Дискретне расподеле

Расподеле дискретних случајних променљивих називају се **дискретним расподелама**.

Бернулијева шема

- Експеримент понављамо n пута под истим условима.
- Понављања експеримента су међусобно независна.
- У сваком понављању експеримента може се или реализовати или не реализовати догађај A.
- Вероватноћа реализације догађаја A у сваком понављању експеримента је иста и износи p.

Биномна расподела

- Случајна промењива S_n представља број реализација догађаја A у n понављања експеримента.
- Случајна промењива S_n је дискретног типа, јер узима вредности из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
- Вероватноћа да ће се догађај A реализовати тачно k пута у n понављања експеримента износи

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ , \quad 0 \leq p \leq 1 \ ,$$

где је

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ , \quad n! = n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

За случајну променљиву S_n кажемо да има биномну расподелу са параметрима n и p и пишемо $S_n : \mathcal{B}(n, p)$.

Ако ставимо да је $p_k = P\{S_n = k\}$, тада случајна променљива S_n има закон расподеле облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}.$$

Пример

Вероватноћа да падне киша у току дана у месту НН износи 0,3. Под претпоставком да су временске прилике у различитим данима независне, одредити вероватноће да у три узастопна дана буде: а) тачно два кишна дана, б) не више од једног кишног дана, в) најмање два кишна дана, г) један или два кишна дана.

Решење

- Посматрају се три узастопна дана, тако да је $n = 3$.
- Означимо са S_3 случајну променљиву која представља број кишних дана у три узастопна дана.
- Вероватноћа да дан буде кишан је иста за сва три дана и износи $p = 0,3$.
- Случајна променљива S_3 има биномну расподелу $\mathcal{B}(3; 0,3)$.

Решење

Вероватноће су редом

$$
\begin{aligned}
p_0 &= P\{S_3 = 0\} = \binom{3}{0}(0,3)^0(0,7)^3 = 0,343,\\
p_1 &= P\{S_3 = 1\} = \binom{3}{1}(0,3)^1(0,7)^2 = 0,441,\\
p_2 &= P\{S_3 = 2\} = \binom{3}{2}(0,3)^2(0,7)^1 = 0,189,\\
p_3 &= P\{S_3 = 3\} = \binom{3}{3}(0,3)^3(0,7)^0 = 0,027.
\end{aligned}
$$

Решење

Случајна промењлива S_3 има закон расподеле

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,343 & 0,441 & 0,189 & 0,027 \end{pmatrix}.$$

а) Нека је A догађај "у три дана била су тачно два дана кишна". Тада је $P(A) = P\{S_3 = 2\} = 0,189$.
б) Нека је B догађај "у три дана није било више од једног кишног дана". Тада је

$$P(B) = P\{S_3 \leq 1\} = P\{S_3 = 0\} + P\{S_3 = 1\} = 0,343 + 0,441 = 0,784.$$

в) Нека је C догађај "у три дана била су најмање два кишна дана". Тада је

$$P(C) = P\{S_3 \geq 2\} = P\{S_3 = 2\} + P\{S_3 = 3\} = 0,189 + 0,027 = 0,216.$$

Решење

г) Нека је D догађај ”у три дана био је један или била су два кишна дана”.

$$P(D) = P\{S_3 = 1\} + P\{S_3 = 2\} = 0,441 + 0,189 = 0,63. \square$$

Напомена

Сложена израчунавања ако је n велико и p мало.

Пуасонова расподела

Теорема

Ако у Бернулијевој шеми са n понављања експеримента чији је исход догађај A или догађај A^c, вероватноћа догађаја A зависи од броја понављања експеримента, тј. ако је $P(A) = p_n$ и ако np_n конвергира ка $\lambda > 0$, кад $n \to \infty$, тада је вероватноћа реализације догађаја $\{S_n = j\}$ једнака

$$P\{S_n = j\} = \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\lambda}\ , \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

када $n \to \infty$, где је $e \approx 2,718$ основа природног логаритма.

За случајну промењливу S_n кажемо да има Пуасонову расподелу и пишемо $S_n : \mathcal{P}(\lambda)$.

Напомена

Апроксимација биномне расподеле Пуасоновом расподелом се врши ако је n велико, p мало и $np < 10$.

Примери примене Пуасонове расподеле су распоред метеорских кратера на површини Земље или Месеца, расподела броја деце које жена роди, расподела броја градова са преко 50 хиљада становника итд.

Пример

У једној великој серији артикала је 2% дефектних. Из серије се на случајан начин узима 100 артикала. Одредити вероватноће да међу извученим артиклима буде: а) тачно 2 дефектна, б) најмање два дефектна, в) највише 5 дефектних, г) мање од 6, а не мање од 2 дефектна.

Решење

Имамо да је $n = 100$.
Нека случајна промењива S_{100} представља број дефектних артикала. Како је $n = 100$, $p = 0,02$ и $np = 2 < 10$, то се уместо биномне расподеле користи Пуасонова расподела.
Тако S_{100} има $\mathcal{P}(2)$ расподелу и њен закон расподеле вероватноћа је одређен вероватноћама

$$P\{S_{100} = j\} = e^{-2} \cdot \frac{2^j}{j!},\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Решење

а) $P\{S_{100} = 2\} = e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} = 0.2707.$

б) $P\{S_{100} \geq 2\} = 1 - \sum_{i=0}^{1} P\{S_{100} = i\} = 0.5940.$

в) $P\{S_{100} \leq 5\} = \sum_{i=0}^{5} P\{S_{100} = i\} = 0.9834.$

г) $P\{2 \leq S_{100} < 6\} = \sum_{i=2}^{5} P\{S_{100} = i\} = 0.5774.$ $\square$

Униформна дискретна расподела

Нека случајна промењива X узима вредности из скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Кажемо да случајна промењива X има униформну дискретну расподелу на скупу $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ако се све вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, реализују са једнаким вероватноћама.

Закон расподеле случајне промењиве X која има униформну дискретну расподелу може се записати у облику

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Пример

Случајна променљива X има униформну дискретну расподелу на скупу $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Одредити вероватноће догађаја: а) $\{1 < X \leq 4\}$, б) $\{2 \leq X < 3\}$ и в) $\{X > 1\}$.

Решење

Случајна променљива X има униформну дискретну расподелу на скупу $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, што значи да је њен закон расподеле облика

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Вероватноће су редом једнаке:

а) $P\{1 < X \leq 4\} = P\{X \in \{2, 3, 4\}\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) $P\{2 \leq X < 3\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{6}$.

в) $P\{X > 1\} = 1 - P\{X = 1\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $\square$