnosti. Označimo sa A', B', C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu A.



Slika 9.12.

Tada je $AA' \cong BB' \cong CC'$. Dakle četvorougao $AA'B'B$ je Sakerijev. Srednja linija MN tog četvorougla (teorema 9.3.4.) je zajednička normala osnovice i protivosnovice, tj. $MN \perp a$ i $MN \perp b$ (slika 9.12).



Slika 9.13.

Četvorougao $BB'C'C$ je Sakerijev pa je srednja linija PQ zajednička normala na prave a i b (teorema 9.3.4.). Kako tačke N i Q pripadaju pravoj b i ne pripadaju pravoj a, to tačke M, N, P i Q obrazuju četvorougao sa četiri prava ugla, odakle na osnovu teoreme 9.3.2. važi Plejferova aksioma paralelnosti.

Obratno, neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka su u ravni date prava a i tačke A, B i C sa iste strane prave a, tako da je $AA' \cong BB' \cong CC'$ gde su A', B' i C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu a. Pokazaćemo da su tačke A, B i C kolinearne (slika 9.13).

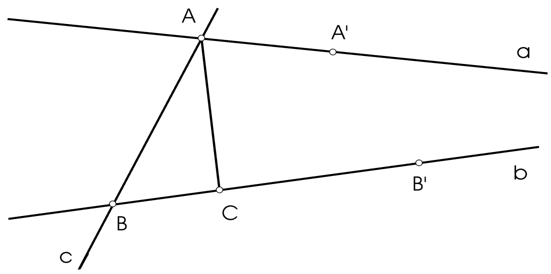
Četvorougao $AA'B'B$ je pravougaonik pa je $AB \parallel a$. Takođe, četvorougao $AA'C'C$ je pravougaonik pa je $AC \parallel a$. Kako važi Plejferova aksioma paralelnosti prave AB i AC se poklapaju, tj. tačke A, B i C su kolinearne. $\square$

Peti Euklidov postulat. Zbog svog istorijskog značaja, od posebnog je interesa Peti Euklidov postulat kao jedan od mnogih ekvivalenata Plejferove aksiome paralelnosti:

Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.

Teorema 9.3.10. *Peti Euklidov postulat i Plejferova aksioma paralelnosti su ekvivalentna tvrđenja.*

Dokaz. Neka važi Plejferova aksioma paralelnosti i neka prava c seče prave a i b redom u tačkama A i B. Označimo sa A' i B' tačke redom pravih a i



Slika 9.14.

b takve da je

$$\measuredangle A'AB + \measuredangle B'BA < 2R$$

gde je R prav ugao (slika 9.14). Tada je bar jedan od uglova $\measuredangle A'AB$ i $\measuredangle B'BA$ oštar. Ne umanjujući opštost dokaza pretpostavimo da je ugao $\measuredangle B'BA$ oštar.

Označimo sa C podnožje upravne iz tačke A na pravu b. Tačke C i B' su sa iste strane tačke B jer bi smo u suprotnom dobili trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova veći od zbira dva prava ugla, što je u suprotnosti sa prvom Ležandrovom teoremom. Tada je i ugao $\measuredangle CAA'$ oštar. Zaista, kako važi Plejferova aksioma paralelnosti to je $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = R$, odakle zaključujemo

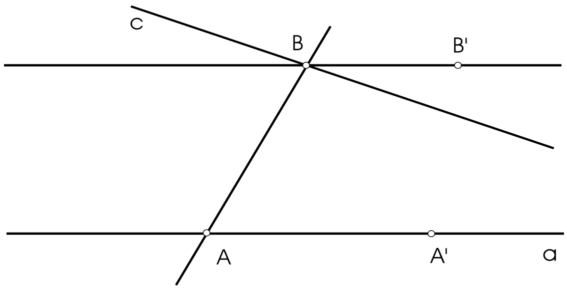
$$\begin{aligned} \measuredangle CAA' &= \measuredangle BAA' - \measuredangle BAC = \measuredangle BAA' - (R - \measuredangle ABC) \\ &= \measuredangle BAA' - R + \measuredangle ABC < 2R - R = R \end{aligned}$$

Prava b je normala u tački C na jedan krak oštrog ugla $\measuredangle CAA'$, odakle na osnovu teoreme 9.3.7. seče drugi krak tog ugla. Dakle prave a i b se seku, tj. važi peti Euklidov postulat.

Obratno, neka važi peti Euklidov postulat i neka su dati prava a i tačka B van prve a. Neka su A i A' proizvoljne tačke prave a i neka je B' tačka ravni (a, B) određenoj pravom a i tačkom B tako da je (slika 9.15)

$$A', B' \ddot{-} AB \text{ i } \measuredangle A'AB + \measuredangle ABB' = 2R.$$

Prava $b \equiv BB'$ je jedina prava ravni (a, B) koja sadrži tačku B i nema zajedničkih tačaka sa pravom a. Zaista, svaka druga prava c ravni (a, B) koja sadrži tačku B gradi sa pravom AB suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla. Kako važi peti Euklidov postulat prava c mora seći pravu a, a to znači da važi Plejferova aksioma paralelnosti. $\square$

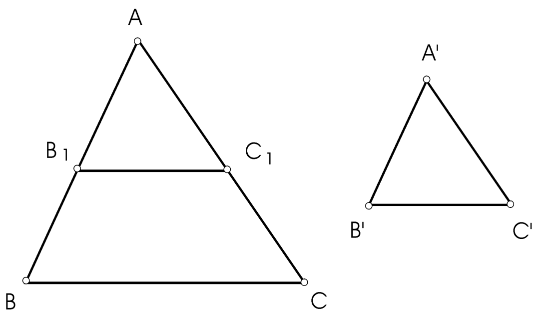


Slika 9.15.

Razmotrićemo još jedan interesantan ekvivalent aksiome paralelnosti:

Teorema 9.3.11. *Tvrđenje: "Postoje dva trougla kojima su odgovarajući uglovi jednaki a odgovarajuće stranice nejednake" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.*

Dokaz. Neka za trouglove ΔABC i $\Delta A'B'C'$ važi $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$ a odgovarajuće stranice su im nejednake (slika 9.16). To znači da postoji tačka $B_1 \neq B$ na polupravoj AB takva da je $AB_1 \cong A'B'$ i tačka $C_1 \neq C$ na polupravoj AC takva da je $AC_1 \cong A'C'$.



Slika 9.16.

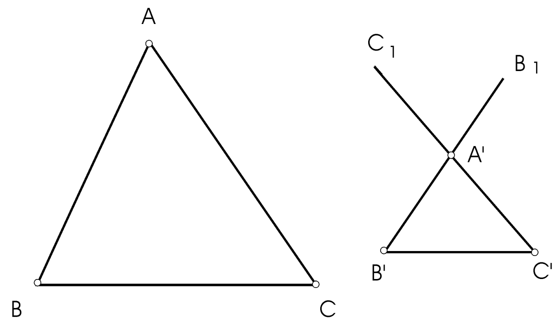
Trouglovi ΔAB_1C_1 i $\Delta A'B'C'$ su podudarni jer imaju jednake dve stranice i njima zahvaćen ugao, odakle sledi

$$\measuredangle AB_1C_1 \cong \measuredangle A'B'C' \text{ i } \measuredangle AC_1B_1 \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Posmatrajmo četvorougao BCC_1B_1. Tada za zbir unutrašnjih uglova tog četvorougla važi

$$\begin{aligned}\sigma(BCC_1B_1) &= \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle CC_1B_1 + \measuredangle C_1B_1B \\ &= \measuredangle B' + \measuredangle C' + (2R - \measuredangle C') + (2R - \measuredangle B') = 4R.\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 9.3.2. važi Plejferova aksioma paralelnosti.



Slika 9.17.

Obratno, neka važi Plejferova aksioma paralelnosti. Neka je dat trougao ΔABC i duž $B'C'$ tako da je $B'C' \neq BC$ (slika 9.17).

Neka su $B'B_1$ i $C'C_1$ poluprave takve da je

$$\measuredangle(B'B_1, B'C') = \measuredangle B,\ \ \measuredangle(B'C', C'C_1) = \measuredangle C.$$

Uglovi $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ su uglovi trougla ΔABC , pa važi $\measuredangle B + \measuredangle C < 2R$, odakle sledi $\measuredangle B' + \measuredangle C' < 2R$. Kako smo pretpostavili da važi Plejferova aksioma paralelnosti važiće i Peti Euklidov postulat, tj. poluprave $B'B_1$ i $C'C_1$ će se seći u tački A'. Trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju sva tri odgovarajuća ugla jednaka, dok im odgovarajuće stranice nisu jednake. $\square$

Glava 10

Aksioma paralelnosti. Euklidska geometrija

10.1 Euklidska geometrija. Plejferova aksioma paralelnosti. Pojam Euklidskog prostora.

Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u antičkim vremenima kod Grka. Međutim, Euklidova originalna formulacija unekoliko se razlikuje od Plejferove aksiome paralelnosti, koja u stvari predstavlja ekvivalent petog Euklidovog postulata. Pošto ovako iskazan poseduje jednostavnu formulaciju Plejfer 1797 godine uzima taj stav za aksiomu, a peti postulat za teoremu.

Plejferova aksioma paralelnosti. *Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje, tada u ravni $\pi(p, A)$ postoji najviše jedna prava a, koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.*

Definicija 10.1.1. Teoriju zasnovanu na sistemu aksioma apsolutne geometrije i Plejferovoj aksiomi paralelnosti nazivamo *Euklidskom* ili *paraboličkom geometrijom.* Ravan i prostor u kojima važe aksiome Euklidske geometrije nazivamo respektivno Euklidskom ravni i Euklidskim prostorom i označavamo ih redom E^2 i E^3.

10.2 Paralelnost u $\mathbf{E^n}$, $(\mathbf{n = 2, 3})$

U Euklidskoj geometriji se radi lakšeg izlaganja uvode binarne relacije definisane na skupu svih pravih i skupu svih ravni - relacija paralelnosti pravih i relacija paralelnosti ravni a takođe i relacija paralelnosti prave i ravni.

Definicija 10.2.1. U prostoru E^3 prava p je *paralelna* sa pravom q (oznaka $p \parallel q$) ako je prava p komplanarna sa pravom q pri čemu je $p \equiv q$ ili $p \cap q = \emptyset$.

Iz prethodne definicije i Plejferove aksiome paralelnosti neposredno sledi sledeća

Teorema 10.2.1. *Za svaku pravu p i svaku tačku P prostora E^3 postoji jedinstvena prava q prostora E^3 takva da sadrži tačku P i paralelna je pravoj p.*

Teorema 10.2.2. *Relacija paralelnosti definisana na skupu pravih prostora E^n, $n = 2, 3$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije paralelnosti pravih slede direktno iz definicije. Dokazaćemo tranzitivnost. Neka su p, q i r tri prave prostora E^n takve da je $p \parallel q$ i $q \parallel r$. Dokazaćemo da je tada $q \parallel r$. Iz činjenice da je $p \parallel q$ sledi da su prave p i q komplanarne. Na isti način komplanarne su i prave q i r. Označimo sa α ravan određenu pravama p i q a sa β ravan određenu pravama q i r. Za ravni α i β mogu nastupiti sledeći slučajevi: $\alpha = \beta$ i $\alpha \neq \beta$.

(i) Neka je $\alpha = \beta$. Ako je $p = q$ ili $q = r$ dokaz je trivijalan. Neka je $p \neq q$ i $q \neq r$. Tada prave p i r ne mogu imati zajedničkih tačaka, jer bi u suprotnom u ravni α postojale dve razne prave p i r koje se seku i koje sa pravom q nemaju zajedničkih tačaka, što je u suprotnosti sa Plejferovom aksiomom paralelnosti.

(ii) Neka je sada $\alpha \neq \beta$. U tom slučaju mora biti $p \neq q$ i $q \neq r$ jer bi se u suprotnom ravni α i β poklapale. Dakle važi $p \cap q = \varnothing$ i $q \cap r = \varnothing$. Da bi dokazali da su prave p i r paralelne dovoljno je dokazati da su disjunktne i komplanarne. Ako bi se prave p i r sekle u tački S, tada bi prava q i tačka S određivale jedinstvenu ravan pa bi bilo $\alpha = \beta$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Znači važi $p \cap r = \varnothing$, tj. prave p i r su disjunktne. Dokažimo još da su prave p i r komplanarne. Neka je $P \in p$ proizvoljna tačka. Tada tačka P i prava određuju neku ravan γ. ravni α i γ imaju zajedničku tačku pa je njihov presek prava. Ukoliko je to prava p dokaz je završen, jer u tom slučaju prave p i r pripadaju ravni γ. Neka je p' presečna prava ravni α i γ, pri čemu je $p \neq p'$. Sada prave p, p' i q pripadaju istoj ravni α pri čemu se prave p i p' seku u istoj tački P i prema Plejferovoj aksiomi paralelnosti ne mogu biti istovremeno disjunktne sa pravom q. Dakle, prave p' i q se seku u nekoj tački Q. Tačka Q pripada svim trima ravnima α, β i γ. Kako je q presečna prava ravni α i β, a r presečna prava ravni β i γ, to važi

$$Q \in \alpha \cap \beta \cap \gamma = (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = q \cap r,$$

tj. Q je presečna tačka pravih q i r, što je nemoguće, jer smo pretpostavili da je $q \cap r = \varnothing$. Dakle, prave p i r su komplanarne. $\square$

Relacija paralelnosti pravih kao relacija ekvivalencije razbija skup svih pravih prostora E^n na klase ekvivalencije. Te klase ekvivalencije zvaćemo *pravcima*. Na taj način pravac prave p predstavlja skup svih pravih koje su sa njom paralelne.

Definicija 10.2.2. U prostoru E^3 *prava* p *je paralelna ravni* π (oznaka $p \parallel \pi$) ako je $p \subset \pi$ ili $p \cap \pi = \emptyset$. Obratno, u prostoru E^3 ravan π je paralelna sa pravom p (oznaka $\pi \parallel p$) ako je $\pi \supset p$ ili $\pi \cap p = \emptyset$.

Iz definicije neposredno sledi da ako je $p \parallel \pi$ tada je i $\pi \parallel p$ i obratno. Prema tome u mogućnosti smo da za takvu pravu p i ravan π kažemo da su paralelne bez obzira na njihov poredak.

Teorema 10.2.3. *Prava p je paralelna ravni π ako i samo ako u ravni π postoji prava q paralelna sa pravom p.*

Dokaz. Ako prava p pripada ravni π dokaz je trivijalan. Razmotrimo slučaj kada prava p ne pripada ravni π.

Neka je $p \parallel \pi$. Dokažimo da u ravni π postoji prava q takva da je $p \parallel q$. Neka je A proizvoljna tačka u ravni π. Tačka A ne pripada pravoj p, odakle sledi da tačka A i prava p određuju ravan α. Ravni α i π imaju zajedničku tačku A pa je njihov presek prava q. Ravni α i π su različite jer prava p pripada ravni α a ne pripada ravni π. Prave p i q su komplanarne i nemaju zajedničkih tačaka, jer bi njihova zajednička tačka pripadala ravni π, što je nemoguće. Dakle, prave p i q moraju biti paralelne.

Neka sada u ravni π postoji prava q paralelna pravoj p. Dokažimo da je prava p paralelna ravni π. Kako prava p ne pripada ravni π niti sa njom ima zajedničkih tačaka, to prave p i q nemaju zajedničkih tačaka pa određuju neku ravan α. Ravan π i prava p su disjunktne, jer ako bi se sekle, njihova presečna tačaka bi pripadala preseku ravni α i π, tj pravoj q, što je nemoguće jer su prave p i q disjunktne. Prema tome parava p i ravan π su paralelne.□

Definicija 10.2.3. U prostoru E^3 *ravan* α *je paralelna ravni* β, (oznaka: $\alpha \parallel \beta$) ako je $\alpha \equiv \beta$ ili $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Teorema 10.2.4. *Relacija paralelnosti ravni prostora* E^3 *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost slede direktno iz definicije. Dokažimo tranzitivnost. Neka su α, β i γ tri ravni takve da je $\alpha \parallel \beta$ i $\beta \parallel \gamma$, dokažimo da je tada $\alpha \parallel \gamma$. za ravni α, β i γ mogu nastupiti sledeći slučajevi: (i) $\alpha = \beta$ ili $\beta = \gamma$, (ii) $\alpha \neq \beta$ i $\beta \neq \gamma$. Prvi slučaj je trivijalan. Razmotrimo slučaj $\alpha \neq \beta$ i $\beta \neq \gamma$. Tada $\alpha \cap \beta = \varnothing$ i $\beta \cap \gamma = \varnothing$. Pretpostavimo da ravni α i γ nisu paralelne, tj. neka je p presečna prava ravni α i γ. Neka je P proizvoljna tačaka prave p i A tačka ravni α koja ne pripada pravoj p. Neka je još B proizvoljna tačka ravni β. Tada postoji ravan π koja sadrži nekolinearne tačke A, B i P. Ravan π ima zajedničkih tačaka sa svakom od ravni α, β i γ, odakle sledi da sa svakom od njih ima zajedničku pravu. Označimo te zajedničke prave redom sa a, b i c. Prave a i c su različite jer bi u suprotnom tačka A pripadala i pravoj c pa bi se ravni α i γ poklapale, što u ovom slučaju nije moguće. Različite prave a i c imaju zajedničku tačku P, i disjunktne su sa pravom b u ravni π, što je u suprotnosti sa Plejferovom aksiomom paralelnosti. Prema tome ravni α i γ moraju biti paralelne. □

Teorema 10.2.5. *Neka su dati ravan* α *i tačka* B. *Tada postoji jedinstvena ravan* β *koja sadrži tačku* B *i paralelna je ravni* α.

Dokaz. Za tačku B i ravan α imamo sledeće mogućnosti:

(i) $B \in \alpha$, (ii) $B \notin \alpha$.

(i) U prvom slučaju α je tražena ravan.

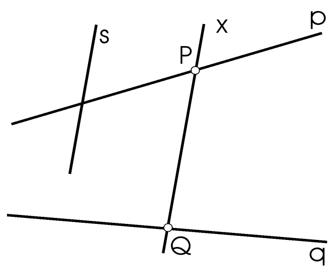
(ii) Neka $B \notin \alpha$. Označimo sa A proizvoljnu tačku ravni α. Neka su p i q proizvoljne različite prave ravni α koje sadrže tačku A. Prema teoremi 10.2.1. postoje jedinstvene prave p' i q' koje sadrže tačku B, takve da je $p' \parallel p$ i $q' \parallel q$. Ako bi se prave p' i q' poklapale, onda bi zbog tranzitivnosti relacije paralelnosti pravih, prave p i q bile paralelne, što je u suprotnosti sa njihovim izborom. Prema tome, prave p' i q' se seku u tački B pa određuju tačno jednu ravan β. Ravan β je tražena ravan. Dokažimo to. Ravan β sadrži tačku B. Pretpostavimo da ravni α i β nisu paralelne. U tom slučaju ravni α i β se seku po nekoj pravoj r. Prema Plejferovoj aksiomi paralelnosti bar jedna od pravih p' i q' u ravni β mora seći pravu r. Neka prava p' seče pravu r u tački R. Prave p i p' su dve razne paralelne prave pa određuju neku ravan π. Tada tačka R pripada ravnima π i α, pa samim tim i njihovom preseku, tj. pravoj p. To znači da se prave p i p' seku u tački R što je u suprotnosti sa njihovim izborom. Prema tome ravan β paralelna je ravni α. Time je dokazana egzistencija takve ravni.

Treba pokazati još jedinstvenost. Neka je β_1 proizvoljna ravan, koja sadrži tačku B i paralelna je ravni α. Zbog tranzitivnosti relacije paralelnosti ravni sledi da su ravni β i β_1 paralelne, a kako imaju zajedničku tačku B one se poklapaju. □

10.3 Paralelno projektovanje i Talesova teorema u prostoru $\mathbf{E}^n$

Relacija paralelnosti pravih prostora E^n omogućuje da ustanovimo pojam paralelnog projektovanja prave na pravu.

Definicija 10.3.1. Neka su p i q dve prave ravni E^2 i s prava koja pripada toj ravni (slika 10.1) i nije paralelna ni sa jednom od njih. *Paralelnim projektovanjem prave p na pravu q* definisanim u odnosu na pravu s nazivamo funkciju $f : p \to q$ koja svakoj tački P prave p dodeljuje tačku Q prave q, pri čemu je $Q = x \cap q$ a x prava koja prolazi kroz tačku P i paralelna je pravoj s. Pravu q nazivamo projekcijskom pravom, x projekcijskim zrakom koji odgovara tački P, a tačku Q paralelnom projekcijom tačke P definisane u odnosu na pravu s.



Slika 10.1.

Navešćemo sada neke osobine paralelnog projektovanja prave u prostoru E^n.

Teorema 10.3.1. *Paralelno projektovanje f prave p na pravu q definisano u odnosu na pravu s je bijektivno preslikavanje.*

Teorema 10.3.2. *Paralelno projektovanje f prave p na pravu q definisano u odnosu na pravu s je uređeno preslikavanje.*

Drugim rečima ako su A, B , C tačke prave p takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$ tada je i $\mathcal{B}(f(A), f(B), f(C))$.

Definicija 10.3.2. Pod *razmerom* dveju duži podrazumevamo količnik njihovih dužina u nekom sistemu $\mathcal{L}$ merenja duži. Jednakost dveju razmera duži nazivamo *srazmerom* tih duži.

Pojam paralelnog projektovanja nam omogućuje da dokažemo jednu od najstarijih teorema geometrije - Talesovu teoremu.

Teorema 10.3.3. (Tales) *Neka su l i l' dve prave ravni E^2 i s prava te ravni koja nije paralelna ni sa jednom od pravih l i l'. Tada paralelno projektovanje f koje pravu l preslikava u pravu l' definisano u odnosu na pravu s ne menja razmeru dveju duži. Drugim rečima, ako pri projektovanju f u odnosu na pravu s raznim tačkama P, Q, R i S prave l odgovaraju redom tačke P', Q', R' i S' prave l', tada je*

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}.$$

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja:

(i) $l \parallel l'$ i (ii) $l \nparallel l'$.

(i) Ako je $l \parallel l'$ za svake dve razne tačke $P, Q \in l$ i njima odgovarajuće tačke $P' = f(P)$ i $Q' = f(Q)$ je $PQ \cong P'Q'$, pa je f izometrijsko preslikavanje prave l na pravu l'.

(ii) Ako $l \nparallel l'$ tada se prave l i l' seku u tački O. Svakoj duži XY prave l pridružimo broj $L(XY)$ tako da je $L(XY) = d_{\mathcal{L}}(f(X)f(Y))$. Dokazaćemo da funkcija $\mathcal{L}$ definisana na taj način zadovoljava sledeća dva uslova

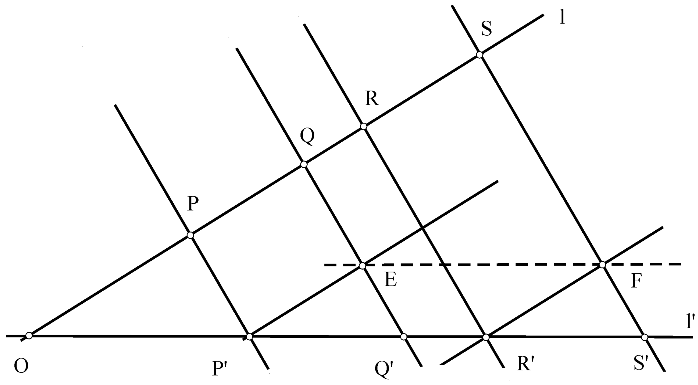
(1) Ako tačke P, Q, R, S zadovoljavaju relaciju $PQ \cong RS$, tada je $L(PQ) = L(RS)$,

(2) Ako su P, Q, R tačke prave l takve da je $\mathcal{B}(P, Q, R)$, tada je

$$L(PQ) + L(QR) = L(PR).$$

U cilju dokaza uslova (1) za funkciju L pretpostavimo da su podudarne duži PQ i RS istosmerne (slika 10.2). Označimo sa P', Q', R', S' tačke koje u funkciji f odgovaraju odgovaraju redom tačkama P, Q, R i S, a sa E i F

tačke pravih QQ' i SS' takve da su prave $P'E$ i $R'F$ paralelne sa pravom l. Tada su četvorouglovi $PQEP'$ i $RSFR'$ paralelogrami, pa su duži $P'E$ i $R'F$ podudarne i istosmerne sa dužima PQ i RS redom. Prema tome i četvorougao $P'R'FE$ je paralelogram pa su i duži EF i $P'R'$ podudarne i istosmerne. Sada je i četvorougao $Q'S'FE$ paralelogram pa su duži EF i $Q'S'$ podudarne i istosmerne. Znači i duži $P'R'$ i $Q'S'$ su podudarne i istosmerne. Odavde sledi da su i duži $P'Q'$ i $R'S'$ podudarne i istosmerne, pa je uslov (1) zadovoljen.



Slika 10.2.

Kako iz $\mathcal{B}(P,Q,R)$ sledi $\mathcal{B}(P',Q',R')$, imamo

$$d_{\mathcal{L}}(f(PQ)) + d_{\mathcal{L}}(f(QR)) = d_{\mathcal{L}}(f(PR))$$

odnosno

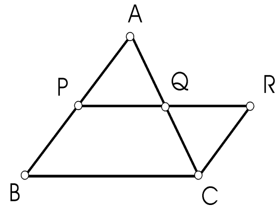
$$L(PQ) + L(QR) = L(PR),$$

pa je i uslov (2) za funkciju L zadovoljen.

Na osnovu dokazanog neposredno zaključujemo da funkcija $\mathcal{L}$ predstavlja sistem merenja duži. Prema tome (teorema 8.3.1.) postoji broj $k \in \mathbb{R}^+$ takav da je za proizvoljne tačke $X, Y \in l$ i $X', Y' \in l'$ zadovoljeno

$$L(XY) = d_{\mathcal{L}}(X'Y') = k\, d_{\mathcal{L}}(XY)$$

te stoga paralelno projektovanje ne menja razmeru dveju duži. $\square$



Slika 10.3.

10.4 Paralelogram, srednja linija trougla

Definicija 10.4.1. (i) Četvorougao $ABCD$ je *paralelogram* ako je $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$.

(ii) Četvorougao kome su sve ivice podudarne naziva se *romb*.

(iii) Četvorougao kome su svi unutrašnji uglovi međusobom podudarni naziva se *pravougaonik*.

(iv) Četvorougao čije si sve stranice jednake i svi uglovi pravi naziva se *kvadrat*.

Teorema 10.4.1. *Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) Četvorougao $ABCD$ je paralelogram.

(ii) $AB \parallel CD$ i $AB \cong CD$.

(iii) $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

(iv) Parovi naspramnih uglova četvorougla $ABCD$ su parovi podudarnih uglova.

(v) Svaka dva susedna unutrašnja ugla su suplementna.

(vi) Dijagonale četvorougla $ABCD$ se uzajamno polove.

Teorema 10.4.2. *(i) Paralelogram je romb ako su mu dijagonale međusobom normalne.*

(ii) Paralelogram je pravougaonik ako su mu dijagonale međusobom podudarne.

(iii) Paralelogram je kvadrat ako su mu dijagonale međusobom normalne i podudarne.

Definicija 10.4.2. Duž koja spaja središta dveju stranica nekog trougla naziva se *srednja linija* trougla koja odgovara trećoj stranici.

Teorema 10.4.3. (O srednjoj liniji trougla) *Ako su P i Q središta redom stranica AB i AC trougla ΔABC tada je:*

$$PQ = \frac{1}{2}BC \quad i \quad PQ \parallel BC.$$

Dokaz. Označimo sa R (slika 10.3) tačku prave PQ takvu da je $\mathcal{B}(P,Q,R)$ i $PQ \cong QR$. Tačka Q je zajedničko središte duži AC i PR pa je četvorougao $APCR$ paralelogram, odakle sledi da je $AP \cong RC$ i $AP \parallel RC$. Tačka P je središte duži AB pa je $PB \cong RC$ i $PB \parallel RC$, tj. i četvorougao $PBCR$ je paralelogram. Tada je $PR \parallel BC$ i $PR \cong BC$, odakle sledi $PQ \parallel BC$ i $PQ = \frac{1}{2}BC$. □

10.5 Značajne tačke trougla

Trougao, naizgled jednostavna figura, ima jako mnogo interesantnih osobina. Ovde ćemo navesti neke od njih vezane za karakteristične tačke trougla, koje nazivamo značajnim tačkama trougla.

Teorema 10.5.1. (O centru opisanog kruga) *Medijatrise stranica trougla seku se u jednoj tački.*

Dokaz. Dokazali smo u odeljku o pramenovima pravih ravni S^2 (strana 117) da medijatrise stranica trougla pripadaju istom pramenu pravih. Kako se u ovom slučaju ne može raditi o pramenu paralelnih pravih, zaključujemo da se medijatrise stranica trougla seku u jedno tački. □

Teorema 10.5.2. (O centru upisanog kruga) *Bisektrise unutrašnjih uglova trougla seku se u jednoj tački.*

Dokaz ove teoreme (strana 118) izveden je u apsolutnoj geometriji.

Teorema 10.5.3. (O ortocentru) *Prave određene visinama trougla seku se u jednoj tački.*

I ova teorema dokazana je u apsolutnoj geometriji (strana 118).

Teorema 10.5.4. *Centar opisanog kruga pravouglog trougla je središte njegove hipotenuze.*

Dokaz. Označimo sa O središte hipotenuze AB pravouglog trougla ΔABC a sa P središte katete AC. Duž OP je srednja linija ovog trougla koja odgovara kateti BC, odakle sledi $OP \parallel BC$, tj. $OP \perp AC$. Trouglovi ΔOPC i ΔOPA su podudarni su podudarni, odakle je $OC \cong OA$. Kako je još $OB \cong OA$, sledi da je tačka O centar opisanog kruga oko trougla ΔABC. □

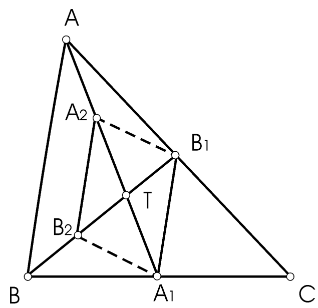
Iz prethodne teoreme slede i sledeća dva tvrđenja:

Posledica 10.5.1. *Težišna duž, koja odgovara hipotenuzi, jednaka je polovini hipotenuze.*

Posledica 10.5.2. *Ugao nad prečnikom je prav.*

Definicija 10.5.1. Duž, čije su krajne tačke teme i središte naspramne stranice, nazivamo *težišnom duži* trougla.

Teorema 10.5.5. (O težištu) *Težišne duži trougla ΔABC seku se u jednoj tački T, koja ih deli u razmeri $2:1$, tj. $AT = 2TA_1$, gde je A_1 središte stranice BC.*

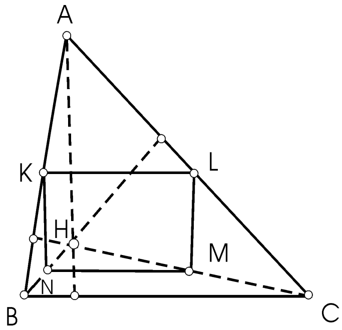


Slika 10.4.

Dokaz. Neka su A_1, B_1, C_1 (slika 10.4) središta redom ivica BC, CA i AB trougla ΔABC. Na osnovu Pašove aksiome, težišne duži AA_1 i BB_1 se seku. Označimo sa T njihovu presečnu tačku. Označimo sa A_2 i B_2 redom središta duži AT i BT. Tada je duž A_1B_1 srednja linija trougla ΔABC koja odgovara stranici AB pa je $A_1B_1 = 1/2\,AB$ i $A_1B_1 \parallel AB$. Duž A_2B_2 je srednja linija trougla ΔTAB pa je $A_2B_2 = 1/2\,AB$ i $A_2B_2 \parallel AB$. Prema tome, četvorougao $A_1B_1A_2B_2$ je paralelogram i njegove dijagonale se polove u tački T. Sledi $AA_2 \cong A_2T \cong TA_1$ i $BB_2 \cong B_2T \cong TB_1$, odakle je

$AT : TA_1 = BT : TB_1 = 2 : 1$. Treba još pokazati da i težišna duž iz temena C sadrži tačku T i da je $CT : TC_1 = 2 : 1$. Analogno kao u prethodnom slučaju možrmo pokazati da se težišne duži AA_1 i CC_1 seku u tački T_1 tako da je $CT_1 : T_1C_1 = AT_1 : T_1A_1 = 2 : 1$. Kako je $AT : TA_1 = 2 : 1$ sledi $T_1 \equiv T$. □

Teorema 10.5.6. *Ako je H ortocentar, a K, L, M, N redom središta duži AB, AC, HC, HB, tada je četvorougao $KLMN$ pravougaonik.*

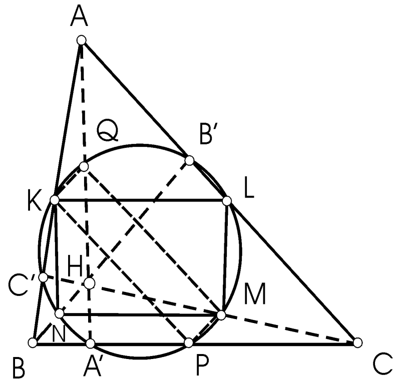


Slika 10.5.

Dokaz. Duži MN i KL su srednje linije redom trouglova ΔHBC i ΔABC (slika 10.5) koje odgovaraju istoj osnovici BC, pa je $KL \cong MN \cong 1/2\,BC$ i $KL \parallel MN \parallel BC$. Dakle četvorougao $KLMN$ je paralelogram. Duž KN je srednja linija trougla ΔABH, pa je $KN \parallel AH$. Kako je još $AH \perp BC$, to je $KN \perp MN, KL$. Dakle četvorougao $KLMN$ je pravougaonik. □

Teorema 10.5.7. *Središta stranica, podnožja visina i središta duži određenih ortocentrom i temenima trougla ΔABC pripadaju jednom krugu.*

Dokaz. Označimo sa K, P, L središta stranica AB, BC, CA; sa A', B' i C' podnožja visina redom iz tačaka A, B i C; a sa Q, N i M središta duži AH, BH i CH redom (slika 10.6). Na osnovu prethodne teoreme četvorouglovi $KLMN$ i $PMQK$ su pravougaonici. Duž KM je zajednička dijagonala ovih pravougaonika i oko njih se može opisati zajednički krug nad prečnikom KM. Dakle, tačke K, P, L, N, M i Q pripadaju krugu k nad prečnikom KM. Ostaje još da pokažemo da tačke A', B' i C' pripadaju krugu k. Tačka A' pripada krugu k jer je ugao $\measuredangle PA'Q$ prav. Analogno i tačke B' i C' pripadaju krugu k. □



Slika 10.6.

Definicija 10.5.2. *Krug iz prethodne teoreme naziva se Ojlerov*[1] *krug ili krug devet tačaka.*

[1]L. Ojler (1707-1783) dokazao je 1765. godine, da trougao određen središtima ivica i trougao određen podnožjima visina nekog trougla imaju zajednički opisani krug.

Glava 11

Izometrijske transformacije prostora $\mathbf{E^n}$ $(\mathbf{n = 2, 3})$

11.1 Specifična svojstva izometrijskih transformacija ravni $\mathbf{E^2}$

Pored ranije razmatranih svojstava koja su važila u apsolutnoj geometriji, u Euklidskoj geometriji važiće i neki specifični stavovi koji su direktna posledica aksiome paralelnosti, npr. to se odnosi na stavove o odnosu prave i ravni ili stav o jedinstvenoj zajedničkoj normali. Takođe će važiti i neke specifičnosti koje prestaju da budu vezane za bazisne prave. Takođe, moguća je kompletna izgradnja teorije centralnih rotacija koja nije bila izvršena u apsolutnoj geometriji, jer nije bio rešen problem odnosa dveju disjunktnih pravih, tj. proizvoda odgovarajućih refleksija.

Teorema 11.1.1. *Kompozicija dveju centralnih rotacija ravni E^2 predstavlja centralnu rotaciju, translaciju ili koincidenciju.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve centralne rotacije ravni E^2.

Slučaj kada je $A \equiv B$ razmatran je u apsolutnoj geometriji.

Neka je $A \neq B$. Označimo sa c pravu određenu tačkama A i B a sa a i b prave takve da je $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_c\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_c$. Tada je

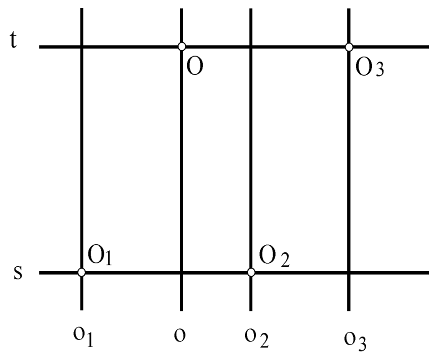
$$\mathcal{R}_{B,\beta}\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_c\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b\mathcal{S}_a.$$

U zavisnosti da li se prave a i b seku u nekoj tački C ili ne, razmatrana kompozicija predstavlja centralnu rotaciju oko tačke C za neki ugao γ ili neku translaciju za izvesnu duž MN. $\square$

Teorema 11.1.2. *Kompozicija neparnog broja centralnih simetrija ravni E^2 predstavlja takođe centralnu simetriju te ravni.*

Dokaz. Neka je dat neparan broj centralnih simetrija $\mathcal{S}_{O_1}$, $\mathcal{S}_{O_2}$, ..., $\mathcal{S}_{O_n}$ ravni E^2.

Slučaj kada tačke $O_1, O_2, \ldots, O_n$ pripadaju jednoj pravoj razmatran je u apsolutnoj geometriji.



Slika 11.1.

Neka tačke O_1, O_2, ..., O_n ne pripadaju jednoj pravoj. Razmotrimo slučaj $n = 3$. Obeležimo sa s pravu određenu tačkama O_1 i O_2, a sa o_1, o_2 i o_3 prave koje sadrže redom tačke O_1, O_2 i O_3 i upravne su na pravoj s. Neka je t prava koja sadrži tačku O_3 i nema zajedničkih tačaka sa pravom s (slika 11.1). Tada je

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_3}\mathcal{S}_{O_2}\mathcal{S}_{O_1} &= \mathcal{S}_t\mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_s\mathcal{S}_s\mathcal{S}_{o_1}\\ &= \mathcal{S}_t\mathcal{S}_{o_3}\mathcal{S}_{o_2}\mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_t\mathcal{S}_o = \mathcal{S}_O\end{aligned}$$

jer prave o_1, o_2 o_3 pripadaju jednom pramenu pravih pošto su sve tri upravne na pravoj s pa je prema tome kompozicija osnih refleksija $\mathcal{S}_{o_1}$, $\mathcal{S}_{o_2}$ i $\mathcal{S}_{o_3}$ takođe osna refleksija u odnosu na neku pravu o koja je upravna na pravoj s. Kako je prava o upravna na pravu t u nekoj tački O to je $\mathcal{S}_t\mathcal{S}_o = \mathcal{S}_O$.

Slučaj kada je $n > 3$ dokazuje se indukcijom.

Teorema 11.1.3. *Kompozicija parnog broja centralnih simetrija Euklidske ravni E^2 je translacija ili koincidencija.*

U geometriji ravni E^2 skup svih translacija ravni E^2 predstavlja komutativnu grupu - grupu translacija ravni E^2 $G(\tau)$.

11.2 Klasifikacija izometrijskih transformacija ravni E^2

Klasifikaciju izometrijskih transformacija ravni E^2 prvi je dao Leonard Ojler 1748. godine u delu *Analiza beskonačnih veličina.* Klasifikacija je izvedena metodom analitičke geometrije te je imala analitički karakter.

Geometrijsku klasifikaciju izometrijskih transformacija ravni E^2 dali su Bernuli i Šal.

Teorema 11.2.1. (Bernuli-Šala) *Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja koincidenciju, translaciju ili centralnu rotaciju.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I} : E^2 \to E^2$ direktna izometrijska transformacija to se ona može predstaviti kao kompozicija dveju osnih simetrija tog prostora, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q$. U zavisnosti od međusobnog položaja pravih p i q razlikujemo tri slučaja:

(i) Ako je $p \equiv q$ onda je zbog involutivnosti osne simetrije $\mathcal{I} = \varepsilon$.

(ii) Ako je $p \cap q = \emptyset$ tada su prave p i q upravne na nekoj pravoj t pa je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q = \tau_{\overrightarrow{MM'}}$ pri čemu tačke M i M' pripadaju pravoj t.

(iii) Ako se prave p i q seku u nekoj tački O tada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q = \mathcal{R}_{O,\omega}$, gde je $\omega = 2\measuredangle(p, q)$. $\square$

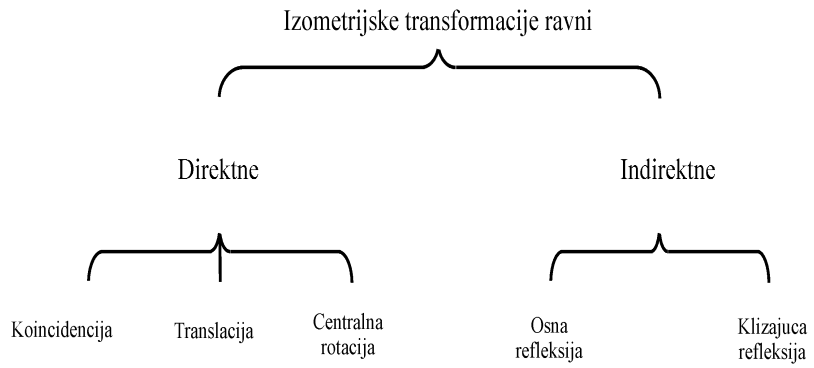
Teorema 11.2.2. (Bernuli-Šala) *Svaka indirektna izometrijska transformacija ravni E^2 predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju.*

Dokaz. Neka transformacija $\mathcal{I}$ predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju ravni E^2. Tada se njena optimalna izometrijska reprezentacija sastoji od jedne ili tri osne refleksije.

(i) Ako je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ onda je u ovom slučaju dokaz završen.

(ii) Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q\mathcal{S}_r$ pri čemu ose tih refleksija ne pripadaju jednom pramenu pravih. Prema ranije dokazanom stavu $\mathcal{I}$ je klizajuća refleksija, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{MM'}}$. $\square$

U skladu sa ovim možemo dati šemu izometrijskih transformacija ravni E^2:



11.3 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora $\mathbf{E^3}$

I klasifikaciju izometrijskih transformacija prostora E^3 dao je Šal.

Teorema 11.3.1. (Šal) *Svaka direktna izometrijska transformacija prostora E^3 predstavlja koincidenciju, translaciju, osnu rotaciju ili zavojno kretanje.*

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I} : E^3 \to E^3$ po pretpostavci direktna izometrijska transformacija prema poznatoj teoremi ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$. U zavisnosti od uzajamnog položaja osa m i n tih refleksija razlikujemo sledeće slučajeve:

(i) Prave m i n se poklapaju, tj. $m = n$. Tada je $\mathcal{I} = \varepsilon$.

(ii) Prave m i n su komplanarne i disjunktne. Označimo sa π ravan određenu pravama m i n, a sa μ i ν ravni koje sadrže redom prave m i n a upravne su na ravan π. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu = \tau_{\overrightarrow{MM'}}.$$

(iii) Prave m i n seku se u nekoj tački O. Označimo sa π ravan određenu pravama m i n a sa μ i ν ravni koje sadrže prave m i n redom i upravne su na ravni π. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_m\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu = \mathcal{R}_{s,\omega},$$

pri čemu je s presečna prava ravni μ i ν a $\omega = 2\measuredangle(\mu,\nu)$.

(iv) Prave m i n su mimoilazne. Tada postoji prava s koja je zajednička normala na prave m i n. Označimo sa M i N presečne tačke prave s redom sa pravama m i n, a sa π_1 i π_2 ravni koje su u tačkama M i N upravne na pravu s. Prave m i n pripadaju redom ravnima π_1 i π_2. Neka su σ_1 i σ_2 ravni određene redom pravama s, m i s, n. Tada, s obzirom na to da su ravni σ_1 i σ_2 upravne na π_1 i π_2 istovremeno (jer su π_1 i π_2 paralelne), imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{S}_m\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\sigma_2} = \\ &= \mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\sigma_2} = \tau_{\overrightarrow{MM'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}. \end{aligned}$$

tj. $\mathcal{I}$ je zavojno kretanje. □

Teorema 11.3.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja ravansku, osnorotacionu ili klizajuću refleksiju.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija prostora E^3 njena optimalna simetrijska reprezentacija sastoji se iz jedne ili iz tri ravanske refleksije.

(i) U prvom slučaju je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$, tj. $\mathcal{I}$ je ravanska refleksija prostora E^3.

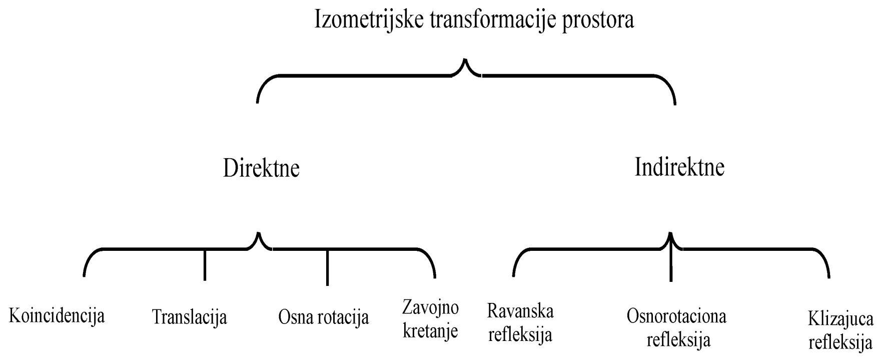
(ii) U drugom slučaju je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$, pri čemu ravni α, β i γ ne pripadaju istom pramenu ravni. Naime ako bi ove ravni pripadale istom pramenu, onda bi $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$ predstavljala ravansku refleksiju, te bi se slučaj (ii) sveo na slučaj (i).

Tri ravni α, β i γ u prostoru određuju jedan snop ravni. U prostoru E^3 postoje dve vrste snopova ravni: snop konkurentnih ravni i ortogonalni snop ravni.

(a) Ako ravni α, β i γ pripadaju snopu konkurentnih ravni kome je središte tačaka O, tj. zajednička tačka ravni α, β i γ, tada je tačka O invarijantna tačka kompozicije $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$. U tom slučaju izometrija $\mathcal{I}$ kao indirektna izometrijska transformacija sa invarijantnom tačkom O predstavlja rotacionu refleksiju prostora E^3, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$.

(b) Ako ravni α, β i γ pripadaju ortogonalnom snopu ravni, kompozicija $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$ predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{MM'}}$. □

U skladu s ovim možemo dati šemu izometrijskih transformacija prostora E^3:



Klasifikacije izometrijskih transformacija su do početka XX veka vršene na intuitivnoj osnovi. Navedeni pristup klasifikaciji izometrijskih transformacija dat je šestdesetih godina XX veka.

Glava 12

Sličnost i homotetija

12.1 Transformacije sličnosti prostora $\mathbf{E^n}$

U ovom odeljku ćemo se upoznati sa transformacijama sličnosti koje predstavljaju uopštenje izometrijskih transformacija, tj. izometrijske transformacije predstavljaju samo specijalan slučaj transformacija sličnosti.

Definicija 12.1.1. Neka je $k \in \mathbb{R}^+$ proizvoljan pozitivan realan broj i

$$\mathcal{P} : E^n \to E^n, \quad (n = 1, 2, 3)$$

bijektivno preslikavanje koje svake dve tačke X, Y prostora E^n prevodi redom u tačke X', Y' prostora E^n takve da je

$$X'Y' = k\, XY.$$

Tada preslikavanje $\mathcal{P}$ nazivamo *transformacijom sličnosti prostora* E^n, sa koeficijentom k.

Neposredno iz definicije možemo zaključiti da izometrijske transformacije predstavljaju samo specijalan slučaj transformacija sličnosti za $k = 1$. Sada ćemo navesti neke osobine transformacija sličnosti prostora E^n.

Teorema 12.1.1. *Transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n kolinearne tačke A, B, C prevodi u kolinearne tačke A', B', C'. Štaviše, transformacija sličnosti prostora E^n je uređena, tj. ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$ tada je $\mathcal{B}(A', B', C')$.*

Dokaz. Neka je k koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$. Tada je prema definiciji

$$A'B' = k\, AB, \quad B'C' = k\, BC, \quad A'C' = k\, AC.$$

Iz ovih jednakosti i relacije $\mathcal{B}(A,B,C)$ nalazimo da je

$$A'B' + B'C' = k\,AB + k\,BC = k(AB + BC) = k\,AC = A'C'.$$

Odavde sledi da su tačke A', B' i C' kolinearne i da važi raspored $\mathcal{B}(A',B',C')$. $\square$

Teorema 12.1.2. *Transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ podudarne parove tačaka preslikava na podudarne parove tačaka.*

Dokaz. Neka su A,B,C i D tačke prostora E^n takve da je $(A,B) \cong (C,D)$ i A', B' C' i D' njihove odgovarajuće tačke u transformaciji $\mathcal{P}$. Ako je k koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$, tada je $A'B' = k\,AB$ i $C'D' = k\,CD$. Prema tome iz $(A,B) \cong (C,D)$ sledi $(A',B') \cong (C',D')$. $\square$

Teorema 12.1.3. *Skup svih transformacija sličnosti prostora E^n predstavlja nekomutativnu grupu.*

Dokaz. (i) Neka su $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ dve proizvoljne transformacije sličnosti prostora E^n sa koeficijentima sličnosti redom k_1 i k_2. Neka su zatim X i Y dve proizvoljne tačke prostora E^n, a X_1, Y_1, X_2, Y_2 tačke prostora E^n takve da je

$$\mathcal{P}_1(X) = X_1, \quad \mathcal{P}_1(Y) = Y_1, \quad \mathcal{P}_2(X_1) = X_2, \quad \mathcal{P}_2(Y_1) = Y_2.$$

Tada je $X_1Y_1 = k_1\,XY$ i $X_2Y_2 = k_2\,X_1Y_1$ pa je $X_2Y_2 = k_1k_2\,XY$. Dakle, kompozicija $\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1$ predstavlja transformaciju sličnosti prostora E^n sa koeficijentom $k = k_1k_2$, tj. proizvod dve transformacije sličnosti prostora E^n predstavlja transformaciju sličnosti.

(ii) Neka je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora E^n sa koeficijentom k. Tada svakom paru tačaka $X,Y \in E^n$ odgovara u toj transformaciji par tačaka X',Y' takav da je $X'Y' = k\,XY$. Tada je $XY = \frac{1}{k}\,X'Y'$, odakle sledi da je $\mathcal{P}^{-1}$ transformacija sličnosti prostora E^n sa koeficijentom sličnosti $1/k$.

Iz (i) i (ii) sledi da da skup transformacija sličnosti predstavjla podgrupu grupe svih transformacija prostora E^n, pa prema tome predstavlja grupu. Da je grupa transformacija sličnosti nekomutativna sledi iz činjenice da ona sadrži nekomutativnu podgrupu $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija. $\square$

Definicija 12.1.2. Grupu koja se sastoji iz svih transformacija sličnosti prostora E^n nazivamo *grupom transformacija sličnosti* i simbolički je obeležavamo sa $G(\mathcal{P})$.

Uočimo funkciju $f : G(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^+$ koja svakoj transformaciji sličnosti $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ korespondira njen koeficijent sličnosti k. Nije teško proveriti da f predstavlja homomorfizam grupe $G(\mathcal{P})$ na multiplikativnu grupu pozitivnih brojeva. Grupa $G(\mathcal{I})$ predstavlja jezgro tog homomorfizma.

Nije teško ustanoviti da transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n kao uređeno preslikavanje prevodi jednako orjentisane likove u jednako orjentisane likove, a suprotno orjentisane likove u suprotno orjentisane likove. Samim tim razlikujemo dve vrste transformacija sličnosti: direktne i indirektne.

Definicija 12.1.3. Transformaciju sličnosti prostora E^n nazivamo *direktnom* ili *indirektnom* u zavisnosti od toga da li ona čuva ili menja orjentaciju tog prostora.

U potpunosti je jasno da kompozicija dveju direktnih ili dveju indirektnih transformacija sličnosti uvek predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju sličnosti. Takođe, kompozicija dveju transformacija sličnosti prostora E^n od kojih je jedna direktna a druga indirektna predstavlja indirektnu transformaciju sličnosti. Na osnovu toga zaključujemo da važi sledeća teorema.

Teorema 12.1.4. *Skup svih direktnih transformacija sličnosti prostora E^n čini nekomutativnu podgrupu indeksa dva grupe $G(\mathcal{P})$ svih transformacija sličnosti prostora E^n.*

Definicija 12.1.4. Grupu sastavljenu od direktnih transformacija sličnosti prostora E^n nazivamo *grupom direktnih transformacija sličnosti* i simbolički je označavamo sa $G(\mathcal{P}^+)$.

Osnovu za dalje proučavanje svojstava transformacija sličnosti čine izvesne osobine koje se odnose na paralelno projektovanje u prostoru E^n.

12.2 Pojam vektora u prostoru $\mathbf{E^n}$ $(\mathbf{n = 1, 2, 3})$

Pojam vektora igra izuzetno važnu ulogu u rešavanju mnogih geometrijskuh zadataka i problema. Translacija prostora E^n omogućuje uvođenje pojma vektora u prostoru E^n. Pre uvođenja pojma vektora uvešćemo pomoćnu relaciju *ekvipolencije* ili *istoznačnosti* uređenih parova tačaka.

Definicija 12.2.1. Neka su P, P', Q i Q' tačke prostora E^n. Par tačaka (P, P') je *ekvipolentan* paru tačaka (Q, Q') ako postoji translacija prostora E^n koja tačke P i Q prevodi redom u tačke P' i Q'.

Iz definicije neposredno sledi da su parovi tačaka (P, P') i (Q, Q') translatorno podudarni. To znači da su duži PP' i QQ' istosmerne i podudarne.

Nije teško utvrditi da važi sledeća teorema:

Teorema 12.2.1. *Relacija ekvipolencije definisana na skupu uređenih parova tačaka prostora E^n je relacija ekvivalencije.*

Relacija ekvipolencije razbija skup svih uređenih tačaka prostora E^n na beskonačno mnogo klasa ekvivalencije.

Definicija 12.2.2. Klasu svih međusobom ekvipolentnih uređenih parova tačaka prostora E^n nazivamo *vektorom.*

Vektore najčešće označavamo : $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\cdots$ Kako vektor $\overrightarrow{a}$ predstavlja čitavu klasu ekvipolentnih parova tačaka koja je jednoznačno određena bilo kojim parom (A, A') te klase, vektor možemo označavati i sa $\overrightarrow{AA'}$. Tada tačka A predstavlja početak, a tačka A' kraj vektora $\overrightarrow{AA'}$. Pravac određen pravom AA' nazivamo pravcem vektora $\overrightarrow{AA'}$, a smer određen usmerenom (orjentisanom) duži $\overrightarrow{AA'}$ nazivamo smerom vektora $\overrightarrow{AA'}$.

12.3 Homotetija prostora E^n

Definicija 12.3.1. Neka je O proizvoljna tačka prostora E^n i k realan broj različit od nule. *Homotetijom sa središtem* O i koeficijentom k nazivamo transformaciju

$$\mathcal{H}_{O,k} : E^n \to E^n \qquad (n = 1, 2, 3)$$

koja svaku tačku $X \in E^n$ prevodi u tačku $X' \in E^n$ takvu da je $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

Iz definicije neposredno sledi da je homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ bijektivna transformacija i da je jednoznačno određena središtem O i koeficijentom k. Štaviše za $k \neq 1$ homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ ima jedinstvenu invarijantnu tačku - tačku O, za $k = 1$ predstavlja koincidenciju a za $k = -1$ centralnu refleksiju $\mathcal{S}_O$.

Teorema 12.3.1. *Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ prostora E^n predstavlja transformaciju sličnosti sa koeficijentom sličnosti $k' = |k|$.*

Dokaz. Označimo sa A i B dve proizvoljne tačke prostora E^n. Neka su A' i B' redom tačke koje u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ odgovaraju tačkama A i B. Tada je $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Tada je

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Odavde, za duži AB i $A'B'$ sledi $A'B' = |k|AB$. Dakle, homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ predstavlja transformaciju sličnosti sa koeficijentom $|k|$. □

Lako se pokazuje sledeća teorema:

Teorema 12.3.2. *Transformacija sličnosti $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ koja prevodi svaku pravu u njoj paralelnu pravu predstavlja translaciju ili homotetiju.*

Teorema 12.3.3. *Ako je $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ transformacija sličnosti sa koeficijentom k i O fiksirana tačka prostora E^n tada postoje dve i samo dve izometrijske transformacije $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ prostora E^n takve da je*

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k}, \qquad \mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}_2.$$

Dokaz. Neka u transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P, Q prostora E^n odgovaraju redom tačke P', Q' prostora E^n, a u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama P, Q odgovaraju tačke P'', Q'' prostora E^n. Tada je $P'Q' = k\,PQ$ i $P''Q'' = k\,PQ$, odakle je $P'Q' \cong P''Q''$ i kompozicija $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ tačke P'', Q'' prevodi u tačke P', Q' pa predstavlja neku izometrijsku transformaciju $\mathcal{I}_1$. Iz $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{I}_1$ sledi da je $\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k}$. Analogno se dokazuje drugi deo teoreme. □

Teorema 12.3.4. *Neka je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija prostora E^n. Ako je n paran broj tada homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ predstavlja direktnu transformaciju sličnosti; ako je n neparan broj tada homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ predstavlja direktnu ili indirektnu izometrijsku transformaciju sličnosti u zavisnosti od toga da li je $k > 0$ ili $k < 0$.*

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj $n = 2$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama P i Q nekolinearnim s tačkom O odgovaraju redom tačke P' i Q' tada za $k > 0$ uglu POQ odgovara taj isti ugao, a za $k < 0$ uglu POQ odgovara njemu centralno simetričan ugao $P'OQ'$. Odavde neposredno sledi da u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ svakom uglu odgovara njemu istosmeran ugao, pa je homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ ravni E^2 direktna izometrijska transformacija.

Neka je sada $n = 3$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama P, Q, R nekomplanarnim s tačkom O odgovaraju redom tačke P', Q', R', tada za $k > 0$ triedru O_{PQR} odgovara taj isti triedar $O_{P'Q'R'}$, a za $k < 0$ triedru O_{PQR} odgovara njemu centralno simetričan triedar $O_{P'Q'R'}$. Dakle homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ za $k > 0$ ne menja a za $k < 0$ menja orjentaciju prostora E^3. □

Teorema 12.3.5. *Skup $\mathcal{H}_O$ svih homotetija koje imaju zajedničko središte O predstavlja komutativnu grupu.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{H}_{O,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O,k_2}$ dve proizvoljne homotetije iz skupa $\mathcal{H}_O$. Neka je X proizvoljna tačka prostora E^n i neka su X_1 i X_2 tačke prostora E^n takve da je $\mathcal{H}_{O,k_1}(X) = X_1$ i $\mathcal{H}_{O,k_2}(X_1) = X_2$. Tada je $\overrightarrow{OX_1} = k_1\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OX_2} = k_2\overrightarrow{OX_1}$, odakle je $\overrightarrow{OX_2} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$. Dakle $\mathcal{H}_{O,k_2} \circ \mathcal{H}_{O,k_1} = \mathcal{H}_{O,k}$, gde je $k = k_1k_2$.

Ako je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija iz skupa $\mathcal{H}_O$, biće i $\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ homotetija i skupa $\mathcal{H}_O$. Zaista, ako označimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^n i sa X' tačku takvu da je $\mathcal{H}_{O,k}(X) = X'$ onda je $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, tj. $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX'}$ odakle sledi $\mathcal{H}^{-1}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,\frac{1}{k}}$.

Budući da homotetije iz skupa $\mathcal{H}_O$ predstavlja elemente grupe $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ svih transformacija sličnosti prostora E^n, na osnovu dokazanog sledi da skup $\mathcal{H}_O$ predstavlja podgrupu grupe $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. Komutativnost sledi neposredno iz definicije homotetije. □

Definicija 12.3.2. Grupu koja se sastoji iz svih homotetija prostora E^n sa zajedničkim središtem O nazivamo *grupom homotetija* i simbolički je označavamo sa $\mathcal{G}(\mathcal{H}_\mathcal{O})$.

Teorema 12.3.6. *Grupa $\mathcal{G}(\mathcal{H}_\mathcal{O})$ je izomorfna multiplikativnoj grupi $\mathcal{G}(R^*)$, gde je $R^* = R\backslash\{O\}$.*

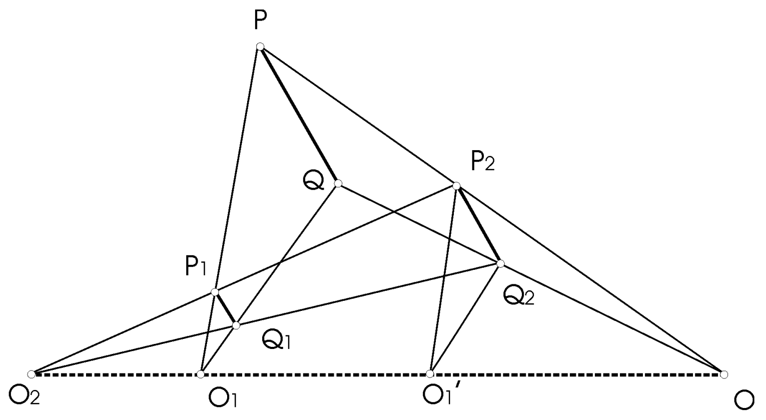
Teorema 12.3.7. *Ako su $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ dve homotetije prostora E^n sa raznim središtima O_1 i O_2 tada je $\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}$:*
(i) Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ ako je $k_1k_2 \neq 1$, pri čemu je $k = k_1k_2$ a O tačka prave O_1O_2 takva da je

$$\overrightarrow{O_1O} : \overrightarrow{OO_2} = (k_2 - 1) : k_2(k_1 - 1),$$

(ii) Translacija $\tau_{\overrightarrow{PP_2}}$ ako je $k_1k_2 = 1$, pri čemu je

$$PP_2 \parallel O_1O_2, \qquad \overrightarrow{PP_2} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Dokaz. Označimo sa P i Q dve razne tačke prostora E^n, sa P_1 i Q_1 tačke prostora E^n koje u homotetiji $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ odgovaraju tačkama P i Q, a sa P_2 i Q_2 tačke prostora E^n koje u homotetiji $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ odgovaraju tačkama P_1 i Q_1. Tada je $P_1Q_1 \parallel PQ$ i $P_2Q_2 \parallel P_1Q_1$, odakle sledi $P_2Q_2 \parallel PQ$. Osim toga je $\overrightarrow{P_1Q_1} = k_1\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{P_2Q_2} = k_2\overrightarrow{P_1Q_1}$ odakle sledi da je $\overrightarrow{P_2Q_2} = k\overrightarrow{PQ}$ gde je $k = k_1k_2$.



Slika 12.1.

(i) Neka je $k \neq 1$. Prave PP_2 i QQ_2 se seku. Označimo sa O njihovu presečnu tačku (slika 12.1). Tada je očigledno $\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \mathcal{H}_{O,k}$. Takođe, tačke O, O_1 i O_2 su kolinearne. Zaista, ako obeležimo sa O_1' tačku koja u homotetiji $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ odgovara tački O_1, tada u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tački O_1 odgovara tačka O_1'. Dakle trojke tačaka O_2, O_1, O_1' i O, O_1, O_1' su kolinearne, odakle sledi da su tačke O, O_1 i O_2 kolinearne.

Tačka O je invarijantna tačka homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$, odakle sledi

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = O,$$

tj.

$$\mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = \mathcal{H}^{-1}_{O_2,k_2}(O) = O'$$

Iz ovih jednakosti i relacije

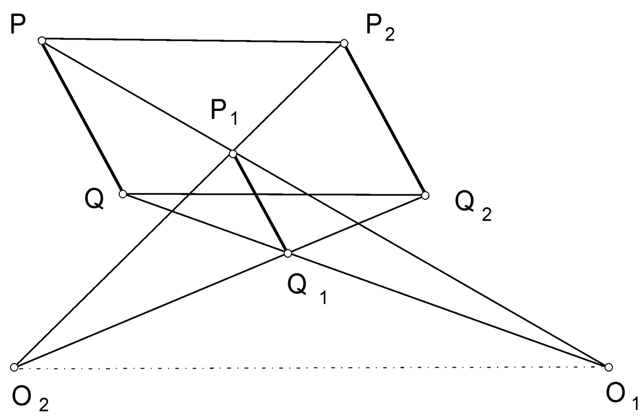
$$\overrightarrow{O_1O'} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O'}$$

nalazimo

$$k_1\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OO_2} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{O_2O},$$

odakle je

$$\overrightarrow{O_1O} : \overrightarrow{OO_2} = (k_2 - 1) : k_2(k_1 - 1).$$



Slika 12.2.

(ii) Za $k = 1$ prave PP_2 i QQ_2 su međusobom paralelne (slika 12.2). Tada je

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \tau_{\overrightarrow{PP_2}}.$$

Važi $k_1 = \frac{1}{k_2}$ i $\overrightarrow{O_1P_1} : \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_2P_1} : \overrightarrow{O_2P_2}$ odakle sledi $PP_2 \parallel O_2O_1$, a takođe i

$$\overrightarrow{PP_2} = (1 - \frac{1}{k_1})\overrightarrow{O_1O_2} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

□

Teorema 12.3.8. *Ako je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija i $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija prostora E^n, tada je*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}.$$

Dokaz. Neka u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tački X prostora E^n odgovara tačka X' prostora E^n, a u izometriji $\mathcal{I}$ tačkama O, X, X' prostora E^n odgovaraju redom tačke O_1, X_1, X_1'. S obzirom na to da je $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ biće i $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\overrightarrow{O_1X_1}$. Prema tome u kompoziciji $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1}$ svakoj tački X_1 prostora E^n odgovara tačka X_1' prostora E^n takva da je $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\overrightarrow{O_1X_1}$. Prema tome $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}$. □

Teorema 12.3.9. *Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ i izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n su komutativne transformacije ako i samo ako je središte O homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ invarijantna tačka izometrije $\mathcal{I}$, tj.*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I} \Leftrightarrow \mathcal{I}(O) = O.$$

Dokaz. Neka je najpre $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}$, tj. $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k}$. Odavde primenom prethodne teoreme neposredno sledi $\mathcal{I}(O) = O$.

Obratno, ako je $\mathcal{I}(O) = O$n na osnovu prethodne teoreme je $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k}$, tj. $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}$. □

Nije teško dokazati da važi i sledeća

Teorema 12.3.10. *Ako je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija i $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija ravni E^2 tada je*

$$\mathcal{S}_p^{\mathcal{H}_{O,k}} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}_{O,k}(p)}.$$

12.4 Predstavljanje transformacija sličnosti ravni $\mathbf{E}^2$ u kanonskom obliku

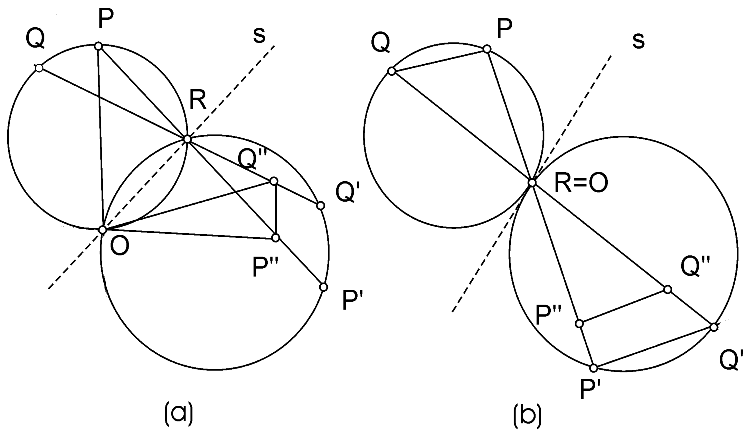
Ustanovili smo da se svaka transformacija sličnosti $\mathcal{P} \quad (k \neq 1)$ može na beskonačno mnogo načina predstaviti kao kompozicija jedne homotetije i jedne izometrijske transformacije te ravni. Transformacije iz kojih je sastavljena ta kompozicija u opštem slučaju nisu komutativne. Naš cilj biće da transformaciju sličnosti $\mathcal{P}$ predstavimo u obliku kompozicije sastavljene iz dveju komutativnih transformacija od kojih je jedna homotetija a druga izometrija. Takvo predstavljanje transformacije sličnosti nazivamo *kanonskim.* U cilju dokaza mogućnosti ovakvog predstavljanja, neophodno je najpre ustanoviti da transformacija sličnosti ravni E^2, kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$, poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku.

Teorema 12.4.1. *Svaka direktna izometrijska transformacija sličnosti ravni E^2 kojoj je koeficient sličnosti $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku.*

Dokaz. Ustanovimo najpre da direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ne može imati više od dve invarijantne tačke. Ako bi O_1 i O_2 bile dve razne invarijantne tačke transformacije $\mathcal{P}$ tada bi koeficijent sličnosti $k = O_1 : O_2$ bio jednak jedinici, što je isključeno pretpostavkom.

Dokažimo egzistenciju invarijantne tačke transformacije sličnosti $\mathcal{P}$. Neka u transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P i Q odgovaraju tačke P' i Q'. Ako je pri tome $P = P'$ ili $Q = Q'$ tvrđenje sledi neposredno.

Razmotrimo slučaj kada je $P \neq P'$ i $Q \neq Q'$. Označimo sa R presečnu tačku pravih PP' i QQ' (slika 12.3 (a)). Tačka R postoji jer bi u suprotnom $\mathcal{P}$ bila izometrija. Označimo sa O drugu presečnu tačku krugova opisanih oko trouglova ΔRPQ i $\Delta RP'Q'$. Specijalno, ako se krugovi dodiruju tačke R i O se poklapaju. (slika 12.3 (b))



Slika 12.3.

Tada važi

$$\measuredangle POQ \cong \measuredangle PRQ \cong \measuredangle P'RQ' \cong \measuredangle P'OQ',$$

tj. $\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'OQ'$. Takođe važi

$$\measuredangle QPO \cong \measuredangle QRO \cong \measuredangle SRQ' \cong \measuredangle Q'P'O,$$

tj. $\measuredangle QPO \cong \measuredangle Q'P'O$. Dakle uglovi trouglova ΔOPQ i $\Delta OP'Q'$ su podudarni. To znači da postoji rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ takva da poluprave $[OP)$ i

$[OQ)$ prevode redom u poluprave $[OP')$ i $[OQ')$. Neka je $\mathcal{R}_{O,\omega}(P) = P''$, $\mathcal{R}_{O,\omega}(Q) = Q''$. Tada imamo

$$\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OPQ = \measuredangle OP''Q'',$$

odakle sledi $P'Q' \parallel P''Q''$. To znači da postoji homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ takva da je $\mathcal{H}_{O,k}(P'') = P'$, $\mathcal{H}_{O,k}(Q'') = Q'$, gde je $k = \frac{OA'}{OA}$. Znači $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k}\mathcal{R}_{O,\omega}$. Tačka O je invarijantna tačka transformacije sličnosti $\mathcal{P}$. $\square$

Definicija 12.4.1. Jedinstvenu invarijantnu tačku direktne transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, kojoj je koeficijent $k \neq 1$, nazivamo *središtem ili centrom* sličnosti te transformacije.

Teorema 12.4.2. *Svaka direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, koja ne predstavlja izometriju niti homotetiju, može se na dva i samo dva načina predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju a druga izometriju.*

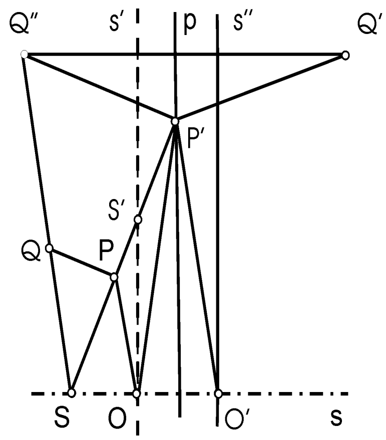
Dokaz. Da bi se transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ mogla predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju a druga izometriju potrebno je i dovoljno da središte te homotetije bude invarijantna tačka te izometrije pa prema tome i transformacije $\mathcal{P}$. Budući da transformacija $\mathcal{P}$ sa koeficijentom $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku O, postoje dve i samo dve homotetije $\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ i $\mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$ ravni E^2 takve da kompozicije $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ i $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$ prestavljaju izometrijske transformacije. Obe izometrijske transformacije su direktne sa invarijantnom tačkom O, te predstavljaju centralne rotacije, označimo ih sa $\mathcal{R}_{O,\omega}$ i $\mathcal{R}_{O,\omega'}$. Pri tome su uglovi ω i ω' suplementni i suprotnosmerni , te znajući jednu od tih rotacija znamo i drugu. Na taj način imamo da je $\mathcal{P} = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{H}_{O,k}$ i $\mathcal{P} = \mathcal{R}_{O,\omega'} \circ \mathcal{H}_{O,-k}$. Oba ova izraza su komutativna. $\square$

Definicija 12.4.2. Reprezentacije ustanovljene prethodnom teoremom nazivamo *kanoničkim reprezentacijama* transformacije $\mathcal{P}$. Onu od tih reprezentacija u kojoj homotetija ima pozitivan koeficijent nazivamo prvom ili neposrednom kanoničkom reprezentacijom, a onu u kojoj homotetija ima negativan koeficijent nazivamo drugom ili posrednom kanoničkom reprezentacijom transformacije sličnosti $\mathcal{P}$.

Iz definicije neposredno sledi da je direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 jednoznačno određena ako su joj poznati središte, ugao i koeficijent sličnosti. Stoga takvu transformaciju simbolički označavamo sa $\mathcal{P}_{O,\omega,k}$

Teorema 12.4.3. *Svaka indirektna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 kojoj je koeficijent sličnost $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku i dve invarijantne prave koje se seku u invarijantnoj tački pod pravim uglom.*

Dokaz. Kao i u slučaju direktnih transformacija sličnosti konstatujemo da $\mathcal{P}$ ne može imati dve ili više invarijantnih tačaka jer bi u tom slučaju bilo $k = 1$, što je isključeno uslovom teoreme. Dokažimo još da $\mathcal{P}$ poseduje invarijantnu tačku i dve invarijantne prave koje se seku u toj tački pod pravim uglom.



Slika 12.4.

Neka u transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P i Q odgovaraju redom tačke P' i Q', pri čemu je $P \neq P'$ i $Q \neq Q'$ (slika 12.4). Označimo sa $\mathcal{H}_{S,k}$ homotetija ravni E^2 u kojoj tački P odgovara tačka P', a sa $\mathcal{S}_p$ osnu refleksiju ravni E^2 u kojoj tački $\mathcal{H}_{S,k}(Q) = Q''$ odgovara tačka Q'. Tada je $P'Q' \cong P'Q''$, odakle sledi $P' \in p$. Kako svaka od indirektnih izometrijskih transformacija $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}$ ravni E^2 tačke P i Q prevodi redom u tačke P' i Q', to je $\mathcal{P} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}$.

Ako bi transformacija $\mathcal{P}$ posedovala invarijantnu tačku O i ako bi bilo $\mathcal{H}_{S,k}(O) = O'$ tada bi bilo $\mathcal{S}_p\mathcal{H}_{S,k}(O) = O'$, tj. $\mathcal{P}(O) = O$, pa bi prava p bila medijatrisa duži OO' a samim tim bi tačka O pripadala pravoj s koja sadrži tačku S i upravna je na pravoj p. Neka je S' tačka prave PP', takva da je $S'P' : S'P = -k$. Iz relacije $P'S' : S'P = P'O : PO$ sledi da je prava s' određena tačkama O i S' simetrala ugla $\angle POP'$. Kako su uglovi $\angle POP'$ i $\angle O'P'O$ naizmenični sa paralelnim kracima OP i OP', simetrale s' i p tih uglova međusobom su paralelne, pa je $s \perp s'$. Prema tome, ako postoji invarijantna tačka O transformacije $\mathcal{P}$ ona se nalazi u preseku pravih s i s' određenih relacijama $S \in s \perp p$ i $S' \in s' \parallel p$.

Obratno, ako su s i s' prave određene relacijama $S \in s \perp p$ i $S' \in s' \parallel p$, tačka $O = s \cap s'$ bi ce invarijanta transformacije $\mathcal{P}$. Zaista, iz relacije $s \perp s'$ sledi da tačka O pripada krugu l kome je duž SS' prečnik, pa je $O'P' : PP' = k$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{S,k}$ tački O odgovara tačka O', biće $O'P' : OP = k$, pa je $OP' = O'P'$, i prema tome $S_p(O') = O$. Dakle $\mathcal{P}(O) = O$.

Transformacija P poseduje dve invarijantne prave. To su prave s i s'. Zaista, kako je $\mathcal{H}_{S,k}(s) = s$ i $\mathcal{S}_p(s) = s$ to je $\mathcal{P}(s) = s$. Ako je s'' prava kroz tačku O' paralelna pravoj p, biće $\mathcal{H}_{S,k}(s') = s''$ i $\mathcal{S}_p(s'') = s'$ onda imamo $\mathcal{P}(s') = s'$. □

Definicija 12.4.3. Jedinstvenu invarijantnu tačku O transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, čiji je koeficijent $k \neq 1$, nazivamo *centrom ili središtem* transformacije $\mathcal{P}$. Invarijantne prave s i s' nazivamo osama transformacije $\mathcal{P}$.

Teorema 12.4.4. *Svaka indirektna izometrijska transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 sa koeficijentom $k \neq 1$ može se na dva i samo dva načina predstaviti kao komutativna kompozicija homotetije i izometrije.*

Dokaz. Da bi se transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ mogla predstaviti kao komutativna kompozicija homotetije i izometrije potrebno je i dovoljno prema ranije dokazanoj teoremi da središte te homotetije bude invarijantna tačka pomenute izometrije te prema tome i transformacije $\mathcal{P}$. S obzirom na to da transformacija $\mathcal{P}$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku O, to postoje tačno dve homotetije $\mathcal{H}^{-1}_{S,k}$ i $\mathcal{H}^{-1}_{S,-k}$ ravni E^2 takve da kompozicije $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{S,k}$ i $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{S,-k}$ predstavljaju izometrijske transformacije. Obe pomenute izometrije su indirektne sa invarijantnom tačkom O te predstavljaju osne refleksije $\mathcal{S}_s$ i $\mathcal{S}_{s'}$ ravni E^2 pri čemu ose s i s' sadrže tačku O. Ose s i s' su jedine invarijantne prave transformacije $\mathcal{P}$ pa su istovetne sa osama te transformacije. Prema tome sledi $\mathcal{P} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{S}_s$ i $\mathcal{P} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{H}_{O,-k} = \mathcal{H}_{O,-k} \circ \mathcal{S}_{s'}$. □

Definicija 12.4.4. Reprezentacije iz prethodne teoreme nazivamo *kanoničkim* reprezentacijama indirektne transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2. Reprezentaciju u kojoj homotetija ima pozitivan koeficijent nazivamo prvom ili neposrednom kanoničkom reprezentacijom, dok reprezentaciju u kojoj homotetija ima negativan keficijent nazivamo drugom ili posrednom kanoničkom reprezentacijom transformacije sličnosti $\mathcal{P}$. Tačka O, prava s i broj k predstavljaju redom središte, osu i koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$.

Iz izloženog neposredno sledi da da je indirektna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 jednoznačno određena osom s, centrom S i koeficijentom k. Iz tog razloga takvu transformaciju označavamo $\mathcal{P}_{O,s,k}$.

12.5 Sličnost likova u prostoru $\mathrm{E^n}$

Transformacija sličnosti prostora E^n omogućuje da na skupu likova tog prostora definišemo relaciju sličnosti likova.

Definicija 12.5.1. U prostoru E^n lik ϕ je *sličan* liku ϕ' ako postoji transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n takva da je $\mathcal{P}(\phi) = \phi'$. Oznaka: $\phi \sim \phi'$.

Budući da postoje direktne i indirektne transformacije sličnosti to razlikujemo direktne i indirektne sličnosti likova.

Definicija 12.5.2. U prostoru E^n lik ϕ je *direktno sličan* liku ϕ' ako postoji direktna transformacija sličnosti koja lik ϕ prevodi u lik ϕ'. Ako je $\mathcal{P}$ indirektna transformacija sličnosti onda su likovi ϕ i ϕ' *indirektno slični.*

Navešćemo najvažnije osobine relacije sličnosti geometrijskih likova prostora E^n.

Teorema 12.5.1. *Relacija sličnosti likova je relacija ekvivalencije.*

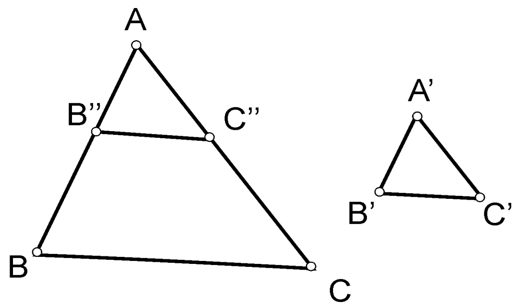
Dokaz. (i) Identička transformacija je kao izometrija i transformacija sličnosti, odakle sledi refleksivnost relacije sličnosti figura.
(ii) Ako su ϕ i ϕ' dva lika prostora E^n takva da je $\phi \sim \phi'$ tada postoji transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ takva da je $\mathcal{P}(\phi) = \phi'$. Kako je inverzna transformacija $\mathcal{P}^{-1}$ transformacija sličnosti prostora E^n, to iz $\mathcal{P}^{-1}(\phi') = \phi$ sledi da je $\phi' \sim \phi$, čime je simetričnost relacije $\sim$ dokazana.
(iii) Ako su ϕ, ϕ' i ϕ'' tri lika prostora E^n takva da je $\phi \sim \phi'$ i $\phi' \sim \phi''$, onda po definiciji postoje transformacije sličnosti $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$ takve da je $\mathcal{P}'(\phi) = \phi'$ i $\mathcal{P}''(\phi') = \phi''$. Kako kompozicija $\mathcal{P} = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'$ predstavlja takođe transformaciju sličnosti prostora E^n i kako je $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'(\phi) = \phi''$ sledi $\phi \sim \phi''$, pa je relacija $\sim$ i tranzitivna. □

S obzirom na to da je relacija sličnosti geometrijskih likova relacija ekvivalencije, to ona omogućava razbijanje skupa svih geometrijskih likova prostora E^n na klase ekvivalencije međusobom sličnih likova. Takvih klasa ima beskonačno mnogo, npr. klase sličnih trouglova, klase sličnih četvorouglova, itd.

Definicija 12.5.3. Neka je Σ skup svih likova prostora E^n. Element ϕ faktor skupa $\Sigma/_\sim$ relacije sličnosti zovemo *formom* ili *oblikom*. Za dva lika ϕ_1 i ϕ_2 kažemo da imaju isti oblik ili istu formu tj. da su ekviformni ako pripadaju istoj klasi skupa $\Sigma/_\sim$.

Uslovi iz kojih se utvrđuje da dva lika imaju istu formu ili isti oblik, tj. da su slična, nisu uvek dati na idealan način transformacijom sličnosti $\mathcal{P}$ koja jedan lik prevodi na drugi. Ti uslovi se i kod najjednostavnijih geometrijskih likova kao što su trouglovi mogu izraziti na više načina. To je i razlog uvođenja stavova o sličnosti trouglova kojih ima četiri.

Teorema 12.5.2. (Prvi stav o sličnosti trouglova) *Dva trougla prostora* E^n $(n = 2, 3)$ *su slična ako su dve stranice jednog trougla proporcionalne odgovarajućim stranicama drugog trougla, a uglovi zahvaćeni tim stranicama podudarni.*



Slika 12.5.

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ (slika 12.5.) takva da je $A'B' : AB = A'C' : AC = k$ i $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'', biće $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$. Znači postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja tačke A, B'', C'' prevodi redom u tačke A', B' i C'. Tada, u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju redom tačke A', B' i C', odakle sledi $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

Teorema 12.5.3. (Drugi stav o sličnosti trouglova) *Dva trougla prostora* E^n $(n = 2, 3)$ *su slična ako su dva ugla jednog trougla podudarna odgovarajućim uglovima drugog trougla.*

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ trouglovi prostora E^n, $(n = 2, 3)$ takvi da je $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ prostora E^n, gde je $A'B' : AB = k$, tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'' onda će biti $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, što znači da postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja tačke A, B'', C'' prevodi u tačke A', B' i C'. Tada, u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju redom tačke A', B' i C', odakle sledi $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. $\square$

Teorema 12.5.4. (Treći stav o sličnosti trouglova) *Dva trougla prostora* E^n $(n = 2, 3)$ *su slična ako su sve stranice jednog trougla proporcionalne odgovarajućim stranicama drugog trougla.*

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ takva da je $A'B' : AB = A'C' : AC = BC : B'C' = k$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ prostora E^n tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'' onda je $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, pa postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja tačke A, B'', C'' prevodi redom u tačke A', B' i C'. Prema tome u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju redom tačke A', B' i C', odakle sledi $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. $\square$

Teorema 12.5.5. (Četvrti stav o sličnosti trouglova) *Dva trougla prostora* E^n $(n = 2, 3)$ *su slična ako su dve stranice jednog trougla proporcionalne odgovarajućim stranicama drugog trougla, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih stranica podudarni, a uglovi naspram drugih dveju odgovarajućih stranica oba oštra, oba prava ili oba tupa.*

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ takva da je $A'B' : AB = A'C' : AC = k$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, a uglovi $\measuredangle C$ i $\measuredangle C'$ oba oštra, oba prava ili oba tupa. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ prostora E^n tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'' onda je $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, pa postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja tačke A, B'', C'' prevodi redom u tačke A', B' i C'. Prema tome u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju redom tačke A', B' i C', odakle sledi $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. $\square$

12.6 Neke primene sličnosti

Sada ćemo iskazati i dokazati nekoliko stavova koji su posledica stavova o sličnosti trouglova.

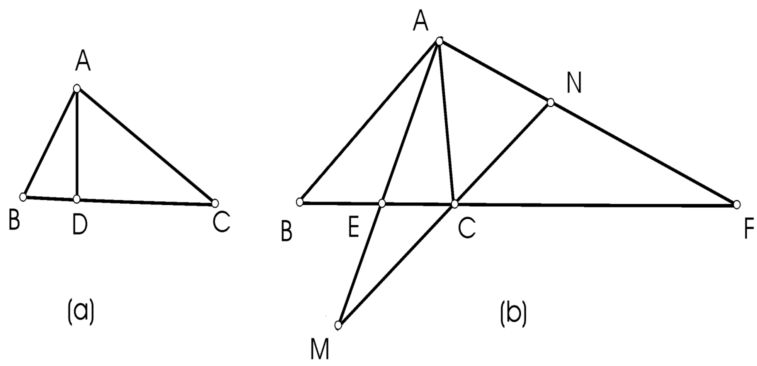
Teorema 12.6.1. (Pitagorina[1] teorema) *Ako je ugao $\measuredangle A$ trougla ΔABC prav, onda za stranice tog trougla važi:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Dokaz. Označimo sa D podnožje normale iz temena pravog ugla $\measuredangle A$ na stranicu BC (slika 12.6. (a)). Tada važi $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ i $\Delta ABC \sim \Delta DAC$, odakle sledi

$$AB : BC = BD : AB, \text{ i } AC : BC = CD : AC.$$

Sada je $AB^2 = BC \cdot BD$ i $AC^2 = BC \cdot CD$. Sabiranjem poslednjih dveju relacija dobija se $BC^2 = AB^2 + AC^2$. □



Slika 12.6.

Teorema 12.6.2. *Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ΔABC seku pravu BC, tada je*

$$BE : CE = BF : CF = AB : AC.$$

[1]Pitagora (VI vek pre nove ere). Pretpostavlja se da je ovo tvrđenje bilo poznato starim Egipćanima (oko 3000 godina pre nove ere), a takođe i Vaviloncima (oko 2000 godina pre nove ere). Međutim Pitagora ga je prvi dokazao. Uz pomoć ovog tvrđenja, Pitagora ili neki od njegovih učenika, ustanovio je nesamerljivost dijagonale i ivice kvadrata.

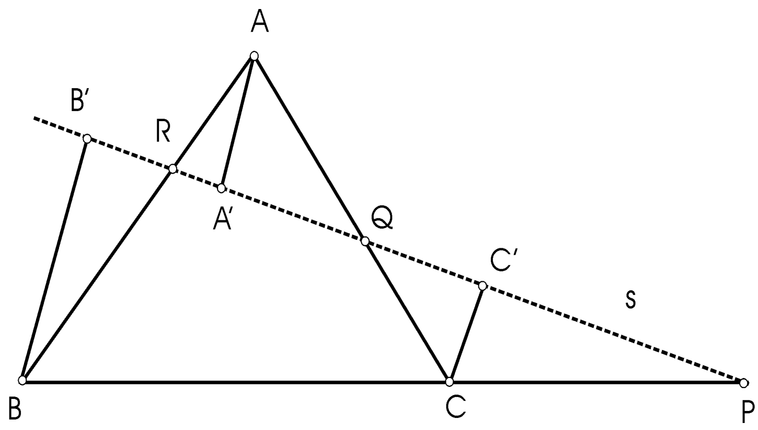
Dokaz. Neka su M i N tačke u kojima prava p, takva da je $p \parallel AB$ i $C \in p$, seče redom prave AE i AF (slika 12.6. (b)). Tada je $\measuredangle MAC \cong \measuredangle AMC$ i $\measuredangle NAC \cong \measuredangle ANC$, odakle sledi $MC \cong AC$ i $NC \cong AC$. Takođe važi $\Delta ABE \sim \Delta MCE$ i $\Delta ABF \sim \Delta NCF$, pa imamo

$$BE : CE = AB : MC = AB : AC \text{ i } BF : CF = AB : NC = AB : AC,$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. □

Teorema 12.6.3. (Menelajeva[2] teorema) *Neka je u ravni E^2 dat trougao ΔABC. Tačke P, Q i R pravih BC, CA i AB različite od temena A, B i C trougla ΔABC su kolinearne ako i samo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \tag{1}$$



Slika 12.7.

Dokaz. Neka su tačke P, Q i R kolinearne. Označimo sa s pravu određenu tačkama P, Q i R. Kako prava s ne sadrži ni jedno teme trougla ΔABC, tačke P, Q i R su ili sve tri na produžecima stranica trougla ΔABC ili se dve nalaze na stranicama a treća na produžetku. To znači da se da su sve tri razmere na levoj strani relacije (1) negativne ili da je jedna negativna a dve pozitivne. U svakom slučaju znak leve strane relacije (1) je negativan. Označimo sa A', B' i C' podnožja upravnih redom iz tačaka A, B i C na

[2] Menelaj (I vek nove ere)

pravu s. Tada je $\Delta AA'R \sim \Delta BB'R$, $\Delta AA'Q \sim \Delta CC'Q$ i $\Delta BB'P \sim \Delta CC'P$, odakle je

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{CC'}{AA'} \quad \text{i} \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AA'}{BB'},$$

odakle direktno sledi relacija (1).

Obratno, Neka važi relacija (1) i neka prava PQ seče pravu AB u tački R'. Tada prema dokazanom delu teoreme sledi

$$(2) \qquad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1.$$

Iz (1) i (2) sledi $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR'} : \overrightarrow{R'B}$, što znači da se tačke R i R' poklapaju. □

Teorema 12.6.4. (Čevina[3] teorema) *Neka je u ravni E^2 dat trougao ΔABC i neka su tačke P, Q i R pravih BC, CA i AB različite od temena A, B i C trougla ΔABC. Prave AP, BQ i CR pripadaju jednom pramenu pravih ako i samo ako je*

$$(3) \qquad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Dokaz. Neka se prave AP, BQ i CR seku u tački S (slika 12.8.). Primenom Menelajeve teoreme na trougao ΔABP i pravu RC dobijamo

$$(4) \qquad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

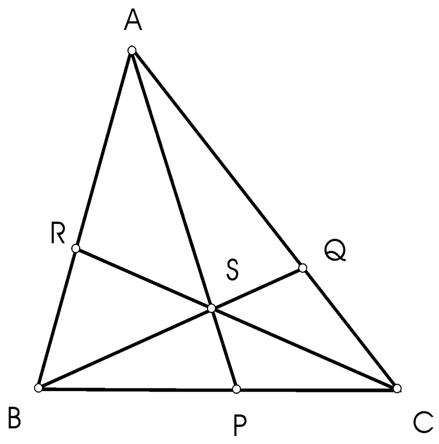
Sada, primenimo Menelajevu teoremu na trougao ΔPCA i pravu BQ. Dobija se

$$(5) \qquad \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SP}} = -1.$$

Množenjem odgovarajućih strana jednakosti (4) i (5) dobijamo jednakost (3).

Obratno, neka važi jednakost (3). Označimo sa S presečnu tačku pravih BQ i CR, a sa P' presečnu tačku pravih AS i BC. Prave, AP', BQ i CR

[3] Đovani Čeva (1648-1734) dokazao je ovo tvrđenje 1678. g.



Slika 12.8.

pripadaju istom pramenu pravih, odakle na osnovu dokazanog dela teoreme sledi

$$\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1. \tag{6}$$

Iz jednakosti (3) i (6) sledi $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP'} : \overrightarrow{P'C}$, odakle sledi da se tačke P i P' poklapaju.

S obzirom na činjenicu da Menelajeva teorema važi i kada je neka od razmera na levoj strani jednaka -1, Čevina teorema će važiti i za slučaj kada su prave AP, BQ i CR među sobom paralelne. $\square$

12.7 Anharmonijske i harmonijske četvorke tačaka, pravih i ravni

Pri rešavanju raznovrsnih geometrijskih zadataka čestu primenu imaju harmonijski spregnuti elementi: tačke, prave i ravni. Pored primene u Euklidskoj geometriji harmonijski spregnuti elementi imaju veliki značaj i primenu u projektivnoj geometriji.

Definicija 12.7.1. *Dvorazmerom* ili dvojnim odnosom $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ prostora E^n nazivamo broj λ takav da je

$$\mathcal{R}(A, B; C, D) = \frac{\mathcal{R}(A, B; C)}{\mathcal{R}(A, B; D)} = \lambda,$$

odnosno

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}},$$

gde $\mathcal{R}(A, B; C)$ označava prostu razmeru $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$. Specijalno ako je $\lambda = -1$ dotičnu dvorazmeru nazivamo harmonijskom a ako je $\lambda \neq -1$ anharmonijskom. U slučaju $\lambda = -1$ umesto $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ pišemo $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Izvešćemo najvažnija svojstva uvedene relacije harmonijski spregnutih tačaka na pravoj.

Teorema 12.7.1. *Ako su A, B, C, D četiri harmonijske tačke, tj. ako je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, tada važe i relacije $\mathcal{H}(A, B; D, C)$ i $\mathcal{H}(C, D; A, B)$.*

Dokaz. Koristeći definiciju harmonijski spregnutih tačaka na pravoj dobijamo

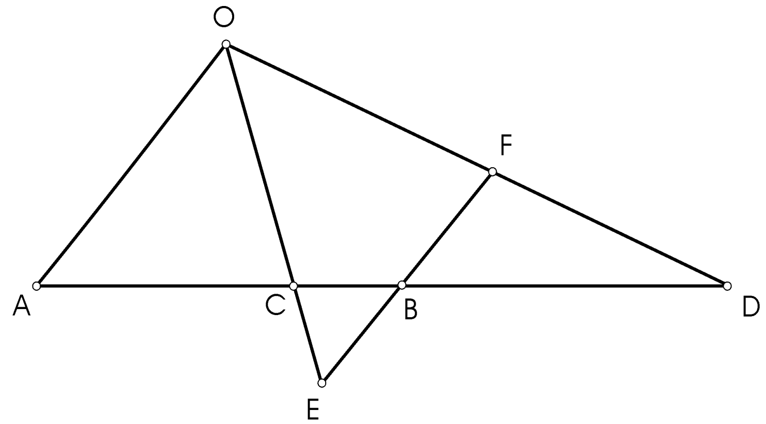
$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A, B; C, D) &\Rightarrow \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} \\ &\Rightarrow \mathcal{H}(A, B; D, C);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A, B; C, D) &\Rightarrow \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CA} : \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CB} : \overrightarrow{DB} \\ &\Rightarrow \mathcal{H}(C, D : A, B);\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 12.7.2. *Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke prave, O tačka van te prave, a E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna pravoj OA seče prave OC i OD, tada je*

$$\mathcal{H}(A,B;C,D) \Leftrightarrow \mathcal{S}_B(E) = F.$$



Slika 12.9.

Dokaz. Ako je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ (slika 12.9.) tada je $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = k$. Odavde nalazimo da je $\mathcal{H}_{D,-k}^{-1} \circ \mathcal{H}_{C,k} = \mathcal{S}_B$, pri čemu je $\mathcal{S}_B(E) = F$. Obratno, ako je $\mathcal{S}_B(E) = F$ i $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = k$, tada u kompoziciji $\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B$ tačkama B i F odgovaraju tačke A i O, pa je $\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{H}_{D,-k}$. Odavde sledi da je $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = k$, tj. $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. $\square$

Teorema 12.7.3. (O Apolonijevom[4] krugu) *Neka su A i B dve date tačke neke ravni, a m i n ($m \neq n$) dve date duži. Tada skup svih tačaka X takvih da je $AX : XB = m : n$ predstavlja krug nad prečnikom CD, pri čemu su C i D tačke prave AB takve da je $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = m : n$.*

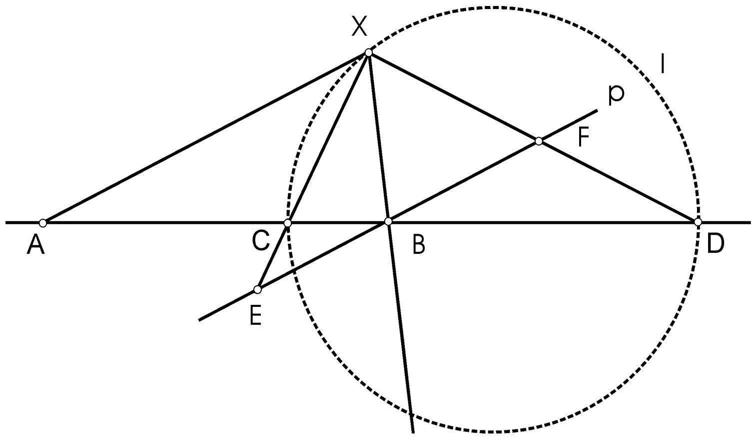
Dokaz. Označimo sa l krug nad prečnikom CD, sa X proizvoilnu tačku posmatrane ravni, sa p pravu koja sadrži tačku B i paralelna je pravoj AX a sa E i F presečne tačke prave p redom sa pravama CX i DX. Kako je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, to na osnovu teoreme 12.7.2. sledi da je tačka B središte duži EF.

[4]Apolonije iz Perge (III-II vek pre nove ere)

Neka je $AX : XB = m : n$. Tada je

$$AX : XB = AX : BE = AC : CB = AX : BF = m : n,$$

odakle sledi $BE \cong BF \cong XB$. Prema tome, trougao ΔEXF je pravougli, tj. ugao $\measuredangle CXD \equiv \measuredangle EXF$ je prav (slika 12.10.). Dakle, tačka X pripada krugu l nad prečnikom CD.



Slika 12.10.

Obratno, neka tačka X pripada krugu l nad prečnikom CD. Tada je ugao $\measuredangle CXD$ prav, kao ugao nad prečnikom CD, odakle sledi da je i ugao $\measuredangle EXF$ prav, pa je $BX \cong BE \cong BF$. Na osnovu Talesove teoreme sledi:

$$AX : XB = AX : BE = AC : CB = m : n,$$

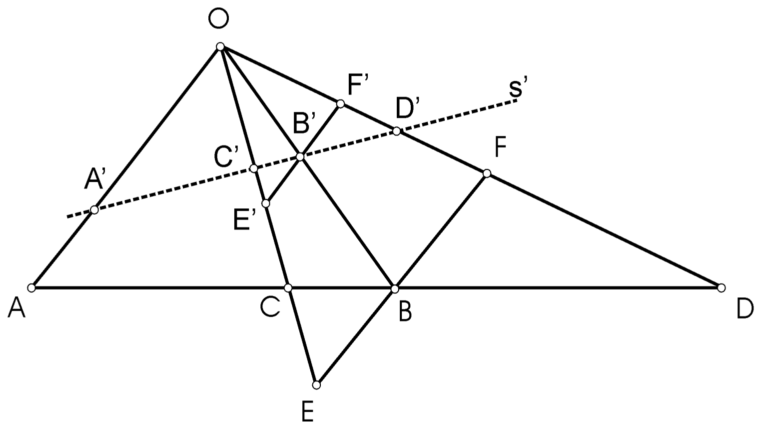
čime je teorema dokazana. □

Definicija 12.7.2. Krug l iz teoreme 12.7.3. naziva se *Apolonijev krug*.

Definicija 12.7.3. Za četiri prave a, b, c, d nekog pramena pravih kažemo da su *harmonijski spregnute* ako postoji prava p koja ih seče redom u harmonijskim tačkama A, B, C i D. Oznaka je $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Analogno, za četiri ravni α, β, γ i δ jednog snopa ravni kaže se da su *harmonijski spregnute* i simbolički označava $\mathcal{H}(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ ako postoji prava koja ih prodire u harmonijski spregnutim tačkama.

Teorema 12.7.4. (Papos[5]) *Ako neka prava s seče četiri harmonijske prave a, b, c i d ravni E^2 u raznim tačkama A, B, C i D tada je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.*

Dokaz. Prave a, b, c i d su harmonijski spregnute pa stoga pripadaju istom pramenu pravih $\aleph$ i postoji prava s' koja ih seče redom u harmonijski spregnutim tačkama A', B', C' i D' . Neka je $\aleph$ pramen konkurentnih pravih sa središtem u tački O. Označimo sa E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna pravoj a seče prave c i d, a sa E' i F' (slika 12.11.) tačke u kojima prava kroz tačku B' paralelna pravoj a seče prave c i d. Neka je $k = \overrightarrow{OB'} : \overrightarrow{OB}$. Tada u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama B, E i F odgovaraju tačke B', E' i F'. Prema dokazanoj teoremi tačka B' je središte duži $E'F'$ pa je i B središte duži EF. Prema istoj teoremi je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Slučaj kada je $\aleph$ pramen paralelnih pravih lako se pokazuje. □



Slika 12.11.

Analogno se dokazuje i sledeća

Teorema 12.7.5. (Tales) *Svaka prava prodire harmonijske ravni u harmonijski spergnutim tačkama pri čemu ona ne seče osu pomenutog snopa ravni.*

[5]Papos (III vek nove ere)

Glava 13

Geometrija kruga i sfere

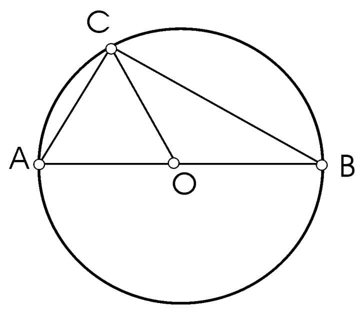
13.1 Centralni i periferijski uglovi kruga

Krug i sfera imaju značajnu ulogu u geometriji od samog njenog nastanka, pa je to jedan od razloga što ćemo ovo poglavlje posvetiti upravo njima.

Napomenimo da se u literaturi često umesto termina krug koristi termin kružnica ili kružna linija, dok se termin krug koristi za kružnu površ.

Sada ćemo uvesti nekoliko veoma važnih pojmova koji se tiču kruga.

Tetiva kruga je duž koja spaja dve njegove tačke. Najduža tetiva nekog kruga je *prečnik* ili *dijametar* tog kruga.



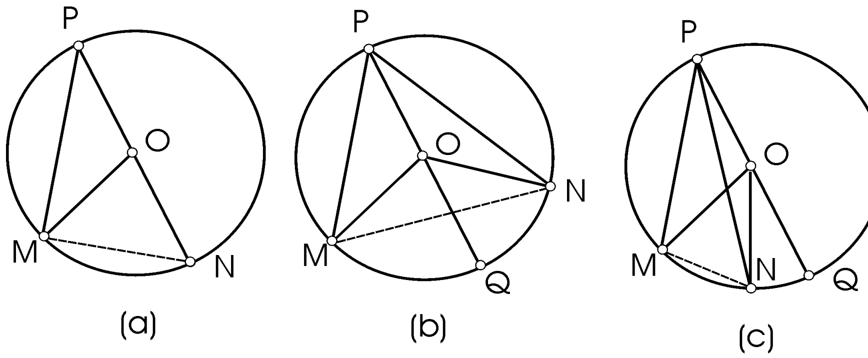
Slika 13.1.

Neka su A i B dve tačke nekog kruga. Deo kruga AB kao i njegov komplement zvaćemo lukovima tog kruga. Ugao $\measuredangle AOB$ je centralni ugao posmatranog kruga. Ako je M prozvoljna tačka kruga različita od tačaka A i B, ugao $\measuredangle AMB$ je periferijski nad lukom AB. Reći ćemo da je luk zahvaćen periferijskim uglom ako se nalazi unutar tog ugla.

Teorema 13.1.1. *Ako je AB prečnik kruga $k(O,r)$ i C proizvoljna tačka kruga tada je ugao $\measuredangle ACB$ prav.*

Dokaz. Trouglovi (slika 13.1.) ΔAOC i ΔBOC su jednakokraki. Dakle važi $\measuredangle OCA = \measuredangle A$ i $\measuredangle OCB = \measuredangle B$, odakle je $\measuredangle ACB = \measuredangle OCA + \measuredangle OCB = \measuredangle A + \measuredangle B = R$, gde smo sa R označili prav ugao. □

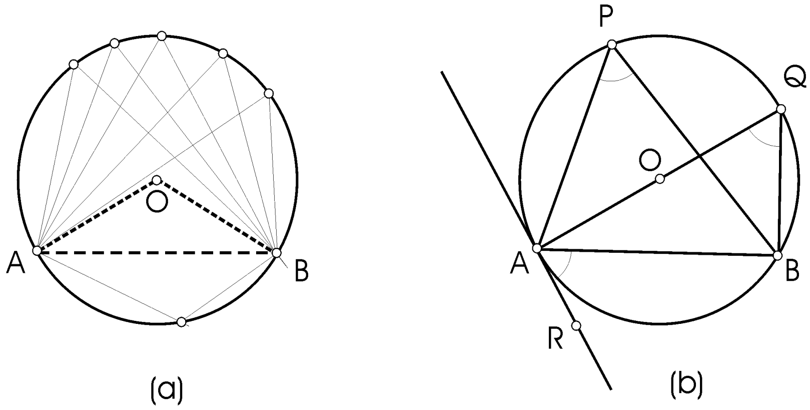
Teorema 13.1.2. *Centralni ugao kruga $k(O,r)$ nad lukom MN je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla $\measuredangle MPN$ tog kruga.*



Slika 13.2.

Dokaz. Označimo sa P proizvoljnu tačku luka MN. Treba pokazati da je $\measuredangle MON = 2\measuredangle MPN$. Mogu nastupiti tri slučaja.
(i) Centar O kruga k pripada jednom od krakova ugla $\measuredangle MPN$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo (slika 13.2(a)) da je $O \in PN$. U tom slučaju trougao ΔOPM je jednakokraki, pa je $\measuredangle OPM = \measuredangle OMP$. Kako je ugao $\measuredangle MON$ spoljašnji nesusedni za uglove $\measuredangle P$ i $\measuredangle M$ trougla ΔOPM, to važi $\measuredangle MON = \measuredangle P + \measuredangle M$, tj. $\measuredangle MON = 2\measuredangle MPN$.
(ii) Centar O pripada unutrašnjosti ugla MPN. Označimo sa Q (slika 13.2(b)) drugu zajedničku tačku prave PO i kruga k. Prema dokazanom delu (i) sledi $\measuredangle MOQ = 2\measuredangle MPQ$ i $\measuredangle NOQ = 2\measuredangle NPQ$. Sada je $\measuredangle MON = \measuredangle MOQ + \measuredangle NOQ = 2\measuredangle MPQ + 2\measuredangle NPQ = 2\measuredangle MPN$.
(iii) Tačka O pripada spoljašnjosti ugla $\measuredangle MON$. Označimo sa Q (slika 13.2(c)) presečnu tačku prave PO i kruga k. Prema dokazanom delu (i) sledi $\measuredangle MOQ = 2\measuredangle MPQ$ i $\measuredangle NOQ = 2\measuredangle NPQ$. Sada je $\measuredangle MON = \measuredangle MOQ - \measuredangle NOQ = 2\measuredangle MPQ - 2\measuredangle NPQ = 2\measuredangle MPN$. □

Posledica 13.1.1. *(i) Periferijski uglovi kruga nad istom tetivom (slika 13.3(a)), čija su sva temena sa iste strane prave određene tom tetivom su podudarni međusobno.*
(ii) Periferijski uglovi kruga nad istom tetivom, čija su temena sa raznih strana prave određene tom tetivom (slika 13.3(a)), su suplementni.



Slika 13.3.

Teorema 13.1.3. *Ugao određen tangentom i tetivom u jednoj od krajnjih tačaka tetive, podudaran je odgovarajućem periferijskom uglu tog trougla.*

Dokaz. Neka je u ravni dat krug $k(O, r)$ i tačke A, B i P na krugu k. Neka je AR tangenta u tački A na krug k, pri čemi su tačke P i R sa raznih strana prave AB. Označimo sa Q drugu zajedničku tačku prave AO sa krugom k. Uglovi $\measuredangle RAB$ i $\measuredangle AQB$ su podudarni kao uglovi sa normalnim kracima. Na osnovu posledice 13.1.1. uglovi $\measuredangle APB$ i $\measuredangle AQB$ su takođe podudarni, odakle sledi tvrđenje tgeoreme. $\square$

Definicija 13.1.1. *Uglom* koji zahvataju dva kruga koji se seku u ravni zvaćemo ugao između njihovih tangenata u presečnoj tački. Analogno uglom koji zahvataju prava i krug koji se seku, zvaćemo ugao između prave i tangente na krug u jednoj od presečnih tačaka.

Definicija 13.1.2. Prava i krug, odnosno dva kruga, su *ortogonalni* (upravni, normalni) ako zahvataju prav ugao.

Nije teško uočiti da će prava biti upravna na krug ako i samo ako sadrži njegov centar. Takođe dva kruga su ortogonalna ako i samo ako tangenta jednog sadrži središte drugog.

13.2 Tangentni četvorougao

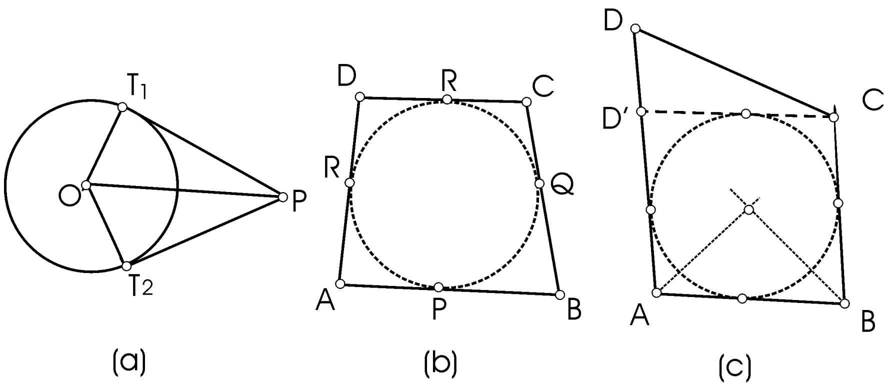
Definicija 13.2.1. Četvorougao čije su sve ivice tangente nekog kruga naziva se *tangentni* četvorougao.

U vezi sa tangentnim četvorouglovima postoji kriterijum za utvrđivanje da li je četvorougao tangentni ili ne. Pre formulacije pomenutog kriterijuma, dokazaćemo stav o podudarnosti *tangentnih duži*.

Definicija 13.2.2. Odsečak tangente na krug od date tačke iz koje je ona konstruisana, do dodirne tačke tangente i kruga nazivamo *tangentnom duži*.

Teorema 13.2.1. *Tangentne duži konstruisane iz iste tačke na dati krug su međusobno podudarne.*

Dokaz. Neka su PT_1 i PT_2 tangentne duži iz tačke P (slika 13.4(a)) na krug $k(O,r)$. Iz podudarnosti pravouglih trouglova ΔOPT_1 i ΔOPT_2 sledi podudarnost tangentnih duži PT_1 i PT_2. □



Slika 13.4.

Teorema 13.2.2. (Osnovna teorema o tangentnom četvorouglu) *Četvorougao je tangentni ako i samo ako su mu zbirovi naspramnih stranica jednaki.*

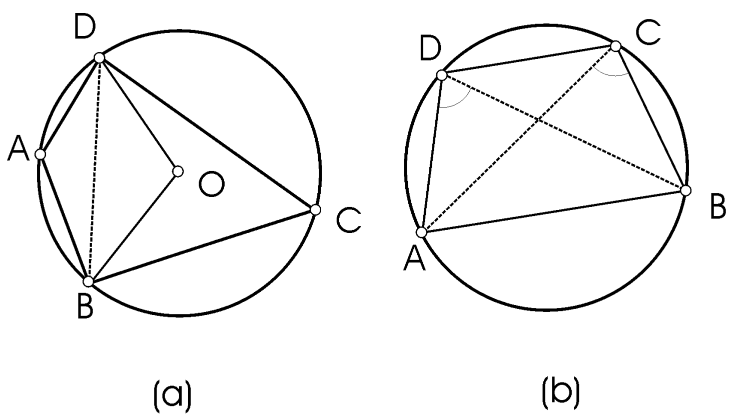
Dokaz. Neka je $ABCD$ tangentni četvorougao i neka su P, Q, R i S dodirne tačke redom ivica AB, BC, CD i DA sa krugom k (slika 13.4(b)) upisanim u taj četvorougao. Na osnovu teoreme o jednakosti tangentnih duži važi $AS \cong AP$, $BP \cong BQ$, $CQ \cong CR$ i $DR \cong DS$. Dakle, $AB + CD = AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS = AD + BC$.

Obratno, neka su kod četvorougla $ABCD$ zbirovi naspramnih stranica jednaki, tj. neka je $AB + CD = AD + BC$. Označimo sa k (slika 13.4(c)) krug koji dodiruje redom stranice AB, BC i AD četvorougla $ABCD$. Takav krug postoji i njegov centar je presečna tačka simetrala uglova $\measuredangle A$ i $\measuredangle B$ četvorougla $ABCD$. Označimo sa D' presečnu tačku tangente iz temena C nakrug k sa pravom AD. Za tačke A, D i D' može važiti tačno jedna od tri mogućnosti: (i) $\mathcal{B}(A, D', D)$, $\mathcal{B}(A, D, D')$ ili $D \equiv D'$.
(i) Neka je najpre $\mathcal{B}(A, D', D)$. Tada je prema pretpostavci $AB + CD = AD + BC$, i kako je još četvorougao $ABCD'$ tangentni, to je $AB + CD' = AD' + BC$. Iz prethodne dve relacije sledi $CD' - CD = D'A - DA$, tj. $CD' = CD + D'A - DA$, a odavde $CD = CD' + DD'$, što je nemoguće jer su CD, CD' i DD' stranice trougla $\Delta CDD'$. dakle, ne važi $\mathcal{B}(A, D', D)$.
(ii) Analogno se dolazi do kontradikcije i u drugom slučaju, tj. ne važi $\mathcal{B}(A, D, D')$.
(iii) Prema tome, mora biti $D \equiv D'$, tj. četvorougao $ABCD$ je tangentni.□

13.3 Tetivni četvorougao

Definicija 13.3.1. Četvorougao čije su sve ivice tetive nekog kruga naziva se *tetivni* četvorougao.

Teorema 13.3.1. *Konveksni četvorougao je tetivni ako i samo ako su mu naspramni uglovi suplementni.*



Slika 13.5.

Dokaz. Neka je četvorougao $ABCD$ tetivni (slika 13.5 (a)). Kako je četvorougao $ABCD$ konveksan, temena A i C su sa raznih strana dijagonale BD, odakle sledi na osnovu posledice 13.1.1. da su uglovi $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle BCD$ suplementni.

Obratno, neka su naspramni uglovi četvorougla $ABCD$ suplementni i neka je krug k opisan oko trougla ΔABD. Tada se iz četvrtog temena C tetiva BD vidi pod uglom koji je suplementan uglu kod temena A, što znači na osnovu posledice 13.1.1. da i tačka C pripada krugu k. □

Ponekad je u praksi lakše iskoristiti sledeću teoremu za utvrđivanje da li je četvorougao tetivan:

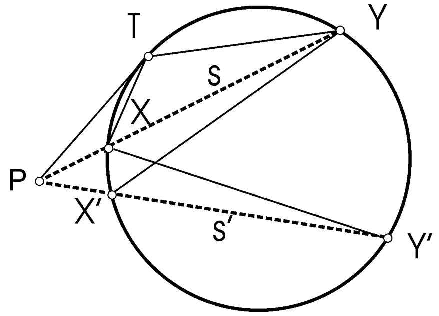
Teorema 13.3.2. *Ako je četvorougao $ABCD$ konveksan i ako je $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$ (slika 13.5 (b)) tada je taj četvorougao tetivan.*

13.4 Potencija tačke u odnosu na krug i sferu

Transformacije sličnosti prostora E^n omogućuju u geometriji likova tog prostora razotkrivanje raznih metričkih svojstava tih likova. Od posebnog su interesa svojstva vezana za krug i sferu. Uz pomoć potencije tačke u odnosu na krug i sferu izvešćemo neke od tih osobina. Pre uvođenja definicije potencije tačke u odnosu na krug i sferu, neophodno je najpre dokazati sledeću teoremu.

Teorema 13.4.1. *Ako su u ravni zadati krug k i tačka P, tada za svaku pravu s koja seče krug k u tačkama X i Y i prolazi kroz tačku P važi $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = const.$ Ako je tačka P van kruga k i T dodirna tačka jedne od tangenata iz tačke P van kruga k, tada je $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2$.*

Dokaz. Neka je tačka P van kruga k i neka su s i s' dve razne prave kroz tačku P (slika 13.6.) i seku krug k, prva u tačkama X i Y a druga u tačkama X' i Y'. Tada je $\Delta PXY' \sim \Delta PX'Y$ prema drugom stavu o sličnosti trouglova, pa je $PX : PY' = PX' : PY$, a odavde je $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX'} \cdot \overrightarrow{PY'}$. Slučajevi kada je tačka P na krugu k je trivijalan a kada je tačka P unutar kruga k razmatra se analogno prvom slučaju. Specijalno u slučaju kada je tačka P izvan kruga k i T dodirna tačka jedne od tangenata iz tačke P na krug k, imamo da je $\Delta PXT \sim \Delta PTY$, odakle je $PX : PT = PT : PY$, tj. $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2$. □



Slika 13.6.

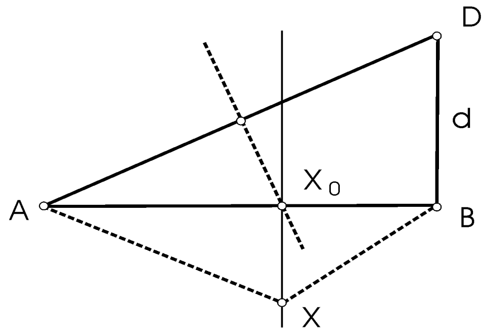
13.4.1 Potencija tačke u odnosu na krug

Definicija 13.4.1. Konstantan proizvod $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$ uveden prethodnom teoremom nazivamo *potencija tačke P u odnosu na krug k*, i označavamo sa $p(P,k)$.

Iz definicije neposredno sledi da je potencija $p(P,k)$ manja od nule ako je $OP < r$, jednaka nuli ako je $OP = r$ i veća od nule ako je $OP > r$.

Označimo sa $OP = d$ a sa A i B presečne tačke prave PO i kruga k. Tada je $p(P,k) = d^2 - r^2$.

Lema. *Ako su A i B dve tačke neke ravni i d duž, tada skup tačaka X te ravni takvih da je $AX^2 - BX^2 = d^2$ predstavlja pravu upravnu na pravoj AB.*

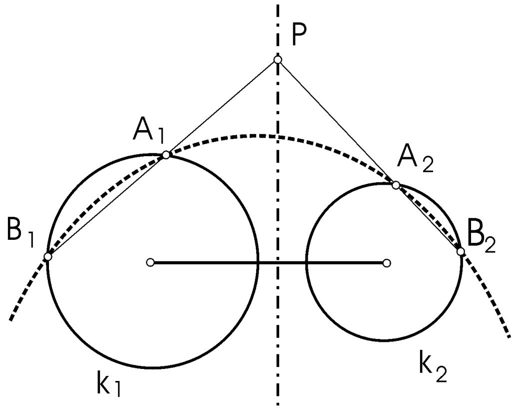


Slika 13.7.

Dokaz. Uočimo tačku D (slika 13.7.) u ravni tačaka A, B i X takvu da je $BD \cong d$ i $DB \perp AB$. Označimo sa X_0 presečnu tačku prave AB i medijatrise duži AD. U tom slučaju važi $AX_0^2 - BX_0^2 = DX_0^2 - BX_0^2 = DB^2 = d^2$. Primenom Pitagorine teoreme, traženi skup tačaka je prava upravna na pravoja AB u tački X_0. □

Teorema 13.4.2. *Skup svih tačaka ravni E^2 kojima su potencije u odnosu na dva ekscentrična kruga $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ međusobom jednake predstavlja jednu pravu upravnu na pravoj O_1O_2.*

Dokaz. Neka je P tačka u ravni krugova k_1 i k_2 (slika 13.8.) takva da je $p(P, k_1) = p(P, k_2)$. Tada je $O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$, tj. $O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2 = const$. Na osnovu prethodne leme sledi da tačka P pripada pravoj p koja je upravna na pravu O_1O_2 u tački Q za koju $O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$. □



Slika 13.8.

Definicija 13.4.2. Skup svih tačaka ravni čije su potencije jednake u odnosu na dva ekscentrična kruga k_1 i k_2 nazivamo *potencijalnom ili radikalnom osom* tih krugova.

Neka su dati krugovi k_1 i k_2. Konstruišimo potencijalnu osu tih krugova. Mogu nastupiti tri slučaja:
(i) Krugovi k_1 i k_2 se seku u tačkama A i B. U tom slučaju svaka od tačaka A i B ima potenciju nula. U ovom slučaju potencijalna osa je prava AB.
(ii) Krugovi k_1 i k_2 se dodiruju. Tada je potencijalna osa njihova zajednička tangenta.
(iii) Krugovi k_1 i k_2 nemaju zajedničkih tačaka. Konstrukciju potencijalne ose vršimo uz pomoć dokazane leme. Drugi način je konstrukcija pomoćnog

kruga koji seče krugove k_1 i k_2 redom u tačkama A_1, B_1 i A_2, B_2. Presečna tačka P pravih A_1B_1 i A_2B_2 pripada potencijalnoj osi pomenutih krugova.

Pomenimo još neke pojmove vezane za potenciju tačke u odnosu na krug.

Definicija 13.4.3. Skup svih krugova neke ravni od kojih svaka dva imaju za potencijalnu osu istu pravu p, naziva se *pramen krugova* ili *sistem koaksijalnih krugova*, a prava p *potencijalna osa* tog pramena.

Teorema 13.4.3. *Potencijalne ose triju krugova pripadaju istom pramenu pravih.*

Dokaz. Neka su krugovi k_1, k_2 i k_3 takvi da ne pripadaju istom pramenu i nikoja dva nisu koncentrična. Tada posmatrajući ih par po par određujemo tri potencijalne ose. Tačka koja ima istu potenciju u odnosu na sva tri kruga pripada svakoj od tri pomenute potencijalne ose.

Obratno, tačka preseka bilo koje dve od tri potencijalne ose ima istu potenciju u odnosu na sva tri kruga pa mora pripadati i trećoj potencijalnoj osi. Ako su dve od tih potencijalnih osa paralelne onada je i treća osa njima paralelna. □

Definicija 13.4.4. Tačku O u kojoj se seku potencijalne ose triju krugova nazivamo *potencijalnim* ili *radikalnim središtem tih* krugova.

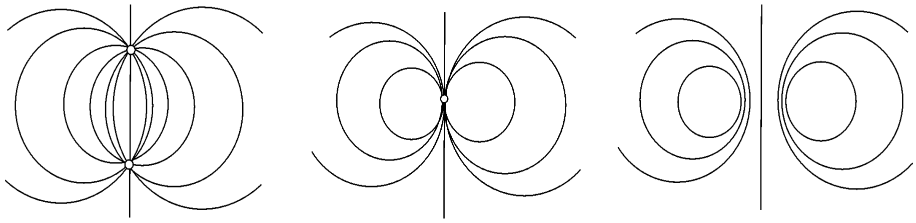
Nije teško dokazati sledeću teoremu:

Teorema 13.4.4. *(i) Ako se u jednom pramenu krugova dva kruga seku u tačkama A i B onda se svaka dva kruga tog pramena seku u tačkama A i B.*
(ii) Ako se u nekom pramenu krugova dva kruga dodiruju u tački C, onda se svaka dva kruga tog pramena dodiruju u tački C.
(iii) Ako dva kruga nekog pramena krugova nemaju zajedničkih tačaka, onda nikoja dva kruga tog pramena nemaju zajedničkih tačaka.

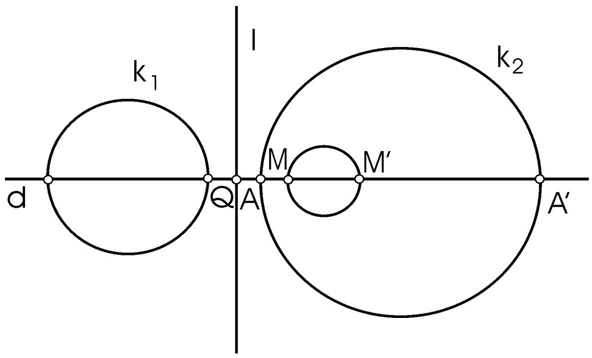
Navedene osobine omogućuju da u geometriji ravni E^2 razlikujemo tri pramena krugova.

Definicija 13.4.5. Pramen krugova u ravni E^2 je *eliptički* ako se krugovi tog pramena seku u dvema različitim tačkama, *parabolički* ako se dodiruju i *hiperbolički* ako nemaju zajedničkih tačaka.

Teorema 13.4.5. *Za svaka dva kruga postoji tačno jedan pramen krugova kome oni pripadaju.*



Slika 13.9.

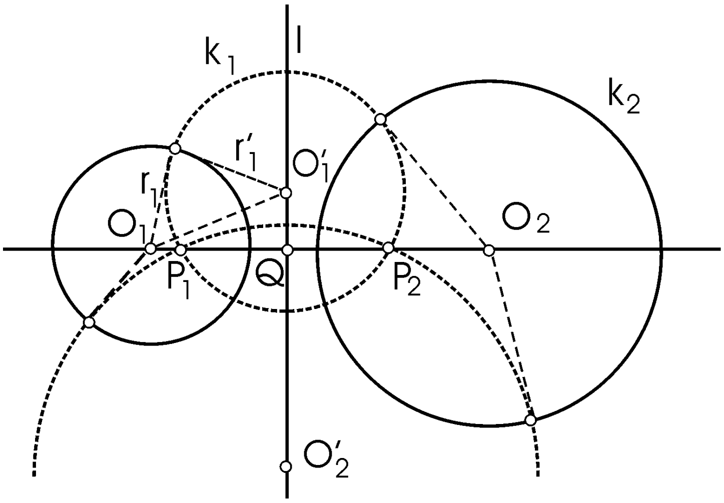


Slika 13.10.

Dokaz. U slučaju kada se krugovi seku ili se dodiruju dokaz je trivijalan. Neka krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ (slika 13.10.) nemaju zajedničkih tačaka. Označimo sa l njihovu potencijalnu osu, a sa Q presečnu tačku prave l sa pravom $d = O_1O_2$. Neka su A i A' preseci kruga k_2 sa pravom d. Tada je proizvod $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA}$ isti za sve krugove pramena. Neka su M i M' presečne tačke proizvoljnog kruga k_3 posmatranog pramena sa pravom d. Tada je zadovoljen uslov $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QM'} \cdot \overrightarrow{QM}$, kojim je i određen krug pramena. Ako se tačke M i M' poklapaju onda je krug k_3 degenerisan u tačku.

Ako su krugovi k_1 i k_2 koncentrični, onda se dogovorno hiperbolički pramen, određen tim krugovima, sastoji od svih krugova koji su koncentrični sa datim krugovima. U tom slučaju potencijalnu osu predstavlja beskonačno daleka prava ravni posmatranih krugova. □

Teorema 13.4.6. *Skup krugova ortogonalnih na sve krugove datog pramena predstavlja opet pramen krugova. U tom slučaju potencijalna osa prvog pramena sadrži središta krugova drugog pramena.*



Slika 13.11.

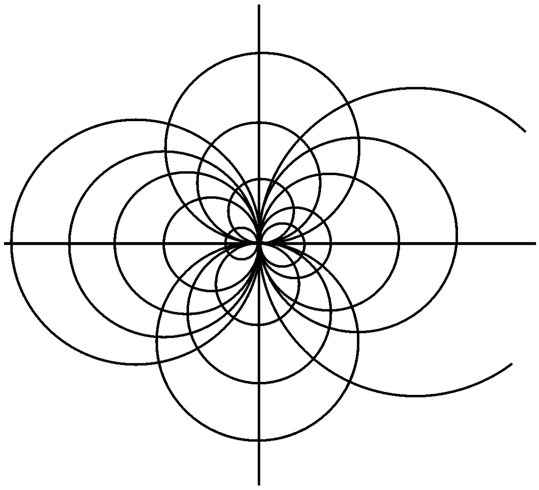
Dokaz. Neka je prvi pramen zadat krugovima $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Neka je l potencijalna osa krugova k_1 i k_2 a O_1' i O_2' tačke prave l koje su izvan krugova k_1 i k_2. Te dve tačke imaju istu potenciju u odnosu na krugove k_1 i k_2 pa prema tome predstavljaju središta krugova koji ortogonalno seku date krugove. Kako je ortogonalnost uzajamna, to tačka O_1 ima istu potenciju r_1^2 u odnosu na krugove sa centrima O_1' i O_2'. Zaista, to sledi iz činjenice da je poluprečnik r_1 istovremeno i odsečak tangente iz tačke O_1 na krugove sa centrima u tačkama O_1' i O_2'. Analogno, tačka O_2 ima istu potenciju r_2^2 u odnosu na navedene krugove. Odavde sledi da je prava O_1O_2 potencijalna osa pramena određenog krugovima sa centrima redom u tačkama O_1' i O_2'. Označimo sa Q presečnu tačku pravih O_1O_2 i $O_1'O_2'$. Prema Pitagorinoj teoremi sledi

$$O_1O_1'^2 = QO_1^2 + QO_1'^2 = r_1^2 + r_1'^2,$$

tj.

$$QO_1^2 - r_1^2 = -(QO_1'^2 - r_1'^2).$$

Odavde sledi da ako je potencija tačke Q u odnosu na jedan pramen pozitivna, onda je ona negativna u odnosu na drugi pramen. To znači da se tačka Q nalazi unutar krugova jednog, a van krugova drugog pramena. Drugim rečima, ako je jedan pramen eliptički (slika 13.11), onaj drugi je hiperbolički i obrnuto.



Slika 13.12.

Očigledno je da ako je prvi pramen parabolički, onda je isti takav i onaj drugi (slika 13.12.). □

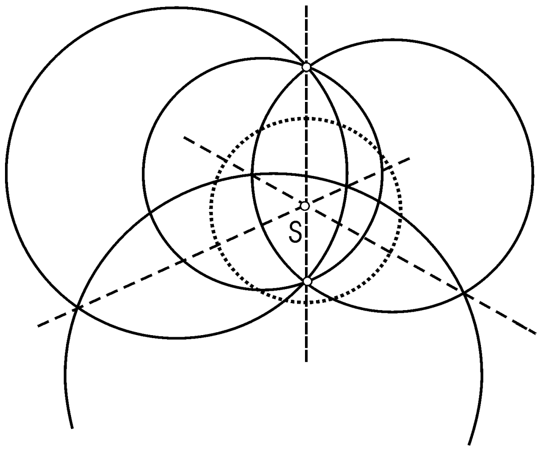
Definicija 13.4.6. Pramenovi krugova iz prethodne teoreme nazivaju se *ortogonalnim.*

Definicija 13.4.7. Skup krugova ravni E^2 od kojih svaka tri imaju isti radikalni centar nazivamo *snop krugova.* Potencija radikalnog centra u odnosu na sve krugove snopa naziva se *potencija snopa.* Ako je potencija snopa negativna onda taj snop zovemo *eliptičkim* (slika 13.13.), ako je potencija snopa nula onda takav snop zovemo *paraboličkim* (slika 13.14.) a ako je potencija snopa pozitivna onda takav snop zovemo *hiperboličkim* (slika 13.15.).

Nije teško zaključiti da važi sledeća

Teorema 13.4.7. *(i) Radikalno središte eliptičkog snopa nalazi se unutar svih krugova snopa.*
(ii) Svi krugovi paraboličkog snopa prolaze kroz radikalno središte.
(iii) Radikalno središte hiperboličkog snopa nalazi se van svih krugova snopa.

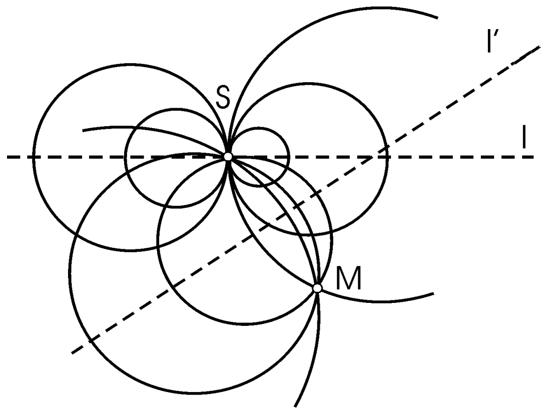
Teorema 13.4.8. *(i) Postoji jedan i samo jedan krug koji krugovi nekog eliptičkog snopa seku u dijametralno suprotnim tačkama (slika 13.13.).*
(ii) Postoji jedan i samo jedan krug koji je ortogonalan na sve krugove nekog hiperboličkog snopa (slika 13.14.).



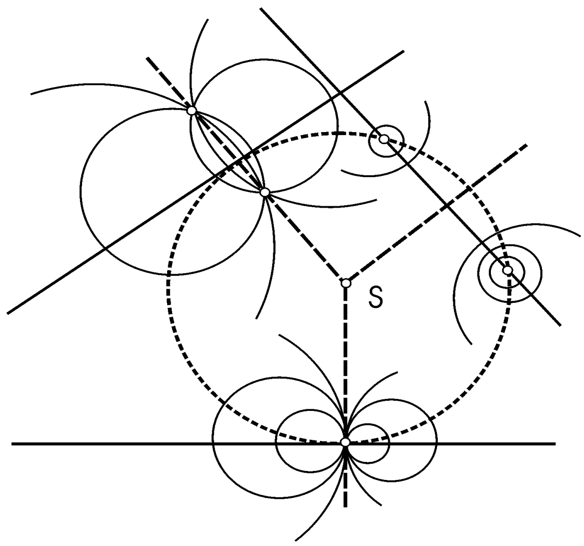
Slika 13.13. Eliptički snop krugova

Dokaz. Očigledno je da navedeni krugovi imaju centar u tački S koja predstavlja radikalni centar pomenutih snopova i da su im poluprečnici jednaki p ($-p^2$ i p^2 su potencije snopa).

Možemo uočiti da u sastav eliptičkog snopa ulaze samo eliptički pramenovi, u sastav paraboličkog snopa eliptički i parabolički pramenovi, dok u sastav hiperboličkog snopa ulaze eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi. □



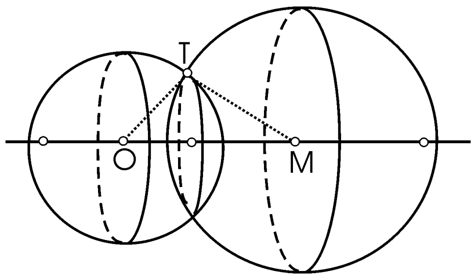
Slika 13.14. Parabolički snop krugova



Slika 13.15. Hiperbolički snop krugova

13.4.2 Potencija tačke u odnosu na sferu

Sve što je rečeno o krugovima u ravni E^2 može se preneti i na sferu u prostoru E^3. Neka je u prostoru data sfera $S(O,r)$ i prava s koja prolazi kroz tačku M i prodire sferu u tačkama A i B. Potencijom tačke M u odnosu na sferu S nazivamo konstantan proizvod $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. Ako sferu presečemo proizvoljnom ravni α koja sadrži tačku M, onda nije teško zaključiti da je potencija tačke M u odnosu na pesečni krug ravni α i sfere S jednaka potenciji tačke M u odnosu na sferu S. Za tačke van sfere potencija je pozitivna, za tačke na sferi je jednaka nuli dok je za tačke unutar sfere potencija negativna. Kao i u slučaju potencije u odnosu na krug, potencija tačke M u odnosu na sferu $S(O,r)$ jednaka je $p^2 = MO^2 - r^2$. Ako je tačka M van sfere $S(O,r)$, onda je sfera sa središtem u tački M i poluprečnikom p ortogonalna na sferu S.



Slika 13.16.

Na primer (slika 13.16.) neka su u ravni dati ortogonalni krugovi $k(O,r)$ i $l(M,p)$ i neka je T jedna od njihovih zajedničkih tačaka. Rotacijom tefigure oko prave OM krugovi k i l opisuju sfere redom sa središtima u tačkama O i M. Ravni koje prolaze redom kroz prave OT i OM a ortogonalne su na ravan određenu tačkama O, T i M, predstavljaju tangentne ravni pomenutih sfera. Kako je ugao između tih dveju ravni upravo ugao $\measuredangle OTM$, to su pomenute ravni ortogonalne, tj. ortogonalne su odgovarajuće sfere.

Takođe važi teorema koju navodimo bez dokaza

Teorema 13.4.9. *Skup svih tačaka prostora koje imaju iste potencije u odnosu na dve zadate sfere $S_1(O_1,r_1)$ i $S_2(O_2,r_2)$ jeste ravan ortogonalna na pravu O_1O_2*

Definicija 13.4.8. Skup svih tačaka prostora čije su potencije jednake u odnosu na dve zadate sfere naziva se *radikalna* ili *potencijalna ravan.*

Teorema 13.4.10. *Ako su centri triju sfera tri nekolinearne tačke, onda se tri radikalne ravni datih sfera seku po jednoj pravoj.*

Dokaz. Kako su središta triju datih sfera tri nekolinearne tačke, to nikoje dve radikalne ravni pomenutih sfera nisu paralelne. Neka se dve od pomenutih triju ravni seku po pravoj l. Sve tačke prave l imaju jednake potencije u odnosu na sve tri date sfere, odakle sledi da i treća radikalna ravan sadrži pravu l. $\square$

Definicija 13.4.9. Skup tačaka prostora E^3 koje imaju jednake potencije u odnosu na tri date sfere naziva se *radikalna osa* tih sfera.

Teorema 13.4.11. *Ako centri četiri različite sfere ne pripadaju istoj ravni, tada šest radikalnih ravni tih sfera imaju jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. Neka su O_1, O_2, O_3 i O_4 centri pomenutih sfera. Radikalne ose sfera sa centrima O_1, O_2, O_3 i O_1, O_3, O_4 pripadaju jednoj te istoj ravni i to radikalnoj ravni sfera sa centrima O_1 i O_2. Presek S tih radikalnih osa ima jednake potencije u odnosu na sve četiri sfere. Odatle sledi da tačku S sadrže i preostale radikalne ose, a takođe i sve radikalne ravni tih sfera. $\square$

Definicija 13.4.10. Presečnu tačku svih radikalnih osa četiri sfere čiji centri ne pripadaju istoj ravni nazivamo *radikalnim centrom* tih krugova.

Definicija 13.4.11. Skup sfera od kojih svake dve imaju istu radikalnu ravan nazivamo *pramenom sfera.* Ako radikalna ravan seče sve sfere pramena onda takav pramen nazivamo eliptičkim, ako ih dodiruje paraboličkim a ako nema sa njima zajedničkih tačaka hiperboličkim pramenom sfera.

Sve vrste pomenutih pramenova možemo dobiti rotacijom odgovarajućih pramenova krugova oko prave određene središtima tih krugova. U tom slučaju krugovi pramena opisuju sfere a njihova radikalna osa radikalnu ravan sfera.

Definicija 13.4.12. Skup svih sfera od kojih svake tri imaju istu radikalnu osu nazivamo *snopom sfera.* U zavisnosti od toga da li osa seče, dodiruje ili nema zajedničkih tačaka sa svakom od pomenutih sfera snop je redom *eliptički*, *parabolički* ili *hiperbolički.*

Predstavu o snopu sfera lako dobijamo posmatranjem odgovarajućeg snopa krugova (Slike 13.13, 13.14 i 13.15) gde svaki krug možemo zamisliti kao dijametralni presek sfere, a radikalnu osu kao normalu na ravan crteža u centru snopa krugova.

Definicija 13.4.13. Skup sfera od kojih svake četri imaju isto radikalno središte naziva se *mreža sfera*. Zajedničku potenciju radikalnog centra sfera nazivamo centrom mreže. Mreža je *eliptička* ako centar pripada unutrašnjosti svih sfera mreže, *parabolička* ako sve sfere mreže sadrže radikalni centar a *hiperbolička* ako je radikalni centar van svih sfera mreže.

13.5 Inverzija u odnosu na krug i sferu

13.5.1 Inverzija u odnosu na krug

Potencija tačke u odnosu na krug omogućuje da u geometriji ravni E^2 ustanovimo specifičnu transformaciju koju nazivamo *inverzijom* u odnosu na krug koji se nalazi u toj ravni.

Definicija 13.5.1. Neka je $k(O, r)$ proizvoljan krug ravni E^2 i $E^2_* = E^2 \backslash \{O\}$. *Inverzijom u odnosu na krug* k nazivamo transformaciju $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ koja svaku tačku $P \in E^2_*$ prevodi u tačku P' poluprave OP takvu da je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tačku O nazivamo centrom ili središtem inverzije, duž r - poluprečnikom inverzije, veličinu r^2 - stepenim koeficijentom, krug k - krugom inverzije ψ_k a E^2_* - Gausovom ravni.

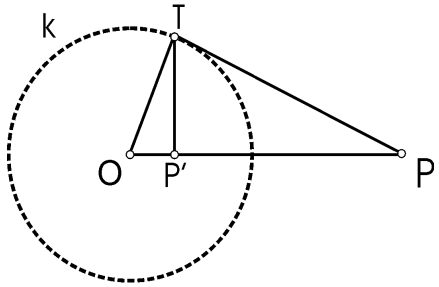
Iz definicije neposredno sledi da je inverzija u odnosu na krug bijektivna transformacija. To nije transformacija cele ravni E^2 već samo njenog dela E^2_*, jer u njoj nije definisana slika tačke O, niti je tačka O slika neke tačke ravni E^2.

Inverziju u odnosu na krug moguće je razmatrati i u takozvanoj konformnoj ravni, tj. Euklidskoj ravni E^2 proširenoj beskonačno dalekom tačkom ∞. Tada je $\psi_k(\infty) = O$ i $\psi_k(O) = \infty$.

Teorema 13.5.1. *Inverzija u odnosu na krug je involuciona transformacija.*

Dokaz. Neka je $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ inverzija u odnosu na krug $k(O, r)$. Ako je $P \in E^2_*$ proizvoljna tačka, tada tačka $P' = \psi_k(P)$ pripada polupravoj OP (slika 13.17.) pri čemu je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tada i tačka P pripada polupravoj OP' i važi $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2$, pa je $\psi_k(P') = P$. Dakle, zaista je $\psi_k^2 = \varepsilon$. □

Teorema 13.5.2. *U inverziji* $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ *tačka* X *je invarijantna ako i samo ako* X *pripada krugu* k.



Slika 13.17.

Dokaz. Ako je $X \in E^2_*$ invarijantna imamo da $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$ pa je $OX = r$, tj. tačka X pripada krugu k.

Obratno, ako $X \in k$, tada tačka $X' = \psi_k(X)$ pripada polupravoj OX i važi $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$. Odavde je $OX' = r$, tj. tačke X i X' se poklapaju. $\square$

Teorema 13.5.3. *U inverziji $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ tački X koja se nalazi u krugu k odgovara tačka X' koja se nalazi izvan kruga k i obratno tački X koja se nalazi izvan kruga k odgovara tačka X'koja se nalazi u krugu k.*

Dokaz. Neka je O središte i r poluprečnik inverzije ψ_k. Ako je X u krugu k tada je $OX < r$ pa iz relacije $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$ sledi da je $OX' > r$, tj. tačka X je izvan kruga k.

Obratno, ako je X izvan kruga k tada je $OX > r$, odakle na isti način kao malopre sledi da je $OX' < r$, odnosno tačka X' je unutar kruga k. $\square$

Teorema 13.5.4. *Kompozicija dveju inverzija ψ_{k_1} i ψ_{k_2} definisanih u odnosu na koncentrične krugove $k_1(O, r_1)$ i $k_2(O, r_2)$ predstavlja homotetiju $\mathcal{H}_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}$.*

Dokaz. Krugovi k_1 i k_2 su koncentrični pa pripadaju istoj ravni E^2. Neka je $X \in E^2_*$ proizvoljna tačka i $X_1, X_2 \in E^2_*$ tačke takve da je

$$\psi_{k_1}(X) = X_1, \qquad \psi_{k_2}(X_1) = X_2.$$

Tada je

$$(\psi_{k_2}\psi_{k_1})(X) = X_2.$$

Tačke X_1 i X_2 pripadaju redom polupravama OX i OX_1 pa je i tačka X_2 na polupravoj OX. Iz relacija $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX_1} = r_1^2$ i $\overrightarrow{OX_1} \cdot \overrightarrow{OX_2} = r_2^2$ sledi

$\overrightarrow{OX_2} : \overrightarrow{OX} = r_2^2 : r_1^2$, tj. u homotetiji sa centrom u tački O i koeficijentom $r_2^2 : r_1^2$ tački X odgovara tačka X_2. Prema tome sledi da je

$$\psi_{k_2}\psi_{k_1} = \mathcal{H}_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}.$$

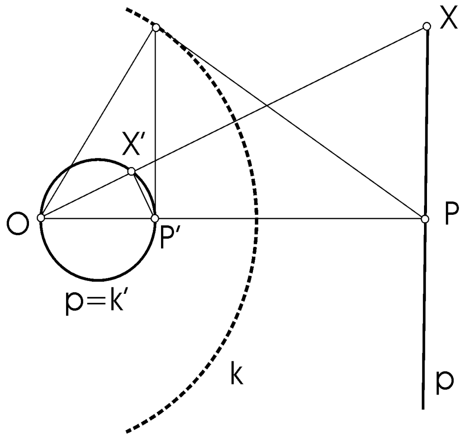
□

Definicija 13.5.2. Lik Ω ravni E_*^2 je *inverzan* liku Ω' ravni E_*^2 ako postoji inverzija $\psi_k : E_*^2 \to E_*^2$ koja lik Ω prevodi u lik Ω'.

Teorema 13.5.5. *Neka su u ravni E^2 dati krug $k(O, r)$ i prava p. Tada:*
(i) Ako prava p sadrži tačku O tada je $\psi_k(p\backslash\{O\}) = p\backslash\{O\}$,
(ii) Ako prava p ne sadrži tačku O tada lik $\psi_k(p)$ predstavlja krug bez tačke O.

Dokaz. (i) Neka prava p sadrži tačku O, i neka je $X = E^2\backslash\{O\}$ i $X' = \psi_k(X)$. Ako tačka X pripada pravouj $p\backslash\{O\}$, onda tačka X' pripada polupravoj OX pa samim tim i pravoj $p\backslash\{O\}$.

Obratno, neka $X' \in p\backslash\{O\}$. Tada je $X = \psi_k(X)$ pa tačka X pripada polupravoj OX', pa samim tim $X \in p\backslash\{O\}$.



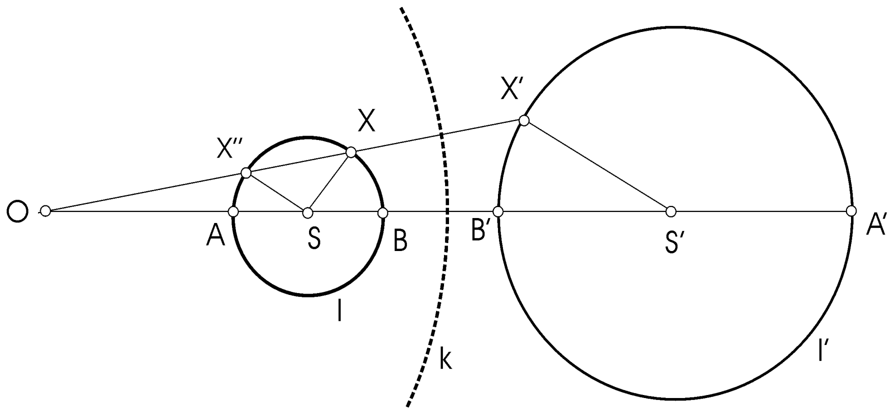
Slika 13.18.

(ii) Prava p ne sadrži tačku O. Označimo sa P podnožje upravne iz tačke O (slika 13.18.) na pravoj p, sa X proizvoljnu tačku prave p različitu od tačke P a sa P' i X' tačke koje u inverziji ψ_k odgovaraju redom tačkama P i X. Tada je $\angle POX = \angle X'OP'$ i $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'}$. Odavde sledi da su trouglovi ΔPOX i $\Delta X'OP'$ slični, pa je i $\angle OPX = \angle OX'P'$. Kako je ugao $\measuredangle OPX$ prav to je i ugao $\measuredangle OX'P'$ prav pa tačka X' pripada krugu k' čiji je prečnik duž OP'.

Obratno, neka tačka $X' \neq O$, P' pripada krugu k' nad prečnikom OP'. Tada je $\measuredangle OX'P'$ prav, pa su pravougli trouglovi ΔPOX i $\Delta X'OP'$ slični, odakle sledi $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'}$, tj u izometriji ψ_k tački X odgovara tačka X'. □

Teorema 13.5.6. *Neka su ravni E^2 dati krugovi $k(O,r)$ i $l(S,\rho)$. Tada važe sledeća tvrđenja:*
(i) Ako tačka O pripada krugu l tada je $\psi_k(l\backslash\{O\})$ prava l'.
(ii) Ako tačka O ne pripada krugu l tada u inverziji ψ_k krugu l odgovara neki krug l'.

Dokaz. (i) Neka je $\psi_k(l\backslash\{O\}) = l'$. Prema prethodnoj teoremi zaključujemo da je l' prava.



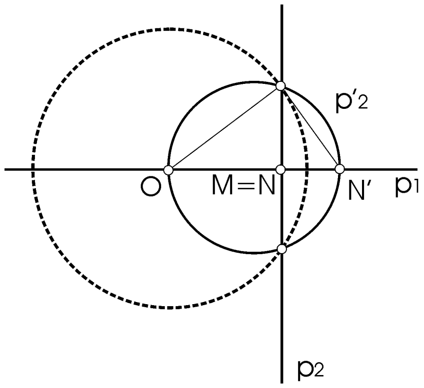
Slika 13.19.

(ii) Neka je X proizvoljna tačka kruga l, X' tačka koja u inverziji ψ_k odgovara tački X a X'' druga zajednička tačka kruga l i prave OX (slika 13.19.). Označimo sa t stepen inverzije ψ_k a sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l. Tada je $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ i $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Iz poslednje dve relacije dobijamo da je

$$\frac{\overrightarrow{OX'}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}.$$

Prema tome tačka X' pripada krugu l' koji u homotetiji $\mathcal{H}_{O,\frac{t}{p}}$ odgovara krugu l.

Obratno, neka je X' proizvoljna tačka kruga l', $\mathcal{H}^{-1}_{O,\frac{t}{p}}(X')$ i X druga zajednička tačka prave OX'' sa krugom l. Označimo kao i malopre sa t stepen inverzije ψ_k a sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l. Tada je $\frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}$ i $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Iz poslednje dve jednakosti sledi $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ a odavde je $X' = \psi_k(X)$. $\square$



Slika 13.20.

Teorema 13.5.7. *(i) Inverzija ψ_k čuva uglove među pravama, tj. ugao između dve prave jednak je uglu koji zaklapaju njihove slike.*
(ii) Inverzija ψ_k je konformno preslikavanje, tj. ugao pod kojim se seku dve linije p i q ravni E^2 u presečnoj tački S jednak je uglu pod kojim se seku njima inverzne krive p' i q' u tački S'.

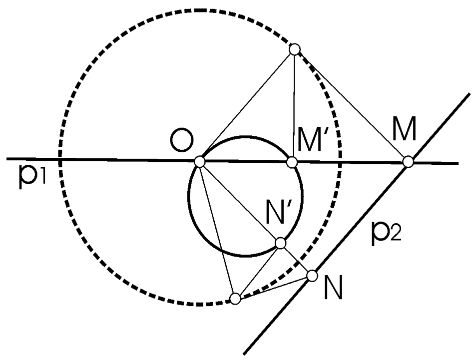
Dokaz. (i) Neka je $k(O,r)$ krug inverzije i neka su p_1 i p_2 dve prave u ravni kruga inverzije, $p_1' = \psi_k(p_1)$ i $p_2' = \psi_k(p_2)$. Tada mogu nastupiti nekolika slučaja:

a) Prave p_1 i p_2 sadrže centar inverzije. U tom slučaju dokaz je trivijalan.

b) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Neka je N podnožje normale iz tačke O na p_2.

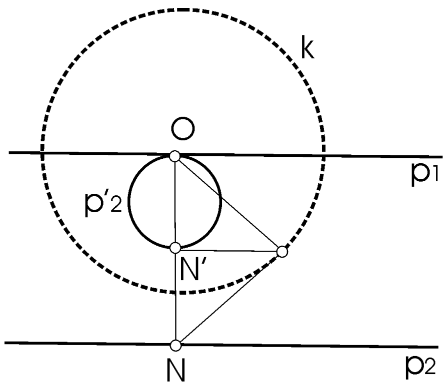
Ako je $M = N$ (slika 13.20.), tada je p_2' krug nad prečnikom ON', $N' = \psi(N)$, pa je $\measuredangle(p_1,p_2) = \pi/2 = \measuredangle(p_1,p_2')$.

Ako $M \neq N$, tada je $\measuredangle(p_1,p_2) = \pi/2 - \measuredangle MON$ (slika 13.21.) a $\measuredangle(p_1,p_2')$ kao ugao između tangente i tetive jednak periferijskom uglu nad tetivom, $\measuredangle ON'M' = \pi/2 - \measuredangle M'ON' = \pi/2 - \measuredangle MON$. Imajući u vidu da je i u ovom slučaju $p_1 = p_1'$, zaključujemo da tvrđenje važi.



Slika 13.21.

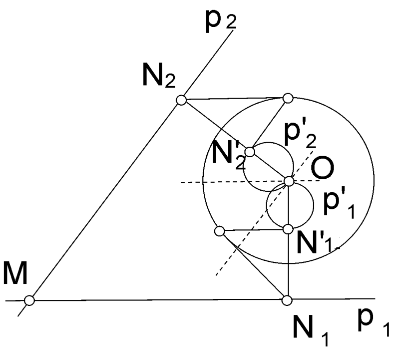
c) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$ (slika 13.22.). U tom slučaju je $\measuredangle(p_1, p_2) = 0$. S druge strane p_2' je krug koji dodiruje pravu p_1 u tački O. Prema tome $\measuredangle(p_1, p_2') = 0$.



Slika 13.22.

d) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Neka su N_1 i N_2 (slika 13.23.) podnožja normala iz tačke O redom na pravama p_1 i p_2.

Ako je $M = N_1$ (Dakle $M \neq N_2$), tada je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi - \measuredangle MON$ i $\measuredangle(p_1', p_2') = \pi - \measuredangle M'ON'$ (Uglovi sa normalnim kracima i osna simetrija u odnosu na simetralu duži OM'). Slučaj $M = N_2$ razmatra se analogno. Neka je sada $M \neq N_1$ i $M \neq N_2$. U tom slučaju je $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi - \measuredangle N_1ON_2$. S druge strane je $\measuredangle(p_1', p_2') = \pi - \measuredangle N_1'ON_2'$, odakle sledi $\measuredangle(p_1', p_2') = \measuredangle(p_1, p_2)$.



Slika 13.23.

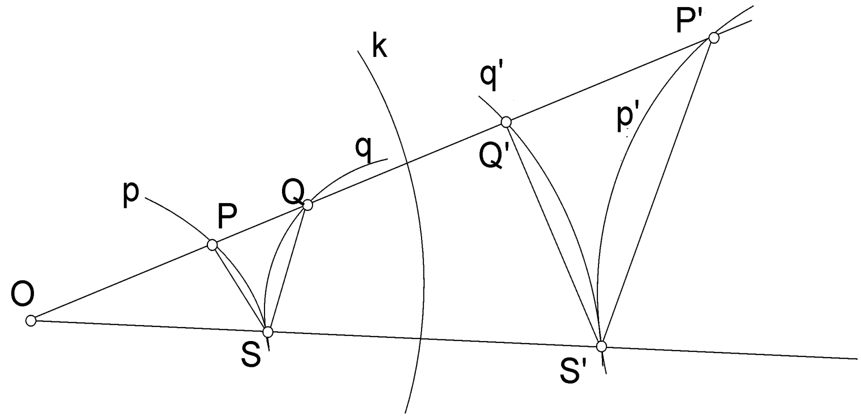
e) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$. Tada je $\measuredangle(p_1, p_2) = 0$, a p'_1 i p'_2 predstavljaju krugove koji se dodiruju u tački O. Prema tome $\measuredangle(p'_1, p'_2) = 0$, pa tvrđenje važi i u ovom slučaju.

(ii) Neka je O središte inverzije ψ_k i l prava koja sadrži tačku O i seče linije p i q redom u tačkama P i Q (slika 13.24.) i neka je S presečna tačka linija p i q. Neka je zatim $P' = \psi_k(P)$, $Q' = \psi_k(Q)$ i $S' = \psi_k(S)$. Iz

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS'},$$

sledi da su četvorouglovi $PP'S'S$ i $QQ'S'S$ tetivni, odakle je $\measuredangle OSP \cong \measuredangle S'P'P$ i $\measuredangle OSQ \cong \measuredangle S'Q'Q$.

Tada je $\measuredangle PSQ \cong \measuredangle P'S'Q'$. Smanjivanjem ugla između pravih l i SS' tačke P i Q kreću se po krivama p i q ka tački S. Istovremeno, tačke P' i Q' se približavaju tački S' krećući se po linijama p' i q'. U graničnom slučaju sečice SP i SQ predstavljaju tangente linija p i q u tački S, dok sečice $S'P'$ i $S'Q'$ predstavljaju tangente linija p' i $'$ u presečnoj u tački S'. Dakle, ugao koji određuju tangente na linije p i q u presečnoj tački S jednak je uglu koji određuju tangente na linije p' i q' u presečnoj tački S'. $\square$



Slika 13.24.

13.5.2 Inverzija u odnosu na sferu

Po analogiji u odnosu na inveziju u odnosu na krug u ravni možemo uvesti pojam inverzije u odnosu na sferu u prostoru.

Definicija 13.5.3. Neka je $S(O,r)$ sfera prostora E^3 i neka je $E^3_* = E^3 \backslash \{O\}$. *Inverzijom u odnosu na sferu* S nazivamo transformaciju $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ koja svaku tačku $P \in E^3_*$ prevodi u tačku P' poluprave OP takvu da je $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Tačku O nazivamo centrom ili središtem inverzije, duž r - poluprečnikom inverzije, veličinu r^2 - stepenim koeficijentom, sferu S - sferom inverzije ψ_k a E^3_* - Gausovim prostorom.

Iz definicije neposredno sledi da je i inverzija u odnosu na sferu bijektivna transformacija. To nije transformacija celog prostora E^3 već samo njenog dela E^3_*, jer u njoj nije definisana slika tačke O, niti je tačka O slika neke tačke prostora E^3.

Inverziju u odnosu na sferu moguće je razmatrati i u takozvanom konformnom prostoru, tj. Euklidskoj prostoru E^3 proširenom beskonačno dalekom tačkom ∞. Tada je $\psi_k(\infty) = O$ i $\psi_k(O) = \infty$.

Kao i kod inverzije u odnosu na krug, mogu se dokazati sledeće osobine

Teorema 13.5.8. *Inverzija u odnosu na sferu je involuciona transformacija.*

Teorema 13.5.9. *U inverziji $\psi_S : E^3_* \to E^2_*$ tačka X je invarijantna ako i samo ako X pripada sferi inverzije S.*

Teorema 13.5.10. *U inverziji $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ tački X koja se nalazi unutar sfere S odgovara tačka X' koja se nalazi izvan sfere S i obratno tački X koja se nalazi izvan sfere S odgovara tačka X' koja se nalazi unutar sfere S.*

13.6 Apolonijevi problemi o dodiru krugova

Sada ćemo razmotriti Apolonijeve probleme o dodiru kruga koji se primenom inverzije u odnosu na krug mogu elegantno rešiti. Radi se o problemima sledećeg oblika

Konstruisati krug koji zadovoljava tri uslova od kojih svaki ima jedan od oblika:

(a) sadrži datu tačku,

(b) dodiruje datu pravu,

(c) dodiruje dati krug.

Naravno, sve tačke, prave i krugovi iz pomenutih uslova pripadaju istoj ravni. Neki od tih problema se mogu veoma lako rešiti, dok za neke to nije slučaj.

Lako je zaključiti da Apolonijevih problema ima deset:

1. Konstruisati krug koji sadrži tri date tačke.
2. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje datu pravu.
3. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje dati krug.
4. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje dve date prave.
5. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje datu pravu i dati krug.
6. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje dva data kruga.
7. Konstruisati krug koji dodiruje tri date prave.
8. Konstruisati krug koji dodiruje dve date prave i dati krug.
9. Konstruisati krug koji dodiruje datu pravu i dva data kruga.
10. Konstruisati krug koji dodiruje tri data kruga.

Označimo date parametre na sledeći način:

tačke A, B, C; prave p_1, p_2, p_3; krugove $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$.

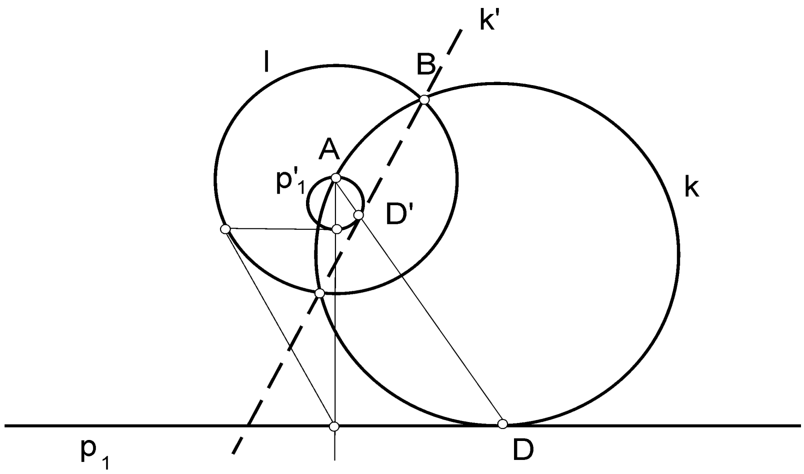
Tada Apolonijeve probleme šematski možemo prikazati na sledeći način:

1. A, B, C
2. A, B, p_1
3. A, B, $\mathcal{O}_1$
4. A, p_1, p_2
5. A, p_1, $\mathcal{O}_1$
6. A, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$
7. p_1, p_2, p_3
8. p_1, p_2, $\mathcal{O}_1$
9. p_1, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$
10. $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$

Prvi i sedmi problem su trivijalni. Takođe i svi ostali Apolonijevi problemi mogu se rešiti bez primene inverzije. Međutim inverzija daje jedan opšti metod za njihovo rešavanje. On se zasniva na činjenici da se u određenom slučaju, kao što smo videli, krug preslikava u pravu i obrnuto.

2. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje datu pravu p_1.

Analiza. Neka krug k sadrži dve date tačke A i B i dodiruje datu pravu p_1 u tački D. Pri inverziji u odnosu na krug $l(A, AB)$ pravoj p_1 odgovara krug p_1' (slika 13.25.) koji prolazi kroz tačku A a krugu k odgovara prava k'.



Slika 13.25.

Kako tačka B pripada krugu inverzije l to će se ona preslikati u samu sebe. Prava p_1 sa krugom k ima jednu zajedničku tačku teće isto važiti i za njihove slike pri inverziji, tj. prava k' će dodirivati krug p_1'. Krug k sadrži tačku B koja se pri ovoj inverziji preslikava u samu sebe, odakle sledi da će i njegova slika, prava k', sadržati tačku B. Prema tome, mi najpre treba da konstruišemo krug p_1' koji je inverzna slika prave p_1 u odnosu na krug $l(A, AB)$, zatim pravu k' kroz tačku B koja je tangenta na krug p_1', a zatim krug k kao inverznu sliku prave k' u odnosu na krug l.

Konstrukcija. Neka su date dve tačke A i B i prava p_1, tako da su tačke A i B sa iste strane prave p_1. Konstruišimo zatim krug $l(A, AB)$ i inverznu sliku prave p_1 u odnosu na krug l. To će biti krug p_1' koji prolazi kroz centar inverzije A. Iz tačke B konstruišimo tangentu k' na krug p_1'. Konstruišimo zatim inverznu sliku prave k' u odnosu na krug $l(A, AB)$. To će biti traženi krug k. Dokažimo to.

Dokaz. Krug k kao inverzna slika prave k' prolazi kroz centar inverzije A. Takođe krug k sadrži i tačku B kao invarijantnu tačku posmatrane inverzije, pa je zadovoljen i drugi uslov. Krug k dodiruje pravu p_1 jer i njihove inverzne slike k' i p_1' imaju jednu zajedničku tačku.

Diskusija. Pod uslovom da su tačke A i B sa iste strane prave p_1 zadatak ima dva rešenja jer se iz tačke B mogu konstruisati dve tangente na krug p_1'.

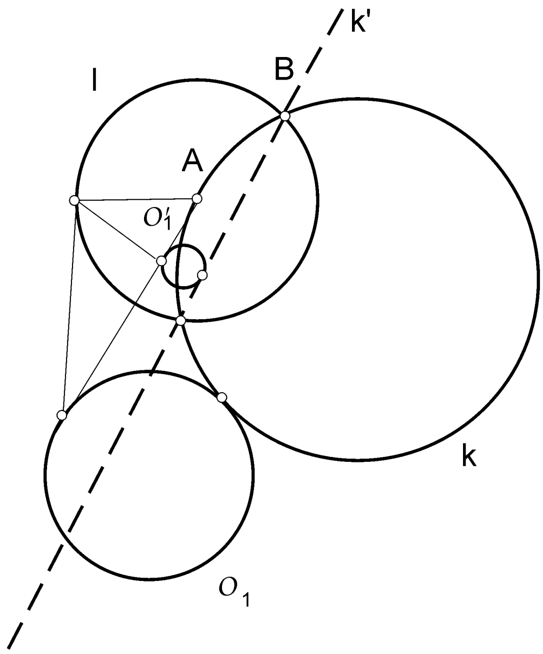
3. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje dati krug $\mathcal{O}_1$.

Neka krug k prolazi kroz tačke A i B i dodiruje dati krug $\mathcal{O}_1$. Konstruišimo krug $l(A, AB)$. U inverziji u odnosu na dati krug $l(A, AB)$ (slika 13.26.), krug k će se slikati u neku pravu k' koja prolazi kroz tačku B, a krug $\mathcal{O}_1$ u neki krug $\mathcal{O}_1'$ pri čemu će prava k' biti tangenta kruga $\mathcal{O}_1'$, jer se krugovi k i $\mathcal{O}_1$ dodiruju. Prema tome, možemo najpre konstruisati krug $\mathcal{O}_1'$ koji je inverzan skrugom $\mathcal{O}_1$ u odnosu na krug $l(A, AB)$, pa onda tangentu k' iz tačke B na krug $\mathcal{O}_1'$ i na kraju inverznu sliku prave k' u odnosu na $l(A, AB)$, koja će biti traženi krug k.

5. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i dodiruje datu pravu p_1 i dati krug $\mathcal{O}_1$.

Neka je k traženi krug. Pri inverziji u odnosu na krug $m(A, r)$, gde je r proizvoljna duž, pravoj p_1 odgovara neki krug p_1' (slika 13.27.), krugu $\mathcal{O}_1$ odgovara neki krug $\mathcal{O}_1'$ a traženom krugu k prava k' koja dodiruje krugove p_1' i $\mathcal{O}_1'$.

Dakle, potrebno je najpre konstruisati krugove p_1' i $\mathcal{O}_1'$ inverzne linijama p_1 i $\mathcal{O}_1$ u odnosu na krug $m(A, r)$, zatim zajedničku tangentu k' krugova p_1'

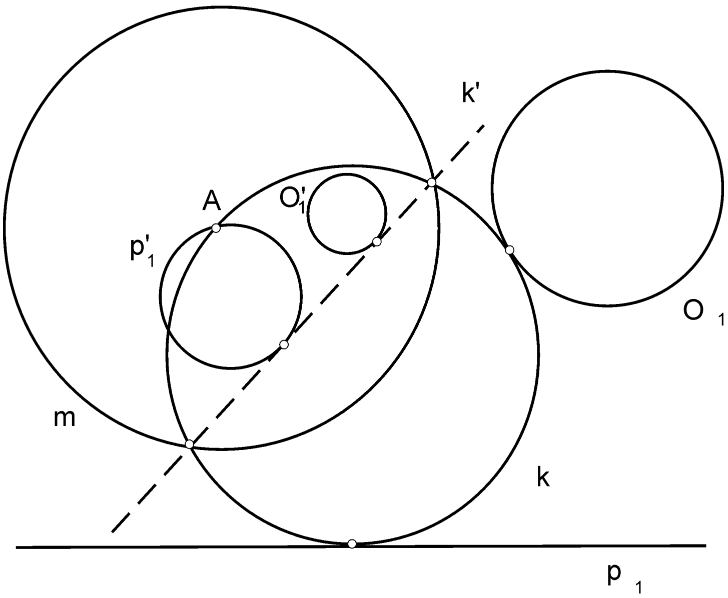


Slika 13.26.

i $\mathcal{O}_1'$, (u opštem slučaju ih ima četiri) i na kraju krug k inverzan pravoj k' u odnosu na krug inverzije $m(A, r)$.

Možemo zaključiti, da u rešavanju ovog problema nije bilo od značaja da li su p_1 i $\mathcal{O}_1$ baš prava i krug, već da su njihove inverzne slike p_1' i $\mathcal{O}_1'$ krugovi. Međutim, p_1' i $\mathcal{O}_1'$ bi bili krugovi i u slučaju da su p_1 i $\mathcal{O}_1$ dve prave i $A \notin p_1, \mathcal{O}_1$.

Zaključujemo da se četvrti i šesti Apolonijev problem rešavaju na isti način kao i peti. Osmi, deveti i deseti Apolonijev roblem svode se redom na četvrti, peti i šesti.



Slika 13.27.

Glava 14

Razloživa i dopunska jednakost likova. Merenje figura

14.1 Razloživa i dopunska jednakost likova u geometriji

U matematici razlikujemo tri vrste jednakosti: konačnu, graničnu i približnu. U geometriji razlikujemo dve vrste konačnih jednakosti likova:
- razloživu jednakost
- i dopunsku jednakost.

Definicija 14.1.1. Kaže se da je lik Φ prostora E^n *razloživo jednak* sa likom Φ' prostora E^n prostora E^n, što simbolički označavamo $\Phi \stackrel{R}{=} \Phi'$, ako se lik Φ može razložiti na konačan broj likova $\Phi_1, \ldots \Phi_m$ a lik Φ' na konačan broj likova $\Phi'_1, \ldots \Phi'_m$, pri čemu je $\Phi_i \cong \Phi'_i$ za svako $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Definicija 14.1.2. Lik Φ prostora E^n je *dopunski jednak* liku Φ' prostora E^n, što označavamo $\Phi \stackrel{D}{=} \Phi'$, ako se lik Φ može dopuniti konačnim brojem likova $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, a lik Φ' istim brojem likova $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_m$ pri čemu je $\Phi_i \cong \Phi'_i$ za svako $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ a likovi $\bar{\Phi}$ i $\bar{\Phi}'$ koji se sastoje redom od likova $\Phi, \Phi_1 \cdots \Phi_m$ i $\Phi', \Phi'_1 \cdots \Phi'_m$ su razloživo jednaki, tj. $\bar{\Phi} \stackrel{R}{=} \bar{\Phi}'$.

Ovako uvedene relacije razložive i dopunske jednakosti figura nameću čitav niz problema od izuzetnog značaja. Tako se odmah nameće pitanje: *"Ako su dva lika razloživo jednaka da li su i dopunski jednaka i da li važi i* *obrnuto"*. Ovo su izuzetno složena pitanja koja su jednostavna samo u geometriji poligona i poliedara gde su na njih dati odgovori. Međutim druga slična pitanja nisu rešena ni u ravanskom slučaju. U ravni je dokazana ekvivalentnost razložive jednakosti i dopunske jednakosti likova. Dokaz su dali Farkaš Boljai 1832. i Gervin, austrijski matematičar iz Graca, 1833., nezavisno jedan od drugog, pri čemu je pomenuta teorema poznata pod nazivom Teorema Boljai-Gervina. Za slučaj prostornih likova, tj. u geometriji poliedara to je čuveni *treći Hilbertov problem* iznet 1900. godine na drugom međunarodnom kongresu matematičara. Već 1903. problem je rešio, mada veoma složeno njegov asistent Maks Den. Isti problem rešio je ruski matematičar Kaven 1905., a znatno prostije rešio ga je 1946. švajcarski matematičar Hugo Hadinger.

Dalje važi sledeća teorema:

Teorema 14.1.1. *Ako su dve figure Φ_1 i Φ_2 razloživo jednake nekoj trećoj figuri Φ_3 one su i međusobno razloživo jednake. Ako su dve figure dopunski jednake nekoj trećoj, one su međusobno dopunski jednake.*

Dokaz. Na osnovu pretpostavke može se uočiti po jedno razlaganje figura Φ_1 i Φ_2, tako da svako od ovih razlaganja odgovara razlaganju figure Φ_3 na figure podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_1 i Φ_2. Oba ova razlaganja figure Φ_3 se dodatnim razlaganjima pojedinih figura mogu dovesti do poklapanja. Izvršimo sada dodatna razlaganja figura Φ_1 i Φ_2 tako da odgovaraju poslednjem razlaganju figure Φ_3. To znači da su sve figure razlaganja figura Φ_1 i Φ_2 podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_3. Zbog tranzitivnosti podudarnosti figura sledi da su sve figure razlaganja Φ_1 podudarne odgovarajućim figurama razlaganja Φ_2, tj. figure Φ_1 i Φ_2 su razloživo jednake. Dokaz drugog dela obavlja se bez teškoća. □

Korišćenjem prethodne teoreme nije teško dokazati da važe:

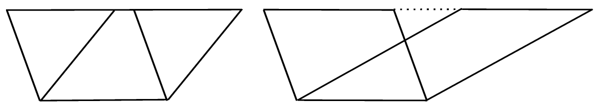
Teorema 14.1.2. *Relacija razložive jednakosti likova prostora E^n je relacija ekvivalencije.*

Teorema 14.1.3. *Relacija dopunske jednakosti likova prostora E^n je relacija ekvivalencije*

14.2 Dopunska i razloživa jednakost paralelograma i trouglova

Teorema 14.2.1. *Dva paralelograma sa jednakim osnovicama i visinama dopunski su jednaka.*

Dokaz. Dokaz je ilustrovan na slici 14.1

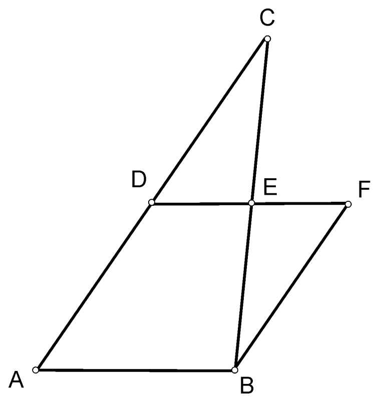


Slika 14.1.

Takođe interesantno je sledeće tvrđenje

Teorema 14.2.2. *Svaki trougao dopunski je jednak izvesnom paralelogramu sa istom osnovicom, i visinom jednakom polovini visine posmatranog trougla.*

Dokaz. Neka je dat trougao ΔABC (slika 14.2) i neka su D i E redom središta duži AC i BC. Označimo sa F tačku prave DE takvu da je $\mathcal{B}(D, E, F)$. Tada su trouglovi ΔDCE i ΔFBE podudarni pa su trougao ΔABC i paralelogram $ABFD$ razloživo jednaki. □



Slika 14.2.

Takođe, nije teško dokazati i sledeća tvrđenja

Teorema 14.2.3. *Dva trougla sa jednakim osnovicama i jednakim visinama su dopunski jednaka međusobom.*

Teorema 14.2.4. *Za proizvoljan trougao, a samim tim i za proizvoljan prost poligon, uvek se može konstruisati pravougli trougao koji ima jednu katetu 1, i koji je sa trouglom, odnosno poligonom, dopunski jednak.*

14.3 Merenje figura u ravni $\mathbf{E^2}$

Definicija 14.3.1. *Sistemom merenja ravnih figura* nazivamo funkciju s koja svakoj figuri ω neke kolekcije $\mathcal{K}$ ravnih figura, pridružuje realan broj $s(\omega)$, pri čemu važi:

(i) Ako je $\omega \in \mathcal{K}$, onda je $s(\omega) \geq 0$,

(ii) Ako $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathcal{K}$ i $\omega_1 \cong \omega_2$, tada je $s(\omega_1) = s(\omega_2)$,

(iii) Ako $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{K}$ i $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, onda $s(\omega_1) = s(\omega_2) + s(\omega_3)$,

(iv) Postoji kvadratna površ ω_0 takva da je $s(\omega_0) = 1$.

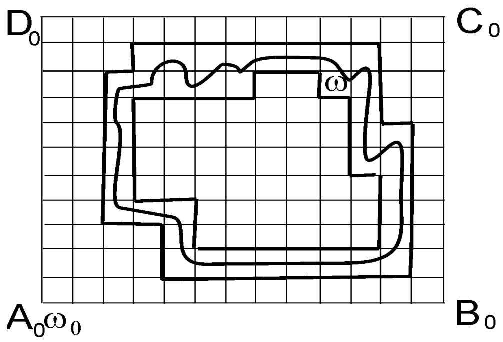
Broj $s(\omega)$ koji u sistemu merenja s odgovara figuri ω nazivamo *merom* ili *površinom figure* ω u sistemu s. Kvadratnu površ ω_0 nazivamo *jediničnom.* Uslove (i), (ii), (iii), (iv) nazivamo respektivno uslovima: *nenegativnosti, invarijantnosti, aditivnosti i normiranosti.*

Uslovi (i), (ii), (iii) i (iv) predstavljaju aksiome, a sama definicija je aksiomatska definicije površine neke površi. Osim aksiomatske postoji i konstruktivna definicija merenja površi. Naime, aksiomatska definicija ne daje mogućnost nalaženja, tj. konstrukcije funkcije s koja predstavlja sistem merenja ravnih figura. Stoga je neophodno pristupiti jednom specifičnom postupku kojim se dobija funkcija s. Aksiomatska definicija, kojom se u geometriji uvodi sistem merenja ravnih figura, ima strogo opisni karakter. Njome se jedino ističe da je sistem merenja ravnih figura izvesna funkcija s koja ispunjava izvesne uslove odnosno aksiome (i)-(iv). Tom prilikom nije bilo reči o egzistenciji funkcije s, o načinu njenog konstruisanja niti o uslovima kada je ona jednoznačno određena.

Zadatak je konstruisati takvu funkciju s ukoliko ona postoji i ustanoviti kriterijume merljivosti (kvadribilnosti) ravnih figura u ravni E^2.

Na slici 14.3 je predstavljena proizvoljna figura ω ravni E^2 ograničena prostom zatvorenom linijom. Uočene su sve kvadratne površi koje su unutar te linije i sve kvadratne površi koje sa tim likom imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

Neka su u ravni E^2 dati ograničena figura ω i kvadratna površ $\omega_0 = [A_0B_0C_0D_0]$. Podelomo svaku od susednih stranica A_0B_0 i A_0D_0 površi ω_0 na jednak broj, npr. 10^k podudarnih dužii kroz deone tačke konstruišimo prave paralelne stranicama te kvadratne površi. Konstruisane prave razlažu lik ω_0 na 10^{2k} među sobom podudarnih kvadratnih površi.



Slika 14.3.

Neka je $\omega_k = [A_k B_k C_k D_k]$ bilo koja od njih. Konstruišimo u ravni E^2 dva sistema paralelnih pravih, takvih da je rastojanje između dve susedne prave svakog sistema jednako stranici kvadratne površi ω_k i da prave određene stranicama te kvadratne površi pripadaju tim sistemima pravih. Dobijena dva sistema pravih određuju jednu kvadratnu mrežu $\mathcal{M}_k$ koju ćemo zvati mrežom ranga k. Ta mreža razlaže ravan E^2 na neograničeno mnogo kvadratnih površi koje su podudarne površi ω_k. Označimo sa m_k ukupan broj kvadratnih površi mreže ω_k sadržanih u figuri ω, a sa m'_k ukupan broj kvadratnih površi mreže $\mathcal{M}_k$ koje sa površi ω imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Ako broju k dajemo respektivno vrednosti $0, 1, \cdots$ u mogućnosti smo da formiramo dva brojna niza

$$m_0, \frac{m_1}{100}, \frac{m_2}{100^2}, \cdots \tag{1}$$

$$m'_0, \frac{m'_1}{100}, \frac{m'_2}{100^2}, \cdots \tag{2}$$

S obzirom da je $m_{i+1} \geq 100 m_i$ i $m'_{i+1} \leq 100 m'_i$ dobijamo relacije

$$m_0 \leq \frac{m_1}{100} \leq \frac{m_2}{100^2} \leq \cdots$$

$$m'_0 \geq \frac{m'_1}{100} \geq \frac{m'_2}{100^2} \geq \cdots$$

Prema tome, (1) je neopadalući, a (2) nerastući niz. Osim toga je

$$\frac{m_i}{100^i} \leq \frac{m'_j}{100^j} \quad \text{za svako} \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

Zaista! Ako je $i = j$ tvrđenje sledi neposredno. Ako je $i < j$ tada je $m_i \leq m_j \leq m'_j$, pa je (3) u ovom slučaju zadovoljeno. Ako je $i > j$, tada je $m_i \leq m'_i \leq m'_j$, te relacija (3) važi i u ovom slučaju.

Dakle, niz (1) je ograničen sa gornje, a niz (2) sa donje strane. Prema tome, nizovi (1) i (2) su konvergentni. Neka je

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_i}{100^i} = s, \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{m'_i}{100^i} = s'.$$

Definicija 14.3.2. Broj s nazivamo *unutrašnjom* a broj s' *spoljašnjom merom figure* ω.

Iz (3) sledi da je $s \leq s'$. U opštem slučaju s može biti i manje od s'. Od posebnog je interesa isključivo slučaj $s = s'$.

Definicija 14.3.3. Figura $\omega \in E^2$ je *kvadribilna* (*merljiva*) u Žordanovom smislu ako za nju važi $s = s'$. U tom slučaju broj s nazivamo *merom* figure ω. Takođe broj s nazivamo *Žordanovom merom* ili *površinom* figure ω.

Iz definicije neposredno sledi da je ravna figura ω kvadribilna u Žordanovom smislu samo ako je $s - s' = 0$ tj. ako je

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m'_i - m_i}{100^i} = 0.$$

Na taj način je dokazana sledeća teorema

Teorema 14.3.1. *Na klasi kvadribilnih figura u ravni E^2 postoji funkcija s koja zadovoljava aksiome (1)-(4).*

Ta funkcija je u stvari funkcija koja je gore konstruisana. Figuri $\omega \subset E^2$ za koju je $s = s'$ dodeljujemo broj $s(\omega)$ za koji utvrđujemo da zadovoljava aksiome (1)-(4).

Teorema 14.3.2. *Ako su a i b dužine stranica neke pravougaone površi $\omega \in E^2$ tada je $s(\omega) = ab$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da su stranice pravougaone površi $\omega = ABCD$ paralelne stranicama kvadratne površi $\omega_0 = A_0B_0C_0D_0$. Neka je μ_i mreža ravni E^2 definisana u odnosu na površ ω_0. Mreža μ_i određena je pravama AB i AD i predstavlja gradijaciju ranga i. Označimo sa a_i i b_i brojeve odsečaka gradijacije μ_i koji pripadaju stranicama AB i AD a sa a_i' i b_i' brojeve odsečaka koje sa stranicama AB i AD imaju unutrašnjih zajedničkih tačaka. Tada je $a_i' \leqslant a_i + 2$ i $b_i' \leqslant b_i + 2$. Ako označimo sa m_i ukupan broj kvadratnih površi mreže μ_i koje pripadaju površi ω a sa m_i' ukupan broj mreže μ_i' koje sa površi ω imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka biće $m_i = a_ib_i$, $m_i' = a_i'b_i'$ i

$$\frac{m_i' - m_i}{100^i} \leqslant \frac{(a_i+2)(b_i+2) - a_ib_i}{100^i} \leqslant \frac{2}{10^i}(a + b + \frac{2}{10^i}).$$

Tada je

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_i' - m_i}{100^i} = 0$$

pa je površ ω kvadribilna u Žordanovom smislu. Takođe važi

$$\frac{a_i}{10^i} \leqslant a \leqslant \frac{a_i'}{10^i}, \qquad \frac{b_i}{10^i} \leqslant b \leqslant \frac{b_i'}{10^i}.$$

Odavde je

$$\frac{a_ib_i}{100^i} \leqslant ab \leqslant \frac{a_i'b_i'}{100^i}.$$

Prelaskom na granične vrednosti kad $i \to \infty$ nalazimo da je $s(\omega) = ab$. □

Na taj način možemo odrediti površinu bilo koje poligonske površi razlaganjem na trougaone površi.

Definicija 14.3.4. Geometrijski lik $\omega \subset E^2$ je *kvadribilan* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje poligonske površi ω' i ω'' takve da je

$$\omega' \subset \omega \subset \omega'' \quad \text{i} \quad s(\omega'') - s(\omega') < \varepsilon.$$

Navedena definicija predstavlja opštu definiciju kvadribilnosti proizvoljnog geometrijskog lika ω u ravni E^2. U ovom slučaju postavlja se pitanje određivanja površine proizvoljnog geometrijskog lika u ravni E^2.

Definicija 14.3.5. Označimo sa μ' skup svih poligonskih površi ω' koje pripadaju liku ω a sa μ'' skup svih poligonskih površi ω'' koje sadrže lik ω. površinom lika ω nazivamo broj $s(\omega)$ pri čemu je

$$s(\omega) = \sup_{\omega'\in\mu'} s(\omega') = \inf_{\omega''\in\mu''} s(\omega'').$$

Broj $\sup\limits_{\omega' \in \mu'} s(\omega')$ nazivamo donjom ili unutrašnjom Žordanovom merom površi ω, dok broj $\inf\limits_{\omega'' \in \mu''} s(\omega'')$ nazivamo gornjom ili spoljašnjom Žordanovom merom površi ω.

Dakle broj $s(\omega)$ će predstavljati površinu lika ω samo ako su donja i gornja Žordanova mera lika ω jednake. Nije teško ustanoviti da je prethodna definicija specijalan slučaj ove definicije koja omogućuje da ustanovimo kvadribilnost i odredimo površinu bilo kog lika ravni E^2.

14.4 Merenje figura u prostoru $\mathbf{E^3}$

Definicija 14.4.1. *Sistemom merenja prostornih figura* nazivamo funkciju v koja svakoj figuri Φ nekog skupa $\mathcal{K}$ figura prostora E^3 pridružuje realan broj $v(\Phi)$ pri čemu važi:

(i) Ako je $\Phi \in \mathcal{K}$, onda je $v(\Phi) \geq 0$,

(ii) Ako $\Phi_1,\ \Phi_2 \in \mathcal{K}$ i $\Phi_1 \cong \Phi_2$, tada je $v(\Phi_1) = v(\Phi_2)$,

(iii) Ako $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{K}$ i $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, onda $v(\Phi_1) = v(\Phi_2) + v(\Phi_3)$,

(iv) Postoji kocka $\Phi_0 \in \mathcal{K}$, takva da je $v(\Phi_0) = 1$.

Broj $s(\Phi)$ koji u sistemu merenja v odgovara figuri Φ nazivamo merom ili zapreminom figure Φ u sistemu v. Kocku Φ_0 nazivamo *jediničnom.* Uslove (i), (ii), (iii), (iv) nazivamo respektivno uslovima: nenegativnosti, invarijantnosti, aditivnosti i normiranosti.

Analogno postupku u E^2 izvodi se konstrukcija funkcije v u prostoru E^3. U razmatranim nizovima će se umesto 10^2 pojavljivati 10^3, dok su dokazi analogni. Zapreminu nalazimo konstruktivnim postupkom rešetaka u prostoru E^3. Čitav taj postupak predstavlja u stvari definisanje funkcije v konstruktivnim putem za razliku od prethodno definisanog aksiomatskog zasnivanja funkcije v pri čemu pitanja egzistencije i efektivnog postupka konstrukcije nisu obuhvaćena aksiomatskom definicijom.

Konstruisanje funkcije v omogućava određivanje zapremina paralelepipeda i prizme, dok se zapremina piramide ne može tako dobiti, već se dobija univerzalnijom metodom.

Glava 15

Uvod u hiperboličku geometriju

Suštinskih promena u geometriji nije bilo još iz vremena Euklida i Arhimeda sve do prve polovine devetnaestog veka. Mnogi pokušaji da se razreši pitanje petog Euklidovog postulata ostali su bezuspešni. Pored Gausa, problemom paralela bavili su se i drugi istaknuti matematičari tog vremena kao npr. Dalamber, Laplas, Lagranž. Problem paralela je rešen, ali u neskladu sa predrasudama koje su vekovima vladale.

Početkom devetnaestog veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidov peti postulat zamene aksiomom koja bi ga negirala. Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija. Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očiglednost i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva. Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon smrti njihovih tvoraca.

15.1 Aksioma Lobačevskog

Ako sistemu aksioma apsolutne geometrije pridružimo aksiomu Lobačevskog umesto Plejferove aksiome paralelnosti, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *geometrijom Lobačevskog* ili *Hiperboličkom geometrijom.* Ova geometrija se ponekad naziva i *geometrijom Boljaj-Lobačevskog* ili geometrijom Gaus-Boljaj-Lobačevskog.

Aksioma Lobačevskog. *Postoje prava a i tačka A van prave a takve da u njima određenoj ravni kroz tačku A prolaze dve različite prave a_1 i a_2 koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.*

Ravan i prostor u kojima važe te aksiome nazivamo respektivno *hiperboličkom ravni* ili *ravni Lobačevskog* i *hiperboličkim prostorom* ili *prostorom Lobačevskog* a označavamo ih redom L^2 i L^3.

Aksioma Lobačevskog omogućava da neposredno ustanovimo niz teorema koje se odnose na zbirove unutrašnjih i spoljašnjih uglova prostih ravnih poligona ili na teoriju koja se odnosi na uzajamni položaj pravih i ravni u prostoru. Sva tvrđenja koja važe u apsolutnoj geometriji se prenose a dobija se i niz tvrđenja koja su posledica aksiome Lobačevskog.

Teorema 15.1.1. *Ako je $\sigma(\Delta)$ zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni L^2 i ako je R prav ugao tada je $\sigma(\Delta) < 2R$.*

Dokaz. Prema prvoj Ležandrovoj teoremi sledi $\sigma(\Delta) \leq 2R$. Ako bi bilo $\sigma(\Delta) = 2R$ tada bi prema drugoj Ležandrovoj teoremi zbir unutrašnjih uglova $\sigma(\Delta)$ svakog trougla bio jednak $2R$ te bi prema trećoj Ležandrovoj teoremi za svaku pravu p i svaku tačku P van prave p postojala jedinstvena prava u ravni određenoj pravom p i tačkom P, koja sadrži tačku P a sa pravom p nema zajedničkih tačaka, što je u suprotnosti sa aksiomom Lobačevskog. □

Teorema 15.1.2. *Svaki spoljašnji ugao trougla u ravni L^2 veći je od zbira dva unutrašnja nesusedna ugla tog trougla.*

Dokaz se dobija neposrednom primenom prethodne teoreme.

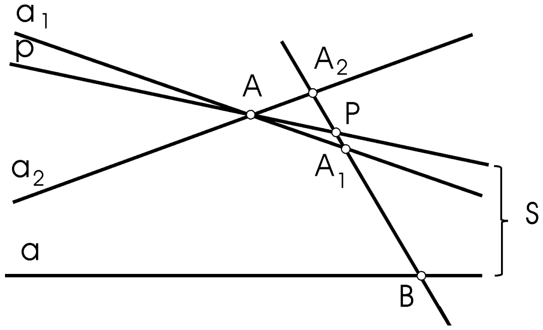
Teorema 15.1.3. *Ako je $\sigma(A_1A_2\ldots A_n)$ zbir svih unutrašnjih uglova prostog n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$ u ravni L^2 i R prav ugao tada je*

$$\sigma(A_1A_2\ldots A_n) < (n-2)\,2R.$$

Dokaz se dobija triangulacijom n-tougla i primenom matematičke indukcije. □

Teorema 15.1.4. *Ako su u hiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u ravni L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.*

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi postoje dve prave a_1 i a_2 (slika 15.1) takve da sadrže tačku A i ne seku pravu a. Ako obeležimo sa A_2 tačku prave a_2 koja se nalazi sa one strane prave a_1 sa koje nije prava a, a sa B bilo koju tačku prave a, biće tačke A_2 i B sa raznih strana prave a_1 te duž A_2B seče pravu a_1 u tački A_1.



Slika 15.1.

Pri tome je tačka A_1 između tačaka A_2 i B , te su A_1 i A_2 različite tačke. Neka je P bilo koja unutrašnja tačka duži A_1A_2 a p prava određena tačkama A i P. Tada prava p sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Zaista, jer ako bi prava p sekla pravu a npr. u nekoj tački S, tada bi važio jedan od raspreda tačaka $\mathcal{B}(A, P, S)$ ili $\mathcal{B}(S, A, P)$. Ako bi bilo $\mathcal{B}(A, P, S)$, onda bi prava a_1 pripadala ravni trougla ΔSPB, ne bi sadržala ni jedno njegovo teme, sekla bi stranicu PB u tački A_1 a produžetak stranice PS u tački A. Prema Pašovom stavu prava a_1 bi morala da seče i stranicu BS tj pravu a što je u suprotnosti s pretpostavkom. Na potpuno isti način se dokazuje da ne može biti $\mathcal{B}(S, A, P)$. Dakle, prava p sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Kako na duži A_1A_2 postoji beskonačno mnogo unutrašnjih tačaka to postoji i neograničeno mnogo pravih sa osobinom da sadrže tačku A i ne seku pravu a, a nalaze se u ravni određenoj tačkom A i pravom a. $\square$

Zaključujemo na osnovu prethodne teoreme da se skup svih pravih koje sadrže tačku A i koje se nalaze u ravni L^2 može razložiti na dva podskupa pravih $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pri čemu je $\mathcal{M}$ skup svih pravih koje sadrže tačku A i seku pravu a, a $\mathcal{N}$ skup svih pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a. Nije teško ustanoviti da ovakvo razlaganje zadovoljava uslove Dedekindovog preseka, te prema tome postoje dve i samo dve granične prave koje razdvajaju skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Nije teško indirektnim postupkom ustanoviti da granične prave ova dva skupa pravih nemaju sa pravom a zajedničkih tačaka, tj. da pripadaju skupu $\mathcal{N}$.

Definicija 15.1.1. Neka su u Hiperboličkoj ravni date prava a i tačka A van nje. Granične prave a_1 i a_2 koje razdvajaju prave pramena $\mathcal{X}_A$ sadržane u ravni L^2 na podskupove pravih koje ne seku pravu a i pravih koje seku pravu a, nazivamo pravama koje su u tački A *paralelne* sa pravom a.

Jednu od tih pravih smatraćemo paralelnom pravoj a u jednom smeru, a drugu paralelnom pravoj a u drugom smeru. Sve ostale prave u toj ravni koje sadrže tačku A i koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka nazivamo *hiperparalelnim* s pravom a. Za paralelnost koristimo uobičajenu oznaku $p \parallel a$ a za hiperparalelnost koristimo oznaku $p \underset{h}{\parallel} a$.

15.2 Paralelne prave u ravni L^2

Predhodnom definicijom uvedena je relacija paralelnosti dve prave u L^2. Ta relacija je bila strogo vezana za paralelnost jedne prave prema drugoj pravoj u odnosu na zadatu tačku. Cilj nam je da ustanovimo da paralelnost ne zavisi od tačke u odnosu na koju smo tu paralelnost definisali tj. da pokažemo da je to svojstvo transmisibilno (prenosno).

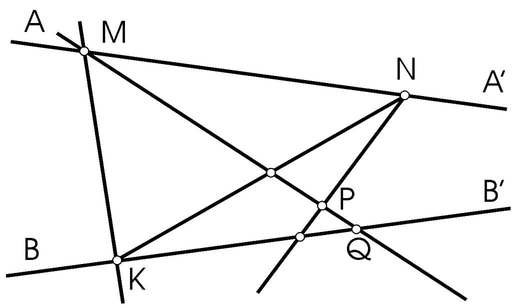
Teorema 15.2.1. *Relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 je transmisibilna.*

Dokaz. Neka je prava AA' paralelna pravoj BB' u nekoj tački M. Dokažimo da je $AA' \parallel BB'$ u proizvoljnoj drugoj tački N prave AA'. Postoje dve mogućnosti:

(i) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru paralelnosti,

(ii) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti.

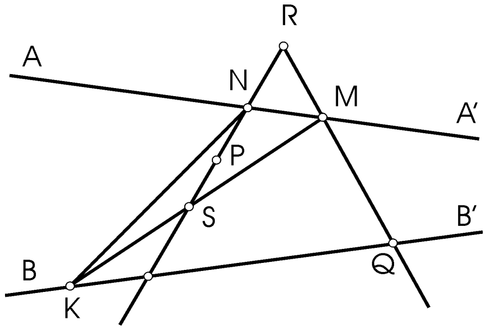
Razmotrimo ponaosob svaki od ova dva slučaja.



Slika 15.2.

(i) Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bi smo dokazali da je $AA' \parallel BB'$ u tački N dovoljno je ustanoviti da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', tj. da svaka prava

koja sadrži tačku N i proizvoljnu tačku P unutar ugla $\measuredangle KNA'$ seče pravu BB'.
Ako bi se tačka P nalazila na pravoj BB' ili sa one strane prave BB' sa koje nije tačka N, neposredno bi sledilo da prava NP seče pravu BB'. Neka je tačka P (slika 15.2) sa one strane prave BB' sa koje je i N. Kako je $AA' \parallel BB'$ u tački M prava MP seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP je pri tome u ravni trougla ΔMKQ i ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu MQ u tački P, a ne seče stranicu MK, jer u uglu $\measuredangle KNM$ prava NP nema tačaka. Stoga prema Pašovom stavu prava NP mora seći stranicu KQ tog trougla, te seče i pravu BB'. To znači da je u ovom slučaju prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N.



Slika 15.3.

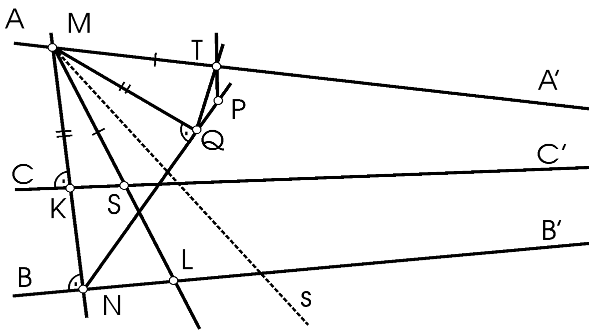
(ii) Neka se sada tačka N (slika 15.3) nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti. Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bi smo dokazali $AA' \parallel BB'$ u tački N dovoljno je ustanoviti da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', tj. da svaka prava koja sadrži tačku N i proizvoljnu tačku P unutar ugla $\measuredangle KNA'$ seče pravu BB'. Ako bi se tačka P nalazila na pravoj BB' ili sa one strane prave BB' sa koje nije tačka N neposredno bi sledilo da prava NP seče pravu BB'. Ako je tačka P sa one strane prave BB' sa koje je i N, tada je tačka P unutar ugla $\measuredangle KNA'$. Neka je R proizvoljna tačka prave NP iza tačke N u odnosu na tačku P. Pri tome prava RM sadrži tačku R koja je u uglu naporednom sa uglom $\measuredangle KMA$, te prava RM sadrži neku tačku koja se nalazi u takođe njemu naporednom uglu $\measuredangle KMA'$. Međutim, kako je $AA' \parallel BB'$ prava RM seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP sadrži teme N konveksnog ugla $\measuredangle KNM$ i tačku P unutar tog ugla, te seče duž KM u nekoj tački S. Sada je prava NP u ravni trougla ΔKMQ, ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu MK u tački S, ne seče stranicu

MQ jer seče njen produžetak u tački R, te prema Pašovom stavu prava NP seče stranicu KQ, dakle o pravu BB'. Time je dokazano da je prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N. □

Iz ove teoreme sledi da nije potrebno naglašavati u kojoj je tački prava AA' paralelna pravoj BB'. Navedena teorema je jedna od najvažnijih teorema u geometriji Lobačevskog pošto omogućava vrste pramenova pravih u geometriji Lobačevskog.

Teorema 15.2.2. *Relacija paralelnosti definisana na skupu pravih ravni L^2 je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Ako u definisanju paralelnosti pravih u ravni L^2 dopustimo i mogućnost da tačka A pripada pravoj a, tada u tački A neće postojati hiperparalelne prave, a prave a_1 i a_2 će se poklapati i biti suprotnosmerne. Odatle neposredno sledi da je relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 *refleksivna.*



Slika 15.4.

Da bi smo dokazali da je relacija paralelnosti pravih u L^2 *simetrična* treba da dokažemo da iz $AA' \parallel BB'$ sledi $BB' \parallel AA'$. Neka je M proizvoljna tačka prave AA', a N podnožje upravne iz tačke M (slika 15.4) na pravoj BB'. Kako je $AA' \parallel BB'$ svaka prava ravni L^2 koja sadrži tačku M i neku tačku unutar ugla $\measuredangle NMA'$ seče pravu BB'. Da bi smo dokazali da je $BB' \parallel AA'$ dovoljno je ustanoviti da svaka prava koja sadrži tačku N i neku tačku P unutar ugla $\measuredangle MNB'$, seče pravu AA'.

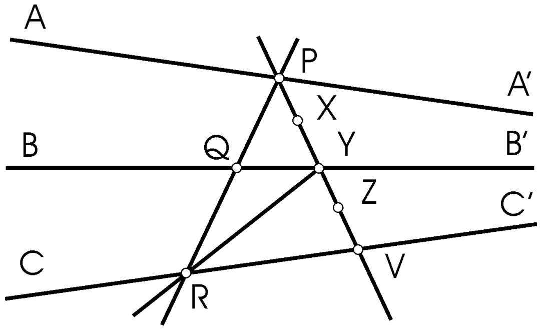
Neka je Q podnožje upravne iz tačke M na pravoj NP. Kako je ugao $\measuredangle MNB'$ prav a tačka P unutar tog ugla, $\measuredangle MNP$ je oštar, pa se podnožje Q, upravne iz tačke M na pravoj NP nalazi na polupravoj NP. Iz pravouglog trougla ΔMNQ sledi $MN > MQ$ te između tačaka M i N postoji tačka K takva da je $MQ \cong MK$. Neka je CC' prava koja je u tački K upravna na pravu MN. Neka je zatim ML prava simetrična sa pravom MQ u odnosu na simetralu ugla $\measuredangle NMA'$. Budući da prava MQ sadrži tačku Q koja se nalazi u uglu $\measuredangle NMA'$ i njoj simetrična prava ML sadrži tačku koja je u istom uglu $\measuredangle NMA'$. No kako je $AA' \parallel BB'$ prava ML koja sadrži tačku koja se nalazi unutar tog ugla seče pravu BB' u nekoj tački L, pri tome su tačke M i L sa raznih strana prave CC' te duž ML seče pravu CC' u nekoj tački S. Neka je T tačka poluprave MA' takva da je $MT \cong MS$. Konstruišimo duž QT. Zaključujemo da je $\Delta MKS \cong \Delta MQT$ jer je $\measuredangle KMS = \measuredangle QMT$, $MK = MQ$, $MS = MT$. Tada je $\measuredangle MKS = \measuredangle MQT$, a kako je $\measuredangle MKS = R$ to je i $\measuredangle MQT = R$ tj. prava je upravna na pravu MQ.Kako u jednoj tački Q na nekoj pravoj MQ može postojati samo jedna normala to će prave QN i QT biti istovetne. To znači da prava $NP = NQ$ seče pravu AA' u tački T. Prema tome $BB' \parallel AA'$ u taǩi N, a samim tim i u svakoj drugoj tački, pa je relacija paralelnosti pravih u L^2 i simetrična.

Treba pokazati još *tranzitivnost*. Neka je $AA' \parallel BB'$ i $BB' \parallel CC'$. Dokazaćemo da je $AA' \parallel CC'$. Napominjemo da je reč o paralelnosti u istom smeru. Za različite smerove tranzitivnost ne važi.

Mogu nastupiti sledeći slučajevi:

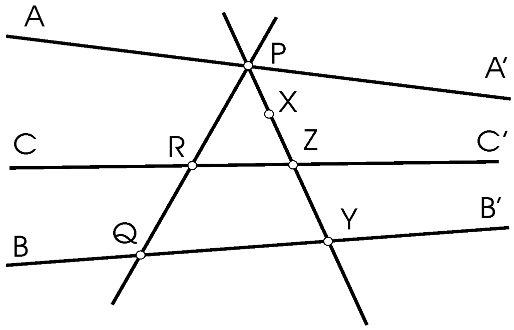
(i) Prava BB' je između pravih AA' i CC',

(ii) Jedna od pravih AA' i CC' je između druge dve prave.



Slika 15.5.

(i) Neka je BB' između AA' i CC'. Označimo sa P, R proizvoljne tačke (slika 15.5) redom pravih AA' i CC'. Kako je BB' između AA' i CC' biće tačke P i R sa raznih strana prave BB', te prava PR seče pravu BB' u tački Q. Da bi smo dokazali da je $AA' \parallel CC'$ dovoljno je da dokažemo da svaka prava koja sadrži tačku P i tačku X unutar ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC'. Tačka X je unutar ugla $\measuredangle RPA'$ pa je ona i unutar ugla $\measuredangle QPA'$. $AA' \parallel BB'$ sledi da prava PX seče pravu BB' u nekoj tački Y. Neka je Z proizvoljna tačka prave PX iza tačke Y u odnosu na tačku P. Tačka Z je pri tome unutar ugla $\measuredangle RYB'$ i kako je $BB' \parallel CC'$ prava YZ seče pravu CC' u nekoj tački V, te i prava PX seče pravu CC'. Time je pokazano da je u ovom slučaju $AA' \parallel CC'$.



Slika 15.6.

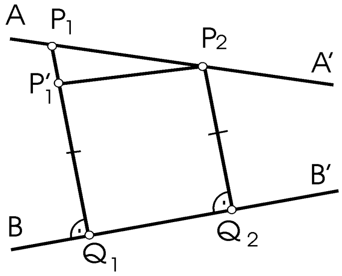
(ii) Neka je sada jedna od pravih AA' i CC' između druge dve prave. Neka je (slika 15.6) recimo to prava CC'. Označimo sa P i Q proizvoljne tačke pravih AA' i BB'. Pri tome su tačke P i Q sa raznih strana prave CC' te duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački R. Treba da ustanovimo da je $AA' \parallel CC'$. Za to je dovoljno dokazati da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC'.

Tačka X se nalazi i u uglu $\measuredangle QPA'$ te iz relacije $AA' \parallel BB'$ sledi da PX seče BB' u tački Y. Pri tome su tačke P i Y sa raznih strana prave CC' te duž PY, dakle i prava PY seče pravu CC' u tački Z, čime je dokazano da je i u ovom slučaju $AA' \parallel CC'$. □

Definicija 15.2.1. Skup svih pravih ravni L^2 paralelnih među sobom nazivamo *paraboličkim pramenom* pravih.

Teorema 15.2.3. *Odstojanje tačke koja se pomera po jednoj od dveju raznih među sobno paralelnih pravih, od druge prave strogo i neograničeno opada kada se tačka pomera u smeru paralelnosti, a strogo i neograničeno raste kada se tačka pomera u smeru suprotnom od smera paralelnosti.*

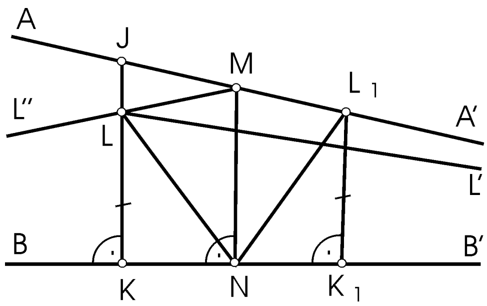
Dokaz. Neka su AA' i BB' dve razne paralelne prave ravni L^2. Označimo sa P_1 i P_2 dve razne tačke (slika 15.7) prave AA' pri čemu se tačka P_2 nalazi od tačke P_1 u smeru paralelnosti prave AA' prema pravoj BB'. Neka su zatim Q_1 i Q_2 podnožja normala redom iz tačaka P_1 i P_2 na pravu BB'.



Slika 15.7.

Neka je P_1' tačka poluprave Q_1P_1 takva da je $Q_1P_1{}' \cong Q_2P_2$. Četvorougao $\square Q_1Q_2P_2P_1'$ je Sakerijev jer je kod njega $\measuredangle Q_1 = \measuredangle Q_2 = R$ i $Q_1P_1' \cong Q_2P_2$, pa su mu uglovi $\measuredangle Q_1P_1'P_2$ i $\measuredangle Q_2P_2P_1'$ na protivosnovici $P_1'P_2$ podudarni i oštri. Kako je još ugao $\measuredangle P_1P_2Q_2$ tup, jer je njemu naporedan ugao oštar, to tačka P_1' pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle P_1P_2Q_2$, pa samim i unutrašnjosti duži Q_1P_1. Stoga je $Q_2P_2 \cong Q_1P_1' < Q_1P_1$. Na taj način ako se neka tačka kreće po AA' u smeru paralelnosti sa BB' tada odstojanje te tačke od prave BB' opada.

Dokažimo da se to odstojanje smanjuje neograničeno. Da bi smo to dokazali dovoljno je da dokažemo da za bilo koju unapred zadatu duž l postoji tačka čije je rastojanje od BB' manje od l. Neka je J proizvoljna tačka (slika 15.8) prave AA' i K podnožje upravne iz J na BB'. Neka je zatim L tačka poluprave KJ takva da je $KL = l$. Ako je $L \equiv J$ ili ako je L iza J u odnosu na K tvrđenje neposredno sledi. Neka je tačka L između tačaka K i J. Kako je L van prave BB' postoje dve prave koje sadrže tačku L i paralelne su pravoj BB' odnosno $B'B$.



Slika 15.8.

Neka je $LL' \parallel BB'$ i $LL'' \parallel B'B$. Kako je $LL' \parallel BB'$ i $BB' \parallel AA'$ to je i $LL' \parallel AA'$. Prava LL'' ima tačaka koje su u uglu $\measuredangle JLL'$ pa ona seče pravu AA' u tački M. Neka je L_1 tačka prave MA' takva da je $ML \cong ML_1$. Označimo sa N i K_1 podnožja upravnih redom iz tačaka M i L_1 na pravoj BB'. Zbog simetrije u odnosu na MN je $\measuredangle NML = \measuredangle NML_1$, a kako je još $MN \equiv MN$ i $ML \cong ML_1$ biće $\Delta LMN \cong \Delta L_1MN$. Odavde sledi $LN \cong L_1N$ i $\measuredangle MNL = \measuredangle MNL_1$ pa su njima komplementni uglovi jednaki tj. $\measuredangle KNL = \measuredangle K_1NL_1$. Sada je $\Delta KNL \cong \Delta K_1NL_1$ te je $LK \cong L_1K_1$, no kako je duž $LK \cong l$ to je i $L_1K_1 \cong l$. Prema tome na pravoj AA' postoji tačka L_1 čije je odstojanje od prave BB' jednako datoj duži l. Odavde prema dokazanom delu teoreme sledi da postoji i tačka na pravoj AA' čije je odstojanje od prave BB' manje od unapred zadate duži l. Zaključujemo da kada se tačka P kreće po pravoj AA' u smeru paralelnosti sa pravom BB' tada se njeno rastojanje od BB' neograničeno smanjuje.

Slučaj kada se tačka P kreće u smeru suprotnom od smera paralelnosti pravih AA' i BB' dokazuje se analogno. □

Prema tome, na svakoj od dve među sobno paralelne prave postoji tačka čije je odstojanje od druge prave podudarno unapred zadatoj duži, a takođe i tačka čije je odstojanje manje od unapred zadate duži. To je i razlog što kažemo da se paralelne prave u smeru paralelnosti *asimptotski približavaju*, tj. da u smeru paralelnosti imaju zajedničku *beskrajno daleku tačku* O_∞. Kako za svaku tačku van prave postoje dve prave koje su sa njom paralelne, jedna u jednom a druga u drugom smeru, hiperbolička prava ima dve beskrajno daleke tačke.

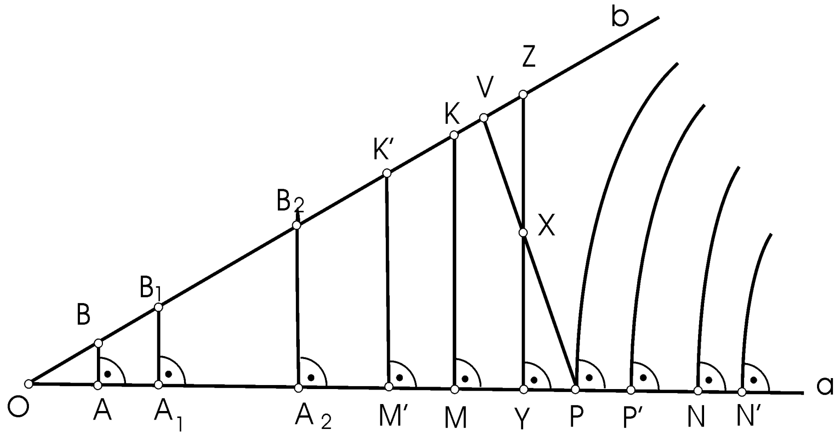
Teorema 15.2.4. *Ako je ω oštar ugao u ravni L^2 tada postoji jedinstvena prava upravna na jedan krak ugla ω a paralelna drugom kraku tog ugla.*

Dokaz. Neka su poluprave a i b kraci oštrog ugla ω. Treba dokazati da postoji jedinstvena prava upravna na krak a i paralelna kraku b. Ustanovimo najpre da postoji prava upravna na krak a koja sa krakom b nema zajedničkih tačaka.

Pretpostavimo suprotno tj. da sve prave upravne na krak a seku krak b. Neka je $A \in a$ proizvoljna tačka (slika 15.9) poluprave a, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tačke poluprave a takve da je

$$\mathcal{B}(O, A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots) \ \& \ OA = AA_1,\ A_1A_2 = OA_1, \ldots$$

Saglasno pretpostavci prave upravne u tačkama $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ na polupravu a seku polupravu b u tačkama $B, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ redom. S



Slika 15.9.

obzirom na to da je u L^2 zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla Δ manji od $2R$ to je *defekt* $\delta(\Delta) = 2R - \sigma(\Delta)$ veći od nule. Ako je neki trougao Δ razložen na trouglove Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tada je defekt

$$\delta(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta(\Delta_i).$$

Posmatrajmo trouglove ΔOA_1B_1, ΔOA_2B_2, ..., ΔOA_nB_n, ... Tada je:

$$\begin{aligned}
\delta(OA_1B_1) &= \delta(OAB) + \delta(A_1AB) + \delta(BA_1B_1)\\
&= 2\delta(OAB) + \delta(BA_1B_1)\\
&\Rightarrow \delta(OA_1B_1) > 2\delta(OAB),\\
\delta(OA_2B_2) &= \delta(OA_1B_1) + \delta(A_2A_1B) + \delta(B_1A_2B_2)\\
&= 2\delta(OA_1B_1) + \delta(B_1A_2B_2)\\
&\Rightarrow \delta(OA_2B_2) > 2^2\delta(OAB),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nakon n koraka dobijamo $\delta(OA_nB_n) > 2^n\delta(OAB)$. Broj n možemo izabrati tako veliki da ugao $2^n\delta(OAB)$ bude veći od bilo kog unapred zadatog ugla, pa samim tim i od zbira dva prava ugla što je nemoguće, jer bi u tom sluǎju $\delta(OA_nB_n) > 2R$. Znači sve prave upravne na polupravu a ne mogu seći polupravu b. Prema tome skup svih tačaka polupravе a možemo podeliti na dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pri čemu $\mathcal{M}$ označava skup svih tačaka poluprave a u kojima normala na polupravu a seče polupravu b, a sa $\mathcal{N}$ skup preostalih tačaka poluprave a. Dokazaćemo da ovako definisani skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindovog preseka tj. Dedekindove aksiome. Dovoljno je pokazati:

(i) $(\forall M \in \mathcal{M})(\forall M')\ \mathcal{B}(O, M', M) \Rightarrow M' \in \mathcal{M}$

(ii) $(\forall N \in \mathcal{N})(\forall N')\ \mathcal{B}(O, N, N') \Rightarrow N' \in \mathcal{N}$.

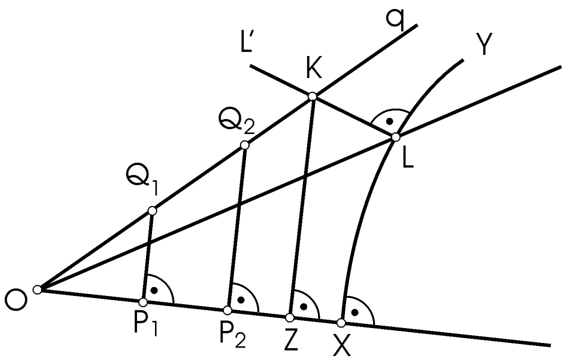
Ako je $M \in \mathcal{M}$ tada upravna u tački M na polupravu a seče polupravu b u nekoj tački K. Prava m' upravna na pravu a u nekoj tački M' takvoj da je $\mathcal{B}(O, M', M)$ pripada ravni trougla ΔOMK ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu OM u tački M', ne seče stranicu MK jer su prave m' i MK upravne na polupravu a, pa ako bi se sekle dobili bi smo trougao sa dva prava ugla. Prema Pašovom stavu prava m' mora seći stranicu OK trougla ΔOMK, pa samim tim i poluprabu b u nekoj tački K'. Dakle tačka M' pripada skupu $\mathcal{M}$.

Ako je $N \in \mathcal{N}$ i N' tačka poluprave a takva da je $\mathcal{B}(O, N, N')$. Pokazaćemo da $N' \in \mathcal{N}$. Zaista ako bi naprotiv tačka N' pripadala skupu $\mathcal{M}$ onda bi prema dokazanom tačka N koja je između O i N' pripadala skupu $\mathcal{M}$. Dakle $N' \in \mathcal{N}$. Iz dokazanog sledi da skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindove aksiome te postoji jedinstvena tačka P koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Nije teško ustanoviti da $P \in \mathcal{N}$. Zaista, jer ako bi bilo $P \in \mathcal{M}$ tada bi upravna u tački P na polupravu a sekla polupravu b u nekoj tački Q. Ako bi Q' bila proizvoljna tačka poluprave b iza tačke Q u odnosu na tačku O, tada bi tačka P' kao podnožje normale iz Q' na polupravu a bila iza tačke P u odnosu na tačku O, što je nemoguće jer je tačka P granična tačka koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Znači $P \in \mathcal{N}$ i normala u P na polupravu a ne seče polupravu b.

Trebamo dokazati da je normala u tački P na polupravu a paralelna pravoj b. Da bi smo to dokazali dovoljno je da ustanovimo da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\measuredangle OPQ$ seče polupravu b. Kako je $\measuredangle OPQ = R$, a X unutar tog ugla biće $\measuredangle OPX$ oštar. Stoga podnožje upravne iz tačke X na pravoj OP pripada polupravoj PO. Ako bi tačka X bila sa one strane prave OK sa koje nije tačka P ili na pravoj OK, onda bi neposredno sledilo da poluprava PX seče polupravu b. U ovom slučaju je ugao $\measuredangle XOP$ takođe oštar te podnožje upravne iz tačke X na polupravu OP sadrži tačku Y koja se nalazi između tačaka O i P. Kako je tačka Y između tačaka O i P to je $Y \in \mathcal{M}$ pa poluprava XY seče polupravu b u tački Z.

Prava PX je u ravni trougla ΔOYZ, ne sdrži ni jedno njegovo teme, seče YZ u tački X, ne seče OY jer je seče u produžetku u tački P pa prema Pašovom stavu prava PX seče OZ, te i polupravu b u nekoj tački V. Prema tome $PQ \parallel OZ$, tj. $PQ \parallel b$. Time smo dokazali egzistenciju prave upravne na pravu a i paralelne sa pravom b. Indirektnim postupkom dokazuje se jedinstvenost te prave. □

Teorema 15.2.5. *Odstojanje tačke koja se nalazi na jednom kraku oštrog ugla od drugog kraka neograničeno raste pri neograničenom udaljavanju te tačke od temena tog ugla.*



Slika 15.10.

Dokaz. Neka je $\measuredangle POQ$ dati oštar ugao. Obeležimo sa Q_1 i Q_2 (slika 15.10) dve tače poluprave OQ takve da je $\mathcal{B}(O, Q_1, Q_2)$, zatim obeležimo sa P_1 i P_2 podnožja upravnih iz tačaka Q_1 i Q_2 na polupravu OP. Kako je $\measuredangle POQ$ oštar, tačke P_1 i P_2 su na polupravoj OP. U četvorouglu $P_1P_2Q_2Q_1$ uglovi $\measuredangle Q_1P_1P_2$ i ugao $\measuredangle P_1P_2Q_2$ su pravi, dok je $\measuredangle P_1Q_1Q_2 > \measuredangle Q_1Q_2P_2$ pa je $P_2Q_2 > P_1Q_1$.

Prema tome, kada se tačka Q kreće po polupravoj Oq udaljujući se od tačke O njeno odstojanje od poluprave Op se povećava.

Dokažimo da to rastojanje neograničeno raste. Saglasno prethodnoj teoremi postoji jedinstvena prava XY upravna na polupravu Op i paralelna sa Oq. Da bi smo dokazali da pomenuto odstojanje neograničeno raste treba da ustanovimo da na kraku Oq postoji tačka K kojoj je odstojanje od poluprave Op veće od bilo koje unapred zadate duži l. Neka je L tačka prave XY unutar ugla $\measuredangle POQ$ takva da je $XL = l$ pri čemu je $\mathcal{B}(X, L, Y)$ i neka je LL' prava upravna na XY u tački L a L' tačka te prave koja se nalazi sa one strane prave XY sa koje je i tačka O. Dokažimo da poluprava LL' seče polupravu OQ. Kako je tačka L u uglu $\measuredangle POQ$, tačka L' je unutar ugla $\measuredangle OLY$ pa kako je $LY \parallel Oq$ svaka prava koja sadrži tačku L i neku tačku L' unutar ugla $\measuredangle OLY$ seče polupravu Oq. Kako je tačka L unutar ugla $\measuredangle POQ$, tačka L' je unutar ugla $\measuredangle OLY$ i $LY \parallel Oq$ to svaka prava koja sadrži tačku L i neku taičku L' unutar ugla $\measuredangle OLY$ seče polupravu OQ u nekoj tački K. Na polupravoj Op obeležimo sa Z podnožje upravne iz tačke K.

U četvorouglu $XLKZ$ tri ugla su prava i to $\measuredangle Z$, $\measuredangle X$ i $\measuredangle L$ pa četvrti ugao $\measuredangle LKZ$ mora biti oštar. Prema tome, imamo $\measuredangle XLK > \measuredangle ZKL$ odakle je $KZ > XL$. Kako je $XL = l$ to je $KZ > l$. Prema tome, za bilo koju unapred zadatu duž l na kraku Oq postoji tačka K čije je odstojanje od kraka Op veće od l, te se odstojanje pokretne tačke Q pri udaljavanju od tačke O neograničeno povećava u odnosu na krak Op. $\square$

15.3 Osobine hiperparalelnih pravih u $\mathbf{L^2}$

Teorema 15.3.1. *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 je transmisibilna, tj. ako je AA' hiperparalelna sa BB' u nekoj tački M tada je AA' hiperparalelna sa BB' u svakoj svojoj drugoj tački N.*

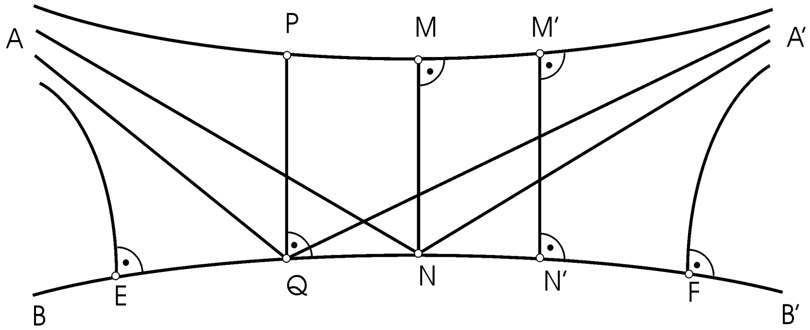
Dokaz ove teoreme izvodi se indirektnim postupkom. Takođe nije teško zaključiti da važi:

Teorema 15.3.2. *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 je antirefieksivna, simetrična i netranzitivna.*

Teorema 15.3.3. *Dve hiperparalelne prave u L^2 imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*

Dokaz. Neka je $AA' \underset{h}{\parallel} BB'$. Najpre ćemo ustanoviti egzistenciju zajedničke normale hiperparalelnih pravih AA' i BB'. U tom cilju (slika 15.11) obeležimo sa P proizvoljnu tačku prave AA' i sa Q podnožje upravne iz tačke P na BB'. Pri tome je Q van prave AA' te postoje dve prave QA' i QA takve da je $QA' \parallel AA'$ i $QA \parallel A'A$ pri čemu paralelne prave imaju zajedničku infinitnu tačku, npr. A' je zajednička infinitna tačka pravih QA' i AA'. Pri tome poluprave QA' i AA' zaklapaju sa polupravama QB i QB' uglove $\measuredangle AQB$ i $\measuredangle A'QB'$. Prema dokazanom stavu postoji jedinstvena prava upravna na QB' i paralelna sa QA'. Neka je to prava FA'. Analogno, prava EA je jedina prava u ravni pravih AA' i BB' koja je upravna na polupravu QB i paralelna sa polupravom QA.

Neka, je zatim N središte duži EF i M podnožje upravne iz tačke N na pravoj AA'. Dokažimo da je prava MN npravna i na pravu BB'. U tom cilju konstruišimo prave NA' i NA paralelne redom sa pravama AA' i $A'A$.

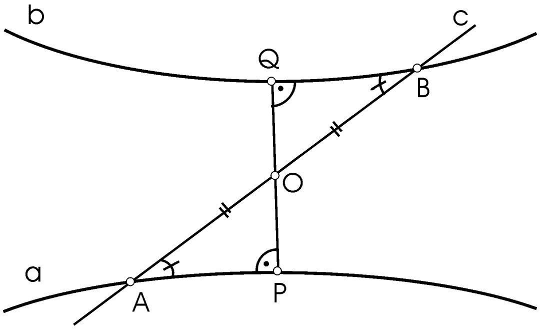


Slika 15.11.

Na osnovu tranzitivnosti relacije paralelnosti u L^2 zaključujemo da su prave NA' i NA paralelne sa pravama FA' i EA redom. Iz simetričnosti u odnosu na pravu MN nepsredno zaključujemo da je $\measuredangle MNA' = \measuredangle MNA$.

No kako je tačka N središte duži EF biće $NE = NF$. Podudarnim dužima odgovaraju podudarni uglovi paralelnosti te je $\measuredangle ENA = \measuredangle FNA'$. Kako je $\measuredangle MNF = \measuredangle MNA' + \measuredangle FNA'$ i $\measuredangle MNE = \measuredangle MNA + \measuredangle ENA$ to odatle sledi $\measuredangle MNF = \measuredangle MNE$. S obzirom da su ti uglovi podudarni i uporedni oni su i pravi te je prava MN upravna na BB'.

Dokažimo sada jedinstvenost zajedničke normale dveju hiperparalelnih pravih. Pretpostavimo da postoji još jedna zajednička normala $M'N'$ hiperparalelnih pravih AA' i BB'. U tom slučaju postojao bi četvorougao $MNN'M'$ u ravni L^2 čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru četiri prava ugla što je nemoguće u geometriji Lobačevskog. □



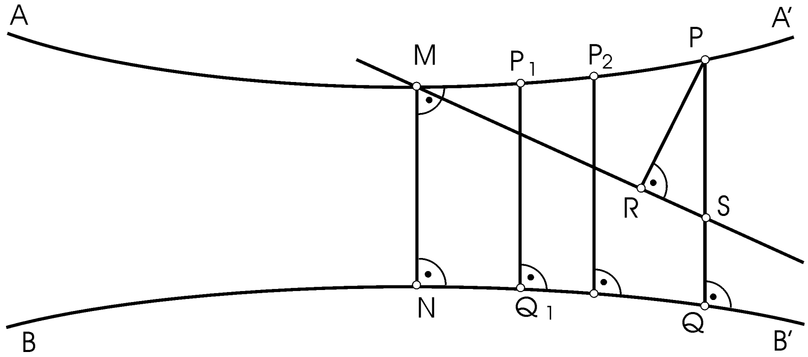
Slika 15.12.

Teorema 15.3.4. *Dve prave koje u preseku sa trećom grade suplementne suprotne uglove su hiperparalelne.*

Dokaz. Neka su a i b dve prave i prava c njihova zajednička sečica (slika 15.12) i neka su jednaki suprotni uglovi koje prava c gradi sa pravama a i b. Označimo sa A i B presečne tačke prave c redom sa pravama a i b, a O središte duži AB. Označimo sa P i Q podnožja normala iz tačke O redom na prave a i b. Pravougli trouglovi ΔOAP i ΔOBQ su podudarni jer je $OA \cong OB$, $\measuredangle P = \measuredangle Q$ i $\measuredangle A = \measuredangle B$. Iz njihove podudarnosti sledi da je $\measuredangle AOP = \measuredangle BOQ$. Kako su tačke A, O i B kolinearne, biće kolinearne i tačke P, O i Q. Dakle, prava PQ je zajednička normala pravih a i b, odakle na osnovu teoreme 15.3.3. sledi da su prave a i b hiperparalelne. □

Teorema 15.3.5. *Odstojanje tačke koja se pomera po jednoj od dveju međusobno hiperparalelnih pravih od druge prave strogo i neograničeno raste kad se ta tačka udaljuje od zajedničke normale tih hiperparalelnih pravih.*

Dokaz. Neka su AA' i BB' dve hiperparalelne prave. Prema prethodnoj teoremi postoji jedinstvena normala ovih hiperparalelnih pravih. Neka je to prava MN. Obeležimo sa P_1 i P_2 (slika 15.13) dve tačke prave AA' takve da je $\mathcal{B}(M, P_1, P_2)$. Neka su Q_1 i Q_2 podnožja upravnih iz tačaka P_1 i P_2 na pravu BB'. Budući da je četvorougao MNQ_1P_1 Lambertov četvorougao jer ima tri prava ugla $\measuredangle M$, $\measuredangle N$, $\measuredangle Q_1$ sledi da je njegov četvrti ugao oštar te je njemu naporedan ugao $\measuredangle Q_1P_1P_2$ tup. Četvorougao MNQ_2P_2 takođe je Lambertov jer su $\measuredangle M$, $\measuredangle N$, $\measuredangle Q_2$ pravi te je ugao $\measuredangle P_2$ tog četvorougla oštar, dakle u četvorouglu $P_1Q_1P_2Q_2$ uglovi kod temena Q_1 i Q_2 su pravi dok je ugao $\measuredangle P_1$ kao tup veći od ugla $\measuredangle P_2$ koji je oštar. Dakle duž P_2Q_2 je veća od duži P_1Q_1. Na taj način za tačke P_1 i P_2 za koje je $\mathcal{B}(M, P_1, P_2)$ imamo da je tačka P_2 na većem ratstojanju od tačke P_1 do prave BB'. Time je dokazano da to rastojanje raste udaljavanjem od zajedničke normale. Dokažimo da se ono povećava neograničeno. U tom cilju konstruišimo pravu CC' koja sadrži tačku M i koja je paralelna sa pravom BB'. Neka je zatim P proizvoljna tačka poluprave MA' a Q podnožje upravne iz tačke P na pravoj BB' i R podnožje upravne iz tačke P na pravoj CC'. U tom slučaju biće tačke P i Q sa raznih strana prave CC' te duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački S. Kako je trougao ΔPRS pravougli biće PR manje od PS. Iz $\mathcal{B}(P, S, Q)$ sledi da je PS manje od PQ. Na taj način ako se tačka P kreće po polupravoj MA' oštrog ugla $\measuredangle A'MC'$, udaljavajući se od njegovog temena, tada se prema ranijem stavu njeno odstojanje od drugog kraka tj. od poluprave MC' neograničeno povećava. No kako je to rastojanje manje od rastojanja



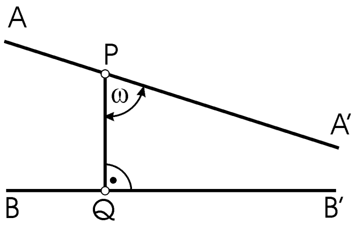
Slika 15.13.

tačke P do prave BB' tim pre rastojanje tačke P od prave BB' neograničeno raste. □

15.4 Ugao paralelnosti. Funkcija Lobačevskog

Definicija 15.4.1. Neka je tačka P izvan prave BB' i Q podnožje upravne iz P (slika 15.14) na pravoj BB'. Ako je AA' prava koja sadrži tačku P i paralelna je sa BB', tada oštar ugao $\omega = \measuredangle QPA'$ nazivamo *uglom paralelnosti* prave AA' u tački P sa pravom BB', tj. uglom paralelnosti koji odgovara duži PQ.

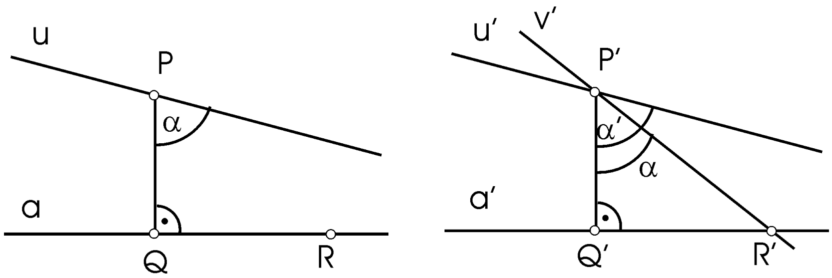
Dokazaćemo da je ugao paralelnosti u potpunosti određen rastojanjem tačke, tj. da važi sledeća teorema:



Slika 15.14.

Teorema 15.4.1. *Jednakim dužima odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti.*

Dokaz. Neka su P i P' dve tačke (slika 15.15) koje se nalaze na jednakim rastojanjima redom od pravih a i a'. Kroz tačku P postavimo pravu u paralelnu pravoj a, a kroz tačku P' pravu u' paralelnu pravoj a'. Sa Q i Q' označimo redom podnožja normala iz tačaka P i P' na prave a i a', a sa α i α' uglove paralelnosti u tačkama P i P' redom u odnosu na prave a i a'. Neka je $PQ = P'Q'$. Trebamo pokazati da je u tom slučaju $\alpha = \alpha'$.

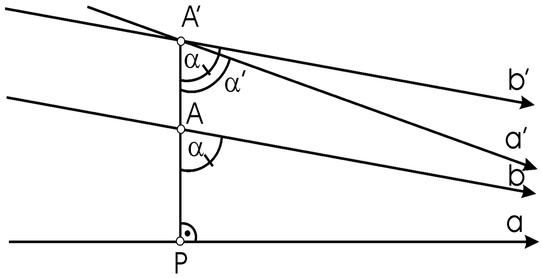


Slika 15.15.

Pretpostavimo da to nije ispunjeno, tj. da je npr. $\alpha < \alpha'$. Kroz tačku P' postavimo pravu v' koja sa duži $P'Q'$ u smeru paralelnosti pravih a' i u', zaklapa ugao jednak uglu α. Iz paralelnosti pravih u' i a' sledi da prava v' mora seći pravu a' u smeru paralelnosti pravih u' i a' od tačke Q'. Označimo sa R' njihovu presečnu tačku. Neka je R tačka prave a u smeru paralelnosti pravih u i a takva da je $QR \cong Q'R'$. Trouglovi ΔPQR i $\Delta P'Q'R'$ su podudarni jer je $PQ \cong P'Q'$, $\measuredangle Q = \measuredangle Q'$ i $QR \cong Q'R'$, odakle sledi da je $\measuredangle QAR = \alpha$. To znači da se prave PR i u poklapaju, tj. da da se paralelne prave u i a seku u tački R, što je nemoguće. Dakle ne može biti $\alpha < \alpha'$. Analogno se pokazuje da ne može biti $\alpha > \alpha'$. To znači da preostaje $\alpha = \alpha'$, čime je dokaz završen. □

Teorema 15.4.2. *Većoj duži odgovara manji ugao paralelnosti.*

Dokaz. Neka je A proizvoljna tačka van prave a (slika 15.16), i neka je P podnožje normale iz tačke A na pravu a. Označimo sa b pravu koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj a. Neka je A' tačka prave AP takva da je $A, A' \ddot{-} P$. Predpostavimo da je $PA' > PA$. Konstruišimo pravu b' koja prolazi kroz tačku A' i u smeru paralelnosti pravih a i b gradi ugao α sa $A'P$. Dve prave b i b' grade jednake suprotne uglove u preseku sa pravom $A'P$,



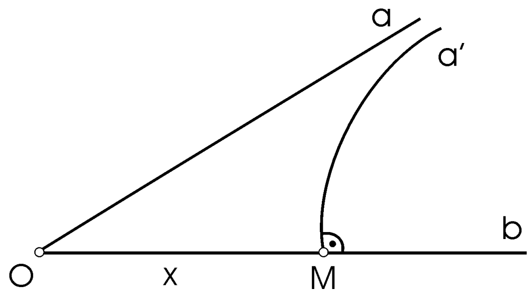
Slika 15.16.

pa su prema teoremi 15.3.4. prave b i b' hiperparalelne. To znači da prava a' koja sadrži tačku A' i paralelna je pravoj b gradi u smeru paralelnosti ugao α' za koji je $\alpha' < \alpha$. Iz $a' \parallel b$ i $b \parallel a$ sledi da je $a' \parallel a$. Dakle ugao paralelnosti α' koji odgovara duži $A'P$ je manji od ugla paralelnosti α koji odgovara duži AP. □

Iz napred navedenog zaključujemo da veličina ugla paralelnosti neke prave AA' u tački P sa pravom BB' u proizvoljnom sistemu merenja duži predstavlja funkciju odstojanja x tačke P od BB'. Ovu funkciju obeležavamo sa Π i nazivamo je funkcijom Lobačevskog. Sledeća teorema daje osnovne karakteristike funkcije Lobačevskog:

Teorema 15.4.3. *Ako je* Π *funkcija Lobačevskog tada je:*
(i) $dom(\Pi) = (0, +\infty)$,
(ii) $codom(\Pi) = (0, \pi/2)$,
(iii) Π *strogo opada i neprekidna je funkcija,*
(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \Pi(x) = \pi/2,\ \lim\limits_{x\to\infty} \Pi(x) = 0.$

Dokaz. (i) Trivijalno sledi iz definicije.
(ii) Neka je α proizvoljan oštar ugao. Dokazaćemo da je on ugao paralelnosti neke duži x. Neka je O vrh a a i b kraci ugla α (slika 15.17). Prema teoremi 15.2.4. sledi da postoji jedinstvena prava a' normalna na pravu b i paralelna sa pravom a. Označimo sa M presek pravih a' i b. Duž OM zadovoljava relaciju $\Pi(OM) = \alpha$. Znači biće $x = OM$, čime je dokaz završen.
(iii) Direktno sledi iz teoreme 15.4.2.
(iv) Sledi iz iz delova (ii) i (iii) ove teoreme. □



Slika 15.17.

Iz same činjenice da $\Pi(x) \to \pi/2$, kad $x \to 0$ sledi da se u malim delovima prostora geometrija Lobačevskog malo razlikuje od Euklidske geometrije, i da se ta razlika smanjuje sa smanjivanjem posmatranog dela prostora.

Veza između uglova i linearnih veličina data funkcijom $\alpha = \Pi(x)$ uslovljava celokupni karakter geometrije Lobačevskog. Na taj način u geometriji Lobačevskog nema sličnosti figura. To nije teško zaključiti jer su uglovi i stranice trouglova povezani međusobno jednačinama, pa zadavanjem uglova trougla u potunosti su određene i njegove stranice, pa dva trougla sa podudarnim uglovima imaju podudarne i odgovarajuće stranice, tj. podudarni su među sobom.

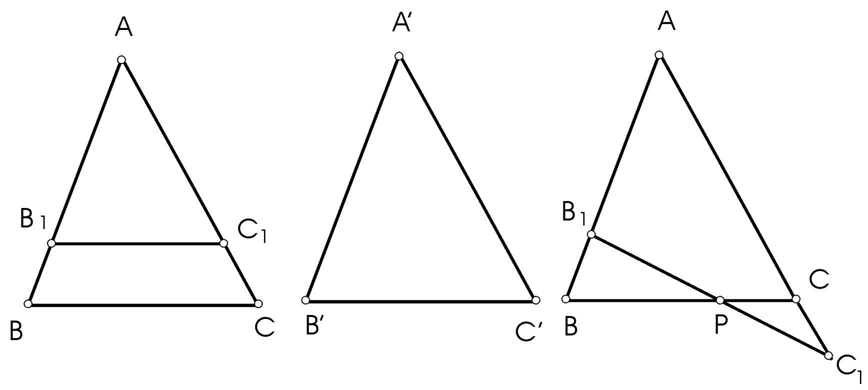
Glava 16

Geometrija trouglova i četvorouglova u ravni L^2

16.1 Podudarnost trouglova u ravni L^2

U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevskog postoji još jedan stav koji nazivamo Šestim stavom o podudarnosti trouglova.

Teorema 16.1.1. (Šesti stav o podudarnosti trouglova) *Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 među sobom podudarni tada su i ti trouglovi među sobom podudarni.*



Slika 16.1.

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dva trougla (slika 16.1) u ravni L^2 takva da je $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$. Da bi smo dokazali da je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ i (iii) $AB = A'B'$. Neka je najpre zadovoljen slučaj (i). Tada na duži AB postoji tačka B_1 takva da je $\mathcal{B}(A, B_1 1, B)$ i $AB_1 = A'B'$. Neka je C_1 tačka poluprave AC takva da je $AC_1 = A'C'$. Tada je $\mathcal{B}(A, C_1, C)$. Zaista, ako bi bilo $\mathcal{B}(A, C, C_1)$ onda bi se prema poznatom stavu iz Apsolutne geometrije duži BC i B_1C_1 sekle u nekoj tački P. Tada bi ugao $\measuredangle PCA$ bio spoljašnji ugao trougla ΔPCC_1 pa bi prema poznatom stavu bio veći od ugla $\measuredangle C$, trougla $\measuredangle PCC_1$. Međutim $\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$ pa je $\measuredangle C_1 = \measuredangle C'$. Kako je još $\measuredangle C = \measuredangle C'$ to je zbog tranzitivnosti relacije podudarnosti uglova $\measuredangle C_1 = \measuredangle C$, tj. kod trougla ΔPCC_1 spoljašnji ugao je jednak unutrašnjem nesusednom što je nemoguće. Dakle, ne može biti $\mathcal{B}(A, C, C_1)$. Takođe se tačke C i C_1 ne mogu poklapati, jer ako bi bilo $C \equiv C_1$ tada bi zhog $\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$ sledilo da je $\measuredangle C' = \measuredangle C$ te bi bilo $\measuredangle ACB_1 = \measuredangle ACB$, što je nemoguće. Dakle, mora biti $\mathcal{B}(A, C_l, C)$. Iz $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB_1C_1$ sledi da su uglovi $\measuredangle B_1$ i $\measuredangle C_1$ trougla ΔAB_1C_1 podudarni uglovima $\measuredangle B'$ i $\measuredangle C'$ trougla $\Delta A'B'C'$, a kako su uglovi $\measuredangle B'$ i $\measuredangle C'$ podudarni uglovima $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ trougla ΔABC to je $\measuredangle B_1 = \measuredangle B$ i $\measuredangle C_1 = \measuredangle C$. Odatle sledi da je zbir unutrašnjih uglova u četvorouglu BCC_1B_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće. Prema tome nije $AB > A'B'$.

Slučaj (ii) analognim postupkom dovodi do kontradikcije. Dakle za duži AB i $A'B'$ preostaje mogućnost (iii), tj. $AB = A'B'$, odakle prema drugom stavu o podudarnosti trouglova sledi da je $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$. $\square$

Napomena. U geometriji Lobačevskog ne postoje slični likovi pa iz toga sledi suštinska razlika u odnosu na Euklidsku geometriju. Prethodni stavovi o podudaruosti trouglova odnose se na trouglove sa finitnim (svojstvenim) temenima. Osim poligona sa finitnim temenima postoje poligoni kojima sva ili samo neko teme mogu biti infinitne (beskrajno daleke) tačke. U geometriji Lobačevskog poligone bez finitnih temena zvaćemo degenerativnim ili nesvojstvenim poligonima.

16.2 Podudarnost četvorouglova u ravni L^2

Teorema 16.2.1. *Srednja linija Sakerijevog četvorougla je zajednička normala osnovice i protivosnovice.*

Iz teoreme 16.2.1. sledi da su osnovica i protivosnovica Sakerijevog četvorougla hiperparalelne. Takođe srednja linija Sakerijev četvorougao razbija na dva Lambertova četvorougla.

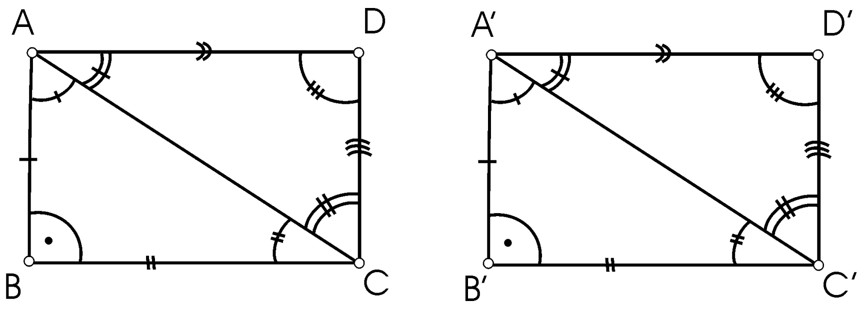
Sledeća teorema daje nam potrebne i dovoljne uslove za podudarnost Lambertovih četvorouglova.

Teorema 16.2.2. *Dva Lambertova četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$, sa oštrim uglom kod temena D odnosno D', su podudarna ako je*

a) $AB = A'B'$ i $BC = B'C'$, *b) $AB = A'B'$ i $AD = A'D'$,*
c) $AD = A'D'$ i $CD = C'D'$, *d) $AD = A'D'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$,*
e) $AB = A'B'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$, *f) $AD = A'D'$ i $BC = B'C'$.*

Dokaz. a) Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (slika 16.2) Lambertovi četvorouglovi sa oštrim uglovima kod temena D i D' kod kojih je $AB = A'B'$ i $BC = B'C'$. Da bi smo dokazali njihovu podudarnost potrebno je da pokažemo podudarnost preostala dva para odgovarajućih stranica, kao i podudarnost oštrih uglova $\measuredangle D$ i $\measuredangle D'$. Trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćen ugao ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ $\measuredangle B = \measuredangle B' = R$, pa su i oni podudarni. Iz njihove podudarnosti sledi $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'$. Sada je

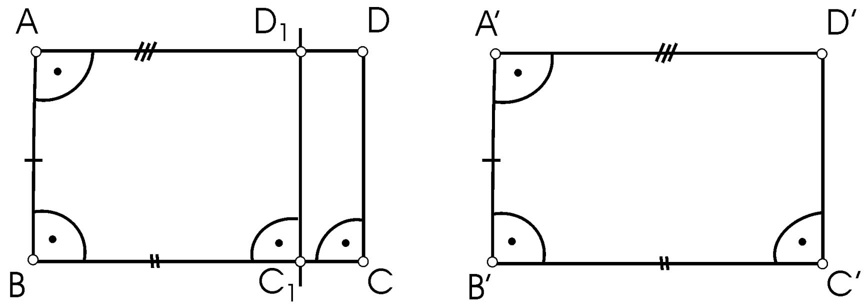
$$\measuredangle CAD = R - \measuredangle ABC = R - \measuredangle A'B'C' = \measuredangle C'A'D' \text{ i}$$
$$\measuredangle ACD = R - \measuredangle ACB = R - \measuredangle A'C'B' = \measuredangle A'C'D'.$$



Slika 16.2.

Sada trouglovi ΔACD i $\Delta A'C'D'$ imaju podudarne stranicu i dva nalegla ugla ($AC = A'C'$, $\measuredangle CAD = \measuredangle C'A'D'$ i $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D'$), odakle sledi njihova podudarnost, a odavde $AD = A'D'$, $CD = C'D'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$.

b) Neka je sada $AB = A'B'$ i $AD = A'D'$. Prema dokazanom delu teoreme pod a) dovoljno je da dokažemo da je $BC = B'C'$. za duži BC i $B'C'$ važi tačno jedna od tri mogućnosti: (i) $BC > B'C'$, (ii) $BC < B'C'$ i $BC = B'C'$.



Slika 16.3.

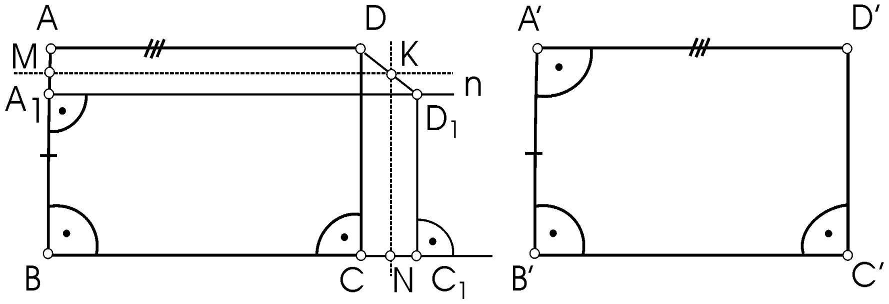
(i) Neka je $BC > B'C'$. Tada postoji tačka C_1 (slika 16.3) takva da je $BC_1 = B'C'$ i $\mathcal{B}(B, C_1, C)$. Kroz tačku C_1 konstruišimo normalu n na BC. Prava n ne može imati zajedničkih tačaka niti sa stranicom AB niti CD, jer bi u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla. Dakle n mora seći stranicu AD u tački D_1 takvoj da je $\mathcal{B}(A, D_1, D)$. Lambertovi četvorouglovi ABC_1D_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod a), jer je $AB = A'B'$ i $BC_1 = B'C'$, odakle sledi $AD_1 = A'D'$. Kako je još $AD = A'D'$ dobijamo $AD_1 = AD$, odakle zbog $D, D_1 \ddot{-} A$ sledi $D \equiv D_1$. Dobili smo trougao ΔCC_1D sa pravim uglovima kod temena C i C_1, što je nemoguće. Dakle ne važi $BC > B'C'$.

(ii) Pretpostavka $BC < B'C'$ analogno dovodi do kontradikcije.

(iii) Dakle, preostaje da mora biti $BC = B'C'$, pa su Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni prema dokazanom delu teoreme pod a).

c) Neka je za Lamberove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $CD = C'D'$. Da bi smo dokazali njihovu podudarnost dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedan od slučajeva: (i) $AB > A'B'$, $AB < A'B'$ i $AB = A'B'$.

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada postoji tačka A_1 (slika 16.4) na pravoj AB takva da je $A_1B = A'B'$ i $\mathcal{B}(A, A_1, B)$. Kroz tačku A_1 konstruišimo



Slika 16.4.

normalu n na AB. Prava n ne seče niti stranicu BC niti stranicu AD, jer bi u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla, što je nemoguće. Dakle n mora seći stranicu CD. Označimo sa D_1 tačku na normali n takvu da je $A_1 = AD = A'D'$. Tada mogu nastupiti tri slučaja: (1) $A_1, D_1 \ddot{-} p(C, D)$, (2) $A_1, D_1 \div p(C, D)$ ili $D_1 \in p(C, D)$.

(1) Neka je $A_1, D_1 \ddot{-} p(C, D)$. Označimo sa C_1 normalnu projekciju tačke D_1 na pravu $p(B, C)$. Lambertovi četvorouglovi $A_1BC_1D_1$ i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod b) jer je $A_1B = A'B'$ i $A_1D = A'D'$. Iz njihove podudarnosti je $C_1D_1 = C'D'$ i kako je još $C'D' = CD$ sledi $C_1D_1 = CD$. Za četvorougao CC_1D_1D je zadovoljeno $\measuredangle C = \measuredangle C_1 = R$ i $CD = C_1D_1$ pa je on Sakerijev. Srednja linija KN ovog četvorougla je zajednička normala osnovice CC_1 i protivosnovice DD_1 ovog četvorougla. Takođe, četvorougao AA_1D_1D je Sakerijev jer je $\measuredangle A = \measuredangle A_1 = R$ i $A_1D_1 = AD$, pa njegova srednja linija KM zajednička normala osnovice AA_1 i protivosnovice DD_1. Dakle, dobili smo dve različite normale KN i KM u tački K na pravu $p(D, D_1)$, što je u suprotnosti sa teoremom o jedinstvenosti normale. Prema tome, ne može biti $A_1, D_1 \ddot{-} p(C, D)$.

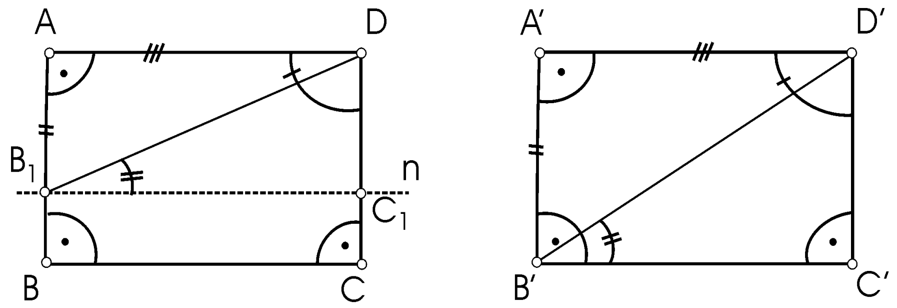
(2) Analogno, i u slučaju $A_1, D_1 \div p(C, D)$ se dobija kontradikcija.

(3) Neka je sada $D_1 \in p(C, D)$. U tom slučaju normalna projekcija tačke D_1 na pravu $p(B, C)$ je tačka C. Lambertovi četvorouglovi A_1BCD_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $A_1B = A'B'$ i $A_1D_1 = A'D'$, odakle sledi $CD_1 = C'D'$. Kako je još $D, D_1 \ddot{-} C$ zaključujemo da se tačke D i D_1 poklapaju. Međutim trougao ΔAA_1D ima prave uglove kod temena A i A_1, što je nemoguće. dakle, u sva tri slučaja dobija se kontradikcija, a to znači da ne može biti $AB > A'B'$.

(ii) Analogno, i u slučaju $AB < A'B'$ dobija se kontradikcija.

(iii) Prema tome, mora biti $AB = A'B'$. Kako je još $AD = A'D'$ Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ su podudarni prema dokazanom delu pod b).

d) Neka je za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$. Da bi pomenuti četvorouglovi bili podudarni dovoljno je da dokažemo da je $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi tačno jedna od moguńosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili $AB = A'B'$.



Slika 16.5.

(i) Neka je najpre $AB > A'B'$. Tada postoji tačka $B_1 \in AB$ (slika 16.5) takva da je $AB_1 = A'B'$ i $\mathcal{B}(A, B_1, B)$. U tački B_1 konstruišimo normalu n na pravu AB. Ona ne može seći niti pravu AB niti pravu CD, jer bi smo dobili trougao sa dva prava ugla. Znači prava n mora seći CD u tački C_1 takvoj da je $\mathcal{B}(C, C_1, D)$. Trouglovi ΔAB_1D i $A'B'D'$ su podudarni jer je $AD = A'D'$, $AB_1 = A'B'$ i $\measuredangle A = \measuredangle A' = R$. Tada su im i ostale odgovarajuće stranice i uglovi podudarni, tj. $B_1D = B'D'$, $\measuredangle AB_1D = \measuredangle A'B'D'$ i $\measuredangle ADB_1 = A'D'B'$. Odavde sledi $\measuredangle DB_1C_1 = \measuredangle D'B'C'$ i $B_1DC_1 = \measuredangle B'D'C'$. Sada je $\Delta DB_1C_1 \cong \Delta B'B'C'$, odakle je $\measuredangle B_1C_1D = \measuredangle B'C'D' = R$. U ovom slučaju četvorougao B_1C_1CB ima sva četiri ugla prava, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.

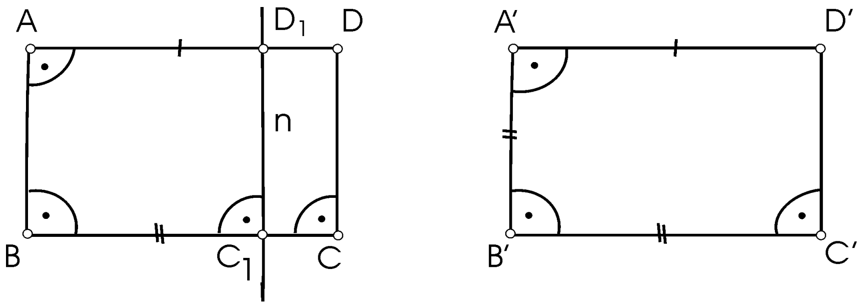
(ii) Analogno, i pretpostavka $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Preostaje $AB = A'B'$, a kako je još $AD = A'D'$ sledi podudarnost Lambertovih četvorouglova $ABCD$ i $A'B'C'D'$, na osnovu dokazanog dela pod b).

e) Neka je sada za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno: $AB = A'B'$ i $\measuredangle D = \measuredangle D'$. Pokazaćemo da je $BC = B'C'$. Za duži BC i $B'C'$ može nastupiti jedan odf sledećih slučajeva: (i) $BC > B'C'$, (ii) $BC < B'C'$ ili (iii) $BC = B'C'$.

(i) Neka je $BC > B'C'$. Tada postoji tačka $C_1 \in BC$ (slika 16.6) takva da je $BC_1 = B'C'$ i $\mathcal{B}(B, C_1, C)$. Konstruišimo normalu n kroz tačku C_1 na pravu BC. Ona ne seče niti AB niti CD pa mora seći AD. Označimo sa D_1 presečnu tačku pravih n i AD. Tada je $\mathcal{B}(A, D_1, D)$. Lambertovi četvorouglovi ABC_1D_1 i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $AB = A'B'$ i $BC_1 = B'C'$. Odatle sledi da je $\measuredangle AD_1C_1 = \measuredangle D'$. Tada je zbir unutrašnjih uglova četvorougla C_1CDD_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.

(ii) Analogno i pretpostavka $BC < B'C'$ dovodi do kontradikcije.



Slika 16.6.

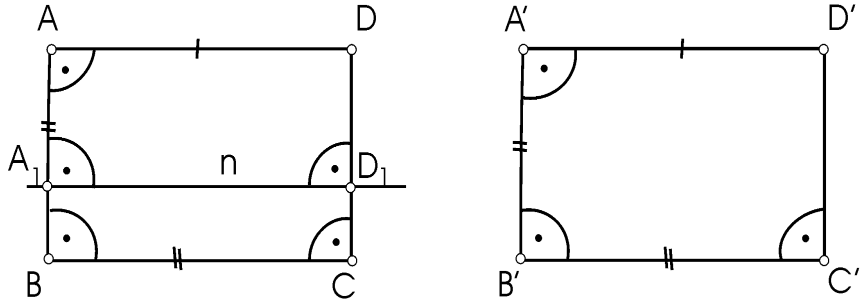
(iii) Prema tome mora biti $BC = B'C'$. Kako je još $AB = A'B'$ to prema dokazanom delu pod a) sledi podudarnost četvorouglova $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

f) Neka je za Lambertove četvorouglove $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zadovoljeno $AD = A'D'$ i $BC = B'C'$. Dovoljno je da dokažemo da važi $AB = A'B'$. Za duži AB i $A'B'$ važi jedna od tri mogućnosti: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili (iii) $AB = A'B'$.

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada postoji tačka $B_1 \in AB$ (slika 16.7) takva da je $\mathcal{B}(A, B_1, B)$. Konstruišimo normalu n u tački B_1 na pravu AB. Prava n ne može seći niti AD niti BC jer bi smo u suprotnom dobili trougao sa dva prava ugla. Dakle n seče CD u tački C_1 takvoj da je $\mathcal{B}(C, C_1, D)$. Lamberovi četvorouglovi AB_1C_1D i $A'B'C'D'$ su podudarni jer je $AD = A'D'$ i $AB_1 = AB$. Sada je $\measuredangle B_1C_1D = \measuredangle C' = R$, pa je zbir unutrašnjih uglova četvorougla BCC_1B_1 jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće.

(ii) Analogno, ne može biti $AB < A'B'$.

(iii) Prema tome mora biti $AB = A'B'$. Kako je još $AD = A'D'$, Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ biće podudarni prema dokazanom



Slika 16.7.

delu pod b). □

Teorema 16.2.3. *Dva Sakerijeva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$, sa osnovicama AB, $A'B'$ i protivosnovicama CD i CD' redom, su podudarna ako je*

a) $AB = A'B'$ *i* $BC = B'C'$, *b)* $AB = A'B'$ *i* $CD = C'D'$,
c) $BC = B'C'$ *i* $CD = C'D'$, *d)* $AB = A'B'$ *i* $\measuredangle C = \measuredangle C'$,
e) $BC = B'C'$ *i* $\measuredangle C = \measuredangle C'$, *f)* $CD = C'D'$ *i* $\measuredangle C = \measuredangle C'$.

Dokaz. Korišćenjem činjenice da srednja linija Sakerijevog četvorougla razlaže taj četvorougao na dva Lambertova četvorougla, dokaz ove teoreme svodi se na prostu primenu rezultata iz teoreme 16.2.2. □

16.3 Srednja linija trougla u ravni L^2

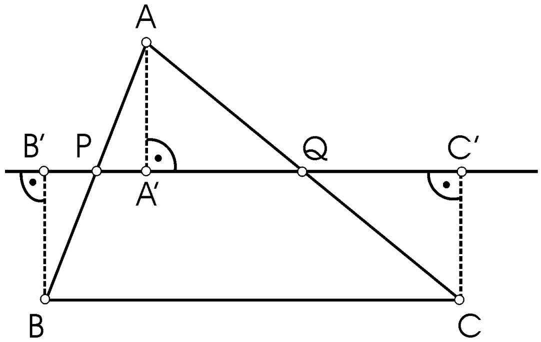
Sada ćemo dokazati teoremu koja se odnosi na srednju liniju trougla u ravni Lobačevskog.

Teorema 16.3.1. *Ako su P i Q sredine stranica AB i AC trougla ΔABC, tada su prave $p(B, C)$ i $p(P, Q)$ hiperparalelne, pri čemu je*

$$PQ < \frac{1}{2} BC.$$

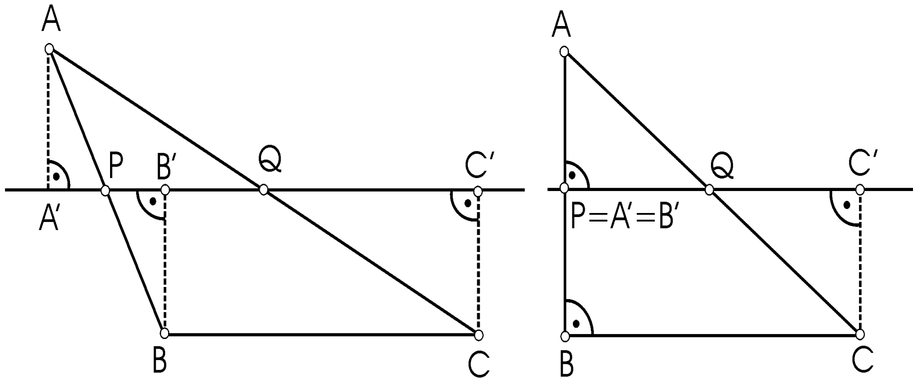
Dokaz. Označimo sa A', B', C' podnožja normala redom iz tačaka A, B i C na pravu $p(P, Q)$. Tada mogu nastupiti sledeći rasporedi: (i) $\mathcal{B}(P, A', Q)$, (ii) $P \equiv A'$ ili $Q \equiv A'$, (iii) $P, Q \doteq A'$.

(i) Neka je najpre $\mathcal{B}(P, A', Q)$ (slika 16.8). Trouglovi $\Delta AA'P$ i $\Delta BB'P$ su podudarni jer je $\measuredangle A' = \measuredangle B' = R$, $AP = BP$ i $\measuredangle BPB' = \measuredangle APA'$. Iz



Slika 16.8.

njihove podudarnosti sledi $AA' = BB'$ i $B'P = A'P$. Takođe su podudarni i trouglovi $\Delta AA'Q$ i $\Delta CC'Q$ jer je $\measuredangle A' = \measuredangle C' = R$, $\measuredangle AQA' = \measuredangle CQC'$ i $AQ = CQ$. Iz njihove podudarnosti sledi $AA' = CC'$ i $A'Q = C'Q$. Dakle, četvorougao $B'C'CB$ je Sakerijev, sa osnovicom $B'C'$ i protivosnovicom BC pa su prave $p(B,C)$ i $p(B'C') \equiv p(P,Q)$ hiperparalelne.



Slika 16.9.

Takođe su i prave $p(B,B')$ i $p(C,C')$ hiperparalelne jer imaju zajedničku normalu $p(B',C')$. Duž $B'C'$ je odsečak zajedničke normale između ovih dveju hiperparalelnih pravih, pa je prema teoremi 15.3.5. $B'C' < BC$. Sada iz $\mathcal{B}(P,A',Q)$ dobijamo

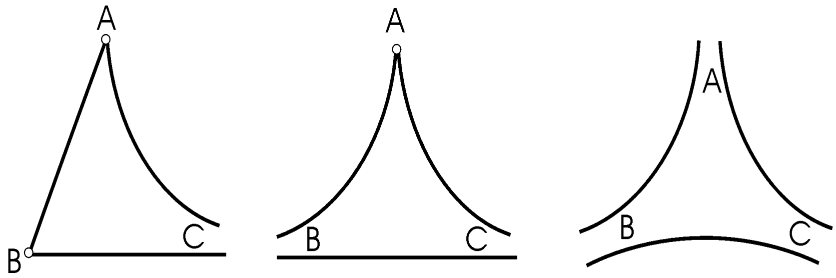
$$B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = PA' + PQ + QC' = 2\,PQ.$$

Dakle $2\,PQ < BC$, tj. $PQ < \dfrac{1}{2}BC$.

Slučajevi (ii) i (iii) razmatraju se analogno (slika 16.9). □

16.4 Trouglovi sa nesvojstvenim (infinitnim) temenima u ravni L^2

Teorema 16.4.1. *U geometriji ravni L^2 postoji trougao (slika 16.10) koji ima: (i) jedno, (ii) dva ili (iii) tri nesvojstvena temena.*



Slika 16.10.

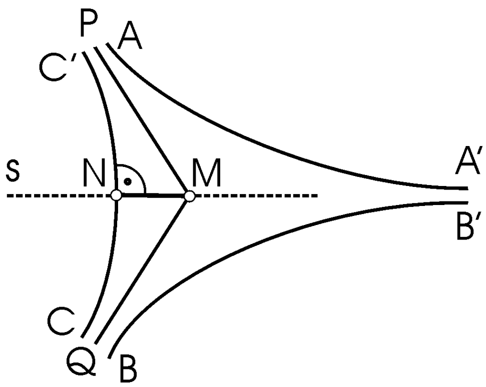
Dokaz. (i) Sledi direktno iz teoreme 15.2.4.
(ii) Sledi direktno iz aksiome Lobačevskog.
(iii) Neka su AA' i BB' (slika 16.11) paralelne prave, tj. $AA' \parallel BB'$, i neka je M tačka između pravih AA' i BB'. Neka je zatim $MP \parallel A'A$ i $MQ \parallel B'B$. Označimo sa s medijatrisu ugla $\measuredangle PMQ$. Tada je ugao $\measuredangle PMQ$ pravom s podeljen na dva oštra ugla. Neka je MN duž paralelnosti za taj oštri ugao. Tada za normalu CC' u tački N na simetralu s važi $MP \parallel CC'$ i $MQ \parallel C'C$, tj. $CC' \parallel A'A$ i $C'C \parallel B'B$. Prave AA', BB' i CC' određuju trougao sa tri nesvojstvena temena.

Teorema 16.4.2. *Dve paralelne prave u smeru suprotnom od smera paralelnosti imaju graničnu pravu.*

Dokaz. Analogno dokazu teoreme 16.4.1. (iii). □

Teorema 16.4.3. *Dva trougla sa po jednim infinitnim temenom su podudarna ako imaju podudarne po jednu konačnu stranicu i po jedan finitni ugao.*

Dokaz. Neka su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ (slika 16.12) trouglovi sa nesvojstvenim temenima C i C', i neka je $AB \cong A'B'$ i $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$. Da bi smo



Slika 16.11.

dokazali podudarnost trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ dovoljno je da dokažemo da je $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Za uglove $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle B'A'C'$ važi jedna od sledeće tri mogućnosti: (i) $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$, (ii) $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$ i (iii) $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$.

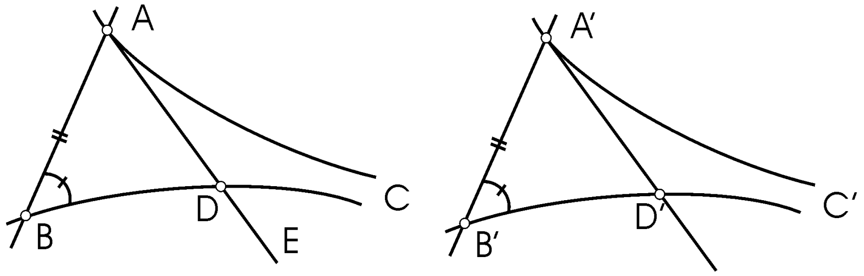
(i) Pretpostavimo najpre da je $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. tada unutar ugla $\measuredangle BAC$ postoji poluprava AE takva da je $\measuredangle BAE = \measuredangle B'A'C'$. Poluprava AE mora seći pravu BC jer je $AC \parallel BC$. Označimo sa D njihovu presečnu tačku. Na polupravoj $B'C'$ odredimo tačku D' takvu da je $BD \cong B'D'$. Trouglovi ΔABD i $\Delta A'B'D'$ su podudarni jer imaju jednake dve odgovarajuće stranice i njima zahvaćen ugao, odakle sledi podudarnost i ostalih odgovarajućih elemenata, tj. $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'D'$. Sada iz $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle BAE = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'D'$ sledi $\measuredangle B'A'D' = \measuredangle B'A'C'$, tj prave $A'D'$ i $A'C'$ se poklapaju, što je nemoguće jer bi u tom slučaju paralelne prave $A'C'$ i $B'C'$ imale zajedničku tačku D'. Prema tome ne važi $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.

(ii) Analogno i pretpostavka $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Prema tome mora biti $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, tj. trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su podudarni. □

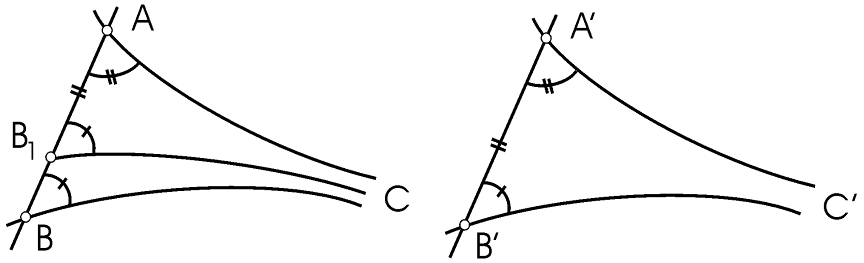
Teorema 16.4.4. *Dva trougla sa po jednim infinitnim temenom su podudarna ako su im podudarni odgovarajući uglovi kod finitnih temena.*

Dokaz. Neka su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ trouglovi sa infinitnim temenima C i C' pri čemu je $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$. Dovoljno je da dokažemo da je $AB \cong A'B'$ da bi pomenuti trouglovi bili podudarni. Za



Slika 16.12.

duži AB i $A'B'$ može nastupiti jedan od sledećih slučajeva: (i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ ili (iii) $AB = A'B'$



Slika 16.13.

(i) Neka je $AB > A'B'$. Tada na AB postoji tačka B_1 (slika 16.13) takva da je $AB_1 \cong A'B'$ i $\mathcal{B}(A, B_1, B)$. Prava B_1C paralelna je pravoj AC, pa su trouglovi ΔAB_1C i $\Delta A'B'C'$ podudarni prema teoremi 16.4.3. pa je $\measuredangle AB_1C = \measuredangle A'B'C'$. Sledi $\measuredangle AB_1C = \measuredangle ABC$, tj. suprotni uglovi $\measuredangle AB_1C$ i $\measuredangle ABC$ paralelnih pravih B_1C i BC su suplementni što je u suprotnosti sa teoremom 15.3.4. Prema tome nije $AB > A'B'$.

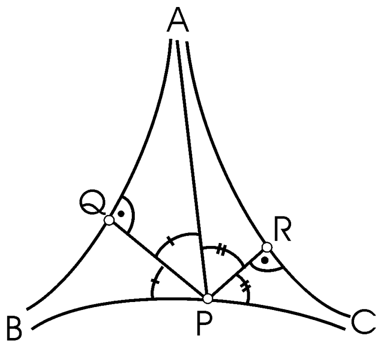
(ii) Analogno, pretpostavka $AB < A'B'$ dovodi do kontradikcije.

(iii) Dakle, mora biti $AB = A'B'$, tj. trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su podudarni. $\square$

Teorema 16.4.5. *Dva trougla sa po dva infinitna temena su podudarna ako su im podudarni odgovarajući uglovi kod finitnih temena.*

Teorema 16.4.6. *Svi trouglovi sa tri infinitna temena su među sobom podudarni.*

Teorema 16.4.7. *Ako su sva tri temena nekog trougla infinitna, tada su normale iz bilo koje tačke jedne njegove stranice na drugim dvema stranicama među sobno normalne.*



Slika 16.14.

Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka prave BC (slika 16.14) i neka su Q i R podnožja normala iz tačke P redom na AB i AC. Trebamo pokazati da je $\measuredangle QPR$ prav. iz $BA \parallel CA$ i $\mathcal{B}(B,P,C)$ sledi $PA \parallel BA$ i $PA \parallel CA$. Ugao $\measuredangle BPQ$ je ugao paralelnosti između dveju pravih koji odgovara duži PQ, tj. $\measuredangle BPQ = \Pi(PQ)$. Na isti način, $\measuredangle QPA$ je ugao paralelnosi koji odgovara duži PQ, pa je $\measuredangle QPB = \measuredangle QPA$. Analogno, sledi da je $\measuredangle RPA = \measuredangle RPC$. sada je $\measuredangle QPR = \measuredangle QPA + \measuredangle RPA = \measuredangle BPQ + \measuredangle CPR$ i $\measuredangle QPR + (\measuredangle BPQ + \measuredangle CPR) = 2R$, odakle je $\measuredangle QPR = \measuredangle BPQ + \measuredangle CPR$ prav ugao. □

16.5 Paralelogrami i hiperparalelogrami u L^2

Klasifikacija četvorouglova u geometriji Lobačevskog se bitno razlikuje od klasifikacije četvorouglova u Euklidskoj ravni. U zavisnosti od toga da li se naspramne stranice četvorougla nalaze na konkurentnim, paralelnim ili hiperparalelnim pravama razlikujemo više vrsta četvorouglova. Naš cilj biće da razmotrimo samo specifične vrste četvorouglova. To su četvorouglovi sa paralelnim ili hiperparalelnim naspramnim stranicama.

Definicija 16.5.1. *Četvorougao kome svake dve naspramne stranice pripadaju paralelnim pravama zovemo paralelogram.*

Kraci unutrašnjih uglova paralelograma mogu da budu saglasni sa smerovima paralelnosti naspramnih stranica ili ne. Ako su oba kraka unutrašnjeg ugla paralelograma saglasna sa odgovarajućim smerovima teme zovemo osnovnim, a ako oba kraka unutrašnjeg ugla paralelograma nisu saglasna sa odgovarajućim smerovima, dotično teme zovemo protivosnovnim. Ostala dva temena zovemo bočnim temenima. Dijagonalu koja polazi iz osnovnog temena zovemo osnovnom a onu drugu bočnom. Četvorougao kome su dijagonale upravne među sobom zovemo romb.

Definicija 16.5.2. *Četvorovgao kome svake dve naspramne stvane pripadaju hiperparalelnim pravama nazivamo hiperparalelogramom.*

Hiperparalelogrami mogu hiti centralno simetrični, osnosimetrični i asimetrični. Centralno simetrični hiperparalelogram nazivamo hiperromboidom. Hiperromboid kome su dijagonale upravne među sobom zovemo hiperromb. Hiperromboid kome su dijagonale među sobom podudarne zovemo hiperpravougaonikom. Hiperromboid kome su dijagonale među sobom upravne i podudarne zovemo hiperkvadratom.

Glava 17

Karakteristične krive i površi

17.1 Epicikli u ravni $\mathbf{L^2}$

Definicija 17.1.1. Kompoziciju dveju osnih refleksija ravni L^2 nazivamo *epicikličkom rotacijom.*

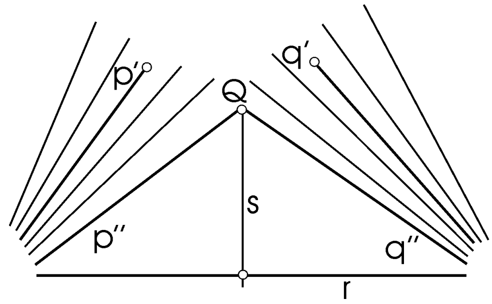
Teorema 17.1.1. *Neka je $\mathcal{X}$ proizvoljan pramen pravih u ravni L^2. Skup svih epicikličkih transformacija definisanih u odnosu na prave tog pramena predstavlja grupu epicikličkih rotacija definisanih u odnosu na pramen pravih $\mathcal{X}$.*

Od toga da li je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih, paralelnih ili pramen pravih upravnih na nekoj pravoj s dotični pramen $\mathcal{X}$ nazivamo eliptički, parabolički odnosno hiperbolički pramen.

Teorema 17.1.2. *Neka su $\aleph$ i $\aleph'$ dva razna parabolička pramena. Tada postoji jedinstvena prava koja pripada pramenovima $\aleph$ i $\aleph'$.*

Dokaz. S obzirom na činjenicu da dva razna pramena mogu imati najviše jednu zajedničku pravu, dovoljno je da pokažemo da postoji prava koja pripada pramenovima $\aleph$ i $\aleph'$. Označimo sa p' i q' (slika 17.1) dve poluprave kojima su paralelne prave redom pramenova $\aleph$ i $\aleph'$. tada poluprave p' i q' ne sadrže jedna drugu, jer bi se u suprotnom pramenovi $\aleph$ i $\aleph'$ poklapali. Ako bi te dve poluprave pripadale jednoj pravoj, onda bi ta prava bila zajednička prava pomenutih pramenova pravih.

Neka poluprave p i q pripadaju dvema različitim pravama p i q i neka je Q tačka koja ne pripada pravama p i q. Neka su p'' i q'' poluprave sa početkom u tački Q paralelne redom polupravama p' i q'. Ako poluprave p''

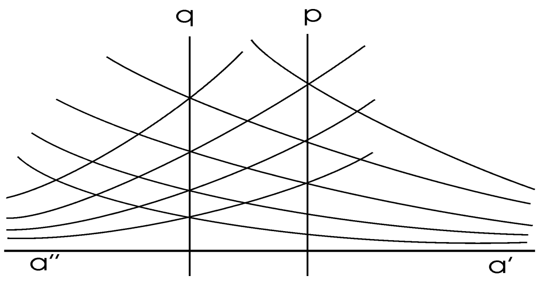


Slika 17.1.

i q'' pripadaju jednoj pravoj, onda je ta prava zajednička prava pramenova $\aleph$ i $\aleph'$.

Neka su p'' i q'' kraci nekog konveksnog ugla. U tom slučaju bisektrisa s tog ugla razlaže taj ugao na dva oštra ugla. tada postoji jedinstvena prava r normalna na pravu s paralelna polupravama p'' i q''. Prava r pripada svakom od pramenova $\aleph$ i $\aleph'$ jer je paralelna obema polupravama p' i q'. □

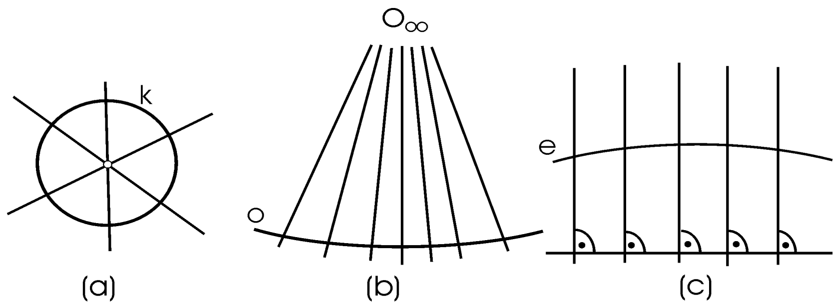
Teorema 17.1.3. *Parabolički pramen se preslikava na sebe translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada.*



Slika 17.2.

Dokaz. Označimo sa a proizvoljnu pravu zadatog paraboličkog pramena $\aleph$. Neka je prava a (slika 17.2) razložena na poluprave a' i a'' nekom svojom proizvoljnom tačkom pri čemu su prave pramena $\aleph$ paralelne polupravoj a'. Označimo sa p i q dve različite proizvoljne prave upravne na pravu a. Osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ svaka prava pramena $\aleph$ preslikava se u pravu paralelnu polupravoj a''. Međutim, osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$ se ta prava preslikava u neku pravu paralelnu pravoj a', tj. u pravu pramena $\aleph$. Znači, kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ pramen $\aleph$ preslikava na sebe. $\square$

Definicija 17.1.2. Neka je $\mathcal{X}$ pramen pravih u ravni L^2 i neka je $P \in L^2$ proizvoljna tačka. Skup, koji se sastoji iz svih tačaka ravni L^2, koje u transformacijama iz grupe epicikličkih rotacija definisanih u odnosu na pramen $\mathcal{X}$ odgovaraju tački P, nazivamo *epiciklom*.



Slika 17.3.

Posebno, skup koji se sastoji od neke tačke P i svih slika tačke P dobijenih transformacijama tačke P pomoću elemenata neke grupe G nazivamo trajektorijom tačke P u odnosu na grupu G.

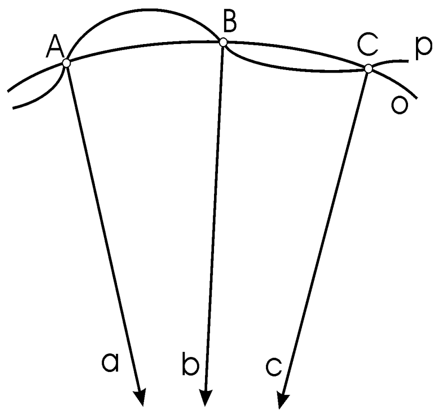
Na taj način epicikl je trajektorija tačke u odnosu na grupu epicikličkih rotacija.

Definicija 17.1.3. U zavisnosti od toga da li je $\mathcal{X}$ eliptički, parabolički ili hiperbolički pramen (slika 17.3), epicikl nazivamo *ciklom* (krugom), *oriciklom* ili *hiperciklom (ekvidistantom)* .

Iz definicije neposredno sledi da je svaka tačka cikla podjednako udaljena od središta eliptičkog pramena pravih i tu tačku nazivamo središtem tog cikla.

Oricikl se može posmatrati kao granični slučaj kruga. Središte tog kruga bila bi infinitna tačka O_∞ u ravni L^2 u kojoj se seku prave pramena $\mathcal{X}$.

Ako je epicikl hipercikl lako se ustanovljuje da je svaka tačka hipercikla podjednako udaljena od osnove (bazisne prave) odgovarajućeg pramena pravih. Zato se hipercikl zove ekviistanta. Dotičnu pravu upravnu na svim paralelnim pravama zovemo osnovom ekvidistante, a duž upravnu iz bilo koje tačke ekvidistante do osnove zovemo visinom.

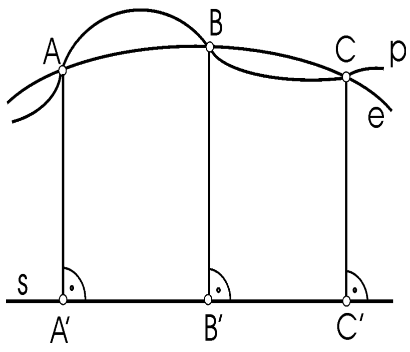


Slika 17.4.

Specijalno ako je visina ekvidistante jednaka nuli sledi da je ekvidistanta prava linija. Stoga prave linije možemo smatrati ekvidistantama visine nula. Epicikli imaju zajedničko svojstvo da su to krive stalne krivine u L^2, štaviše može se dokazati da su to jedine linije konstantne krivine u ravni L^2. U Euklidskoj ravni E^2 postoje dve vrste linija konstantne krivine: krug i prava, dobijene kao trajektorije eliptičkog i hiperboličkog pramena pravih.

Teorema 17.1.4. *Svaki epicikl u ravni L^2, različit od ekvidistante visine nula, predstavlja krivu liniju, tj. ne sadrži nikoje tri razne kolinearne tačke.*

Dokaz. (i) Ako je epicikl krug, iz Apsolutne geometrije znamo da ni koje tri razne tačke koje pripadaju krugu ne pripadaju jednoj pravoj.
(ii) Ako je epicikl oricikl tada nikoje tačke tog oricikla ne mogu biti na istoj pravoj. Zaista, ako bi neke tri razne tačke oricikla A, B, C pripadale nekoj pravoj p (slika 17.4) tada bi prava AB predstavljala sečicu jednakih nagiba pravih a i b, te bi bočni uglovi kod temena A i B sa svih strana gde su sečice a i b bili oštri. Isto bi i kod temena B i C uglovi sa one strane sečice gde su b i c bili oštri te bi naporedni uglovi $\measuredangle ABO_\infty$ i $\measuredangle CBO_\infty$ bili oštri što je nemoguće.
(iii) Neka je e ekvidistanta u ravni L^2 sa bazisnom pravom s i visinom različitom od nule. Dokažimo da nikoje tri tačke te ekvidistante ne mogu pripadati jednoj pravoj. Zaista, neka prava p (slika 17.5) ima sa ekvidistantom e tri zajedničke tačke A, B, C. Označimo sa A', B', C' podnožja upravnih iz tačaka A, B, C redom na pravu s. Četvorougli $A'B'BA$, $B'C'CB$ su Sakerijevi sa osnovicama $A'B'$ i $B'C'$ redom, pa su uglovi $\measuredangle A$ i $\measuredangle B$ prvog



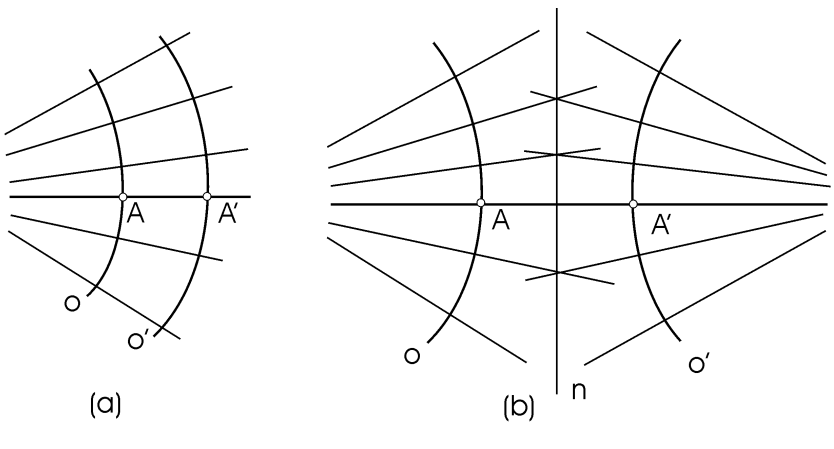
Slika 17.5.

četvorougla i $\measuredangle B$ i $\measuredangle C$ drugog četvorougla oštri. Dakle, naporedni uglovi $\measuredangle ABB'$ i $\measuredangle CBB'$ su oštri što je nemoguće. □

Teorema 17.1.5. *Da bi u ravni L^2 dva kruga bila podudarna potrebno je i dovoljno da im poluprečnici budu podudarni.*

Teorema 17.1.6. *Svaka dva oricikla u ravni L^2 su među sobom podudarna.*

Dokaz. Neka su $\aleph$ i $\aleph'$ parabolički pramenovi pravih u odnosu na koje su definisani oricikli o i o' i neka je s zajednička prava tih pramenova. Označimo sa A i A' zajedničke tačke prave s redom sa oriciklima o i o'.



Slika 17.6.

Ukoliko se pramenovi $\aleph$ i $\aleph'$ poklapaju (slika 17.6. (a)), prava s je proizvoljna prava tog pramena. Translacija $\tau_{\overrightarrow{AA'}}$ preslikava pramen $\aleph$ na sebe, tačkuu A oricikla o u tačku A' oricikla o', pa je

$$\tau_{\overrightarrow{AA'}}(o) = o'.$$

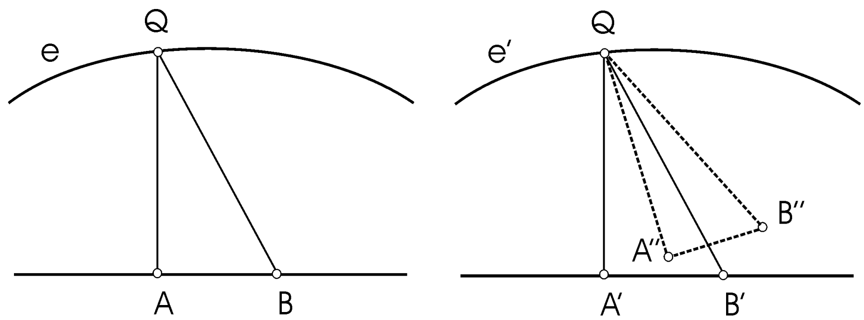
Ukoliko su pramenovi $\aleph$ i $\aleph'$ različiti (slika 17.6. (b)), onda je prema teoremi 17.1.2. prava s jedinstvena, pa se osnom refleksijom u odnosu na proizvoljnu pravu koja je upravna na pravu s pramenovi $\aleph$ i $\aleph'$ preslikavaju jedan na drugi. Ako se tačke A i A' ne poklapaju, označimo sa n medijatrisu duži AA', a ako se poklapaju sa n ćemo označiti pravu koja sadrži tačku $A \equiv A'$ i upravna je na pravu s. Osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ pramenovi $\aleph$ i $\aleph'$ se preslikavaju jedan na drugi, a tačka A u tačku A', što znači $\mathcal{S}_n(o) = o'$.

Kako se u oba slučaja oricikl o izometrijom preslikava na oricikl o', sledi da su orickli o i o' podudarni. □

U Euklidskoj geometriji ekvidistanta je prava, pa su svake dve ekvidistante podudarne. U ravni Lobačevskog ekvidistanta je različita od prave i važi sledeća:

Teorema 17.1.7. *Da bi u ravni L^2 dve ekvidistante bile podudarne, potrebno je i dovoljno da im visine budu podudarne.*

Dokaz. Neka su u ravni L^2 date ekvidistante e i e' redom sa osnovama s i s'. Neka su Q i Q' tačke redom ekvidistanti e i e' a A i A' podnožja normala redom iz tačaka Q i AQ' na prave s i s'. Neka su još B i B' tačke pravih s i s' redom takve da je $AB \cong A'B'$, a $\aleph$ i $\aleph'$ hiperbolički pramenovi kojima su ekvidistante e i e' definisane.



Slika 17.7.

Pretpostavimo da su visine QA i $Q'A'$ podudarne. Tada u ravni L^2 postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ koja trougao ΔQAB prevodi u $\Delta Q'A'B'$. Izometrija $\mathcal{I}$ pramen $\aleph$ prevodi na pramen $\aleph'$ pa samim tim i ekvidistantu e na ekvidistantu e'.

Obratno, neka su ekvidistante e i e' podudarne. Tada postoji izometrija $\mathcal{I}$, takva da je $\mathcal{I}(e) = e'$. Tada je $\mathcal{I}(\aleph) = \aleph'$, $\mathcal{I}(A) = A''$, $\mathcal{I}(B) = B''$ i $\mathcal{I}(Q) = Q'$ (slika 17.7). Ako bi bilo $\mathcal{I}(s) \neq s'$, onda bi svaka prava pramena $\aleph'$ bila upravna na dvema pravama s' i $A''B''$, što je nemoguće. Prema tome, visine ekvidistanti e i e' su podudarne. $\square$

17.2 Klasifikacija izometrijskih transformacija ravni $\mathbf{L^2}$

Još u apsolutnoj geometriji je izvršena kompletna klasifikacija indirektnih izometrijskih transformacija. Kako u apsolutnoj geometriji nije određen odnos disjunktnih pravih u ravni, to nije ni bilo moguće izvršiti klasifikaciju direktnih izometrijskih transformacija. Kao i u Euklidskoj geometriji, i ovde je moguće izvršiti klasifikaciju direktnih izometrijskih transformacija.

Teorema 17.2.1. *Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^2 \to L^2$ predstavlja cikličnu rotaciju, oricikličnu rotaciju, hipercikličnu rotaciju ili koincidenciju.*

Dokaz. S obzirom da je izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ direktna, ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_q$. U zavisnosti od međusobnog položaja pravih p i q mogu nastupiti sledeća četiri slučaja:

(i) Prave p i q seku se u tački O pri čemu je O finitna tačka. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{O,\omega}$, tj. $\mathcal{I}$ je rotacija oko tačke O pri čemu je ω orjentisani dvostruki ugao između pravih p i q.

(ii) Prave p i q su paralelne pri čemu je $p \neq q$. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{H}_{p,q}$ oriciklična rotacija koju definišemo kao kompoziciju dveju osnih refleksija sa osama paralelnim među sobom.

(iii) Prave p i q su hiperparalelne. Tada je $\mathcal{I} = \tau_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija, odnosno hiperciklična rotacija pri čemu je vektor $\overrightarrow{PQ}$ određen zajedničkom normalom hiperparalelnih pravih p i q i predstavlja dvostruki vektor određen rastojanjem po zajedničkoj normali.

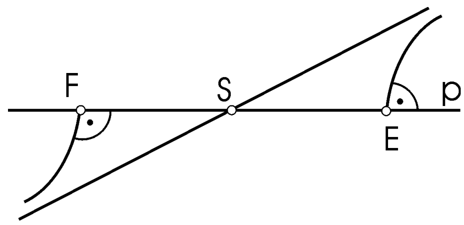
(iv) Prave p i q se poklapaju. Tada je $\mathcal{I} = \varepsilon$ koincidencija. $\square$

Klasifikacija indirektnih izometrijskih transformacija prostora L^2 izvršena je u apsolutnoj geometriji, tj. važi

Teorema 17.2.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^2 \to L^2$ predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju.*

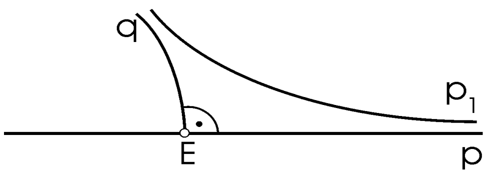
17.3 Prave i ravni u prostoru $\mathbf{L^3}$

Definicija 17.3.1. Za pravu p kažemo da je *paralelna* ili *hiperparalelna* sa ravni π prostora L^3 u zavisnosti od toga da li je prava p paralelna ili hiperparalelna sa pravom koja sadrži njenu upravnu projekciju.



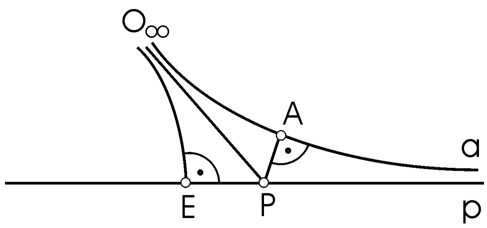
Slika 17.8.

Upravna projekcija prave na pravu pomenuta je još u stavu koji opisuje normalu na jedan krak oštrog ugla koja je paralelna sa drugim krakom. Ako je prava upravna na drugoj pravoj njena upravna projekcija na tu drugu pravu je tačka. Ako prava seče drugu pravu pod oštrim uglom, njena upravna projekcija na tu drugu pravu je otvorena duž.



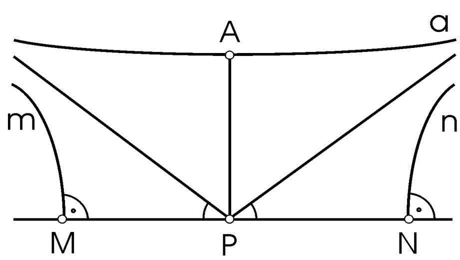
Slika 17.9.

Ako su te prave paralelne i različite (slika 17.9) tada je upravna projekcija jedne od njih na onu drugu poluprava. Naime, možemo pokazati da ako je $p \parallel p_1$ tada postoji jedinstvena prava q takva da je upravna na pravoj p i $q \parallel p_1$. Zaista, ako je $A \in a$, konstruišimo upravnu (slika 17.10) iz tačke A na pravu a. Ta normala seče pravu p u nekoj tački P. U tački P konstruišimo dve prave paralelne sa pravom a u jednom i drugom smeru. Tada je ugao α kod tačke P oštar ugao te postoji jedinstvena prava upravna na pravoj p i paralelna sa drugim krakom ugla te je upravna projekcija prave a na pravu p otvorena poluprava EP.



Slika 17.10.

Ako su prave a i p hiperparalelne projekcija (slika 17.11) prave a na pravu p je otvorena duž. Zaista, neka je AP zajednička normala hiperparalelnih pravih a i p. Iz tačke P možemo konstruisati dve prave paralelne pravoj a. One zahvataju sa pravom p oštre uglove koji su među sobom jednaki. dakle, postoje prave m i n upravne na pravoj p u tačkama M i N i paralelne prethodno navedenim dvema pravama koje su u tački P paralelne pravoj a. Otvorena duž MN je upravna projekcija prave a na pravu p. Na sličan način moguće je diskutovati upravnu projekciju prave na ravan.

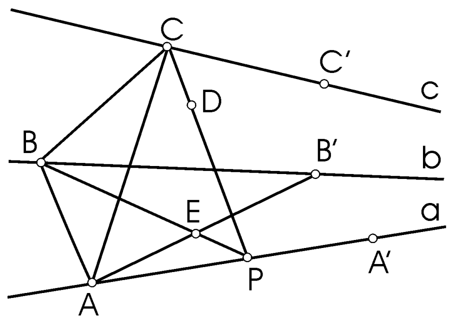


Slika 17.11.

Teorema 17.3.1. *Ako su a i b dve razne međusobno paralelne prave neke ravni π prostora L^3 i C tačka van ravni π, tada se ravni $\alpha(a, C)$ i $\beta(b, C)$ seku po izvesnoj pravoj c koja sadrži tačku C i paralelna je sa pravama a i b u istom smeru.*

Dokaz. Ravni α i β sadrže tačku C koja se nalazi van ravni π, te su ravni α i β različite od ravni π. Ravni α i β seku ravan π po dvema različitim pravama a i b te su i među sobom razne. Ravni α i β imaju zajedničku tačku C pa samim tim (slika 17.12) i zajedničku pravu, označimo je sa c. Dokazaćemo da je prava c paralelna pravama a i b u istom smeru u kome su paralelne prave a i b.

Ustanovimo najpre da prava c nema zajedničkih tačaka sa pravama a i b. Neka prava c seče neku od pravih a i b, recimo pravu a u tački S. Onda tačka S pripada obema ravnima α i β, a kako se nalazi i na pravoj a to ona pripada i ravni π. Dakle, tačka S pripada ravnima π i β pa i njihovoj presečnoj pravoj b. Prave a i b su dve različite paralelne prave sa zajedničkom tačkom S, a to je nemoguće. Dakle, prava c ne seče ni jednu od pravih a i b.



Slika 17.12.

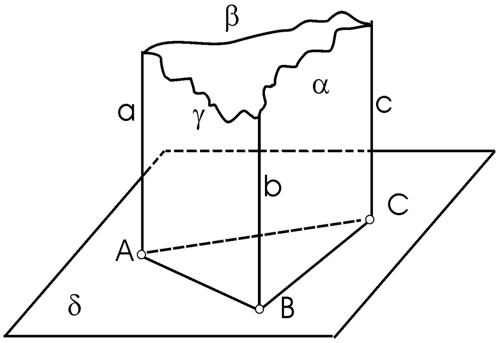
Dokažimo sada da je $c \parallel a$ i $c \parallel b$. Označimo sa A i B proizvoljne tačke redom pravih a i b, sa A' i B' tačke pravih a i b takve da je $AA' \parallel BB'$. Neka je tačka C' sa one strane ravni trougla ABC sa koje su i tačke A' i B'. Da bi smo dokazali da je $CC' \parallel AA'$ dovoljno je da dokažemo da svaka prava koja sadrži tačku C i neku tačku D unutar ugla $\measuredangle ACC'$, seče pravu AA'. Neka je δ ravan određena nekolinearnim tačkama B, C i D. Ta ravan sadrži tačku C izvan ravni π te je $\delta \neq \pi$. Ravni δ i π imaju zajedničku tačku B te se seku po nekoj pravoj BE'. Pri tome su tačke A i B' sa raznih strana ravni δ pa prema tome i sa raznih strana prave BE' po kojoj se seku ravni δ

i π, te duž AB' seče pravu BE' u nekoj tački E. Kako je $BB' \parallel AA'$ prava BE' koja sadrži tačku E i koja se nalazi unutar ugla $\measuredangle ABB'$ seče pravu AA' u nekoj tački P. S obzirom da je tačka P na pravoj BE' po kojoj se seku ravni δ i π tačka P pripada ravnima δ i π. S druge strane tačka P pripada i pravoj AA' po kojoj se seku ravni α i π te tačka P pripada svakoj od navedenih ravni α i δ, tj. njihovoj presečnoj pravoj CD. Dakle $P \in CD$. Kako prava CC' ne seče pravu AA', a prava koja sadrži tačku C i neku tačku D koja se nalazi unutar ugla $\measuredangle ACC'$ seče pravu AA' to je $CC' \parallel AA'$. Istim postupkom dokazuje se da je $CC' \parallel BB'$. $\square$

Teorema 17.3.2. *Neka su a, b i c tri prave prostora L^3 koje nisu sadržane u istoj ravni, tako da su svake dve komplanarne. Ako se prave a i b seku u tački S tada i prava c sadži tačku S.*

Dokaz. Neka je ravan α određena pravama a i b, ravan β pravama a i c a ravan γ pravama a i b. Tada važi: $S \in a \subset \beta$ i $S \in b \subset \alpha$tj. $S \in \alpha \cap \beta = c$.$\square$

Teorema 17.3.3. *Neka su a, b i c tri prave prostora L^3 koje nisu sadržane u istoj ravni, tako da su svake dve komplanarne. Ako se prave prave a i b hiperparalelne, tada je i prava c hiperparalelna i sa pravom a i sa pravom b i sve tri su ortogonalne na istu ravan.*



Slika 17.13.

Dokaz. Označimo sa α (slika 17.13) ravan određenu pravama b i c, sa β - pravama a i c i sa γ - pravama a i b. Kako su prave a i b hiperparalelne, to u ravni γ postoji njhova zajednička normala AB, pri čemu $A \in a$ i $B \in b$. Neka je δ ravan koja sadrži pravu AB i ortogonalna je na ravan γ. Tada su prave a i b ortogonalne na ravan δ. Ravan β sadrži pravu a koja je ortogonalna na ravan δ, odakle sledi da je β ortogonalna na δ. Analogno, ravan α je ortogonalna na δ jer sadrži pravu b koja je ortogonalna na δ. Tada je i presečna prava c ravni α i β ortogonalna na δ. Označimo sa C prodornu tačku prave c kroz ravan δ. Tada je AC zajednička normala pravih a i c, a BC zajednička normala pravih b i c. Dakle, prave a i c su hiperparalelne, a takođe i prave b i c. □

Teorema 17.3.4. *Ako su u prostoru L^3 dve prave a i b paralelne u istom smeru trećoj pravoj c, tada su one paralelne među sobom u istom smeru.*

Dokaz. Slučaj kada su prave a, b i c komplanarne razmatran je u teoremi 15.2.2. Ako prava c seče pravu a u tački S onda i prava b prolazi kroz tačku S prema teoremi 17.3.2. što znači da se prave a i b seku a to nije moguće. Ako bi prava a bila hiperparalelna sa pravom c, onda bi prema teoremi 17.3.3. prave a i b bile hiperparalelne, što je suprotno pretpostavci da su prave a i b paralelne. Zbog komplanarnosti pravih a i c sledi da moraju biti paralelne. Analogno se dokazuje paralelnost pravih b i c. □

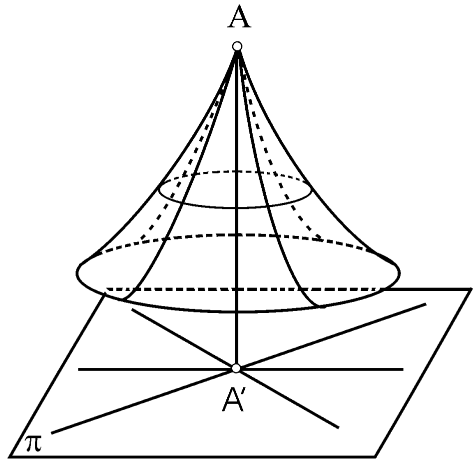
Teorema 17.3.5. *Ako je a prava van ravni π i ako u ravni π postoji prava b paralelna pravoj a, tada je prava a paralelna ravni π.*

Dokaz. Iz paralelnosti pravih a i b sledi da su one komplanarne prave. Označimo sa a' pravu kojoj pripada ortogonalna projekcija prave a na ravan π. Dakle, svake dve od tri prave a, a' i b su komplanarne. Iz paralelnosti pravih a i b sledi prema teoremi 17.3.4. paralelnost pravih a i a', što prema definiciji znači da je prava a paralelna ravni π. □

Iz teoreme 17.3.5. sledi

Teorema 17.3.6. *Neka je prava a paralelna ravni π. Tada je svaka prava b koja je paralelna pravoj a paralelna i sa ravni π.*

Posmatrajmo sve prave koje sadrže neku tačku A van ravni α i paralelne su sa ravni α. Označimo sa A' normalnu projekciju tačke A na ravan α. U Euklidskoj geometriji sve te prave su normalne na pravu AA'. U hiperboličkoj geometriji sve te prave obrazuju sa AA' uglove (slika 17.14) koji su podudarni uglu $\Pi(AA')$, pa sve te prave obrazuju konus. Taj konus nazivamo *konusom paralelnosti za ravan α u tački A*. Ukoliko prava a koja prolazi kroz tačku A sa pravom AA' obrazuje ugao manji od $\Pi(AA')$, onda za nju kažemo da pripada unutrašnjosti konusa paralelnosti. Ta prava seče svoju ortogonalnu projekciju na ravan α pa samim tim i ravan α.

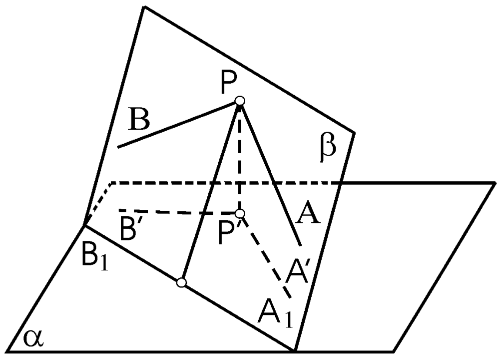


Slika 17.14.

Ako pak prava a sa pravom AA' obrazuje ugao koji je veći od ugla $\Pi(AA')$, ona je sadržana u spoljašnjosti konusa paralelnosti. Ta prava je mimoilazna sa svojom ortogonalnom projekcijom na ravan α pa je mimoilazna i sa ravni α. Ravan β kroz vrh A konusa paralelnosti ravni α ili seče konus paralelnosti po dvema pravama ili ga dodiruje po jednoj pravoj ili sa njim osim tačke A nema drugih zajedničkih tačaka. U prvom slučaju ravan β sadrži dve prave koje su paralelne sa ravni α, u drugom jednu a u trećem slučaju nijednu.

Teorema 17.3.7. *Ako u jednoj tački ravni β postoje dve prave koje su paralelne drugoj ravni α, onda u svakoj tački ravni β postoje dve prave koje su paralelne ravni α. Ravni α i β se seku a presečna prava je paralelna svakoj od pomenutih dveju pravih.*

Dokaz. Neka su PA i PB dve prave ravni β paralelne sa ravni α. Označimo sa $P'A'$ i $P'B'$ normalne projekcije pravih PA i PB na ravan α tada je $PA \parallel P'A'$ i $PB \parallel P'B'$. Svaka prava ravni β koja sadrži tačku P i ima tačaka u unutrašnjosti ugla $\measuredangle APB$, sadržana je u unutrašnjosti konusa paralelnosti za ravan α u tački P, pa prema tome seče ravan α. Dakle, ravni α i β imaju zajedničkih tačaka pa samim tim i zajedničku pravu. Označimo je A_1B_1. Tada je $PA \parallel B_1A_1$ i $PB \parallel A_1B_1$. Svaku tačku ravni α sadrži jedna prava koja je paralelna sa B_1A_1 i jedna prava koja je paralelna sa A_1B_1. Isto važi i za proizvoljnu tačku ravni β. $\square$



Slika 17.15.

Analogno se dokazuje i sledeća teorema

Teorema 17.3.8. *Ako u jednoj tački ravni β postoji jedna prava koja je paralelna sa ravni α, onda u svakoj tački ravni β postoji jedna prava koja je paralelna sa ravni α.*

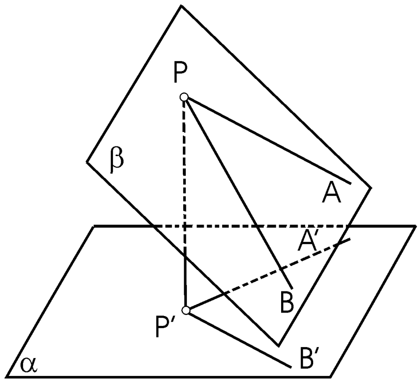
Ravni α i β iz prethodne teoreme nemaju zajedničkih tačaka jer bi u suprotnom u svakoj tački ravni α i β postojale dve prave paralelne sa presečnom pravom.

Definicija 17.3.2. Ako u nekoj tački A ravni α postoji jedinstvena prava koja je paralelna sa ravni β, onda kažemo da je ravan α *paralelna* ravni β.

Teorema 17.3.9. *Neka je prava PA paralelna ravni α. Tada postoji jedna i samo jedna ravan β koja sadrži pravu PA i paralelna je ravni α.*

Dokaz. Označimo sa P' (slika 17.16) ortogonalnu projekciju tačke P na ravan α. Neka je π poluravan sa ivicom PP' koja sadrži tačku A. Označimo sa β ravan koja sadrži pravu PA i ortogonalna je na π. Dokazaćemo da je $\beta \parallel \alpha$. Dovoljno je da dokažemo da je u ravni β kroz tačku P prava PA jedina prava paralelna ravni α. Neka je PB još jedna prava ravni β takva da je $PB \parallel \alpha$.

Označimo sa π_1 poluravan sa ivicom PP' koja sadrži tačku B a sa δ simetralnu ravan dijedra koji obrazuju poluravni π i π_1. Pri tome je $\measuredangle APP' \cong \Pi(PP')$ i $\measuredangle BPP' \cong \Pi(PP')$ odakle je $\measuredangle APP' \cong \measuredangle BPP'$. To znači da je pri ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\delta$ u odnosu na ravan δ zadovoljeno $\mathcal{S}_\delta(PA) = PB$ i $\mathcal{S}_\delta(PB) = PA$, tj. refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ravan određenu tačkama P,



Slika 17.16.

A i B prevodi u samu sebe. Dakle, $\mathcal{S}_\delta(\beta) = \beta$. Znači dijedar koji obrazuju π i β se preslikava na dijedar koji obrazuju π_1 i β. Kako je $\pi \perp \beta$ to je i $\pi_1 \perp \beta$. Dakle ravni π i π_1 su ortogonalne na ravan β pa je i njihova presečna prava PP' ortogonalna na ravan β. To znači da je $\measuredangle APP' \cong \Pi(PP')$ prav a to je u suprotnosti sa aksiomom Lobačevskog. Prema tome, prava PA je jedina prava u ravni β koja sadrži tačku P i paralelna je sa ravni α.

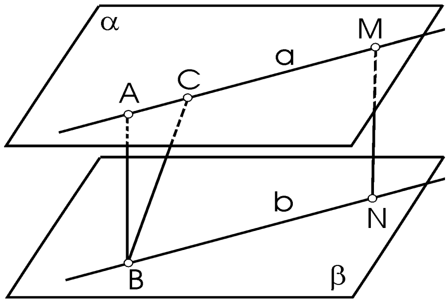
Trebamo još pokazati da proizvoljna ravan γ koja sadrži PA i nije ortogonalna na π, seče konus paralelnosti po još jednoj izvodnici. Neka je ξ ravan koja je ortogonalna na pravu PP' i seče PP' u tački koja je između tačaka P i P'. Ona seče pravu PA u tački A_1, a konus paralelnosti po krugu k. Ako je $\xi \cap \beta = b$, b je tangenta kružnice k u tački A_1. Prava $\xi \cap \gamma$ sadrži tačku A_1 ali nije tangenta kruga k. Prema tome, ona seče k u još jednoj tački. Ta tačka sa tačkom P određuje drugu izvodnicu konusa paralelnosti koja je sadržana u ravni γ. $\square$

Na osnovu dosad rečenog neposredno slede sledeća tvrđenja:

Teorema 17.3.10. *Ako u jednoj tački ravni α ne postoji ni jedna prava koja je paralelna sa ravni β, tada ni u jednoj tački ravni α ne postoji prava koja je paralelna sa ravni β.*

Definicija 17.3.3. Ako u ravni α postoji tačka A takva da nijedna prava ravni α kroz tačku A nije paralelna sa ravni β tada kažemo da je ravan α *hiperparalelna* sa ravni β.

Teorema 17.3.11. *Dve hiperparalelne ravni u L^3 imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*



Slika 17.17.

Dokaz. Neka su ravni α i β (slika 17.17) hiperparalelne. Obeležimo sa A bilo koju tačku ravni α, sa B podnožje upravne iz tačke A na ravan β a sa C podnožje upravne iz iz tačke B na ravan α. Ako je pri tome $C \equiv A$, AB je zajednička normala tih hiperparalelnih ravni. Neka je $C \neq A$. U tom slučaju su A, B, C tri nekolinearne tačke te određuju neku ravan π. Ravan π sadrži tačku B koja se nalazi van ravni α te je $\pi \neq \alpha$. Tačke A i C pripadaju i ravni π i ravni α te je prava AC presečna prava ravni π i α. Tačka A pripada ravni π i ne pripada ravni β te je $\pi \neq \beta$. Tačka B pripada ravnima π i β te se one seku po nekoj pravoj b koja sadrži tačku B. Označimo sa a pravu AC i dokažimo da su prave a i b hiperparalelne. Zaista, prave a i b ne mogu imati zajedničkih tačaka jer bi njihova zajednička tačka bila zajednička tačka ravni α i β što je nemoguće. Takođe prave a i b nisu paralelne što sledi iz hiperparalelnosti ravni α i β pa prema tome prave a i b moraju biti hiperparalelne. Prema tome postoji jedinstvena zajednička normala MN pravih a i b. Ravan π sadrži pravu BC koja je upravna na α te je $\pi \perp \alpha$. Kako MN pripada ravni π i $MN \perp a$ biće $MN \perp \alpha$. Istim postupkom dokazujemo da je $MN \perp \beta$, te je MN zajednička normala hiperparalelnih ravni α i β.

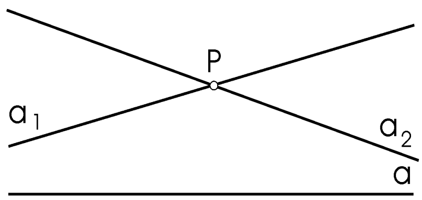
Jedinstvenost zajedničke normale dokazujemo indirektnim postupkom. Neka ravni α i β imaju dve zajedničke normale MN i M_1N_1. U tom slučaju prave MN i M_1N_1 su komplanarne te određuju ravan četvorougao sa sva četiri unutrašnja prava ugla, što je nemoguće. Prema tome, postoji jedinstvena zajednička normala dveju hiperparalelnih ravni. □

Teorema 17.3.12. *Duž koja spaja podnožja zajedničke normale dveju hiperparalelnih ravni je najkraća od svih duži koje spajaju bilo koje dve tačke tih dveju ravni.*

Definicija 17.3.4. *Mimoilaznim pravama* prostora L^3 nazivamo prave za koje ne postoji ravan koja ih sadrži.

Osobine mimoilaznih pravih prostora L^3 su iste kao osobine mimoilaznih pravih Euklidskog prostora E^3 ali su dokazi drugačiji.

Teorema 17.3.13. *Ako su a i b dve mimoilazne prave u L^3, tada postoje dve i samo dve ravni π_1 i π_2 takve da svaka od ravni π_1 i π_2 sadrži pravu b i paralelna je sa pravom a.*

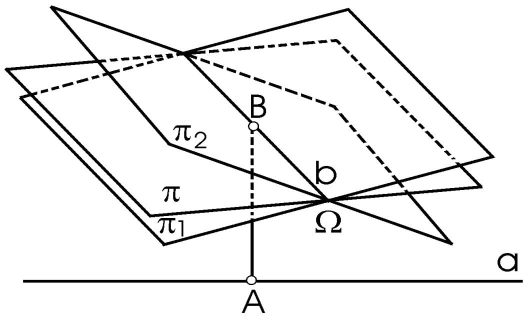


Slika 17.18.

Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka prave b. Kako su a i b mimoilazne prave to $P \notin a$. Stoga u ravni π određenoj pravom a i tačkom P (slika 17.18) postoje dve prave a_1 i a_2 koje sadrže tačku P i paralelne su sa pravom a u raznim smerovima. Pri tome su prave a_1 i a_2 različite od prave b. Prave a_1 i b se seku i određuju neku ravan π_1. Na isti način prave a_2 i b određuju ravan π_2. Prava a je paralelna sa pravom a_1 koja je u ravni π_1, pa je prema tome $a \parallel \pi_1$. Na isti način je $a \parallel \pi_2$ te postoje dve ravni π_1 i π_2 koje sadrže pravu b i paralelne su sa pravom a u raznim smerovima. Jedinstvenost tih ravni dokazuje se indirektnim postupkom. $\square$

Teorema 17.3.14. *U prostoru L^3 postoji jedinstvena prava n upravna na dvema mimoilaznim pravama a i b tog prostora.*

Dokaz. Neka su prema prethodnoj teoremi π_1 i π_2 ravni u prostoru L^3 takve da je $\pi_1 \parallel a$, $\pi_2 \parallel a$ i $b = \pi_1 \cap \pi_2$. Ravni π_1 i π_2 se seku po pravoj b (slika 17.19) pa određuju dva para unakrsnih dijedara. Kako je $a \parallel \pi_1$, $a \parallel \pi_2$ i $a \neq b$ prava a se nalazi u jednom od pomenutih dijedara. Označimo ga sa Ω. Neka je π simetralna ravan onog para unakrsnih dijedara određenih ravnima π_1 i π_2 u kojima se ne nalazi prava a. Neka su zatim α i β ravni koje respektivno sadrže prave a i b i upravne su na ravan π. Pri tome je i ravan β medijalna ravan dijedra Ω u kome se nalazi prava a koja je paralelna sa



Slika 17.19.

njegovim pljosnima. Stoga ravan β seče pravu a u nekoj tački A. Ravni α i β su razne i imaju zajedničku tačku A te se seku po nekoj pravoj n. Prava n seče pravu b u nekoj tački B. Budući da je prava b u nekoj ravni π koja je u tački B upravna na pravoj n biće $n \perp b$. S obzirom da ravan α sadrži pravu n koja se nalazi u medijalnoj ravni dijedra Ω i koja je upravna na ivici b tog dijedra, ravan α seče pljosni tog dijedra po izvesnom uglu kome je prava n simetrala. Pri tome je prava a paralelna sa kracima tog ugla pa je prava n upravna na pravu a. Na taj način prava n je upravna na svaku od dveju mimoilaznih pravih a i b. Jedinstvenost se dokazuje indirektnim postupkom. $\square$

Nije teško pokazati da važi i sledeća

Teorema 17.3.15. *Od svih duži koje spajaju tačke dveju mimoilaznih pravih prostora L^3 najmanja je ona duž koja spaja podnožja zajedničke normale tih mimoilaznih pravih.*

17.4 Episfere prostora $\mathbf{L^3}$

Definicija 17.4.1. Neka je u L^3 dat snop pravih i na jednoj pravoj tog snopa tačka A. Skup koji se sastoji iz tačke A i svih tačaka na pravama datog snopa koje odgovaraju u transformacijama grupe epicikličkih rotacija tački A, zovemo *episferom* tog snopa pravih. U zavisnosti od toga da li je posmatrani snop pravih eliptički, parabolički ili hiperbolički, odgovarajuću episferu zovemo *sferom*, *hipersferom* ili *orisferom*.

Ako je snop eliptički (tj. sve prave snopa prolaze kroz jednu tačku - centar snopa) neposredno se ustanovljuje da su sve tačke sfere podjednako udaljene od središta snopa i obratno da sve tačke prostora podjednako udaljene od centra snopa pripadaju jednoj *sferi*.

Ako je snop parabolički (tj. sve prave snopa su među sobom paralelne) *orisfera* koja se tada dobija može se smatrati graničnim slučajem sfere čije je središte tačka O_∞ (infinitna tačka posmatranog paraboličkog pramena pravih).

Ako je snop hiperbolički (tj. sve prave snopa su upravne na istu ravan) kao rezultat se dobija hipersfera koja predstavlja skup tačaka podjednako udaljenih od bazisne ravni, tj. osnove snopa. Stoga hipersferu analogno slučaju hipercikla u L^2 nazivamo i *ekvidistantnom površi.* Osnovu odgovarajućeg snopa pravih nazivamo *osnovom* ekvidistantne površi a duž, tj. udaljenost bilo koje tačke od osnove visinom te ekvidistantne površi.

Teorema 17.4.1. *U prostoru L^3 postoje isključivo tri površi stalne ili konstantne krivine. To su sfera, orisfera i hipersfera (ekvidistantna površ).*

Napomenimo da je ekvidistantnu površ moguće razmatrati i kao dvojnu ekvidistantnu površ, tj. kao dva disjunktna skupa tačaka podjednako udaljenih od zajedničke bazisne ravni pri čemu svaki od ovih skupova tačaka pripada po jednom poluprostoru određenim bazisnom ravni.

Pomenute tri površi se često nazivaju i površima konstantne krivine. Osobina da površ u svakoj svojoj tački ima konstantnu krivinu omogućuje toj površi da se kreće sama po sebi. To svojstvo omogućuje da na svakoj od tih površi izgradimo elementarnu geometriju. Naime Euklidska geometrija može se izgraditi isključivo na površima konstantne krivine.

Analogno slučaju ravni L^2 i u prostoru L^3 se dokazuju sledeće teoreme.

Teorema 17.4.2. *Dve sfere su podudarne ako i samo ako su im jednaki poluprečnici.*

Teorema 17.4.3. *Dve orisfere su uvek međusobno podudarne.*

Teorema 17.4.4. *Dve ekvidistantne površi su podudarne ako i samo ako imaju jednake visine.*

Presek dveju episfera je epicikl. Takođe je presek episfere i ravni epicikl. Ukoliko presečna ravan sadrži pravu snopa kojom je episfera definisana onda za presek dobijamo krug, oricikl ili ekvidistantu u zavisnosti od toga da li je razmatrana episfera: sfera, orisfera ili ekvidistantna površ. Ukoliko je presečna ravan upravna na nekoj pravoj snopa za presek episfere i ravni dobija se krug ili tačka. S obzirom na to da postoji jedinstvena prava snopa upravna na zadatu ravan, presek proizvoljne ravni koja ne sadrži pravu kojom je ta orisfera definisana i orisfere je krug. Ako ravan seče osnovu ekvidistantne površi, nije teško ustanoviti da je presek ravni i ekvidistantne površi ekvidistanta. Odgovor na pitanje šta se dobija u preseku ekvidistantne površi i ravni koja je paralelna bazisnoj ravni ekvidistantne površi daje sledeća teorema, čiji dokaz prepuštamo čitaocu:

Teorema 17.4.5. *Presek ravni α koja je paralelna osnovi π neke ekvidistantne površi i koja pripada poluprostoru sa rubom π kome pripada ekvidistantna površ je oricikl.*

17.5 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora $\mathbf{L}^3$

Teorema 17.5.1. *Svaka direktna izometrijska transformacija prostora L^3 predstavlja koincidenciju, osnu rotaciju, oriciklički rotaciju, hiperciklički rotaciju (translaciju) ili zavojno kretanje.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{I}$ direktna izometrijska transformacija prema poznatom stavu iz Apsolutne geometrije ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$. U zavisnosti od uzajamnog položaja pravih m i n razlikujemo pet mogućnosti:

(i) Prave m i n se poklapaju. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m^2 = \varepsilon$ *koincidencija.*

(ii) Prave m i n se seku u nekoj tački O. U tom slučaju prave m i n određuju neku ravan π. Obeležimo sa π_1 i π_2 ravni koje sadrže prave m i n i upravne su na ravni π. U tom slučaju biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$$

pri čemu je $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_n$ jer je $\pi_2 \perp \pi$ i $\pi_2 \cap \pi = n$. Na isti način je $\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_m$ jer je $\pi_1 \perp \pi$ i $\pi_1 \cap \pi = m$. Najzad ravni π_1 i π_2 imaju neku zajedničku tačku O pa imaju i zajedničku pravu s jer je $\pi_1 \neq \pi_2$. Zato je $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ *rotacija* oko ose s pri čemu je ω dvostruki ugao između pravih m i n.

(iii) Prave m i n su paralelne i $m \neq n$. U tom slučaju prave m i n određuju neku ravan π. Obeležimo sa π_1 i π_2 ravni koje sadrže respektivno prave m i n i upravne su na ravni π. Tada će biti

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{H}_{\pi_1,\pi_2}$$

tj. $\mathcal{I}$ je *oriciklička rotacija* jer su prave m i n međusobno paralelne u nekom smeru, ravni π_1 i π_2 su upravne na π i sadrže redom prave m i n te su i ravni π_1 i π_2 među sobom paralelne.

(iv) Prave m i n su hiperparalelne i $m \neq n$. U tom slučaju prave m i n poseduju jedinstvenu zajedničku normalu MN. Prave m i n određuju izvesnu ravan π i pripadaju respektivno ravnima π_1 i π_2 koje su upravne na ravan π te je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi}\mathcal{S}_{\pi}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \tau_{\overrightarrow{MM'}}.$$

Prema tome u ovom slučaju kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}$ je *hiperciklička rotacija* (translacija) za vektor $\overrightarrow{MM'}$ gde je M' tačka simetrična tački M u odnosu na pravu n.

(v) Prave m i n su mimoilazne. U tom slučaju postoji zajednička normala s pravih m i n. Označimo $s \cap m = M$ i $s \cap n = N$. Neka su π_1 i π_2 ravni upravne na s u tačkama M i N. Budući da su i prave m i n upravne na s u tačkama M i N to prava m pripada ravni π_1 a prava n ravni π_2. Neka su zatim σ_1 i σ_2 ravni koje sadrže redom parove m, s odnosno n, s. U tom slučaju je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1}\mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\sigma_1}\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}\tau_{\overrightarrow{MM'}}$$

gde je $\mathcal{S}_{\sigma_2}\mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ rotacija a $\mathcal{S}_{\pi_2}\mathcal{S}_{\pi_1} = \tau_{\overrightarrow{MM'}}$. Prava s je presek ravni σ_1 i σ_2, $\omega = 2\measuredangle(\sigma_1, \sigma_2)$ i ravni π_1 i π_2 su upravne na pravu s, a tačke M, M' pripadaju pravoj s, te je u ovom slučaju kompozicija $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$ *zavojno kretanje* $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$. □

Teorema 17.5.2. *Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I} : L^3 \to L^3$ različita od ravanske refleksije predstavlja cikličku, oricikličku ili hipercikličku rotacionu refleksiju.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija različita od ravanske refleksije. Njena optimalna simetrijska reprezentacija sastoji se od tri ravanske refleksije. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\alpha$, pri čemu su α, β, γ osnove pomenutih refleksija. Ravni α, β i γ ne pripadaju jednom pramenu ravni jer bi u protivnom $\mathcal{I}$ bila ravanska refleksija. Prema tome ravni α, β i γ određuju snop ravni $\mathcal{Y}$ jer su presečne prave svake dve ravni komplanarne. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija biće $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ pa prema tome postoji tačka $P \in L^3$ takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Neka je Q središte duži PP' a p i q prave koje redom sadrže tačke P i Q i pripadaju snopu pravih koji je induciran snopom $\mathcal{Y}$. S obzirom da je kompozicija $\mathcal{S}_q\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija kojoj je svaka tačka prave p invarijantna prema teoremi iz Apsolutne geometrije ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_q\mathcal{I}$ pri čemu prava p pripada ravni μ i prema tome $\mu \in \mathcal{Y}$. Iz navedene jednakosti je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q\mathcal{S}_\mu$. Ako obeležimo sa σ ravan koja sadrži pravu q i upravna je na ravan μ, a sa ν ravan koja je upravna na ravan σ biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\sigma\mathcal{S}_n u\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\sigma\mathcal{L}_{\mu,\nu}$$

gde je sa $\mathcal{L}_{\mu,\nu}$ označena kompozicija $\mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu$ u kojoj su ravni ν i μ upravne na istoj ravni σ. U zavisnosti od toga da li se μ i ν seku, da li su paralelne ili su hiperparalelne ta kompozicija predstavlja osnu, oricikličku ili hipercikličku rotaciju te $\mathcal{I}$ predstavlja rotacionu, tj cikličku, oricikličku ili hipercikličku rotacionu refleksiju. U skladu sa činjenicom da je hiperciklička rotacija - translacija, hiperciklička rotaciona refleksija predstavlja klizajuću refleksiju prostora L^3. □

17.6 Unutrašnja geometrija orisfere

Pozaćemo da hiperbolički prostor na orisferi indukuje jednu geometriju - unutrašnju geomeriju orisfere. Dokazaćemo da je ta geometrija - Euklidska geometrija, tj. dokazaćemo da su na orisferi zadovoljene sve aksiome Euklidske geometrije.

Ravan koja sadrži osu orisfere, seče tu orisferu po nekom oriciklu. U unutrašnjoj geometriji orisfere takvom oriciklu ćemo dodeliti ulogu prave.

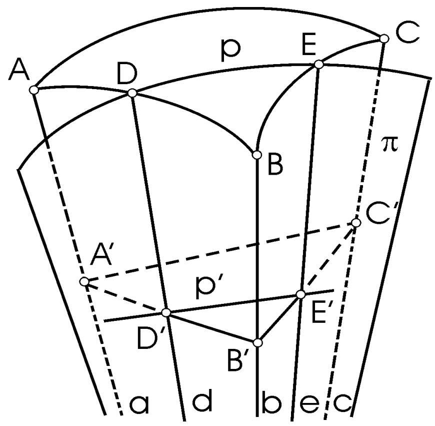
Neka su date dve tačke A i B orisfere o i neka su a i b one ose orisfere koje sadrže date tačke. Prave a i b su paralelne, dakle i komplanarne, pa određuju tačno jednu ravan π. Ravan π i orisfera o se seku po nekom oriciklu p, pri čemu tačke A i B pripadaju oriciklu p. Prema tome, za svake dve tačke orisfere postoji jedan i samo jedan oricikl koji ih sadrži, što znači da su aksiome I_1 i I_2 zadovoljene. Svaki oricikl sadrži bar dve tačke a sam je sadržan u nekoj ravni. Postoji bar jedna osa orisfere koja sadrži neku tačku van posmatranog oricikla. To znači da je na orisferi zadovoljena i treća a takođe i četvrta aksioma incidencije.

Uvedimo sada relaciju *između* na orisferi.

Definicija 17.6.1. Neka su a, b i c ose orisfere redom kroz tačke A, B i C na orisferi. Za tačku B ćemo reći da je *između* tačaka A i C na orisferi (oznaka: $\mathcal{B}(A, B, C)$) ako su ose a, b i c komplanarne pri čemu je osa b između osa a i c.

Imajući u vidu ovakvu definiciju veoma lako možemo utvrditi da na orisferi važi prvih pet aksioma poretka. Situacija je nešto komplikovanija kod utvrđivanja važnosti Pašove aksiome. Za ovako definisanu relaciju *između* važi sledeća teorema:

Teorema 17.6.1. *Neka su A, B i C tri tačke orisfere koje ne pripadaju istom oriciklu i neka je p oricikl koji ne sadrži ni jednu od tačaka A, B i C. Ako postoji tačka D na orisferi takva da je $\mathcal{B}(A,D,B)$ tada postoji i tačka E na oriciklu p takva da je $\mathcal{B}(A,E,C)$ ili $\mathcal{B}(B,E,C)$.*



Slika 17.20.

Dokaz. Označimo sa a, b, c, d ose orisfere (slika 17.20) koje odgovaraju respektivno tačkama A, B, C i D; sa A', B' i C' proizvoljne tačke pravih a, b i c redom, u smeru paralelnosti pravih a, b i c; sa δ ravan određenu tačkama A', B' i C' a sa π ravan koja sadrži oricikl p. Prava d nalazi se u ravni određenoj osama a i b oricikla, pri čemu je d između a i b. Označimo sa D' presečnu tačku pravih d i $A'B'$. Tada tačka D' zadovoljava sledeće uslove: $\mathcal{B}(A',D',B')$, $D' \in \delta$, $D' \in \pi$. Ravni δ i π imaju zajedničku tačku D' pa samim tim i zajedničku pravu, označimo je sa p'.

Kako je u hiperboličkoj ravni δ zadovoljena Pašova aksioma za trougao $\Delta A'B'C'$ i pravu p' iz uslova $\mathcal{B}(A',D',B')$ sledi da prava p' sadrži tačku E' takvu da je $\mathcal{B}(B',E',C')$ ili $\mathcal{B}(A',E',C')$. Neka je zadovoljena prva od ove dve relacije. Tada tačka E' pripada ravni π i ravni $BCC'B'$. To znači da te dve ravni imaju zajedničku pravu e. Svake dve od tri prave b, e i DD' su komplanarne pa pripadaju istom pramenu pravih. Kako su prave b i DD'

paralelne to je i e paralelna u istom smeru sa njima dvema pa predstavlja osu orisfere. Prema tome, prava e seče orisferu. Označimo sa E presečnu tačku prave e sa orisferom. Tada tačka E pripada oriciklu p. Kako je prava e paralelna sa pravama b i c i sadrži tačku E' koja je između pravih b i c to je i prava e između pravih b i c a to upravo znači da je $\mathcal{B}(B, E, C)$. Na potpuno isti način ako pretpostavimo da važi $\mathcal{B}(A', E', C')$ dobijamo $\mathcal{B}(A, E, C)$. □

Definicija 17.6.2. Za par tačaka (P, Q) reći ćemo da je *podudaran* paru tačaka (P', Q') na orisferi o, ako postoji kretanje te orisfere po samoj sebi, koje prevodi tačke P i Q redom u tačke P' i Q', tj. ako postoji izometrija $\mathcal{I} : L^3 \to L^3$ takva da je $\mathcal{I}(o) = o$, $\mathcal{I}(P) = P'$ i $\mathcal{I}(Q) = Q'$.

Sa tako uvedenom relacijom podudarnosti neposredno se može dokazati važenje svih aksioma podudarnosti a takođe i aksiome neprekidnosti. Zatim možemo dokazati da na orisferi važi i Plejferova aksioma paralelnosti.

Teorema 17.6.2. *Kroz tačku A na orisferi o, van nekog oricikla p te orisfere, postoji tačno jedan oricikl koji sa oriciklom p nema zajedničkih tačaka.*

Dokaz. Na orisferi o uočimo oricikl p i tačku A van oricikla p. Označimo sa a osu orisfere kroz tačku A a sa π ravan koja sadrži oricikl p. Svaki oricikl orisfere o koji sadrži tačku A može se dobiti kao presek orisfere i ravni koja sadrži pravu a. Prema tome problem nalaženja broja oricikala na orisferi koji sadrže tačku A i ne seku oricikl p svodi se na nalaženje broja ravni koje sadrže pravu a i ne seku ravan π. Kako je prava a paralelna ravni π to postoji tačno jedna ravan koja sadrži pravu a i sa ravni π nema zajedničkih tačaka. Prema tome na orisferi postoji jedan i samo jedan oricikl koji sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa oriciklom p. □

Na osnovu iznetog važi sledeća teorema:

Teorema 17.6.3. *Unutrašnja geometrija orisfere je Euklidska geometrija. Pri tome, ulogu prave ima onaj oricikl orisfere koji pripda ravni koja sadrži ose orisfere.*

Na hipersferi ulogu pravih linija imaju ekvidistantne linije dobijene u preseku hipersfere i ravni upravnih na bazisnu ravan hipersfere. Tako dobijene ekvidistantne linije zovu se *geodezijske ekvidistante.* Sa ovakvim "pravim" na hipersferi se realizuje hiperbolička geometrija, tj. važi sledeća teorema

Teorema 17.6.4. *Unutrašnja geometrija ekvidistantne površi je hiperbolična geometrija. Pri tome, ulogu prave na hipersferi ima geodezijska ekvidistanta.*

Glava 18

Poenkareov model geometrije Lobačevskog

18.1 Neprotivurečnost geometrije Lobačevskog

Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije. To znači, da polazeći od istog sistema polaznih pojmova, možemo izgraditi različite teorije. Dajući apstraktnim pojmovima konkretna značenja i ustanovljavanjem da sa tako uvedenim pojmovima važe određeni sistemi aksioma Euklidske geometrije ili pak geometrije Lobačevskog dolazimo do različitih interpretacija tih teorija. Te interpretacije zovemo *modelima.* Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno određen. To znači da se polazeći od različitih sistema aksioma može izgraditi jedna ista deduktivna teorija. Tako se na primer geometrija Lobačevskog i Euklidska geometrija ne moraju zasnivati na aksiomama od kojih smo mi pošli. Može se na primer poći od Vejlovog sistema aksioma (Herman Vejl) ili neke izmene unutar našeg sistema aksioma, na primer umesto aksioma podudarnosti uvesti aksiome kretanja, a umesto Dedekindove aksiome uvesti dve aksiome: Eudoks-Arhimedovu i Kantorovu aksiomu.

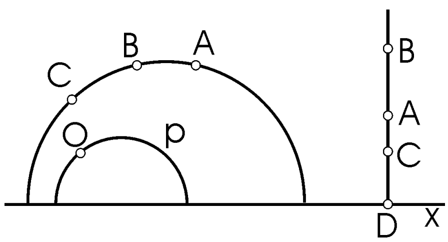
Pri tome se postavljaju tri značajna uslova koji karakterišu svaku deduktivnu teoriju: (i) *neprotivurečnost*, (ii) *potpunost* i (iii) *nezavisnost* sistema aksioma i samih pojmova jedne deduktivne teorije.

Zadržimo se samo na konstrukciji izvesnih modela koji će omogućiti ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije, tj. činjenicu da se unutar same teorije ne mogu izvesti dva stava koja bi bila protivurečna. Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečna. Drugim rečima, neprotivurečnost neke teorije mora počivati na neprotivurečnosti neke druge teorije. Na taj način dolazimo do iste situacije kao i pri konstrukciji deduktivne teorije gde su kao osnova morale biti uzete aksiome - tvrđenja koja se ne dokazuju već se pretpostavlja njihovo važenje. Slično neprotivurečnost izvesne teorije mora biti pretpostavljena da bi se druge teorije mogle na njoj zasnivati. Neprotivurečnost teorije skupova može se pretpostaviti. Na osnovu nje može se dokazati neprotivurečnost teorije brojeva, na osnovu koje možemo dokazati neprotivurečnost Euklidske geometrije na tzv. aritmetičkom modelu.

Konstruisaćemo takav model u Euklidskoj geometriji na kome će biti realizovani svi pojmovi i sve aksiome geometrije Lobačevskog, pretpostavljajući neprotivurečnost Euklidske geometrije. Pri tome ćemo se ograničiti na pokazivanje neprotivurečnosti planimetrije Lobačevskog. Na sličan način može se pokazati i neprotivurečnost stereometrije Lobačevskog. Ovde ćemo opisati samo jedan, tzv. Ponkareov (H. Poincaré) model hiperboličke geometrije. Tačnije rečeno, opisaćemo Poenkareov model hiperboličke planimetrije koji je nastao 1882. godine.

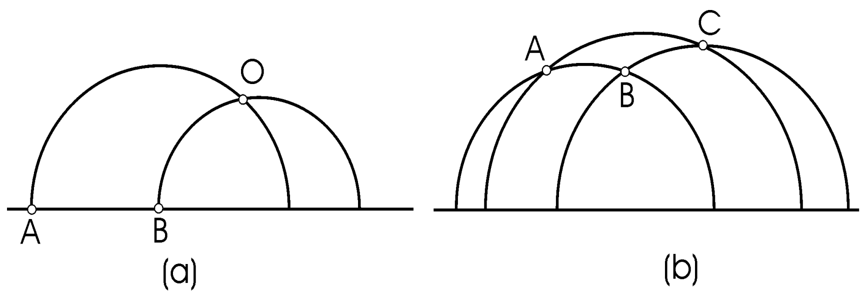
18.2 Opis Poenkareovog modela

Interpretaciju planimetrije Lobačevskog konstruisaćemo u Euklidskoj ravni E^2, tj. otvorenoj Euklidskoj poluravni. Saglasimo se da bilo koju tačku neke otvorene Euklidske poluravni σ nazovemo *neeuklidskom tačkom.* Na tako ustanovljenom skupu neeuklidskih tačaka uvedimo klase podskupova C_l.



Slika 18.1.

Neeuklidskom pravom saglasimo se da nazovemo svaki Euklidski polukrug pomenute neeuklidske ravni kome se središte nalazi na rubu te ravni. Taj rub obeležimo sa x (slika 18.1) i nazovimo *apsolutom* neeuklidske ravni σ. Pravom ćemo nazvati i svaku polupravu Euklidske poluravni σ koja je upravna na rub x i čiji kraj pripada tom rubu. Nije teško ustanoviti da na ovako konstruisanom modelu važe sve aksiome incidencije planimetrije Lobačevskog.



Slika 18.2.

Na slici 18.2 (a) je predstavljen neeuklidski ugao $\measuredangle AOB$, a na slici 18.2 (b) neeuklidski trougao ΔABC. Definišimo zatim relaciju *između* na tako ustanovljenom skupu Euklidskih tačaka i pravih. Smatraćemo da je neeuklidska tačka B između neeuklidskih tačaka A i C ako se tačke A, B i C nalaze na istoj neeuklidskoj pravoj i ako je u Euklidskom smislu na toj liniji tačka B između tačaka A i C. Sa tako ustanovljenim pojmovima: tačka, prava i relacija *između* nije teško ustanoviti da na zasnovanom skupu neeuklidskih tačaka i pravih važe sve aksiome incidencije i poretka. Da bismo ustanovili aksiome podudarnosti neophodno je da uvedemo relaciju podudarnosti neeuklidskih parova tačaka na takvom modelu. Kazaćemo da je par neeuklidskih tačaka (A, B) podudaran paru neeuklidskih tačaka (A', B') ako postoji konačan niz inverzija pomenute poluravni koji neeuklidsku duž AB prevodi u neeuklidsku duž $A'B'$. Neeuklidska duž je skup svih tačaka neeuklidske prave koje su između datih tačaka A i B. Tačkom O neeuklidska prava p je razložena na dve neeuklidske poluprave. Sada se može ustanoviti da važe i sve aksiome podudarnosti.

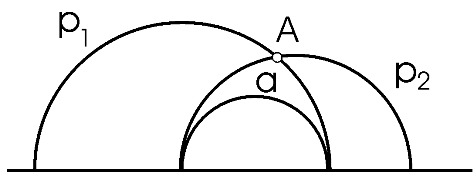
Značajno je rešavanje pitanja sledećeg problema:

Ako je na neeuklidskoj pravoj p data neeuklidska duž AB a na neeuklidskoj prvoj p' neeuklidska tačka A', kako na neeuklidskoj pravoj p' sa određene strane neeuklidske tačke A' konstruisati neeuklidsku tačku B' takvu da je $(A, B) \cong (A', B')$?

Konstruišimo neeuklidsku pravu određenu tačkama A i A'. Zatim konstruišimo neeuklidsku medijatrisu n duži AA' na sledeći način: Konstruišimo Euklidsku pravu AA' i označimo sa O njen presek sa x. Označimo sa T dodirnu tačku te tangente i euklidskog polukruga p. Tražena medijatrisa n neeuklidske duži AA' je polukrug sa centrom u tački O i poluprečnikom OT. Konstruišimo zatim neeuklidsku normalu iz tačke B na medijatrisu n. Postoji jedinstven polukrug sa središtem na x koji sadrži tačku B i upravan je na polukrug n. Zatim se konstruiše tačka inverzna tački B u odnosu na polukrug n (simetrična tački B u odnosu na medijatrisu n). Označimo je sa B''. Tačke A' i B'' određuju neeuklidsku pravu p'' koja je simetrična sa pravom p u odnosu na pravu n. Neeuklidske prave p i p'' seku se u tački A'. Prave p' i $A'B''$ određuju jedan ugao. Kako je inverzija konformno preslikavanje to ugao pri tom preslikavanju ne menja svoju veličinu. Može se konstruisati simetrala a zatim normala u tački A' na toj simetrali. U odnosu na tu simetralu n' može se konstruisati tačka B' na p' simetrična tački A' tako što iz tačke B'' konstruišemo pravu upravnu na n' i u preseku sa p' dobijamo tačku B'.

Ostale aksiome podudarnosti se lako izvode. Neposredno se dokazuje da važi i Dedekindova aksioma neprekidnosti.

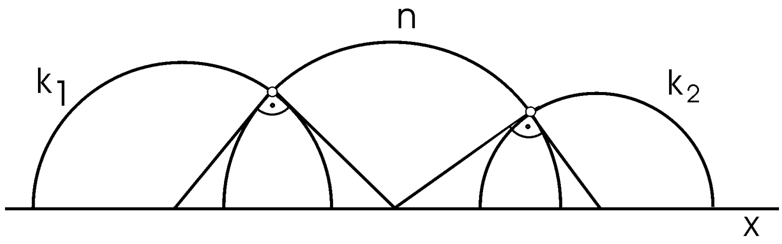
Na ovom modelu je bitno ustanoviti koja aksioma paralelnosti važi: Plejferova ili aksioma Lobačevskog. Ispostavlja se da važi aksioma Lobačevskog.



Slika 18.3.

Neka je a neeuklidska prava i A neeuklidska tačka van prave a. Tada postoje bar dve neeuklidske prave koje sadrže tačku A i sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Granične prave koje ne seku pravu a i sadrže tačku A (slika 18.3) su paralelne prave sa pravom a, jedna u jednom a druga u drugom smeru. Označimo ih sa p_1 i p_2.

Na taj način je ustanovljen *model planimetrije Lobačevskog.*



Slika 18.4.

Rešavajući zadatke u Euklidskoj geometriji možemo dobiti i rešenje odgovarajućeg problema u geometriji Lobačevskog, te probleme geometrije Lobačevskog svodimo preko modela na probleme Euklidske geometrije. Postavlja se problem ustanovljavanja jedinstvene zajedničke normale dveju hiperparalelnih pravih na modelu planimetrije Lobačevskog. U tom cilju konstruiše se krug (slika 18.4) sa centrom na apsoluti x upravan na datim polukrugovima. Taj krug biće rešenje postavljenog problema u planimetriji Lobačevskog u okviru Poenkareovog modela.

Za model stereometrije Lobačevskog (u Poenkareovom smislu) posmatrali bismo polusferu u Euklidskom otvorenom poluprostoru koja je dobijena iz sfere čiji centar pripada granici poluprostora. Granicu poluprostora, tj. odgovarajuću ravan nazivamo apsolutom. Pomenuta polusfera, kao i poluravan ortogonalna na apsoluti predstavljale bi model ravni u prostoru Lobačevskog. Posebno u svakoj ovakvoj ravni Lobačevskog realizovala bi se planimetrija Lobačevskog.

Literatura

[1] T. Anđelić, *Elementarna geometrija*, Tehnička knjiga, Beograd, 1965.

[2] K. Borsuk and W. Szmielew, *Fondations of Geometry*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1960.

[3] N. Čepinac, *Geometrija za više razrede gimnazije, Stereometrija*, Znanje, Beograd, 1951.

[4] Euklid, *Euklidovi elementi*, Prva knjiga, prevod A. Bilimović, Naučna knjiga, Beograd, 1949.

[5] Euklid, *Euklidovi elementi*, Druga knjiga, prevod A. Bilimović, Naučna knjiga, Beograd, 1950.

[6] A. I. Fetisov, *O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[7] H. W. Guggenheimer, *Plane geometry and its groups*, Holden-Day, San Francisko, 1967.

[8] D. Lopandić, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije sa rešenjima*, Prirodno-matematički fakultet u Beogradu, 1980.

[9] N. V. Jefimov, *Viša geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1948.

[10] N. V. Jefimov, *Viša geometrija*, peto izdanje, Nauka, Moskva, 1971.

[11] D.Hilbert, *Osnove geometrije*, Matematički institut SANU, Beograd, 1957.

[12] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Toronto-New York, 1967.

[13] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Grafiti i Matematički fakultet Beograd, 1994.

[14] S. Mintaković, *Aksiomatska izgradnja geometrije*, Školska knjiga, Zagreb, 1962.

[15] S. Mintaković, *Neeuklidska geometrija Lobačevskog*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[16] M. Prvanović, *Neeuklidske geometrije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1974.

[17] M.Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[18] Pucelj Ivan, *Neevklidične geometrije*, Ljubljana, 1969.

[19] M. Radojčić, *Elementarna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1961.

[20] R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.

Indeks Pojmova